Российский Национальный комитет
по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Российский фонд фундаментальных исследований
Южный федеральный университет
Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
Южный научный центр РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТРУДЫ XIV МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19 – 24 июня 2010 г.

II

Издательство ЮФУ
Ростов-на-Дону
2010

УДК 532.5
ББК 25.25
С 56

Редакторы: А.О. Ватульян, М.Ю. Жуков, А.В. Попов

Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Международной конференции, гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19 – 24 июня 2010 г. Т. 2. Ростов н/Д. Изд-во ЮФУ. 2010 г. – 334 с.

ISBN 978-5-9275-0789-4

Сборник содержит научные доклады, представленные на XIV Международную конференцию «Современные проблемы механики сплошной среды» (гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19 – 24 июня 2010 г.).

Основной целью конференции, приуроченной к 90-летию со дня рождения выдающегося российского механика, академика РАН Иосифа Израилевича Воровича, является обсуждение современных направлений и тенденций научных исследований в области математического моделирования применительно к современным задачам механики сплошной среды. В сборнике представлены результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, по устойчивости движений вязкой жидкости, аэрогидродинамике, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности, в механике контактных взаимодействий и теории оболочек, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и при их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

Программный комитет

Александров В. М., Аннин Б. Д., Баженов В. Г., Ватульян А. О., Гольдштейн Р. В., Горячева И. Г., Губайдуллин Д. А., Зубов Л. М., Ивлев Д. Д., Ильгамов М. А., Индейцев Д. А., Колесников В. И., Коссович Л. Ю., Кукуджанов В. Н., Куликовский А. Г., Липанов А. М., Ломакин Е. В., Любимов Г.А., Манжиров А. В., Матвеенко В. П., Новопашин М. Д., Панин В. Е., Победря Б. Е., Пухначев В. В., Радаев Ю. Н., Симонов И. В., Тарлаковский Д. В., Устинов Ю. А., Фомин В. М., Черный Г. Г.

Организационный комитет

Жуков М. Ю., Калинчук В. В., Карякин М. И., Наседкин А. В., Сафроненко В. Г., Чебаков М. И., Шевцов С. Н., Юдин А. С.

Оригинал-макет подготовлен в системе LaTeX Поповым А. В.
Статьи публикуются с файлов-оригиналов, представленных авторами в оргкомитет конференции.

ISBN 978-5-9275-0789-4

XIV Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19 – 24 июня 2010 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований

© НИИ механики и прикладной математики им. И.И. Воровича ЮФУ, 2010
© Издательство ЮФУ, 2010

Содержание

Абрамян А. К., Бессонов Н. М., Индейцев Д. А., Миранцев Л. В. Модель поведения жидкости в нано-размерных каналах 7

Айзикович С. М., Кренев Л. И., Трубчик И. С. Приближенное решение задачи об индентировании функционально-градиентного покрытия жестким круговым в плане штампом 12

Акопьян В. А., Кабельков А. Н., Шевцов С. Н., Черпаков А. В. К решению задачи идентификации повреждений в упругом стержне 17

Александров В. М., Костырева Л. А. Об одном интегральном уравнении, встречающемся в ряде задач механики контактных взаимодействий 21

Баничук Н. В., Барсук А. А., Макеев Е. В. Анализ устойчивости и оптимизация растягивыемых стержней 27

Батищев В. А. Эффект локализации спиральных волн вблизи оси кровеносного сосуда 32

Бондарчук А. А., Мещеряков К. И. Некоторые полуаналитические решения уравнений динамики вязкого газа и их применение в модельных задачах гидродинамики 37

Буйло С. И. Диагностика предразрушающего состояния материалов по инвариантным соотношениям параметров потока сопутствующей акустической эмиссии 42

Бунтин Д. А. Основные механизмы нелинейных взаимодействий в пограничном слое при гиперзвуковом обтекании конуса 46

Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Окороков Е. П., Павлова Л. Н. Исследование физико-механических свойств легких бетонов, содержащих техногенное сырье 51

Бычков А. А. Равновесное распределение компонент сплава SiGe в полупроводниковой пленке 55

Гиниятуллин Р. Р. Механические характеристики тонкостенных элементов, подверженных коррозионному износу при воздействии ультрафиолетового излучения 60

Головин Н. Н., Кувыркин Г. Н. Особенности контактного взаимодействия элементов составных термонагруженных конструкций 63

Голуб М. В., Бострём А. Пружинные граничные условия и моделирование распространения упругих волн в поврежденных слоистых композитах 68

Григоренко К. С., Матишов Д. Г., Соловьева А. А., Хартиев С. М. Сезонный мониторинг параметров внутренних волн в районах добычи и транспортировки углеводородов 73

Дерюгин Е. Е. Моделирование локализации деформации в поликристаллах методом элементов релаксации 78

Елаева М. С. Использование обобщенного метода годографа в исследовании математической модели электрофореза 83

Жигалин А. Г.. Термоупругие волны в телах микронных размеров 88

Журавлев Г. А. Взаимосвязи основных факторов контактных задач в машиностроении и их артефакты 93

Зайцева А. В. Устойчивость турбулентного слоя жидкости 98

Зеньковская С. М. Об осредненных уравнениях конвекции и некоторых вибрационных эффектах 103

Зиборов Е. Н., Напрасников В. В., Соловьев А. Н., Шевцов С. Н. К определению усталостной прочности армированных композитов в ANSYS WORKBENCH 108

Зимин Б. А., Бауэр С. М., Шелепин Ю. Е., Вовненко Н. В., Лахман К. О. Гидродинамическа модель движения внутриглазной жидкости, возникающего при движении глазного яблока 112

Зимин Б. А., Судьенков Ю. В., Вовненко Н. В. Дисперсионный анализ в слабо связанных системах динамической термоупругости 116

Зимин В. Н. Анализ динамики и прочности трансофрмируемых космических конструкций ферменного типа 119

Иваночкин П. Г., Иваночкина Т. А. Феноменологический подход к моделированию изнашивания при трении 124

Игумнов Л. А., Карелин И. С. Моделирование поверхностных волн на границе пороупругого полупространства 129

Кабельков А. Н., Казначеева О. К. Алгоритмы экспериментально-теоретического оценивания характеристик некоторых полимерных материалов 134

Казаков К. Е., Федотов И. А. Контактная задача для оснований с покрытиями и штампов со сложной формой основания 137

Калинина Т. И., Наседкин А. В. Фундаментальные решения в плоских и антиплоских задачах для электроупругих сред при подвижных осциллирующих источниках 142

Калоеров С. А., Петренко А. В. Электромагнитоупругое состояние бесконечной пластинки с трещинами вдоль одной прямой 147

Келлер И. Э., Кыласова Т. А. Поиск ограничений на нелинейно-вязкие определяющие соотношения, обеспечивающих устойчивый режим спиральной локализации деформации при кручении цилиндра . . . 152

Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет вторичных течений вязкой жидкости, возникающих вблизи пересечения бифуркаций рождения вихрей Тейлора и азимутальных волн, между проницаемыми цилиндрами 156

Коршун Е. С., Снопов А. И. Особенности течения вязкого газа в системе тонких щелей 161

Костин Г. В., Саурин В. В. Моделирование пространственных движений упругой балки на основе метода интегродифференциальных соотношений 165

Кравчук А. С., Нейттаанмяки П., Трубиенко О. О. О построении динамической модели нанотрибологии 170

Кравчук А. С., Победря Б. Е., Трубиенко О. О. Решение трехмерных задач нанотрибологии методом молекулярной динамики 174

Кузнецов С. И., Федотов И. А. Теоретические и экспериментальные исследования упругих свойств несжимаемых сред при конечных деформациях 179

Куракин Л. Г. Об устойчивости стационарного вращения правильного вихревого треугольника вне круговой области 184

Курбатова Н. В. Эффективные схемы конечно-элементной дискретизации 189

Левенштам В. Б. Предельный переход в обобщенном уравнении Навье–Стокса с высокочастотными слагаемыми 194

Локшина Л. Я., Костандов Ю. А., Васильев Л. М. Анализ предельного состояния пластины с начальной трещиной при одноосном сжатии . 197

Лукащик Е. П., Иванисова О. В., Колесникова Ю. Н. Устойчивость упругого профиля при движении в слое весомой жидкости 202

Лычев С. А. Конечные деформации растущего упругого шара 207

Лычева Т. Н. Вынужденные колебания растущих по толщине упругих пластин 212

Мелешко В. В., Папков С. О. Собственные формы колебаний упругих прямоугольных пластин со свободными краями 217

Морозов Н. Ф., Альтенбах Х., Еремеев В. А. Поверхностные эффекты в механике деформируемого твердого тела 222

Наседкина А. А. Моделирование пороупругого нелинейного многослойного пласта с трещиной при гидродинамическом воздействии 227

Новосядлый В. А., Прозоров О. А. Вибрационная конвекция Рэлея–Марангони при нагреве сверху 231

Островская И. В. Об устойчивости системы частиц в вершинах квадрата внутри круговой области 236

Панин В. Е., Дерюгин Е. Е., Кульков С. Н. Мезомеханика упрочнения материалов нанодисперсными включениями 240

Победря Б. Е. О вычислительной механике композитов 246

Пожарский Д. А., Чебаков М. И. Контактные давления и температуры в задаче о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения 249

Ревина С. В. Монотонная потеря устойчивости двумерных сдвиговых течений с нулевым средним 254

Роговой А. А. Конечные деформации в материалах с изменяемой структурой 259

Ротанова Т. А. Задача об одностороннем контакте двух пластин, одна из которых содержит жесткое включение 264

Солодовник М. Д., Буряк В. Г., Мушкаев Я. В. Аналитическая оценка бокового удара колеса локомотива о железнодорожный рельс 269

Степанова Л. В. Анализ напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины в материале со степенным определяющим законом 272

Суворова Г. Ю., Богомолов А. С. Динамическая смешанная задача для термоупругого слоя 277

Трепачев В. В. Длинные нелинейные волны на воде, вызванные гармоническими колебаниями вертикальной стенки 281

Трепачев В. В., Трепачева Г. Н. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца потоков жидкости, текущих под углом друг к другу над ровным дном 286

Тюриков Е. В. Обобщенная граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов 290

Углич П. С. О колебаниях поперечно-неоднородного слоя 294

Фам Т. Х. Изгиб нелинейно упругой кольцевой пластинки с дисклинациями 299

Швед О. Л. О хрупком разрушении материала при одноосном растяжении 304

Шелистов В. С., Демёхин Е. А. О поверхностной турбулентности в тонких плёнках жидкости 308

EL-Morabie K. M. Computational Methods for Calculating the Scattered Elastic Waves from Buried Object in two Layers: Anti-Plane Problem . 312

Юдин С. А., Юдин А. С. НДС замкнутой торопластинчатой оболочки вращения 317

Юрченко А. И., Леви М. О. Особенности распространения волн Гуляева–Блюштейна и Лява в слабо неоднородных слоистых и функционально градиентных пьезоэлектрических структурах 322

Якупов Н. М., Гиниятуллин Р. Р., Якупов С. Н. Коррозионный износ на деформированной поверхности 327

Якупов С. Н. К определению механических характеристик нанопокрытий 331

МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НАНО-РАЗМЕРНЫХ КАНАЛАХ

Абрамян А. К., Бессонов Н. М., Индейцев Д. А., Миранцев Л. В.

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Течение жидкости в микро- и нано-каналах представляет значительный интерес, как с точки зрения фундаментальной науки, так и для практических приложений [1, 2]. В связи с этим моделирование такого течения стало одним из наиболее быстро развивающихся направлений в гидродинамике. Актуальность такого моделирования также подкрепляется результатами многочисленных экспериментов, проведенных в течение последних двух десятилетий [3–6], которые выявили значительные отличия поведения жидкости в объемах с размерами 10 и менее молекулярных диаметров от предсказаний классических континуальных теорий. В этих экспериментах было обнаружено значительное увеличение эффективной вязкости жидкости в таких объемах по сравнению с ее макроскопическим значением. Классическая гидродинамика, не учитывающая атомарное (молекулярное) строение жидкости, не даёт адекватное описание течения жидкостей в нано-каналах с шириной 10 и менее молекулярных диаметров. Для описания такого течения в настоящей работе предложены новые уравнения, описывающие поведение жидкостей, учитывающие её молекулярное строение и результаты натурных и численных экспериментов. Численные эксперименты были выполнены с помощью компьютерного моделирования и методом молекулярной динамики (МД).

1. Предлагаемая модель

Для описания поведения жидкости в каналах имеющих высоту до 50 нм предлагаются следующие основные уравнения баланса импульса и баланса масс:

$$G\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + \mathrm{X}_{sf}\left(\dot{u}_s - v_f\right) \tag{1}$$

$$\mu\frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} = \rho_f \frac{\partial v_f}{\partial t} + \mathrm{X}_{fs}\left(v_f - \dot{u}_s\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho_f v_f\right) = \mathrm{X}_{fs} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho_s \dot{u}_s\right) = \mathrm{X}_{sf} \tag{4}$$

где G и μ эквивалентный модуль сдвига структурированной среды и эквивалентная вязкость образовывающейся «жидкости» соответственно, $\dot{u}_s$ и v_f — скорости твердых и жидких частиц, ρ_s и ρ_f — плотности твердых и жидких частиц, X_{sf} — скорость прибыли (убыли) жидких частиц в контрольной точке системы отсчета. Предполагается, что в выделенном контрольном объеме среды в каждый момент времени присутствует одна компонента сложной среды, что означает отсутствие

сил взаимодействия между ними непосредственно. Но, учитывая наличие границы двух сред и ее переменность, необходимо оговорить условия взаимодействия на границе. Вышеуказанным уравнениям соответствует следующий сценарий событий. В состоянии покоя, без внешне приложенной нагрузки, происходит упорядочение (поляризация, механизм которой описан в [1]) структурированной смазочной жидкости. Данное явление носит неоднородный характер по толщине слоя, а именно: частицы жидкости, находящиеся в центральной части слоя испытывают значительно меньшее влияние поляризационных сил, чем частицы на границе с поверхностями. МД моделирование подтверждает данное утверждение. Взаимодействия между атомами жидкости, а также между атомами жидкости и атомами стенок, моделировалось с помощью парного потенциала Леннард–Джонса. Таким образом, считаем, что с момента начала движения верхней поверхности сила сопротивления со стороны тонкого слоя, в основном, определяется реакцией частиц среды на разупорядочение. При достаточно малых смещениях этот эффект носит линейный характер, и движение частиц среды можно промоделировать как поведение тонкого слоя в условиях чистого сдвига, а значит допустимо введение некоторого эффективного модуля сдвига. Данный параметр может быть найден с использованием экспериментальных результатов. При достижении определенного смещения поверхности частицы в центре слоя первыми испытывают на себе явление разупорядочения. Последний эффект представим себе, как явление «разрушения» структуры. Вводим следующий критерий разрушения на сдвиг: разрушение происходит в том случае, если удельная мощность, сообщаемая структуре, достигает критического значения P_k

$$\tau(y) \cdot v = P_k, \tag{5}$$

где $\tau(y) = \tau^0 H^2/4y(H-y)$. Определение неизвестного параметра вязкости, с учетом выбранной нами модели, необходимо провести с привлечением экспериментальных данных или методом МД. Следует отметить важность появления в уравнениях баланса массы той и другой среды источниковых членов, которые определяют скорость перехода твердоподобных частиц в жидкоподобные. Они определяют и толщину образующегося слоя, и его эволюцию. В результате образования в некоторой части слоя жидкоподобной среды сила сопротивления уменьшается, и следствием этого является процесс восстановления структуры за счет постоянно действующих сил поляризации границ поверхностей. Процесс разрушения и восстановления может носить либо регулярный, либо нерегулярный характер. Предложенная модель поведения жидкости была проверена для двух случаев: течение Куэтта и течение Пуазейля. Для течения Куэтта были проведены расчеты силы сопротивления при увеличивающейся скорости движения пластины. На их основе была получена зависимость силы сопротивления от времени, приведенная на рис. 1. Результаты расчетов были сравнены с результатами экспериментов, приведенных в [1–3] и с результатами МД моделирования. В итоге было получено достаточно близкое их совпадение. На рис. 1 регулярный режим, который характеризовался периодичностью во времени величины силы сопротивления. Как видно из графиков рис. 1 величина силы сопротивления уменьшается с увеличением скорости, что наблюдалось и в экспериментах, приведенных в работах [1–3]. На рис. 1

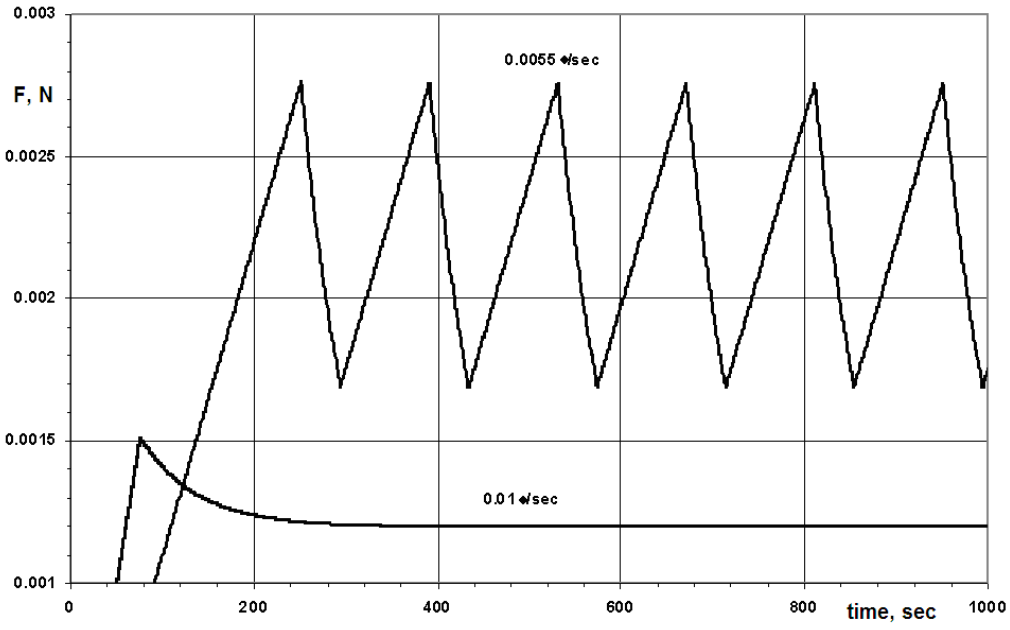


Рис. 1. Зависимость силы сопротивления от времени.

также приведена зависимость силы для случая гладкого скольжения, когда сила сопротивления не изменялась с течением времени. Похожие результаты дает и МД моделирование. В задаче течения Пуазейля в канал подается так называемая молекулярная жидкость, которая взаимодействует со структурой. Эти сила взаимодействия зависит главным образом от плотности упорядоченной структуры, а значит и от так называемого проходного сечения (расстояния между частицами упорядоченной среды). Чем больше плотность частиц, тем меньше проходное сечение, через которое могут проходить поступающие частицы, а значит и сила взаимодействия двух сред наибольшая. Также данное взаимодействие двух сред, подобно силе вязкого трения, зависит от разности скоростей их частиц: она тем больше, чем выше скорость движения одной компоненты относительно другой. В данном случае предполагается, что эта зависимость носит линейный характер. Очевидно, что при движении поступающих на входе частиц молекулярной жидкости со скоростью большей некоторого значения жидкость имеет тенденцию свободно проходить через неподвижную структурированную среду с возможностью отрыва частиц последней. Это означает, что если давление на входе достаточное, то в местах существования структуры жидкая среда способна «разрушать» её. В обратном случае, если давления недостаточно, то есть скорости подаваемых частиц малы, дипольный момент жидких частиц успевает сориентироваться в направлении дипольного момента упорядоченной среды. Таким образом, силы поляризации стремятся выстроить частицы жидкости в определенном направлении, что в итоге приводит к увеличению плотности структуры, и уменьшению расхода непрерывно поступающей жидкости. При медленности процесса поступления на входе частиц, структуризация продолжится до тех пор, пока не произойдет полное оседание жидких частиц, то есть запирание канала, при котором прохож-

дение жидкости будет уже невозможно. Следует отметить важность появления в уравнениях баланса массы той и другой среды источниковых членов, которые определяют скорость перехода жидких частиц в твердоподобные и наоборот. Предположим, что осаждение должно происходить со скоростью, пропорциональной количеству вещества в жидкости, а отрыв — со скоростью, пропорциональной количеству твердоподобной среды. Очевидно, что в результате уменьшения (осаждения) числа частиц жидкости происходит увеличение твердоподобных и подобным образом осуществляется обратный переход. Ввиду образования при некотором режиме давления и скоростей упорядоченной структуры, расход в каждом сечении канала уменьшается с течением времени. Подчеркнем, что существует такой режим, при котором будет происходить постепенный отрыв структурированных частиц в канале, за исключением граничных слоев, где силы поляризации имеют наиболее выраженный характер. На рис. 2 приведен график зависимости расхода от времени, соответствующий режиму запирания канала.

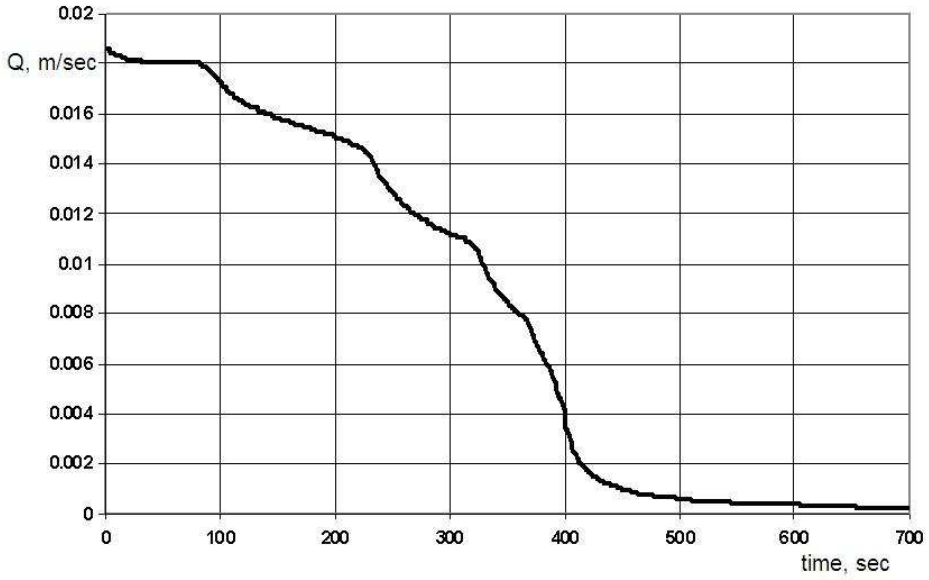


Рис. 2. Зависимость расхода от времени.

2. Заключение

Предложена математическая модель течения жидкости в плоском наноканале. Полученные с помощью предложенной модели величины сил сопротивления, действующих на стенки при расстояниях между ними меньше 10 нм, хорошо совпадают с результатами экспериментов и МД моделирования. Предложенная модель позволяет определять расход жидкости в нано-канале при реализации в нем течения типа теченя Пуазейля.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Drummond C. and Israelachvili J.* Dynamic phase transitions in confined lubricant fluids under shear // Physical Review E. (March 2001).Volume 63. p. 041506

[2] *Israelachvili J., McGuiggan G. E. E., Gee M., Homoda A., Robbins M., Thomson P.* Liquid dynamics in molecularly thin films // J. Phys. Condens. Matter 1990, 2, SA89–SA98

[3] *Gourdon D. and Israelachvili J.* Transitions between smooth and complex stick slip sliding of surfaces // Physical Review E. (August 2003). Volume 68. p. 021602.

[4] *Thomson P. A. and Robbins M. O.* Shear flow near solids: Epitaxial order and flow boundary conditions // Phys. Rev. A. 1990. 41. N12. pp. 6830–6837

[5] *Allen M. P. and Tildesly D. J.* Computer Simulations of Liquids. Oxford, Clarendon Press. 1989. p. 408.

[6] *Дерягин Б.В., Железный Б.В., Зорин З.М., Соболев В.Д., Чураев Н.В.* Свойства жидкостей в тонких кварцевых капиллярах // В кн.: Поверхностные силы в тонких пленках и устойчивость коллоидов. М., «Наука», 1974, С. 90–94.

Abramyan A. K., Bessonov N. M., Indeitsev D. A., Mirantsev L. V. *Model of fluid behavior in nano-sized channels*. New equations that describe the behavior of fluids in nanochannels and take into account the molecular structure of the fluid and results of real and numerical experiments are presented. The Couette and Poiseuille flows are considered. The results obtained show the possibility of describing structural transformations in thin layers by the continuum mechanics methods. New degrees of freedom of the material are introduced via the second continuum that makes up for the role of the forming new phase of state. In the models considered the properties of the new phase are determined by the effect of rigid boundaries with a different structure.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИНДЕНТИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ПОКРЫТИЯ ЖЕСТКИМ КРУГОВЫМ В ПЛАНЕ ШТАМПОМ

Айзикович С. М., Кренев Л. И., Трубчик И. С.
Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Построено приближенное решение задача о внедрении жесткого кругового в плане штампа в функционально-градиентное покрытие. Получены аналитические формулы, позволяющие определить простые выражения для описания распределения контактного давления и зависимости осадки штампа от величины приложенной к нему силы. Эти формулы являются асимптотически точными при больших и малых значениях безразмерного геометрического параметра задачи.

1. Постановка задачи о вдавливании штампа с плоской подошвой в функционально-градиентное покрытие

Недеформируемый круглый штамп вдавливается в верхнюю грань Г упругого неоднородного полупространства силой P. С полупространством связана цилиндрическая система координат r, φ, z. Силы трения между штампом и полупространством предполагаются отсутствующими. Вне штампа полупространство не загружено. Штамп представляет осесимметричное тело с поперечным сечением $\Omega(r \le a)$ и поверхностью основания $z = \psi(r)$.

Коэффициенты Ламе Λ и M полупространства с глубиной изменяются по закону:

$$\begin{array}{ll} 1) & \Lambda = \Lambda_0(z),\ \ \mathrm{M} = \mathrm{M}_0(z), \quad -H \le z \le 0 \\ 2) & \Lambda = \Lambda_1 = \Lambda_0(-H),\ \ \mathrm{M} = \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_0(-H), \quad -\infty < z < -H \end{array}$$

Под действием центрально приложенной силы P штамп переместиться в направлении оси z на величину δ. Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид:

$$z = 0,\ \ \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a \\ w = -\delta(r) = -\left(\delta - \psi(r)\right), & r \le a \end{cases}$$

Предполагаем, что на границе изменения закона неоднородности имеют место условия сопряжения:

$$z = -H, \quad \begin{cases} \tau_{zr}^C = \tau_{zr}^S,\ \ \sigma_z^C = \sigma_z^S, & r > a \\ w^C = w^S,\ \ u^C = u^S, & r \le a \end{cases}$$

При $(r;\ -z) \to \infty$ напряжения в полупространстве исчезают. Требуется определить перемещение штампа и распределение контактных нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_z^C\,|_{z=0} = -p(r),\ \ r \le a$$

2. Приближенное решение задачи о вдавливании штампа с плоской подошвой в функционально-градиентное покрытие

Записывая уравнения равновесия с учетом соотношений Коши и закона Гука, получим систему дифференциальных уравнений в частных производных со смешанными граничными условиями в форме Ламе. Используя преобразование Ханкеля и метод моделирующих функций, можно свести ее решение к решению эквивалентного парного интегрального уравнения [1].

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty P(\gamma)L(\lambda\gamma)J_0(r\gamma)d\gamma = \Theta_0 f(r), \quad r \le 1 \\ \displaystyle\int_0^\infty P(\gamma)J_0(r\gamma)\gamma d\gamma = 0, \quad r > 1 \end{cases} \tag{1}$$

С помощью операторов

$$U_1^t\varphi(r) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{t^2-r^2}}; \;\; U_1^t J_0(r\gamma) = \cos t\gamma$$
$$U_2^t\varphi(r) = \int_0^\infty \frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{r^2-t^2}}; \;\; U_2^t J_0(r\gamma) = \gamma^{-1}\cos t\gamma$$

представим (1) в виде

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty P(\gamma)L(\lambda\gamma)\cos(t\gamma)d\gamma = g(t), \quad t \le 1 \\ \displaystyle\int_0^\infty P(\gamma)\cos(t\gamma)d\gamma = 0, \quad t > 1 \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $g(t) = \Theta_0 U_1^t f(r), \;\; (U_1^t 1 = \pi/2)$

Пусть $L(u)$ имеет вид

$$L(\lambda\gamma) = \frac{\gamma^2 + A^2\lambda^{-2}}{\gamma^2 + B^2\lambda^{-2}}$$

Тогда, учитывая, что при $\varepsilon \to 0, \;\; J_0(r\varepsilon) \to 1$, уравнение (1) для случая, соответствующего плоскому штампу, можно переписать:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Theta_0\delta}\displaystyle\int_0^\infty P_\varepsilon(\gamma)\frac{\gamma^2 + A^2\lambda^{-2}}{\gamma^2 + B^2\lambda^{-2}}\cos t\gamma \; d\gamma = \cos t\varepsilon, \quad t \le 1 \\ \displaystyle\int_0^\infty P_\varepsilon(\gamma)\cos t\gamma \; d\gamma = 0, \quad t > 1 \end{cases} \tag{3}$$

Введем обозначение

$$p(t) = \int_0^\infty P(\gamma)\cos t\gamma \; d\gamma$$

Из уравнения (3) с учетом четности $p(t)$ получим:

$$p(t) = C_\varepsilon ch A\lambda^{-1}t + \; c_1\frac{B^2\lambda^{-2} + \varepsilon^2}{A^2\lambda^{-2} + \varepsilon^2}\cos t\varepsilon, \;\; c_1 = \Theta_0\delta \tag{4}$$

Используя (4), выражение (3) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \int_0^\infty P_\varepsilon(\gamma)\dfrac{\gamma^2+A^2\lambda^{-2}}{\gamma^2+B^2\lambda^{-2}}\cos t\gamma\, d\gamma = C_\varepsilon chA\lambda^{-1}t + \ c_1\dfrac{B^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2}{A^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2}\cos t\varepsilon, \ \ t\le 1 \\ \int_0^\infty P_\delta(\gamma)\cos t\gamma\, d\gamma = 0, \ \ t>1 \end{cases}$$

Обращая преобразование Фурье, имеем:

$$P_\varepsilon(u) = c_1\frac{2}{\pi}\frac{B^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2}{A^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2}\frac{u\sin u\cos\varepsilon-\varepsilon\sin\varepsilon\cos u}{u^2-\varepsilon^2}+ \\ + C_\varepsilon\frac{2}{\pi}\frac{u\sin uchA\lambda^{-1}+A\lambda^{-1}\cos ushA\lambda^{-1}}{u^2+A^2\lambda^{-2}}$$

Постоянную C_ε определим из условия, что $P_\varepsilon(u)$ должно удовлетворять исходному уравнению (1), получим:

$$C_\varepsilon\frac{B\lambda^{-1}chA\lambda^{-1}+A\lambda^{-1}shA\lambda^{-1}}{B^2\lambda^{-2}-A^2\lambda^{-2}} + c_1\frac{B\lambda^{-1}\cos\varepsilon-\varepsilon\sin\varepsilon}{A^2\lambda^{-2}+\varepsilon^2} = 0$$

Формулу для напряжений

$$p(r) = \int_0^\infty P_\varepsilon(u)uJ_0(ur)du$$

приведем к более удобному виду, используя равенство Парсеваля:

$$p(r) = \lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(r) = \frac{2\Theta_0\delta}{\pi}\left\{\frac{L^{-1}(0)}{\sqrt{1-r^2}} + \ C_0\left[\frac{AhA\lambda^{-1}}{\sqrt{1-r^2}} - A\lambda^{-1}\int_r^1\frac{shA\lambda^{-1}tdt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]\right\}, \quad (5)$$

$$C_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon/C_1$$

Связь между приложенной силой и осадкой штампа имеет вид:

$$P = \pi a\Theta_0\left\{L^{-1}(0) + \ C_0A^{-1}\lambda shA\lambda^{-1}\right\}\delta$$

Для численной аппроксимации $L(\gamma)$, $\gamma = \alpha\lambda$ дробно-рациональным выражением специального вида применим следующий алгоритм.

Преобразуем функцию $L(\gamma)$ с помощью преобразования $u = \gamma^2/(\gamma^2+C^2)$ с интервала $(0,\infty)$ на отрезок $(0,1)$ ($\gamma = C\sqrt{u(u-1)^{-1}}$). Здесь C положительная константа, значение которой выбирается так, чтобы оптимизировать аппроксимацию функции $L(\gamma)$.

Аппроксимируем функции $\sqrt{L(\gamma)}$ и $\sqrt{L^{-1}(\gamma)}$ на отрезке $(0,1)$ полиномами Бернштейна N-го порядка

$$\sqrt{L_N(\gamma)} = \sum_{i=0}^N a_iu^i, \ \sqrt{L_N^{-1}(\gamma)} = \sum_{i=0}^N b_iu^i$$

$$L_N(\gamma) = \frac{\sqrt{L_N(\gamma)}}{\sqrt{L_N^{-1}(\gamma)}} = (\sum_{i=0}^N a_i^*\gamma^{2i})(\sum_{i=0}^N b_i^*\gamma^{2i})^{-1}$$

где коэффициенты a_i^*, b_i^* определяются после замены переменной $u = \gamma^2/(\gamma^2 + C^2)$.

После определения корней числителя и знаменателя получаем приближенное значение трансформанты ядра исходного парного интегрального уравнения (1)

$$L(\lambda\gamma) \approx L_N(\lambda\gamma) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\lambda^2\gamma^2 + A_i^2}{\lambda^2\gamma^2 + B_i^2}$$

Величину ошибки аппроксимации определим как максимум разности точного и приближенного значения на всей области определения отнесенный к величине точного значения. Минимизировать значение относительной ошибки можно подбором оптимального значения параметра отображения C.

В случае монотонного изменения модуля Юнга в приповерхностном слое для некоторых простых законов его изменения удается построить хорошую аппроксимацию при $N = 1$. Используя такую аппроксимацию $L(\gamma)$, коэффициент C_0 можно выразить через $L(0)$и $A(L(0))$.

$$C_0 = \frac{1 - B^2/A^2}{chA\lambda^{-1} + (A/B)shA\lambda^{-1}} = \frac{1 - L(0)^{-1}}{chA\lambda^{-1} + \sqrt{L(0)}shA\lambda^{-1}}$$

Рассмотрим влияние параметров неоднородности $L(0)$ и λ на величину контактного давления в центре штампа с плоской подошвой.

$$p(0) = \frac{2\Theta_0(0)\delta}{\pi}\left(L^{-1}(0) + \frac{1 - L(0)^{-1}}{chA\lambda^{-1} + \sqrt{L(0)}shA\lambda^{-1}}\right) \tag{6}$$

Анализируя выражение (6) можно отметить, что значение знаменателя второго слагаемого не меньше единицы, поэтому$p(0) < 0$ при $0 \le \lambda < \infty$ и отсутствует отрыв штампа от слоя.

Кроме того, мы видим, что при большой толщине слоя величина контактного давления в центре штампа соответствует его величине для однородного полупространства, упругие характеристики которого совпадают с характеристиками слоя, а в случае малой толщины слоя величина контактного давления в центре штампа соответствует его величине для подстилающего полупространства.

$$p(0) = \frac{2\Theta_0\delta}{\pi},\ \lambda^{-1} = 0;\ p(0) = \frac{2\Theta_0\delta}{\pi}L^{-1}(0),\ \lambda = 0.$$

Выражение для определения силы, действующей на штамп, имеет вид

$$P = \pi a\Theta_0\left\{L^{-1}(0) + \frac{(1 - L(0)^{-1})A^{-1}\lambda shA\lambda^{-1}}{chA\lambda^{-1} + \sqrt{L(0)}shA\lambda^{-1}}\right\}\delta$$

Рассмотрим четыре случая монотонного изменения значения модуля Юнга по глубине. Коэффициент Пуассона будем считать константой $\nu = 1/6$.

$$E(\bar{z}) = \begin{cases} E_0 f_n(\bar{z}), & -1 \le \bar{z} \le 0, \\ E_0, & \bar{z} < -1, \end{cases} \qquad n = 1, \ldots, 4; \quad \bar{z} = \frac{z}{H}$$

$$f_1(\bar{z}) = R_E, \quad f_2(\bar{z}) = R_E + (R_E - 1)\bar{z},$$
$$f_3(\bar{z}) = R_E - (R_E - 1)z^2,$$
$$f_4(\bar{z}) = R_E - (R_E - 1)\sqrt{-z} \qquad 1.2 \leq \mathrm{R_E} \leq 8$$

В результате численных экспериментов найдена зависимость значения коэффициента A^2 от отношения модуля Юнга на поверхности к его значению в подстилающем однородном полупространстве в широком диапазоне изменения параметра $1.2 \leqslant R_E \leqslant 8$.

$$A^2 = \frac{a + bR_E}{1 + cR_E}$$

Значения коэффициентов a, b, c для всех четырех законов изменения модуля Юнга по глубине приведены в таблице 1.

N	a	b	c
1	0.2421	-0.05119	0.9645
2	0.03248	3.53168	0.55655
3	0.01401	9.84631	0.6592
4	0.03073	1.44166	0.51483

Таблица 1. Коэффициенты рациональной аппроксимации A^2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А. В., Кренев Л. И., Трубчик И. С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.:Физматлит, 2006. 240 с.

Aizikovich S. M., Krenev L. I., Trubchik I. S. *The approached decision of a problem about indentation is functional-gradient coverings a rigid circular stamp in the plan.* The approached decision a problem about introduction rigid circular in respect of a stamp in functional-gradient a covering is constructed. The analytical formulas are received, allowing to define simple expressions for the description of distribution of contact pressure and dependence deposits of a stamp from size of the force applied to it. These formulas are asymptotically exact at the big and small values of dimensionless geometrical parameter of a problem.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОВРЕЖДЕНИЙ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Акопьян В. А.[*], **Кабельков А. Н.**[**], **Шевцов С. Н.**[*,***], **Черпаков А. В.**[*]

[*] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*
[**] *Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)*
[***] *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

В настоящей работе приведены результаты дополнительных исследований идентификации повреждения в упругом стержне на базе полученного ранее авторами аналитического решения.

Для более детального анализа полученной ранее [1] корреляции между параметрами собственных частот и форм различных мод колебаний стержня и местоположением и глубиной надреза (повреждения) был проведен модальный анализ параметров колебаний в стержне с повреждением. Для первых четырех собственных частот были получены зависимости $\bar{\omega}_i\left(\bar{L}_c\right)$, где $\bar{\omega}_i$ — значение собственных частот, $\bar{L}_c = L_c/L$, L — длина стержня, L_c- расстояние надреза (повреждение) от заделки.

Результаты расчетов представлены на графиках зависимостей приведенных собственных частот колебаний $\bar{\omega}_i^*\left(\bar{L}_c\right) = \omega_i^*\left(\bar{L}_c\right)/\omega_i^0$ (рис. 1), где ω_i^0 — собственные частоты неповрежденной балки.

Анализ этих зависимостей $\bar{w}_i(\bar{L}_c)$ для 4х собственных частот (рис. 1) показал следующее. Исследованные собственные частоты колебаний сложным образом зависят от местоположения упругого элемента и его коэффициента жесткости K_t. В частности, в одних интервалах местоположения упругого элемента значения собственных частот падают при уменьшении коэффициента жесткости K_t этого элемента. В ряде других точек местоположения упругого элемента жесткость упругого элемента не влияет на значения собственных частот. Кроме того, из характера частотных зависимостей (рис. 1) видно, что местоположение упругого элемента $\bar{L}_c$ по разному влияет на различные собственные частоты. Для количественной оценки этой особенности графики этих зависимостей были обработаны. Результаты этой обработки приведены в таблице 1.

Примечание: уменьшение собственных частот определено относительно исходного значения соответствующей собственной частоты неповрежденного стержня (на рис. 1 показано двойной линией)

Эти данные позволили выявить ряд особенностей в характере частотных зависимостей $\bar{w}_i(\bar{L}_c)$:

- наибольшее падение собственных частот колебаний имеет место для трех обособленных интервалов разброса местоположения упругого элемента: первого, достаточно узкого ($\bar{L}_c$=0.20..0.31) и двух широких ($\bar{L}_c$=0.50-0.77, $\bar{L}_c$=0.73..0.95), причем в узком интервале первая собственная частота падает на значительную

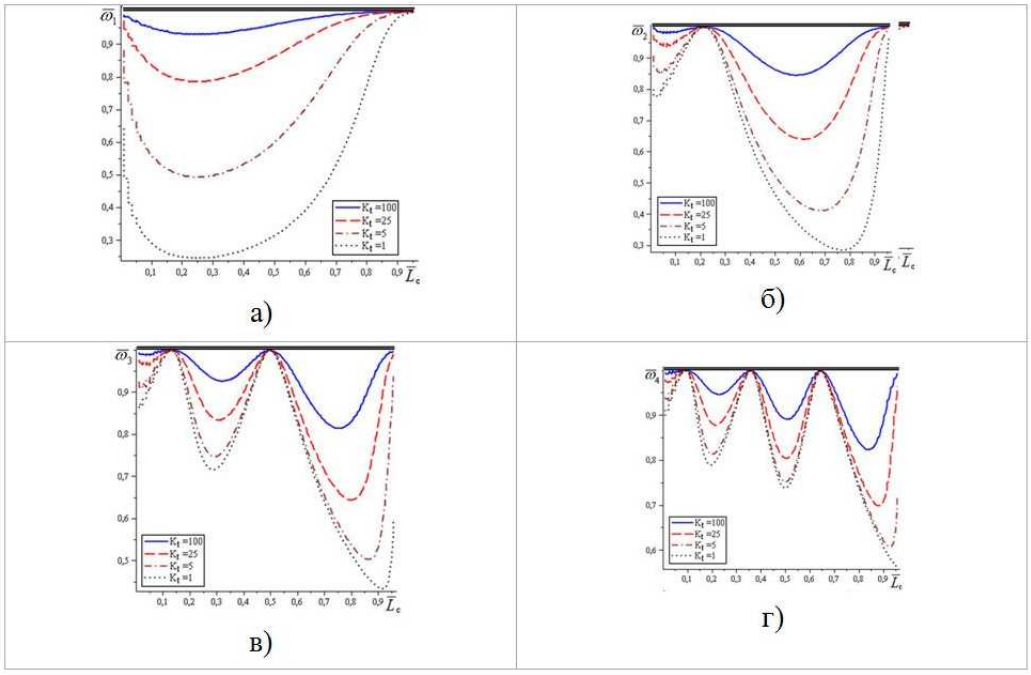


Рис. 1. Зависимость относительного изменения собственных частот $\bar{w}_i^*$ изгибных колебаний балки от локации $\bar{L}_c$ и коэффициента жесткости K_t упругого элемента: а), б), в), г) — соответственно для 1-й, 2-й, 3-й, 4-й собственных частот.

№ собственной частоты	Границы интервала местоположения упругого элемента $\bar{L}_c$ (величина относительного уменьшения собственной частоты в соответствующем интервале)			
1		0,24-0,25/ $(0.76\bar{w}_1)$		
2	0,02-0,06/ $(0.2\bar{w}_2)$		0,57-0,77/ $(0.72\bar{w}_2)$	
3	0-0,05/ $(0.15\bar{w}_3)$	0,28-0,31/ $(0.29\bar{w}_3)$		0,73-0,92/ $(0.57\bar{w}_3)$
4	0-0,03/ $(0.10\bar{w}_4)$	0,20-0,23/ $(0.22\bar{w}_4)$	0,5/ $(0.26\bar{w}_4)$	0,81-0,95/ $(0,45\bar{w}_4)$

Таблица 1. Местоположение упругого элемента при наибольшем изменении частоты для различных собственных частот.

величину $(0.76\ \bar{w}_1)$, а 3-я и 4-я уменьшаются на 0,29 $\bar{w}_3$ и 0.17 $\bar{w}_4$ соответственно. В первом широком интервале наблюдается падение (в меньшей степени) 2й и 4й собственных частот на 0,55 $\bar{w}_2$ и 0,14 $\bar{w}_4$ соответственно. Во 2-м широком интервале разброса ($\bar{L}_c''$=0,73..0,95) значения 1-й и 2-й собственных частот не меняются, в то время как частоты 3-й и 4-й падают до (0,45-0,57) $\bar{w}_i$.

- кроме упомянутых выше интервалов местоположения упругого элемента вблизи защемления стержня ($\bar{L}_c$ = 0,02..0,05) имеет место небольшое падение (0,1..0,2 $\bar{w}_i$) всех четырех собственных частот. Падение до (0,2 $\bar{w}_i$) значений соб-

ственных частот при увеличении K_t для случая расположения упругого элемента вблизи заделки объяснимо: чем меньше жесткость балки тем амплитуда колебаний растет и резонансная частота уменьшается.

Таким образом, из обработанных данных следует, что наиболее чувствительными к местоположению упругого элемента (МУЭ) (т. е. повреждения) являются 1-я, 3-я и 4-я моды колебаний. Это следует из того, что в первом узком интервале падение 1-й собственной частоты достигает $0.76\bar{w}_1$ (относительно частоты стержня без повреждения, для которого коэффициент упругости $K_t \geq 300$. В этом же интервале МУЭ 3я и 4я собственные частоты мод колебаний уменьшаются на 0.29 $\bar{w}_3$ и $0.22\bar{w}_4$ соответственно. В отличие от этого во 2-м интервале МУЭ ($\bar{L}_c = 0.73 - 0.81$) частоты 3-й и 4-й мод колебаний падают в два раза больше: $0.57\bar{w}_3$ и $0.45\bar{w}_4$, а частоты 1-й и 2-й мод — не меняются. Отметим также, что частоты 2-й моды колебаний в узком интервале МУЭ также не меняется, из чего следует, что наиболее чувствительными к МУЭ (а значит местоположению повреждения) являются 1-я, 3-я и 4-я моды колебаний.

Для выяснения причины различного характера зависимостей $\bar{w}_i(\bar{L}_c)$ для 2-й собственной частоты от таких же зависимостей для большинства других собственных частот был проведен анализ форм колебаний для всех 4-х собственных частот этой модели (рис. 2).

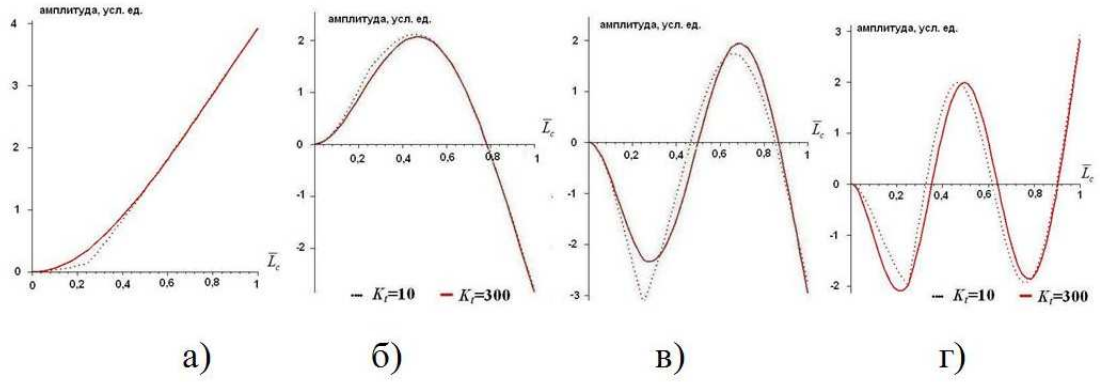


Рис. 2. Формы различных мод колебания стержня с упругим элементом с коэффициентом жесткости $Kt = 300$ (условно бездефектный, изображен сплошной линией) и $Kt = 10$ (поврежденный, изображен точками). Местоположение упругого элемента $\bar{L}_c = 0.25$. а) первая ($w_1 = 105.28$ (Kt=300); $w_1^* = 67.7$ ($Kt = 10$)); б) вторая ($w_2 = 676.1$ ($Kt = 300$); $w_2^* = 667.5$ ($Kt = 10$)); в) третья ($w_3 = 1857$ ($Kt = 300$); $w_3^* = 1531.9$ ($Kt = 10$)); г) четвертая ($w_4 = 3635$ ($Kt = 300$); $w_4^* = 3213$ ($Kt = 10$)).

Сопоставление интервалов, в которых наблюдается наибольшее изменение собственных частот (табл. 1) с местоположением пучностей на соответствующих частотах приведено в таблице 2.

Анализ форм колебаний (рис. 2) показал, что пучность колебаний у 2-й собственной частоты расположена в точке $\bar{L}_{c(2)}$=0.48, а у 3-й — при $\bar{L}'_{c(3)} = 0.28$ и $\bar{L}''_{c(3)} = 0.7$. У 4-й собственной частоты пучности расположены при $\bar{L}'_{c(4)} = 0.22$, $\bar{L}''_{c(4)} = 0.5$, $\bar{L}'''_{c(4)} = 0.78$.

№ собственной частоты	Границы интервала местоположения упругого элемента / (величина относительного уменьшения значений собственных частот $\bar{w}_i$ в первом узком интервале)	Расположение пучностей вдоль длины стержня $\bar{L}_c^{(k)}$
3	0.28-0.31/(0.71-0.92)	0.28; 0.7
4	0.20-0.23/ (0)	0.22; 0.5; 0.8

Таблица 2. Интервалы местоположения упругого элемента при наибольшем изменении частоты и соответствующих точек пучности при прогибе балки.

Другая особенность — наличие изломов на кривых форм колебаний именно в интервале МУЭ $\bar{L}_c$ =0.20-0.31, отчетливо наблюдаемая на 1, 2, 4 модах колебаний. На формах колебаний стержня без повреждений таких изломов нет (показаны сплошной линией кривые форм колебаний на рис. 2, а, б, г).

Совпадение интервала МУЭ, в котором наблюдается существенное падение сразу трех собственных частот 1, 3 и 4 мод колебаний, и имеют место изломы на кривых графиков форм колебаний дает основание для предположения о том, что максимальное падение собственных частот является признаком идентификации местоположения повреждения в стержне.

Это подтверждается также тем, что в этом же первом узком МУЭ наблюдается максимальное падение сразу трех собственных частот (см. табл. 1).

Таким образом, значения собственных частот выявленных мод колебаний могут быть положены в основу методики для определения местоположения повреждений в стержне.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н. Соловьеву А. Н. за неоценимую помощь в интерпретации полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №10-08-00093а, 10-08-13300-РТ.ОМИ)

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Акопьян В. А., Соловьев А. Н., Черпаков А. В.* Идентификация поврежденности элемента стержневой конструкции // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 12–15 октября 2009 г. Т. II. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. С. 16–20.

Akopyan V. A., Kabelkov A. N., Shevtsov S. N., Cherpakov A. V. *On solution of damage identification in an elastic beam.* This paper the results of additional studies identification of damage in an elastic rod on the basis of the obtained by the authors of the analytical solutions are presented.

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, ВСТРЕЧАЮЩЕМСЯ В РЯДЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Александров В. М.[*], **Костырева Л. А.**[**]
[*]*Институт проблем механики РАН, Москва*
[**]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Изучается типичное интегральное уравнение (ИУ), встричающееся в ряде задач механики контактных взаимодействий.

1. Интегральное уравнение. Рассмотрим ИУ перого рода

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1}$$

Здесь λ характерный параметр задачи, а нерегулярное ядро $k(t)$ имеет вид

$$k(t) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos(ut)\, du \tag{2}$$

где функция $L(u)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} L(u) = 1 + O(\mathrm{e}^{-2u}) \quad (u \to \infty) \\ L(u) = Au^3 + O(u^5) \quad (u \to 0,\ A = \mathrm{const}) \end{gathered} \tag{3}$$

Конкретное значение A определяется решаемой задачей.

2. Решение при больших значениях параметра λ. Заметим, что ядро (2) можно представить в виде [1]

$$k(t) = -\ln|t| - F(t) \tag{4}$$

$$F(t) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{[1 - L(u)]\cos(ut) - \mathrm{e}^{-u}}{u}\, du \tag{5}$$

где функция (5) в силу первой оценки (3) непрерывна со всеми производными при $|t| \leqslant R < \infty$.

На основании представления (4), (5) можно показать [1, 2], что общее решение ИУ (1) имеет структуру

$$\varphi(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{6}$$

где функция $\omega(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $|x| \leqslant 1$ с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$, если функция $f(x)$ такова, что ее производная удовлетворяет условию Гельдера при $|x| \leqslant 1$ с показателем $\alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

Разложим функцию (5) в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$. Будем иметь

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^{2n} \tag{7}$$

при этом

$$a_0 = \int\limits_0^{\infty} \frac{1 - L(u) - \mathrm{e}^{-u}}{u}\, du, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int\limits_0^{\infty} [1 - L(u)]\, u^{2n-1}\, du$$

Можно показать, основываясь на первой оценке (3), что ряд Тейлора (7) абсолютно сходится при $|t| < 2$. Отсюда, учитывая, что $t = (\xi - x)/\lambda$, следует $2/\lambda < 2$, $\lambda > 1$.

Подставляя (4) и (7) в ИУ (1), получим

$$-\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \frac{|\xi - x|}{\lambda}\, d\xi = \pi f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^{2n}} \int\limits_{-1}^{1} (\xi - x)^{2n}\, d\xi \tag{8}$$

Ищем решение ИУ (8) в форме ряда

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x)\, \lambda^{2i} \tag{9}$$

Подставляя выражение (9) в ИУ (8) и приравнивая в нем слева и справа члены при одинаковых степенях λ, придем к бесконечной системе последовательно решаемых ИУ относительно функций $\varphi_i(x)$. Приведем результат такого решения с точностью до членов порядка λ^{-8} [3]

$$\varphi(x) = \frac{N_0}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[1 - \frac{2a_1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{2} - x^2\right) - \frac{4a_2}{\lambda^4}\left(\frac{7}{8} - x^2 - x^4\right) - \frac{3a_1a_2}{\lambda^6}\left(\frac{1}{2} - x^2\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{6a_3}{\lambda^6}\left(\frac{13}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x^4 - x^6\right)\right] - \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f'(t) \left\langle \frac{1}{t-x} + \frac{2a_1 x}{\lambda^2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\lambda^4}[2a_2(6x^3 - 6x^2t + 2xt^2 - 2x + 3t) - 2a_1^2 x] + \frac{1}{\lambda^6}\left\{ x[-a_1a_2(2 + 12x^2 + 4t^2) + 2a_1^3] + \right.$$

$$+ 3a_3 \left[10x^5 - 20x^4 t + (5 + 20t^2)x^3 + (5t - 10t^3)x^2 - \right.$$

$$\left.\left.\left. - \left(\frac{11}{2} + 9t^2 - 2t^4\right) x + 5t + 5t^3 \right] \right\} \Bigg\rangle\, dt + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right) \tag{10}$$

Величина

$$N_0 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi \tag{11}$$

участвующая в этом решении, должна быть определена согласно [1] из соотношения

$$N_0 \ln(2\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)\, dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{\lambda^{2i}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, (\xi - t)^{2i}\, d\xi \tag{12}$$

Подставляя выражение (10) в (12), получим для величины N_0 с точностью до членов порядка λ^{-8} следующее представление [3]:

$$N_0 = \left[\ln(2\lambda) - a_0 - \frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{a_1^2}{4\lambda^4} - \frac{9a_2}{4\lambda^4} - \frac{2a_1a_2}{\lambda^6} - \frac{25a_3}{4\lambda^6} + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, f'(t)t \times\right.$$

$$\left. \times \left[\frac{a_1}{\lambda^2} + \frac{a_2}{\lambda^4}\left(t^2 + \frac{7}{2}\right) + \frac{a_3}{\lambda^6}\left(t^4 + 8t^2 + \frac{39}{4}\right)\right] dt + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right)\right\} \tag{13}$$

Величина

$$N_1 = \int\limits_{-1}^{1} \xi\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{14}$$

также представляет интерес. Подставляя выражение (10) в (14), получим с точностью до членов порядка λ^{-8} следующее представление [3]:

$$N_1 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, f'(t) \left[1 - \frac{a_1}{\lambda^2} + \frac{a_1^2}{\lambda^4} - \frac{a_2}{\lambda^4}\left(\frac{5}{2} + 2t^2\right) -\right.$$

$$\left. -\frac{a_1^3}{\lambda^6} + \frac{a_1a_2}{\lambda^6}\left(\frac{11}{2} + 2t^2\right) - \frac{3a_3}{\lambda^6}\left(\frac{9}{4} + 3t^2 + t^4\right)\right] dt + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right) \tag{15}$$

Формулы (10), (13) и (15) практически можно использовать при $\lambda \geqslant 2$.

3. Вырожденное решение при малых значениях параметра λ. Теперь будем предполагать, что $\lambda \leqslant 2$. Построим вырожденное (проникающее) решение ИУ (1) при малых значениях λ. Для этого перепишем ИУ (1) в несколько другой форме

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\alpha\lambda)}{\alpha} \mathrm{e}^{i\alpha(\xi-x)}\, d\alpha = 2\pi f(x) \tag{16}$$

Здесь i — мнимая единица.

Пронтегрируем ИУ (16) дважды по x. Будем иметь

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, m(\xi - x)\, d\xi = 2\pi g(x) \tag{17}$$

$$m(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\alpha\lambda)}{\alpha^3}\, \mathrm{e}^{i\alpha(\xi-x)}\, d\alpha, \quad g(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(\xi)(x-\xi)\, d\xi + C_1x + C_0. \tag{18}$$

Относительно общего решения ИУ (17) можно утверждать, что оно имеет структуру [4, 5]

$$\varphi(x) = \frac{\Omega(x)}{(1-x^2)^{3/2}} \tag{19}$$

где функция $\Omega(x)$ такова, что ее производная удовлетворяет условию Гельдера при $|x| \leqslant 1$ с показателем $\alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

При $\lambda \to 0$ ядро $m(y)$ на основании второй оценки (3) принимает форму

$$m(y) = 2\pi A\lambda^3 \delta(y) \tag{20}$$

Тогда вырожденное решение ИУ (16) при малых значениях λ имеет вид

$$\varphi_0(x) = -\frac{g(x)}{A\lambda^3} \tag{21}$$

Постоянные C_0 и C_1 в выражении $g(x)$ должны быть найдены из условий, что решение в форме (19) имеет структуру (6), т. е. из условий

$$\Omega(\pm 1) = 0 \tag{22}$$

4. Главный член асимптотики решения ИУ (17) **при малых значениях** λ**.** Построим решение типа погранслоя при малых значениях параметра λ в окрестности точек $x = \pm 1$. С этой целью произведем в ИУ (17), (18) следующие замены:

$$t = \frac{1 \pm x}{\lambda},\ \tau = \frac{1 \pm \xi}{\lambda},\ u = \alpha\lambda,\ \varphi_{1,2}(\tau) = \varphi(\pm\lambda\tau \mp 1),\ g_{1,2}(t) = g(\pm\lambda t \mp 1). \tag{23}$$

Устремляя затем λ к нулю, получим следующие ИУ для определения решений типа погранслоя:

$$\int\limits_0^\infty \varphi_{1,2}(\tau)\, d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(u)}{u^3}\, \mathrm{e}^{\pm iu(\tau - t)}\, du = -\frac{2\pi}{\lambda^3}\, g_{1,2}(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \infty) \tag{24}$$

Решения ИУ (24) могут быть найдены методом Винера–Хопфа [6]. После этого главный член асимптотики решения ИУ (17), (18) при малых значениях λ может быть представлен в форме [1, 2]

$$\varphi(x) = \varphi_1\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \varphi_2\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - \varphi_0(x) \tag{25}$$

Можно показать, что функции $\varphi_{1,2}(t)$ в (25) будут иметь вид

$$\varphi_{1,2}(t) = \Omega_{1,2}(t)\, t^{3/2} \tag{26}$$

где функции $\Omega_{1,2}(t)$ таковы, что их производные удовлетворяют условию Гельдера при $0 \leqslant t \leqslant R < \infty$ с показателем $\alpha \leqslant \beta \leqslant 1$. Тогда для определения постоянных C_0 и C_1 в представлении (18) функции $g(x)$ на основании (22) будем иметь условия

$$\Omega_1(0) = \Omega_2(0) = 0 \tag{27}$$

5. Метод коллокации Мультоппа–Каландии для решения ИУ (1)**,** (4)**.** Будем искать решение в форме (6). Построим для функции $\omega(x)$ в (6) интегрополяционный полином Лагранжа по узлам

$$x_n = \cos\vartheta_n, \quad \vartheta_n = \pi(2n-1)/2N \quad (n = 1, 2, ..., N) \tag{28}$$

которые являются нулями полинома Чебышева $T_N(x)$, N — количество узлов. Указанный полином Лагранжа имеет вид [2]

$$\tilde{\omega}(\vartheta) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\tilde{\omega}(\vartheta_n)\left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\cos\, m\vartheta_n\,\cos\, m\vartheta\right), \quad \tilde{\omega}(\vartheta)\equiv\omega(\cos\,\vartheta) \tag{29}$$

Перейдем в ИУ (1), (4) к новым переменным ϑ и ψ согласно формулам

$$x=\cos\,\vartheta, \quad \xi=\cos\,\psi \tag{30}$$

На основании (6) имеем

$$-\int_0^{\pi}\tilde{\omega}(\psi)\,\ln\left|\frac{\cos\,\psi-\cos\,\vartheta}{\lambda}\right|\,d\psi=\pi\tilde{f}(\vartheta)+\int_0^{\pi}\tilde{\omega}(\psi)\,F\left(\frac{\cos\,\psi-\cos\,\vartheta}{\lambda}\right)\,d\psi \tag{31}$$

Здесь $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \quad \tilde{f}(\vartheta)\equiv f(\cos\,\vartheta)$.

Подставив в ИУ (31) приближенное выражение $\tilde{\omega}(\vartheta)$ вида (29) и испльзовав соотношение [4]

$$-\int_0^{\pi}\cos\,s\psi\ln\left|\frac{\cos\,\psi-\cos\,\vartheta}{\lambda}\right|\,d\psi=\begin{cases}\pi\ln(2\lambda) & (s=0)\\ \pi s^{-1}\,cos\,s\vartheta & (s\neq 0)\end{cases} \tag{32}$$

где $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ и $s=0,1,...$, вычислим точно интеграл, стоящий в левой части (31). Для приближенного вычисления интеграла, стоящего в правой части (31), используем квадратурную Формулу Гаусса

$$\int_0^{\pi}\chi(\psi)\,d\psi=\frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi(\vartheta_n)$$

В результате ИУ (31) примет вид

$$\sum_{n=1}^{N}\tilde{\omega}(\vartheta_n)\left(\ln(2\lambda)+2\sum_{m=1}^{N-1}cos\,m\vartheta_n\frac{\cos\,m\vartheta}{m}\right)=N\tilde{f}(\vartheta)+\sum_{n=1}^{N}\tilde{\omega}(\vartheta_n)\,F\left(\frac{\cos\,\vartheta_n-\cos\,\vartheta}{\lambda}\right) \tag{33}$$

Применив метол коллокации, т. е. положив $\vartheta=\vartheta_k \quad (k=1,2,...,N)$, получим следующую систему N линейных алгебраических уравнений для определения значений $\tilde{\omega}(\vartheta_n)$:

$$\sum_{n=1}^{N}\tilde{\omega}(\vartheta_n)\left[\ln(2\lambda)+2\Psi(\vartheta_n,\vartheta_k)-F\left(\frac{\cos\,\vartheta_n-\cos\,\vartheta_k}{\lambda}\right)\right]=N\tilde{f}(\vartheta_k) \tag{34}$$

где введено обозначение

$$\Psi(\psi,\vartheta)=\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\cos\,m\psi\,\cos\,m\vartheta}{m} \tag{35}$$

После решения системы уравнений (34), (35) значения величин (11) и (14) могут быть найдены по формулам

$$N_0 = \frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^{N}\tilde{\omega}(\vartheta_n), \quad N_1 = \frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^{N}\cos\,\vartheta_n\,\tilde{\omega}(\vartheta_n) \tag{36}$$

Авторы благодарят Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку (гранты 08-01-00003, 08-08-90033-Бел, 09-01-00004, 09-08-01141).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М: Наука, 1974. 455 с.

[2] *Александров В. М., Ромалис Б. Л.* Контактные задачи в машиностроении. М: Машиностроение, 1986. 174 с.

[3] *Александров В. М., Серов М. В.* Плоская контактная задача для преднапряженного упругого слоя // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. № 1. С. 7–13.

[4] *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 343 с.

[5] *Зеленцов В. Б.* О решении некоторых интегральных уравнений смешанных задач теории изгиба пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 983–991.

[6] *Noble B.* Methods Based on the Winer–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L.: Pergamon Press, 1958 = *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Alexandrov V. M., Kostyreva L. A. *On an integral equation encountered in a number problems of mechanics of contact interactions*. We study the typical integral equations occurring in a number of problems in the mechanics of contact interactions.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ РАСТЯГИВАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Баничук Н. В.[*], **Барсук А. А.**[**], **Макеев Е. В.**[*]
[*]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*
[**]*Кишиневский государственный университет*

Рассматривается задача оптимального проектирования по критерию устойчивости консоли переменной жесткости, к свободному концу которой приложена растягивающая сила, передаваемая через абсолютно жесткий стержень, прикрепленный к свободному концу консоли [1–5]. Решение задачи строится в замкнутой аналитической форме в зависимости от отношения длин жесткого стержня и консоли. Показывается, что при определенном значении этого отношения происходит бифуркация характеристик оптимального стержня. Формулируются условия бифуркации и определяются значения характеристик оптимального решения. Приводится асимптотический анализ оптимальных решений.

Рассматривается стержень длины l, переменной изгибной жесткости

$$EJ(x) = A_p S^p(x), \quad p = 1, 2, 3$$

(A_p — константы, характеризующие тип поперечного сечения стержня, E — модуль Юнга, $S(x)$ — площадь поперечного сечения) и заданного объема $V = \int_0^l S(x)dx$. Один конец стержня жестко защемлен, а другой — свободен. Направим ось x вдоль оси недеформированного стержня с началом ($x = 0$) в точке защемления. К свободному концу стержня ($x = l$) жестко прикреплен абсолютно жесткий стержень длины a и направленный вовнутрь стержня. К концу жесткого стержня приложена растягивающая сила P, действующая параллельно оси x и сохраняющая направление в процессе деформирования стержня. Введем обозначение $w(x)$ для поперечных прогибов стержня и запишем условия равновесия для нагруженного таким образом стержня

$$(EJ(x)w_{xx})_{xx} - Pw_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$w(0) = w_x(0) = 0, \quad EJ(l)w_{xx}(l)) = Paw_x(l).$$

Краевая задача (1) является однородной относительно функции прогибов $w(x)$ и, таким образом, нулевое решение $w(x) \equiv 0$ удовлетворяет условиям равновесия (1). Ненулевые решения существуют для определенных значений нагрузки P_i, называемых критическими. При фиксированном объеме V и значениях l, a, A_p величина критической нагрузки будет зависеть от распределения толщин $S(x)$, т. е. $P = P(S)$, и задача оптимизации заключается в нахождении $S(x)$ из условия

$$S^* : P(S) \to \max_S, \ \int_0^l S(x)dx = V. \tag{2}$$

Для удобства последующих выкладок введем следующие безразмерные переменные и параметры (штрихи далее опускаются): $x = lx'$,$S(x) = VS'(x)/l$, $\gamma = a/l$,

$\mu = Pl^{p+2}/(A_pEV^p)$. Введем в рассмотрение обозначение $m \equiv S^p(x)w_{xx}(x)$ для изгибающего момента и $\theta(x) \equiv w_x(x)$ для угла наклона осевой линии деформированного стержня к оси x . С учетом зависимости $m_x(x) = \mu\theta(x)$ и граничного условия $\theta(0) = w_x(0) = 0$ приходим к граничным условиям для изгибающего момента $m_x(0) = 0$ при $x = 0$ и $m(1) = \mu\gamma\theta(1) = \gamma m_x(1)$ при $x = 1$ и, в результате, к формулировке задачи оптимизации в виде:

$$m_{xx}(x) - \mu\frac{m(x)}{S^p(x)} = 0, \quad m_x(0) = 0, \quad m(1) = \gamma m_x(1), \quad (p = 1, 2, 3),$$

$$\mu(S) \to \max_S, \quad \int_0^1 S(x)dx = 1. \tag{3}$$

В частности, при $S(x) \equiv 1$ решение спектральной краевой задачи (3) приводит к уравнению для определения зависимости критических сил от параметра γ : $\sqrt{\mu}\,\mathrm{th}(\sqrt{\mu}) = 1/\gamma$. Для асимптотических значений параметра $0 < \gamma \ll 1$ и $\gamma \gg 1$ решение данного уравнения представляется в виде :

$$\mu(\gamma) \approx 1/\gamma^2 \quad (0 < \gamma \ll 1), \quad \mu(\gamma) \approx 1/\gamma \quad (\gamma \gg 1). \tag{4}$$

Спектральная краевая задача (3) является самосопряженной и, вследствие этого, потеря устойчивости происходит по типу разветвления статических форм равновесия, а критическая сила потери устойчивости для заданного распределения площадей поперечных сечений $S(x)$ определяется вариационным принципом. Запишем данный принцип и соответствующий функционал Лагранжа в виде:

$$\mu(S) = \min_{m(x)}((-\int_0^1 m_x^2(x)dx + \frac{1}{\gamma}m^2(1))/\int_0^1 \frac{m^2(x)}{S^p(x)}dx), \quad L = \mu(S) - \lambda(\int_0^1 S(x)dx - 1), \tag{5}$$

где λ — множитель Лагранжа. Необходимое условие экстремума $\mu(S)$ записываются в форме $m^2(x) = S^{p+1}(x)$, $p = 1,\ 2,\ 3$. Дифференцируя обе части условия экстремума (в предположении дифференцируемости распределения толщин $S(x)$), находим

$$2m(x)m'(x) = (p+1)S^p(x)S'(x). \tag{6}$$

Получим первый интеграл дифференциального уравнения в (3). С этой целью помножим обе части этого уравнения на $m'(x)$. С учетом необходимых условий оптимальности, соотношения (6) и граничного условия $m'(0) = 0$ приходим к представлению для первого интеграла в форме

$$m'(x) = \sqrt{(p+1)\mu}\sqrt{S(x) - S_0}, \quad S_0 = S(0). \tag{7}$$

В результате с использованием условия оптимальности, зависимостей (6) и (7) приходим к дифференциальному уравнению для определения оптимальных распределений толщин

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{\frac{4\mu}{p+1}}\frac{\sqrt{S(x) - S_0}}{S^{\frac{p-1}{2}}}, \quad p = 1,\ 2,\ 3. \tag{8}$$

Представление решения этого уравнения в квадратурах имеют вид

$$\int_{S_0}^{S} \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - S_0}} = \sqrt{\frac{4\mu}{p+1}} x, \quad (\int_{S_0}^{S_1} \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - S_0}} = \sqrt{\frac{4\mu}{p+1}}, \quad x = 1), \tag{9}$$

где $S_1 = S(1)$ — площадь торцевого поперечного сечения. Отметим, что в соответствии с (8) $S^{'}(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и, следовательно, оптимальное распределение толщин монотонно возрастает от защемления к свободному концу и, таким образом, $S_0 \leqslant S(x) \leqslant S_1$. Сами значения S_0 и S_1 определяются в процессе решения задачи. Условиями для их определения служат изопериметрическое условие $V = 1$ и граничное условие $m(1) = \gamma m^{'}(1)$. Окончательно запишем решение задачи оптимизации в параметрической форме:

$$I_1(p, \delta, s) = I_1(p, \delta, 1)x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad S_1(x) = \frac{I_1(p, \delta, 1)}{I_2(p, \delta)}, \quad S(x) = S_1 s(x), \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1, \tag{10}$$

где с целью удобства введены обозначения

$$\delta = \frac{S_0}{S_1} \leqslant 1, \quad (\delta \leqslant s(x) \leqslant 1), \quad I_1(p, \delta, s) = \int_{\delta}^{s} \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - \delta}}, \quad I_2(p, \delta) = \int_{\delta}^{1} \frac{\tau^{\frac{p+1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - \delta}} \tag{11}$$

и параметрическое представление $\gamma = \gamma(\delta)$, $\mu = \mu(\delta)$ для зависимости $\mu(\gamma)$ критической силы μ от параметра задачи γ

$$\gamma(\delta) = \frac{2}{p+1} \frac{1}{I_1(p, \delta, 1)\sqrt{1 - \delta}}, \quad \mu(\delta) = \frac{p+1}{4} \frac{I_1^{p+2}(p, \delta, 1)}{I_2^{p}(p, \delta)}, p = 1, 2, 3, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1. \tag{12}$$

Таким образом, задаваясь значениями $\delta \in [0, 1]$ по формулам (10), вычисляем оптимальное распределение толщин $S(x)$, а с использованием выражений (12) — отвечающие этим значениям параметра величины критической силы μ и параметра задачи γ. Отметим, что, как это следует из вариационного представления (5), для критической силы $\mu : \mu^{'}(\gamma) < 0$ и, таким образом, с увеличением параметра γ критическая сила уменьшается.

Обратимся к анализу зависимости $\mu(\gamma)$ критической силы μ от параметра задачи γ для оптимальных стержней, представленной в (12) в параметрической форме: $\gamma = \gamma(\delta)$, $\mu = \mu(\delta)$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Для получения этой зависимости в форме $\mu(\gamma)$ необходимо исключить из данных соотношений параметр δ. В соответствии с известной теоремой анализа о существовании обратной функции для монотонных в интервале $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ зависимостей $\gamma = \gamma(\delta)$ существует однозначная обратная функция $\delta = \delta(\gamma)$, подстановка которой в выражение $\mu = \mu(\delta)$ приводит к однозначной зависимости $\mu(\gamma)$ и, соответственно, единственному оптимальному решению для значений параметра $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ ($\gamma_0 = \gamma(\delta = 0), \gamma_1 = \gamma(\delta = 1)$). Для дифференцируемых зависимостей $\gamma = \gamma(\delta)$ условие монотонности означает, что производная от этой функции не обращается в ноль на рассматриваемом интервале изменения аргумента, т. е. $d\gamma(\delta)/d\delta \neq 0$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Таким образом, значения параметра $\gamma = \gamma_*$ и отвечающие им критичесие силы $\mu_* = \mu(\delta_*)$, при которых возможно появление

нескольких оптимальных решений (бифуркация решений), для дифференцируемых зависимостей $\gamma = \gamma(\delta)$ определяется из условий

$$\delta_* : \quad \frac{d\gamma(\delta)}{d\delta} = 0, \quad \gamma_* = \gamma(\delta_*), \quad \mu_* = \mu(\delta_*). \tag{13}$$

Определение числа возникающих при этом решений производится в общем случае с использованием теории ветвления решений нелинейных уравнений [6]. В рассматриваемом случае условий в форме (13), анализ бифуркации решений существенно упрощается. Так, если корень δ_* уравнения в (13) — простой, то в малой окрестности отвечающего δ_* значения параметра γ_* существуют только два решения $\delta = \delta_1(\gamma)$ и $\delta = \delta_2(\gamma)$ $(|\gamma - \gamma_*| \ll 1)$, подстановка которых в выражение $\mu = \mu(\delta)$ приводит к двум зависимостям $\mu_1(\gamma) = \mu(\delta_1(\gamma))$ и $\mu_2(\gamma) = \mu(\delta_2(\gamma))$. Аналогичным образом вычисляются и все другие характеристики оптимальных решений.

Для конкретных значений $p = 1,\ 2,\ 3$ фигурирующие в (10)–(13) интегралы вычисляются в элементарных функциях, что позволяет провести исчерпывающий анализ оптимальных решений, проанализировать условия бифуркации этих решений, а также получить асимптотические представления для них. Ниже приводятся некоторые результаты вычислений отдельно для каждого из значений $p = 1,\ 2,\ 3$

$$p = 1 : I_1(1, \delta, s) = 2\sqrt{s - \delta}, (\delta \leqslant s \leqslant 1), \quad I_2(1, \delta) = \frac{2}{3}\phi\sqrt{\beta}, \quad S_1 = \frac{3}{\phi}, \quad S_0 = \frac{3\delta}{\phi}, \tag{14}$$

$$\gamma(\delta) = \frac{1}{2\beta}, \quad \mu(\delta) = \frac{6\beta}{\phi}, \quad S(x) = \frac{3}{\phi}(\delta + \beta x^2), \quad \beta = 1 - \delta, \quad \phi = 1 + 2\delta, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае зависимость $\gamma(\delta)$ — монотонная и соответственно этому существует однозначная обратная зависимость $\delta(\gamma) = (2\gamma - 1)/(2\gamma)$, при этом значению $\delta = 0$ отвечает значение $\gamma_* = 0.5$, а значению $\delta = 1$ — $\gamma = \infty$. Таким образом, в рассматриваемом случае потеря устойчивости для оптимальных стержней происходит при значениях параметра $\gamma \in [0.5, \infty)$, в то время, как для стержней постоянного сечения — при $\gamma \in [0, \infty)$. Подстановка полученного выражения для $\delta(\gamma)$ в выражения для $\mu(\delta)$ и $S(x)$ в (14) приводит к исключению параметра δ и представлению оптимального решения $S(x)$ и зависимости $\mu(\gamma)$ в функции параметра задачи γ: $S(x) = 1 + (3x^2 - 1)/(2(3\gamma - 1))$, $\mu(\gamma) = 3/(3\gamma - 1)$, $\gamma > 0.5$.

Отметим, что наибольшая критическая сила отвечает значению $\gamma_* = 0.5$ и равна 6, а отвечающее ей оптимальное распределение толщин дается выражением $S(x) = 3x^2$. Для асимптотически больших значений параметра $\gamma \gg 1$ из полученных выражений с сохранением главных членов асимптотических разложений получаем представления для $S(x)$ и $\mu(\gamma)$ как функции параметра задачи γ: $S(x) = 1 + (3x^2 - 1)/(6\gamma)$, $\mu(\gamma) \approx 1/\gamma$, $\gamma \gg 1$.

Из приведенных выражений следует, что с увеличением параметра γ поперечное сечение оптимального стержня стремится к постоянному, а асимптотическая зависимость для $\mu(\gamma)$ находится в соответствии с асимптотическим поведением для стержней постоянного сечения:

$$p = 2 : \quad I_1(2, \delta, s) = \sqrt{s}\sqrt{s - \delta} + \delta \ln \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - \delta}}{\sqrt{\delta}}, \quad (\delta \leqslant s \leqslant 1), \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1, \tag{15}$$

$$I_2(1,\delta)=\frac{1}{4}((2+3\delta)\sqrt{\beta}+3\delta^2\ln\frac{1+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\delta}}),\quad S_1=\frac{4(\sqrt{\beta}+\delta\psi)}{(2+3\delta)\sqrt{\beta}+3\delta^2\psi},\quad \beta=1-\delta,$$

$$\sqrt{s}\sqrt{s-\delta}+\delta\ln\frac{\sqrt{s}+\sqrt{s-\delta}}{\sqrt{\delta}}=(\sqrt{\beta}+\psi)x,\quad \psi=\ln\frac{1+\sqrt{1-\delta}}{\sqrt{\delta}},\quad S(x)=S_1 s(x),$$

$$\gamma(\delta)=2/(3(\sqrt{\beta}+\delta\psi)),\quad \mu(\delta)=12(\sqrt{\beta}+\delta\psi)^4/((2+3\delta)\sqrt{\beta}+3\delta^2\psi)^2,\quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Приведем асимптотические представления для характеристик оптимального решения при $\gamma\gg 1$ $(1-\delta\ll 1)$). Имеем с точностью до главных членов асимптотических разложений $S(x)\approx 1+(3x^2-1)/(9\gamma)$, $\mu(\gamma)\approx 1/\gamma$, $\gamma\gg 1$. Таким образом, с увеличением параметра γ поперечное сечение оптимального стержня стремится к постоянному, а асимптотическая зависимость для $\mu(\gamma)$ находится в соответствии с асимптотическим поведением (4) для стержней постоянного сечения.

$$p=3:\quad I_1(3,\delta,s)=2(s+2\delta)\sqrt{s-\delta}/3,\quad (\delta\leqslant\delta\leqslant 1),\quad 0\leqslant\delta\leqslant 1, \tag{16}$$

$$I_2(1,\delta)=2(3+4\delta+8\delta^2)\sqrt{1-\delta}/15,\quad S_1=5(1+2\delta)/(3+4\delta+8\delta^2),$$

$$(s+2\delta)\sqrt{s-\delta}=x(1+2\delta)\sqrt{1-\delta},\quad S(x)=S_1 s(x),$$

$$\gamma(\delta)=3/(4(1+2\delta)(1-\delta)),\quad \lambda(\delta)=500(1+2\delta)^5(1-\delta)/(9(3+4\delta+8\delta^2)^3)$$

Приведем также асимптотические представления для оптимальных распределений толщин и отвечающих им критических сил (с сохранением только главных членов асимптотических разложений): $S(x)\approx 1+(3x^2-1)/(12\gamma)$, $\mu(\gamma)\approx 1/\gamma$, $\gamma\gg 1$

Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №08-08-00025а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Биценко К., Граммель Р.* Техническая динамика. М.: ГИТТЛ, 1950.

[2] *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971.

[3] *Jelicic Z. D. Atanackovic T. M.* On an optimization problem for elastic rods // Struct. Multidisc. Optim. 2006. 32. pp. 59–64.

[4] *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986.

[5] *Banichuk N. V. Barsuk A. A.* Design of an column with elastic clamping // Struct. Multidisc. Optim. 1995. 9. pp. 254–257.

[6] *Вайнберг М. М. Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

Banichuk N. V., Barsuk A. A., Makeev E. V. *Analysis of buckling and optimization of rods under extensional force*. The problem of optimal design against buckling of elastic rod under extensional force is considered. It is shown that the buckling takes place for some problem parameters. Asymptotic analysis of optimal solution is presented.

ЭФФЕКТ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ ОСИ КРОВЕНОСНОГО СОСУДА

Батищев В. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Работа посвящена исследованию свойств локализованных винтовых течений крови в артериальных сосудах человека и животных. В статье [1] изучены длинные спиральные волны, вызванные винтовой анизотропией стенок кровеносного сосуда. Эти волны распространяются в пограничном слое вблизи стенок артерий. Ниже показано, что в цилиндрической области, заполненной жидкостью, существуют спиральные бегущие волны большой, конечной и малой длины волны, заполняющие все сечение цилиндра, причем при уменьшении вязкости или с ростом номера моды область локализации волн перемещается к оси цилиндра.

Рассматривается задача о распространении спиральных возмущений в стационарном потоке вязкой жидкости в цилиндрической области, в которой распространяются длинные пульсовые волны, вызванные вязкоупругими свойствами стенок цилиндрического сосуда. Отметим, что в монографии [2] изучены пульсовые волны в кровеносном сосуде, причем найдены две длинные волны, бегущие вниз по потоку, а в работе [1] найдена еще одна волна, вызванная анизотропией стенок цилиндра.

Итак, движение жидкости изучается на основе системы уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu \nabla\, \mathbf{v}, \\ &div\, \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Кровеносный сосуд рассматривается как полубесконечный цилиндр, ограниченный тонкой вязкоупругой оболочкой толщины h и радиусом срединной поверхности, равным a.

Введем малые параметры ε_k, ε_ν, ε_h, равные соответственно

$$\varepsilon_k = \omega a/c_0, \quad \varepsilon_\nu = \sqrt{\nu/\omega a^2}, \quad \varepsilon_h = h/a.$$

Здесь ω — частота колебаний, c_0 — известная фазовая скорость пульсовой волны Моуэнса–Кортевега [2], ν — кинематический коэффициент вязкости. Параметр ε_ν пропорционален толщине пограничного слоя вблизи стенок цилиндра, а параметр $\sqrt{\varepsilon_\nu}$ — пропорционален толщине критического слоя, возникающего у спиральных волн вблизи оси цилиндра [3]. Для крупных кровеносных сосудов собаки $\varepsilon_k \sim 10^{-2}$; $\varepsilon_h \sim 0,1$; $\varepsilon_\nu \approx 1/13,2$.

Систему уравнений (1) дополняем уравнениями тонкой упругой цилиндрической оболочки совместно с кинематическим условием [1]. Решение задачи, которое

описывает спиральные волны, бегущие на фоне пульсовых волн внутри цилиндра, строим в виде асимптотических рядов по степеням параметра ε_k

$$\begin{aligned} v_z &= V(r) + v_z^0 + \varepsilon_k v_z^1 + \dots \\ v_\theta &= v_\theta^0 + \varepsilon_k v_\theta^1 + \dots \\ u_\theta &= u_\theta^0 + \varepsilon_k u_\theta^1 + \dots \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь v_r, v_θ, v_z — компоненты скорости частиц жидкости в цилиндрических координатах; u_r, u_θ, u_z — компоненты смещений точек срединной поверхности оболочки; r, θ, z — цилиндрические координаты. Решение (2) считается осесимметричным (не зависит от окружной координаты) и периодическим по времени с частотой ω. Функция $V(r) = U(1 - r^2/a^2)$ — осевая компонента скорости течения Пуазейля, которое описывает средний стационарный поток, наблюдаемый в кровеносном сосуде [2]; U — максимальное значение средней скорости, достигаемое на оси цилиндра. Для крупных кровеносных сосудов собаки этот параметр лежит в интервале от 0,1 до 0,4 м/с.

Функция v_z^0 определяет осевую компоненту скорости для пульсовой волны и зависит от переменных (z_1, r, t), где $z_1 = \varepsilon_k z$ — медленная осевая координата. Эта компонента известна и найдена методом пограничного слоя.

Окружная компонента скорости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v_\theta^0}{\partial t} + Rs(V(r) + v_z^0)\frac{\partial v_\theta^0}{\partial z} = \varepsilon_\nu^2\left(\frac{\partial^2 v_\theta^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta^0}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta^0}{\partial z^2} - \frac{v_\theta^0}{r^2}\right) .$$

На оси цилиндра функция v_θ^0 исчезает. На поверхности цилиндра используем уравнения тонкой вязкоупругой оболочки в безмоментном приближении [1]. Ниже рассматриваем только те спиральные гидродинамические волны большой, конечной и малой длины волны, которые асимптотически затухают при приближении к поверхности цилиндра в поперечном направлении.

Решение задачи для окружной компоненты скорости жидкости построим в виде суммы

$$v_\theta^0 = \Phi + F + H.$$

Здесь функция $\Phi(z_1, r, t)$ описывает длинные спиральные волны, распространяющиеся в пограничном слое вблизи стенок цилиндра. Функция $F(z, z_1, r, t)$ описывает волны в критическом слое вблизи оси цилиндра вне области пограничного слоя. Функция $H(z_1, z, r, t)$ описывает невязку в пограничном слое, возникающую от функции F. Для длинных волн функция Φ известна и найдена в [1].

Функция F получается в явном виде

$$F = \sum_{n,m} C_{n,m} Q_{n,m}(z_1, t) F_{n,m}(r, t) e^{i(\chi_{n,m} z - nt)}$$

Здесь и ниже зависимые и независимые переменные приведены к безразмерному виду с помощью масштабов длины, времени и скорости равные соответственно a, ω^{-1}, U. Комплексный декремент определяется по асимптотической формуле

$$\chi_{n,m} = \frac{n}{Rs} + \varepsilon_\nu \frac{2\sqrt{2nm}}{Rs}(1+i) + O(\varepsilon_\nu^2) \tag{3}$$

где $Rs = U/\omega a$; n, m — целые числа. Коэффициенты $Q_{n,m}$ известны и учитывают влияние пульсовых волн на спиральные волны вне области пограничного слоя. Коэффициенты $C_{n,m}$ определяются значением скорости на входе в цилиндр.

Функция H сосредоточена в области пограничного слоя и оказывается малой поправкой к функции F при $\varepsilon_\nu \approx 1/13,2$ для средних значений скорости крови собаки, принимаемых для расчетов [2].

Функция $F_{n,m}$ и комплексный декремент определяются путем решении задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\nu^2\left(\frac{d^2F_{n,m}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_{n,m}}{dr} - (\chi_{n,m}^2 + \frac{1}{r^2})F_{n,m}\right) = i(-n + \chi_{n,m}Rs(1-r^2))F_{n,m} \\ &F_{n,m}(0) = 0, \;\; F_{n,m}(1) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Параметр Rs для крупных кровеносных сосудов собаки изменяется в промежутке от 1 до 4. Задача (4) проинтегрирована численно при $\varepsilon_\nu = 1/13,116$ и $n = 1,2,3$. Для каждого фиксированного значения n найдены моды для разных m. Функция $F_{n,m}$ представлена в комплексном виде $F_{n,m} = g(r) + if(r)$. Рассчитаны вещественная и мнимая части комплексного декремента $\chi_{n,m} = \chi_r + i\chi_i$ как функции параметров Rs, ε_ν, n, m. В расчетах применялся метод пристрелки. Интегрирование проводилось от стенки сосуда к его оси, где выполнялось сращивание со степенной асимптотикой. Построена зависимость вещественной и мнимой частей декремента от параметра Rs. Показано, что эти функции монотонно убывают с ростом параметра Rs. На рисунке 1 слева изображена зависимость f и g от радиальной координаты для первого фундаментального решения системы (4) при $n = m = 1$, $Rs = 2$. Второе фундаментальное решение получается заменой функций f и g соответственно на g и $-f$. На рисунке 1 слева кривые 1 и 2 соответствуют функциям f и g.

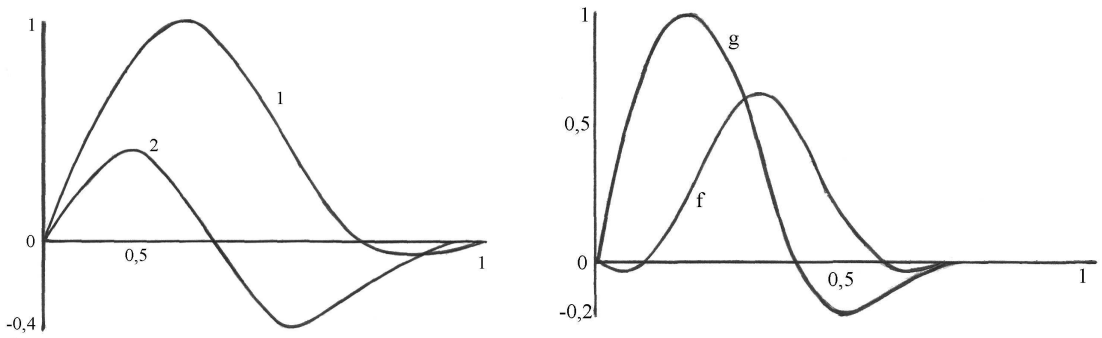


Рис. 1. Локализованные моды при $n = m = 1$ (слева); при $n = 5$; $m = 1$ (справа)

Свойство локализации мод задачи (4) состоит в том, что функции $f(r)$, $g(r)$ стремятся сосредоточиться вблизи оси цилиндра и асимптотически стремятся

к нулю при приближении к поверхности цилиндра. Это выполняется, в частности, как с ростом индекса n, так и при уменьшении параметра ε_ν. На рисунке 1 справа показано поведение функций f и g при $m = 1$, $n = 5$, $Rs = 2$, $\varepsilon_\nu = 1/13,116$. На рисунке 2 слева показано проявление этого свойства при $m = n = 1$, $Rs = 2$, $\varepsilon_\nu = 0,02$. Отметим, что для $m \geqslant 2$ поперечное сечение цилиндра разбивается на несколько областей, в которых жидкость вращается в разные стороны, если только рассматривать одну моду. На рисунке 2 справа изображена функция $g(r)$ при $m = 7$, $n = 1$, $Rs = 2$, $\varepsilon_\nu = 1/13,116$.

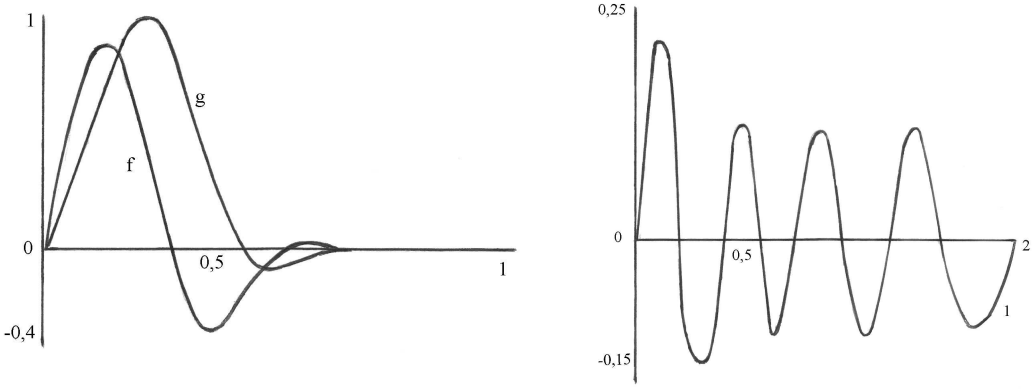


Рис. 2. Влияние малости толщины критического слоя (слева). Собственная функция при $n = 1, m = 7$ (справа)

Для локализованных мод применяем асимптотический метод критического слоя при $\varepsilon_\nu \to 0$. Функцию $F_{n,m}$ и комплексный декремент разложим в асимптотические ряды по степеням параметра ε_ν. Вводим преобразование растяжения $r = \sqrt{\varepsilon_\nu}\, s$ и комплексную переменную $\eta = \sqrt[4]{-in}\, s$. Подставляем асимптотические ряды в задачу (4), приравниваем нулю коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра и в нулевом приближении для главного члена асимптотики получаем формулу $\chi^{(0)}_{n,m} = n/Rs$. В первом приближении введем обозначение $\lambda = -i\sqrt{i}Rs \cdot \chi^{(1)}_{n,m}/n$. Главное приближение собственной функции и параметр λ определяются из краевой задачи на собственные значения на полуоси

$$\frac{d^2F^{(0)}_{n,m}}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{dF^{(0)}_{n,m}}{d\eta} - (\lambda + \eta^2 + \frac{1}{\eta^2})F^{(0)}_{n,m} = 0$$

$$F^{(0)}_{n,m}(0) = 0, \;\; F^{(0)}_{n,m}(\infty) = 0$$

Численный расчет приводит к значению $\lambda = -4m$. На рисунке 3 справа приведен график функции $F^{(0)}_{n,m}$ при $m = 1$. При $\eta \to \infty$ функция $F^{(0)}_{n,m}$ монотонно стремится к нулю. На рисунке 3 слева изображен график этой функции для моды $m = 3$. Здесь возникают три локальных экстремума, а сама функция убывает при больших значениях переменной. Комплексный декремент определяется по формуле (3). При $Rs = 2$, $\varepsilon_\nu = 1/13,116$ три члена асимптотики приближают численное значение с относительной погрешностью порядка одного процента.

Толщина критического слоя имеет порядок $O(\sqrt[4]{\varepsilon_\nu^2/n})$. Поэтому область локализации мод при $m = 1$ приближается к оси цилиндра как с ростом номера моды n, так и при уменьшении параметра ε_ν.

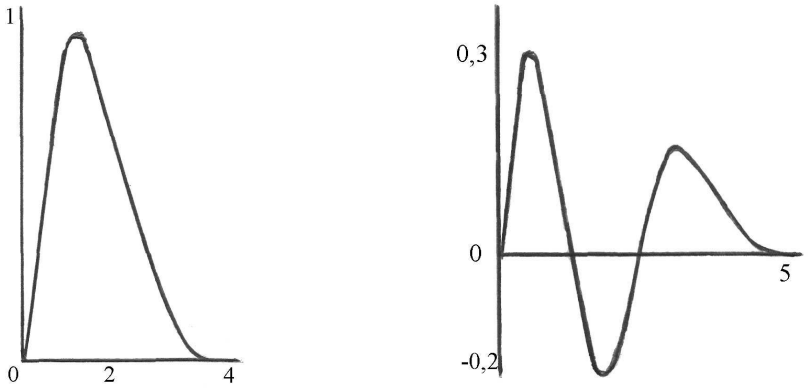


Рис. 3. Спиральная мода при $m = 1$(слева); при $m = 3$ (справа)

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Богаченко С. Е., Устинов Ю. А.* Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии // Рос. журн. биомеханики. 2009. Т. 13, № 1. С. 29–42.

[2] *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.

[3] *Батищев В.А.* Физический механизм «винтовых» течений жидкости в упругом цилиндре // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Актуальные проблемы механики. Спецвыпуск. 2009. С. 23–27.

Batischev V. A. *Localized effect of spiral waves near the axis of blood vessel.* In this paper, the localized spiral waves in stationary stream of viscous fluid in blood vessel is investigated. The set of spiral long wavelength and short waves are obtained. This waves localized near the axis of blood vessel. The region of localized waves moves to the cylindrical axis by the increase of modes number or the decrease viscosity of the blood.

НЕКОТОРЫЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО ГАЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

Бондарчук А. А., Мещеряков К. И.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для гидродинамических функций получено три представления с зависящими от времени коэффициентами, сводящих систему уравнений движения вязкого теплопроводного газа к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения этих коэффициентов. Приведено несколько примеров применения найденных представлений для моделирования задач гидродинамики. Также показано удобство полученной в промежуточных выкладках формы записи уравнений движения вязкого газа для проведения численных исследований с применением разложения искомых гидродинамических функций в ряды по пространственным координатам.

Модель вязкого теплопроводного газа является наиболее полной из описывающих течения газа моделей, не учитывающих какие-либо дополнительные физико-химические эффекты. Однако, без применения упрощений она используются, как правило, лишь в прямых численных расчетах, с использованием таких методов, как МКЭ. При расчете течений в атмосфере такой подход сталкивается с существенными трудностями, связанными с большими временными затратами на проведение расчета. Вместе с тем количество теоретических наработок в этой области, которые могли бы привести к усовершенствованию численных методов расчета, чрезвычайно мало. В [1] и [2] Л. В. Овсянниковым и его последователями с использованием аппарата теории групп удалось получить для этой модели ряд инвариантных решений, но применение их к атмосферным течениям затруднительно. В данной работе представлено несколько вариантов полуаналитических представлений гидродинамических функций, имеющих простую структуру и естественным образом учитывающих массовые силы.

Система уравнений модели вязкого теплопроводного газа имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \rho\boldsymbol{F} - \nabla p + \nabla(\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})) + 2(\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{\varepsilon}))$$

$$\rho\frac{dE}{dt} = -p(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) + \lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2 + 2\mu\sum_{m,p=1}^{3}\varepsilon_{mp}^2 + (\nabla\cdot(k\nabla T))$$

Здесь $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости частицы газа, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}$ — вектор силы тяжести, T — температура, ρ — плотность, $p = RT\rho$ — давление в газе, $E = C_vT$ — внутренняя энергия, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор скоростей деформаций, ε_{mp} — компоненты тензора скоростей деформаций, μ — динамический коэффициент вязкости, $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ — коэффициент объемной вязкости, $k = \frac{C_p\mu}{Pr}$ — коэффициент теплопроводности, C_p и C_v —

коэффициенты удельной теплоемкости при постоянном давлении и объеме, Pr — число Прандтля. Приток теплового излучения отсутствует, вязкость принимается постоянной $\mu = const$.

Эта система может быть преобразована путем ввода в рассмотрение новой неизвестной функции $\eta = 1/\rho$ и исключения из уравнений температуры и плотности. Новая система принимает вид

$$\frac{d\eta}{dt} - \eta\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F} - \eta\nabla p + \eta\nabla(\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})) + 2\eta(\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{\varepsilon})) \tag{1}$$

$$\frac{C_p}{R}\frac{dp}{dt} = -p(1+\frac{C_p}{R})(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) + \lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2 + 2\mu\sum_{m,p=1}^{3}\varepsilon_{mp}^2 + (\nabla\cdot(\frac{k}{R}\nabla(p\eta)))$$

Общей особенностью всех трех найденных полуаналитических представлений решений является представление компонент скорости в виде линейных функций координат с коэффициентами, зависящими от времени:

$$V_x(x,y,z,t) = V_{x0}(t) + V_{xx}(t)x + V_{xy}(t)y + V_{xz}(t)z$$
$$V_y(x,y,z,t) = V_{y0}(t) + V_{yx}(t)x + V_{yy}(t)y + V_{yz}(t)z$$
$$V_z(x,y,z,t) = V_{z0}(t) + V_{zx}(t)x + V_{zy}(t)y + V_{zz}(t)z$$

При таком представлении компонент скорости слагаемые, составляющие конвективные производные, имеют тот же порядок относительно x, y, z, что и локальные производные по времени. Для получения замкнутой системы для нахождения коэффициентов необходимо, чтобы и в правых частях уравнений порядок слагаемых был такой же. Это возможно при выполнении двух условий. Первое условие состоит в том, что массовые силы должны линейно зависеть от координат (или от компонент скорости, учитывая их линейность). Этому условию удовлетворяет и сила тяжести, если принимать ее не зависящей от координат, либо зависящей линейно, и инерционные силы, возникающие во вращающейся системе координат (силы Кориолиса). При этом коэффициенты, входящие в выражения для массовых сил, вообще говоря, могут быть произвольными функциями времени. Второе условие накладывает ограничения на вид двух оставшихся гидродинамических функций. Было найдено три возможных варианта, позволяющих построить замкнутую систему для нахождения коэффициентов.

Вариант 1:

$$p(x,y,z,t) = p_0(t) + p_x(t)x + p_y(t)y + p_z(t)z$$
$$\eta(x,y,z,t) = \eta_0(t) + \eta_x(t)x + \eta_y(t)y + \eta_z(t)z$$

Вариант 2:

$$p(x,y,z,t) = p_0(t)$$
$$\eta(x,y,z,t) = \eta_0(t) + \eta_x(t)x + \eta_y(t)y + \eta_z(t)z + \eta_{xx}(t)x^2 + \eta_{yy}(t)y^2 + \eta_{zz}(t)z^2 +$$
$$+\eta_{xy}(t)xy + \eta_{yz}(t)yz + \eta_{zx}(t)zx$$

Вариант 3:

$$p(x,y,z,t) = p_0(t) + p_x(t)x + p_y(t)y + p_z(t)z + p_{xx}(t)x^2 + p_{yy}(t)y^2 + p_{zz}(t)z^2 +$$

$$+p_{xy}(t)xy + p_{yz}(t)yz + p_{zx}(t)zx$$

$$\eta(x,y,z,t) = \eta_0(t)$$

После подстановки данных представлений в (1), собирая коэффициенты при одинаковых степенях x, y, z, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для краткости приведем лишь уравнения, получаемые из уравнения неразрывности при выборе варианта 1 (аргументы (t) везде опущены):

$$\frac{d\eta_0}{dt} - \eta_0 V_{xx} - \eta_0 V_{yy} - \eta_0 V_{zz} + \eta_x V_{x0} + \eta_y V_{y0} + \eta_z V_{z0} = 0$$

$$\frac{d\eta_x}{dt} - \eta_x V_{yy} - \eta_x V_{zz} + \eta_y V_{yx} + \eta_z V_{zx} = 0$$

$$\frac{d\eta_y}{dt} - \eta_y V_{xx} - \eta_z V_{zz} + \eta_x V_{xy} + \eta_z V_{zy} = 0$$

$$\frac{d\eta_z}{dt} - \eta_z V_{xx} - \eta_z V_{yy} + \eta_x V_{xz} + \eta_y V_{yz} = 0$$

После задания некоторых начальных значений коэффициентов полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается численно. Достоинством изложенного метода является простая форма записи представлений решения, высокая скорость расчета, достаточно широкие возможности по заданию приложенных массовых сил. К недостаткам следует отнести невозможность задать граничные условия и нелокальность решения (во многих случаях на течение вблизи начала координат оказывается влияние из бесконечно удаленных частей области), связанная с неограниченным ростом гидродинамических функций при удалении от начала координат. Для иллюстрации нелокальности рассмотрим простейший случай движения газа — равномерное расширение/сжатие. Для этого зададим ненулевые начальные значения следующих коэффициентов: $\eta_0(0) = 1/1.225\text{м}^3/\text{кг}$, $p_0(0) = 101234\text{Па}$, $V_{xx}(0) = V_{yy}(0) = V_{zz}(0) = 0.1$, и нулевые начальные значения у всех остальных (в данном случае они останутся равными нулю в течение всего времени, поэтому не имеет значения, какое из трех представлений решения выбрано). На рис. 1.а изображен график изменения плотности газа с течением времени, полученный с помощью численного расчета. Течение представляет собой постепенно замедляющееся расширение массы газа, которое длится бесконечно долго. Если же поменять знак у начальных значений коэффициентов, соответствующих скоростям (случай равномерного сжатия), то решение будет существовать лишь конечное время, после которого плотность во всей области становится бесконечной (рис. 1.б). Это означает, что за конечное время газ из бесконечности приходит в начало координат, что, разумеется, неприемлемо. Избежать подобных результатов можно лишь аккуратным подбором начальных значений коэффициентов. Ввиду всего вышесказанного, представляется более перспективным использование полученных представлений для описания течений в малых областях (например,

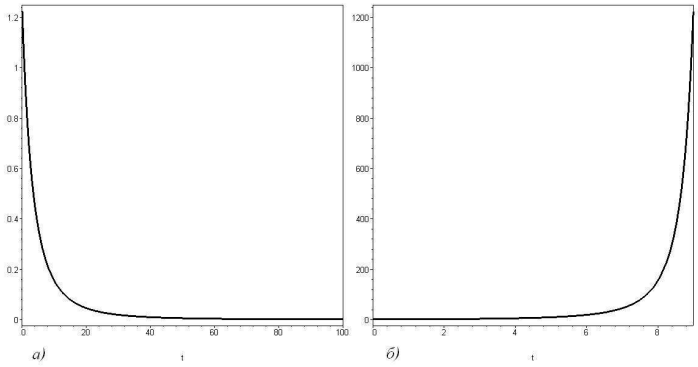


Рис. 1. Изменение плотности газа в случае равномерного расширения (а) и сжатия (б).

в качестве пробных функций в методе конечных элементов), чем непосредственно для моделирования крупномасштабных течений.

Применение разложения неизвестных функций в ряды по пространственным координатам с порядком членов выше, чем в приведенных представлениях, не позволяет построить замкнутую систему уравнений, но может быть использовано для проведения приближенных численных исследований с использованием редукции системы уравнений. Этому способствует и удобная форма записи уравнений движения — отсутствие дополнительных множителей при производных по времени, и слагаемых, в которых бы неизвестные функции входили в знаменатель. При этом помимо рядов Тейлора, могут использоваться и другие типы рядов. Ниже приводится пример численного расчета с применением рядов Фурье.

Рассматривается течение в безграничной по горизонтали области, заполненной воздухом, состояние которого в начальный момент описывается формулами международной стандартной атмосферы, но при градиенте температуры, соответствующем неустойчивой вертикальной стратификации. Расчет проводится для конечной области, на боковых стенках которой ставится условие периодичности. Гидродинамические функции представляются в следующем виде:

$$f(x,y,z,t) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} f_{ijk}(t)\mathrm{basis}(x,i)\mathrm{basis}(y,j)\mathrm{basis}(z,k) \qquad (2)$$

$$\mathrm{basis}(x,n) = \begin{cases} 1/2 & ,n=0 \\ \cos(\pi k x/h) & ,n=2k \\ \sin(\pi k x/h) & ,n=2k-1 \end{cases}$$

Для выполнения условия твердой стенки на поверхности Земли в представлении (2) отбрасываются слагаемые, имеющие нечетный индекс по z, для V_x, V_y, η, p, и имеющие четный индекс для V_z. Т. о. расчет производится для области с размерами $[h \times h \times h/2]$. После подстановки (2) в (1) и применения тригонометрических преобразований, полученная система представляется в виде, когда каждое слагаемое в уравнениях представляет собой произведение трех базисных функций на некоторый коэффициент, зависящий только от времени. Члены, содержащие базисные функции порядка выше N, отбрасываются. Сбор коэффициентов при

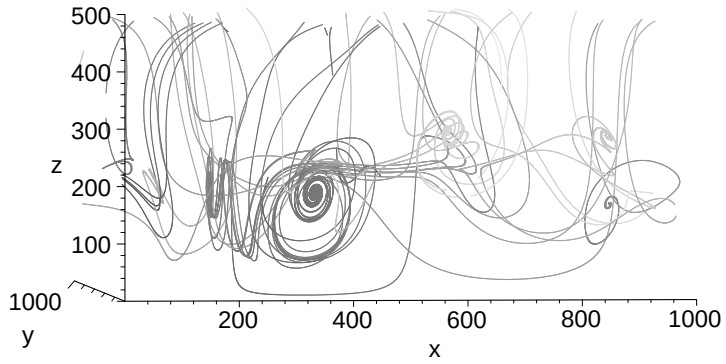


Рис. 2. Линии тока в момент времени t=1000с, градиент температуры $\gamma_0 = 0.01$г/м.

одинаковых сочетаниях оставшихся базисных функциях позволяет получить систему из $\frac{N^2(5N+3)}{2}$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. После задания начальных условий (которые получаются путем разложения в ряд Фурье по z формул международной стандартной атмосферы) эта система решается численно методом Рунге–Кутта. На рис. 2 представлен вид линий тока, полученных для области с размерами [1000м $\times$ 1000м $\times$ 500м] при градиенте температуры равном 10 град/км по прошествии 1000 с от начального момента.

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы, Госконтракт 02.740.11.5024.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О.* Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск, «Наука» 2003, 352 с.

[2] *Овсянников Л. В.* Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики // Новосибирск, 1997. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 3–97).

Bondarchuk A. A., Mesheryakov K. I. *Some semianalytical solutions of the equations of viscous gas dynamics, and their application in model problems of hydrodynamics.* For the flow variables received three representations from the time-dependent coefficients, which reduce the system of equations of motion of viscous heat-conducting gas to the system of ordinary differential equations for finding these coefficients. Some examples of applying the found representations for modeling of hydrodynamics problems are given. A form of writing equations of motion of viscous gas which is convenient for the numerical studies using the expansion of the unknown hydrodynamic functions in series of spatial coordinates is also shown.

ДИАГНОСТИКА ПРЕДРАЗРУШАЮЩЕГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО ИНВАРИАНТНЫМ СООТНОШЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА СОПУТСТВУЮЩЕЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ

Буйло С. И.

НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону

Рассмотрены особенности диагностики предразрушающего состояния материалов по отклонению амплитудных и временных инвариантных соотношений параметров сопутствующей акустической эмиссии (АЭ) от их устойчивых (инвариантных) значений. Показано, что «прореживание» потока путем выборки каждого m-го импульса резко снижает случайность свойств исходного потока АЭ. Это делает практически невозможным определение степени опасности дефекта по каким-либо статистическим параметрам «прореженных» потоков Эрланга даже при относительно малых коэффициентах пересчета.

Некоторое время назад нами был предложен новый подход, заключающийся в том, что связь регистрируемых сигналов акустической эмиссии (АЭ) с конкретным физико-механическим процессом разрушения определяется по отклонению от устойчивых (инвариантных) в силу ряда предельных теорем статистических распределений параметров АЭ [1]. Развиваемый метод в последнее время получил название метода инвариантов, и все более широко используется для диагностики предразрушающего состояния и определения точки деструкции материалов [1–5]. Наиболее часто метод инвариантов применяется для определения момента локализации процесса дефектообразования (зарождения и роста макротрещины) по отклонению параметров потока АЭ от чисто случайного, пуассоновского.

Отношение стандартного отклонения $s_{\Delta t}$ (корень квадратный из дисперсии временных интервалов между событиями АЭ) к их среднему значению $\overline{\Delta t}$ (первый временной инвариант $I_{1\Delta t}$) для пуассоновского потока актов АЭ имеет устойчивое (инвариантное) значение равное единице, а информационный параметр временных интервалов следования $i_{1\Delta t}$ равен нулю:

$$I_{1\Delta t} = s_{\Delta t}/\overline{(\Delta t)} = I^*_{1\Delta t} = 1; \qquad i_{1\Delta t} = |(\overline{\Delta t} - s_{\Delta t})|/(\overline{\Delta t}) = 0. \tag{1}$$

Аналогично нами предложен первый амплитудный инвариант u_{1u} и амплитудный информационный параметр i_{1u}:

$$I_{1u} = s_u/(\overline{u}) = I^*_{1u}; \qquad i_{1u} = |(I_{1u} - I^*_{1u})|/I^*_{1u} = 0. \tag{2}$$

где s_u и $\overline{u}$ — соответственно стандартное отклонение и среднее значение амплитуды, а I^*_{1u} — устойчивое значение первого амплитудного инварианта, часто близкое к 0,8 на ранних стадиях нагружения многих материалов. Нарушение соотношений (1) и (2) можно рассматривать в качестве АЭ диагностического признака наступления момента локализации и упорядочения процесса дефектообразования.

На рис. 1 приведены некоторые результаты практического применения метода инвариантов на примере диагностики предразрушающего состояния стандартных образцов стали 95Х18 при их одноосном нагружении до разрушения с постоянной скоростью деформации. (Эта сталь часто используется для изготовления подшипников и других элементов двигателей, работающих в агрессивных средах)

В ходе эксперимента сигналы АЭ регистрировались, оцифровывались и обрабатывались установкой АП-71Э собственной разработки [2]. Измерялись амплитуда, длительность и временной интервал следования каждого импульса АЭ, по которым затем рассчитывались требуемые статистические характеристики источника АЭ за каждую секунду нагружения. Видно, что до 120-й секунды нагружения хорошо выполняются соотношения 1 и 2 (рис. 1 а). Это позволяет говорить о пуассоновском виде и чисто случайном характере процесса накопления микронесплошностей на этих стадиях деформации. Видно так же, что начиная со 120-ой секунды нагружения (деформация 2,16%) нарушается инвариантность как временных (1), так и амплитудных инвариантных соотношений (2), а значения их информационных параметров начинают заметно отличаться от нуля (рис. 1 б). Затем, начиная со 135-ой секунды (деформация 2,4%) наблюдается явное падение (до значений порядка 0,5...0,6) инвариантных соотношений (1), (2) и резкое увеличение значений их информационных параметров. Появление этих отклонений позволяет достаточно надежно диагностировать момент наступления предразрушающего состояния.

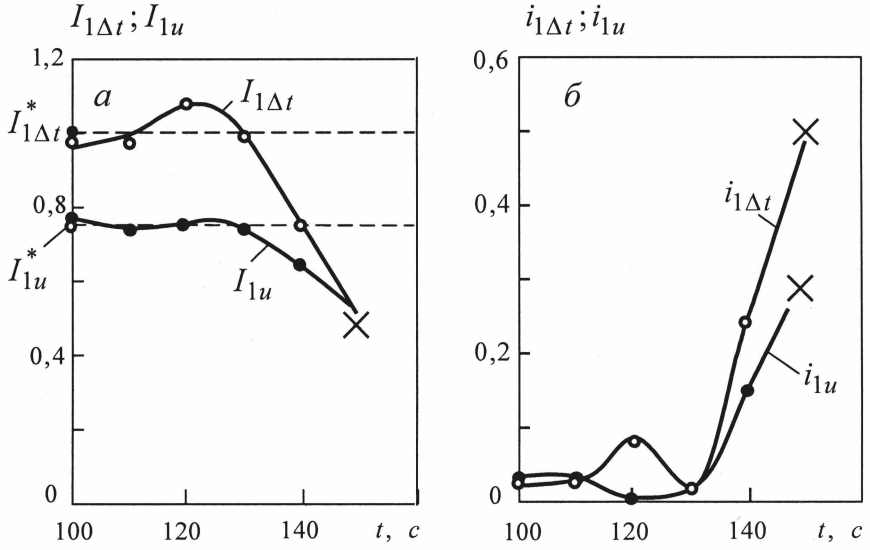


Рис. 1. Графики изменения инвариантных соотношений (а) и информационных параметров (б) в процессе нагружения образца стали 95Х18; крестиками показан момент разрушения.

Таким образом, диагностика предразрушающего состояния по методу инвариантов АЭ дает хорошие результаты. Вместе с тем, экспериментальное определение инвариантных соотношений в реальном времени требует использования достаточно быстродействующих устройств и может представлять сложную задачу при анализе высокоинтенсивных потоков АЭ. В этой ситуации на первый взгляд

кажется заманчивым уменьшение анализируемой интенсивности потока и определение степени опасности дефекта по выборочной статистике, например, каждого m-го импульса АЭ с последующей коррекцией результатов. Например, авторы работы [4] действительно рекомендуют проводить такое «прореживание» потока АЭ перед вычислением временных инвариантных соотношений.

Проблема информативности «прореженных» потоков АЭ подробно была исследована нами ранее [6], где показано, что разрежение потока АЭ путем выборки каждого m-го импульса приводит к регистрации потока Эрланга, уже при модуле пересчета m порядка 4...10 малочувствительного к виду исходного потока. В подтверждение этого вывода, на рис. 2 приведены полученные нами экспериментальные зависимости первого временного инварианта АЭ и его информационного параметра (1) в процессе описанных выше испытаний образцов стали 95Х18 при разных модулях пересчета m. 1 — исходный поток (модуль пересчета $m = 1$); 2 — $m = 4$; 3 — $m = 10$.

Видно, что наиболее чувствительны к динамике процесса накопления повреждений экспериментальные оценки первого временного инвариантного соотношения и информационного параметра исходного потока. В случае же «прореживания» потока регистрируемых импульсов АЭ путем выборки каждого m-го импульса наблюдается сильное падение чувствительности метода инвариантов (т. е. инвариантные соотношения и их информационные параметры становятся практически независимыми от стадий нагружения и деформации).

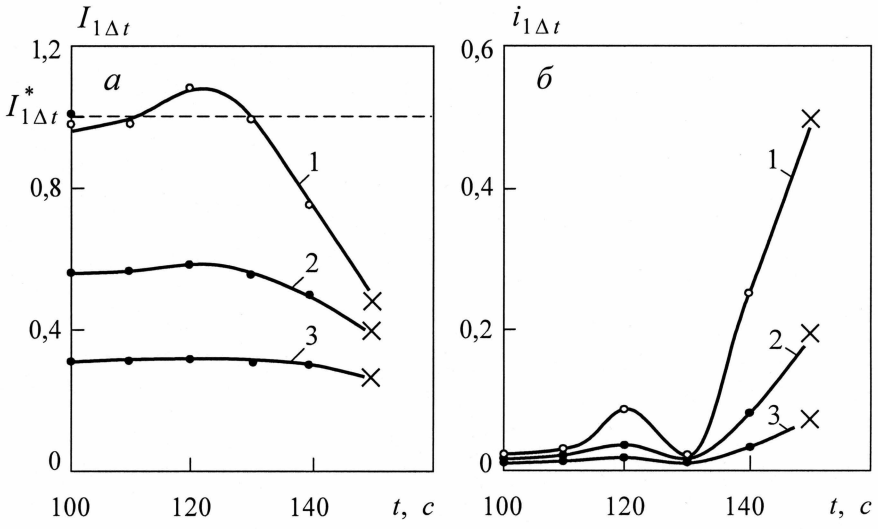


Рис. 2. Падение чувствительности метода инвариантов при «прореживании» потока АЭ. Крестики — момент разрушения. а — экспериментальные графики первого инвариантного соотношения при разных модулях пересчета m; б — экспериментальные зависимости информационного параметра первого временного инварианта АЭ.

Таким образом, прореживание потока АЭ резко снижает случайность свойств исходного потока, вследствие чего предлагаемый в последнее время рядом исследователей способ повышения быстродействия метода инвариантов, заключающийся в использовании для анализа степени опасности развивающихся дефектов

«прореженных» потоков или потоков Эрланга представляется нам бесперспективным.

Нами также установлено, что метод инвариантов АЭ носит междисциплинарный характер, и в силу высокой чувствительности к процессам упорядочения структуры имеет неплохие перспективы также и в задачах идентификации фазовых переходов типа «порядок–беспорядок» в твердых телах и в ходе физико-химических процессов в жидких средах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 09-08-00283-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Буйло С. И.* О связи кинетики деформации и микроразрушения твердых тел с параметрами сопутствующего акустического излучения // Тез. докл. 14-ой конф. по тепловой микроскопии «Структура и прочность материалов в широком диапазоне температур», Воронеж: ВПИ, 1992, С. 49.

[2] *Буйло С. И.* Физико-механические и статистические аспекты повышения достоверности результатов акустико-эмиссионного контроля и диагностики. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. 192 с.

[3] *Builo S. I.* Diagnostics of the Predestruction State Based on Amplitude and Time Invariants of the Flow of Acoustic-Emission Acts. // Rus. J. of Nondestructive Testing. 2004. Vol. 40. № 8. pp. 561–564.

[4] *Попов А. В., Косенков И. В., Жумай В. Э.* Модификация критерия оценки акустико-эмиссионных процессов на основе инвариантов // Техн. диагностика и неразрушающий контроль, 2007, № 3, С. 40–41.

[5] *Буйло С. И.* Об информативности метода инвариантов при анализе прореженных потоков акустической эмиссии // Дефектоскопия. 2009, № 11, С. 41–45.

[6] *Буйло С. И.* Искажение параметров сигналов АЭ и некоторые особенности восстановления статистических характеристик источников излучения // Техн. диагностика и неразрушающий контроль, 1989, № 1, С. 15–23.

Builo S. I. *Diagnostics of Predestructive State of Materials on Acoustic Emission Invariants*. Specific features of the diagnostics of a predestructive state using the method of amplitude and time invariants of acoustic emission (AE) are considered. It is shown that «resampling» of a stream by measuring each m-th pulse reduces the randomness of the properties of the initial AE stream. This makes it impossible to determine the degree of hazard of a flaw on the basis of some statistical parameters of resampled Erlang streams even at relatively small recalculation coefficients.

ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КОНУСА

Бунтин Д. А.

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

Изучение перехода ламинарного течения к турбулентному в пограничных слоях при сверхзвуковых скоростях является крайне важной задачей, поскольку поверхностное трение и тепловые нагрузки на летательный аппарат сильно зависят от состояния течения на его поверхности. В случае малых начальных амплитуд линейный рост возмущений пограничного слоя приводит к нелинейным взаимодействиям, благодаря которым и происходит турбулизация течения. На данный момент установлено, что наиболее неустойчивым типом возмущений при гиперзвуковых скоростях являются акустические возмущения, так называемая вторая или мэковская мода неустойчивости. Именно ее рост приводит к турбулизации течения в пограничном слое. Линейная стадия развития волн достаточно хорошо изучена. В то же время нелинейная стадия, которая может занимать половину протяженности перехода, практически не исследовалась. В данной работе проведено первое детальное изучение нелинейных процессов приводящих к турбулентности в гиперзвуковом пограничном слое.

1. Экспериментальное оборудование. Исследования выполнялись в аэродинамической трубе Т-326 ИТПМ СО РАН при параметрах набегающего потока: $M = 5{,}95$, $Re_1 = 12,5 \cdot 10^6$ м$^{-1}$. Измерения проводились при помощи термоанемометра постоянного тока. Датчики термоанемометра были изготовлены из вольфрамовых проволок длиной 1 мм и диаметром поперечного сечения 5 мкм. Постоянная и переменная компонента сигнала термоанемометра записывалась при помощи двух 12-битных АЦП в память компьютера. Частота оцифровки сигнала составляла 5 МГц. Модель представляла собой остроконечный стальной конус длиной 500 мм и углом полураствора 7 градусов. Радиус закругления носика конуса не превышал 0,1 мм. Модель устанавливалась под нулевым углом атаки.

2. Статистический и биспектральный анализ данных.Для определения эффектов нелинейности использовался статистический и биспектральный анализ. Статистический анализ дает интегральную характеристику нелинейным процессам, тогда как при помощи биспектрального метода можно определить детали нелинейного взаимодействия. Для статистического анализа рассчитываются следующие коэффициенты:

$S = \frac{E\{(x_{mean}-x)^3\}}{\sigma^3}$ — коэффициент асимметрии (skewness),

$K = \frac{E\{(x_{mean}-x)^4)\}}{\sigma^4}$ — коэффициент эксцесса (kurtosis),

где $E\{\}$ — функция математического ожидания, σ — дисперсия, x — сигнал.

Коэффициент асимметрии характеризует отклонение от симметрии полученного распределения. Для гауссового распределения $S = 0$. Коэффициент эксцесса

характеризует уширение (либо сужение) сигнала относительно гауссового распределения. Для распределения Гаусса $K = 3$. Основные положения биспектрального анализа приведены ниже. Моменты (кумулянты) второго и третьего порядка в общем виде записываются как [1]:

$$c_2(k) = E\{x^*(n)x(n+k)\}, \quad c_3(k,l) = E\{x^*(n)x(n+k)x(n+l)\},$$

где $x(n)$ — измеренный сигнал; индекс «*» означает комплексное сопряжение. Фурье преобразование от моментов соответствующих порядков дают спектр мощности и биспектр [1]:

$P(f) = \sum_k c_2(k)e^{i2\pi kf} = E\{X^*(f)X(f)\}$ — спектр мощности,

$B(f_1, f_2) = \sum_{k,l} c_3(k,l)e^{i2\pi(f_1 k + f_2 l)} = E\{X^*(f_1+f_2)X(f_1)X(f_2)\}$ — биспектр,

где $X(f)$ — Фурье-преобразование сигнала $x(n)$.

В силу свойств симметрии биспектра, достаточно знать его значения в треугольнике (0,0), (f_N,0), ($f_N/2$, $f_N/2$), где f_N — частота Найквиста. Для гауссового распределения сигнала биспектр равен нулю. Поскольку амплитуда биспектра зависит от амплитуды волн, биспектр обычно нормируют на спектр мощности, получая спектр бикогерентности:

$$bic^2(f_1, f_2) = \frac{|B(f_1, f_2)|^2}{P(f_1)P(f_2)P(f_1+f_2)}.$$

Амплитуда бикогерентности обозначает квадратичную степень связанности по фазе волн f_1, f_2 и $f_3 = f_1 + f_2$. Амплитуда бикогрентности может принимать значения от 0 (что соответствует независимым волнами) до 1 (что соответствует полностью связанными волнами). Таким образом, если амплитуда бикогерентности для частот f_1, f_2 отлична от нуля, это означает, что волны с частотами f_1, f_2 и $f_3 = f_1 + f_2$ нелинейно связаны. В данной работе графики представлены в области $0 < f_1, f_2 < 400$ кГц, предоставляя избыточную информацию (графики симметричны относительно линии $f_1 = f_2$). Бикогерентность рассчитывалась по 512 точкам, что соответствует частотному разрешению 9,79 кГц.

3. Результаты. Вплоть до сечения $R = \sqrt{Re_1 x} = 1830$ ($x = 212$ мм, x — координата вдоль образующей конуса) нелинейных взаимодействий в пограничном слое не наблюдается, коэффициенты эксцесса и асимметрии соответствуют гауссовому распределению. Далее вниз по потоку в слое максимальных пульсаций начинают появляться нелинейные взаимодействия, которые постепенно растут и к сечению $R = 2230$ ($x = 315$ мм) затухают. На рис. 1 показана характерная картина нелинейных взаимодействий. Пунктирная линия на рисунке — линия симметрии графика; сплошная линия задается уравнением $f_1 + f_2 = f_{II}$, где f_{II} — частота локального максимума в Фурье-спектре сигнала, соответствующего второй моде возмущений. Взаимодействие происходит в широком диапазоне частот вдоль линий $f_1 + f_2 = f_{II}$. Таким образом, в нелинейном взаимодействии участвуют волны $f_1, f_2, f_3 = f_1 + f_2 \approx f_{II}$. Выделяется центр взаимодействия $(f_1, f_2) \approx$ (125 кГц, 175 кГц), $f_3 = f_1 + f_2 = 300$ кГц $\approx f_{II}$. Следует отметить, что частоты 125 и 175 кГц близки к частоте субгармоники второй моды ($1/2 f_{II} \approx 155$ кГц), что указывает на субгармонический резонанс. Впервые такой тип нелинейного взаимодействия был получен в работе [2]. Поскольку частота субгармоники лежит

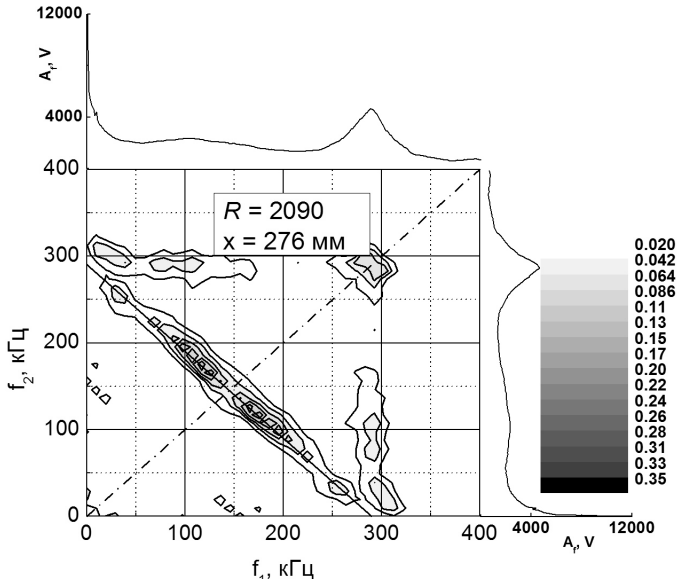


Рис. 1. Спектр бикогерентности в слое максимальных пульсаций

в области, соответствующей пульсациям первой моды, то здесь, вероятно, происходит межмодовое взаимодействие. Хорошо видно ранее полученное в работах [3,4] взаимодействие на частотах $(f_1, f_2) = (300$ кГц, 300 кГц$) \approx (f_{II}, f_{II})$. Т. е. за счет нелинейных механизмов происходит генерация гармоники волн второй моды. Выделяется область взаимодействия вдоль линии $f_1 \approx 295$ кГц. Интересно отметить, что частота третьей взаимодействующей волны $(f_1 \approx 100$ кГц$) + (f_2 \approx 300$ кГц$) \approx \approx (f_3 = f_1 + f_2 = 400$ кГц$)$ примерно соответствует спектральной составляющей $3/2 f_{1/2} \approx 430$ кГц, которая часто наблюдается при субгармоническом резонансе на дозвуковых скоростях [5]. Измерения поперек пограничного слоя показывают, что нелинейные процессы присутствуют выше и ниже слоя максимальных пульсаций. На рис. 2 показано распределение статистических коэффициентов S и K для сечения $R = 2230$ (x = 315 мм). Несмотря на то, что нелинейные взаимодействия квадратичного типа практически затухли в слое максимальных пульсаций, по отклонениям коэффициентов асимметрии и эксцесса можно увидеть, что нелинейные процессы бурно протекают выше и ниже критического слоя. Слева от статистических коэффициентов показаны профили среднего напряжения E и среднеквадратичных пульсаций напряжения $<e>$ датчика термоанемометра. Координата y нормирована на толщину пограничного слоя δ. Следует отметить, что здесь, в отличие от других сечений, отклонение от гауссового распределения значений S и K выходит за пограничный слой, и пропадает на высоте $y/\delta = 1.55$. Вблизи стенки в спектрах бикогерентности наблюдаются сильные нелинейные взаимодействия в области низких частот. При увеличении координаты y интенсивность взаимодействия на низких частотах спадает, и в критическом слое практически исчезает. Зато появляется слабое взаимодействие вдоль линии субгармонического резонанса $f_1 + f_2 = f_{II}$. При увеличении y фазово-связанные волны вдоль линии $f_1 + f_2 = f_{II}$ пропадают, нелинейные процессы начинают возникать во всей области ниже линии субгармонического резонанса, достигая своего максимума у границы погра-

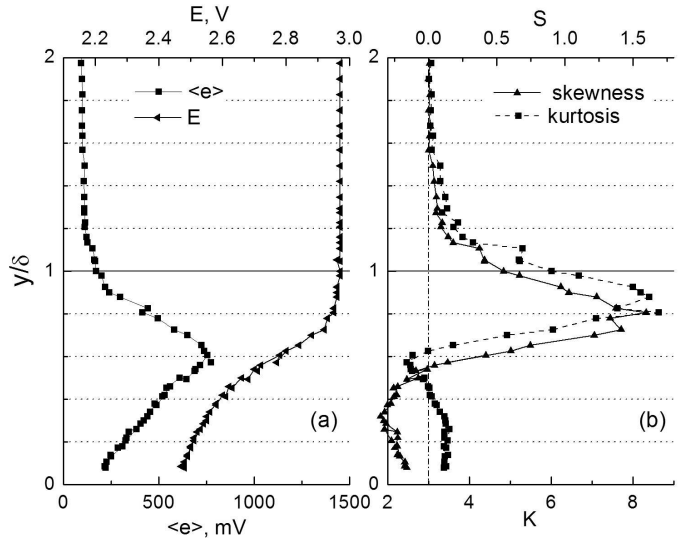


Рис. 2. Среднее напряжение E и среднеквадратичные пульсации $<e>$ на датчике термоанемометра (слева); коэффициенты эксцесса K и асимметрии S (справа)

ничного слоя (рис. 3, $y/\delta = 0{,}98$). В отличие от предыдущих сечений фазово-связанные волны не пропадают при выходе из пограничного слоя. Однако же область взаимодействующих волн уменьшается до 100–150 кГц и значение бикогерентности падает. Амплитуда бикогерентности перестает показывать наличие нелинейных процессов лишь на высоте, где коэффициент ассимметрии принимает значение 0 (рис. 2). Хотя график распределения среднего напряжения не показывает каких-либо искажений средних параметров потока у границы пограничного слоя и выше, тем не менее, выход нелинейных процессов и пульсаций массового расхода за пограничный слой (как можно заметить из рис. 2), несомненно, говорит о начале образования турбулентного пограничного слоя.

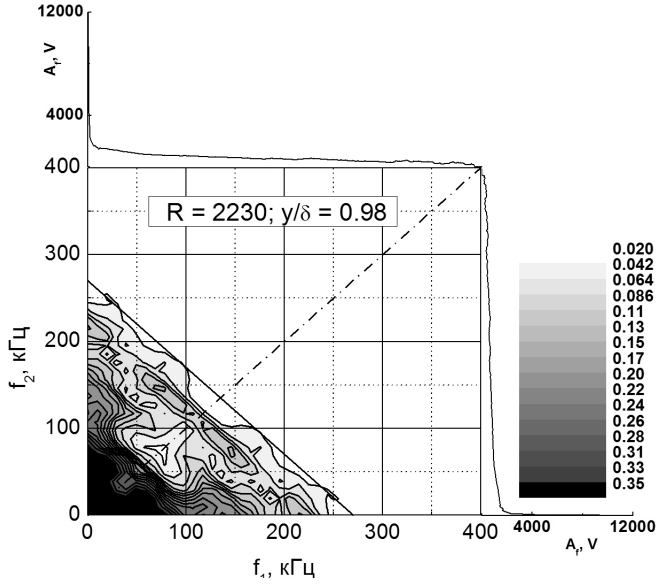


Рис. 3. Спектр бикогерентности у верхней границы пограничного слоя

4. Заключение. Получено, что основным типом нелинейных взаимодействий в критическом слое являются взаимодействия в широком диапазоне частот вдоль линии $f_1 + f_2 = f_{II}$ с максимумом, близким к частоте субгармоники второй моды, что указывает на субгармонический резонанс с расстройкой. Поскольку частота субгармоники второй моды лежит в области частот, соответствующей первой моде возмущений, здесь происходит межмодовое взаимодействие. Показано нелинейное взаимодействие, приводящее к возбуждению гармоники второй моды, ранее полученное в работах других авторов. Нелинейные взаимодействия в области низких частот развиваются также выше и ниже критического слоя. Причем нелинейные процессы в областях выше и ниже критического слоя интенсивно протекают даже тогда, когда в слое максимальных пульсаций нелинейные взаимодействия (квадратичного типа) уже практически исчезли. На поздних стадиях перехода нелинейные процессы выходят за пограничный слой, формируя турбулентный пограничный слой.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «РНПВШ» №2.1.1/3963 и гранта РФФИ (№ 09-08-00679).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Nikias C. L., Raghuveer M. R.* Bispecrum estimation: a digital signal processing framework // IEEE. 1987. V. 75. № 7. pp. 184–188.

[2] *Shiplyuk A. N., Bountin D. A., Maslov A. A., Chokani N.* Nonlinear mechanisms of the initial stage of the hypersonic boundary layer transition // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2003. v.44, № 5. pp. 654–659.

[3] *Kimmel R. L., Kendall J. M.* Nonlinear disturbances in a hypersonic boundary layer // AIAA Paper 91-0320. 1991.

[4] *Chokani N.* Nonlinear spectral dynamics of hypersonic laminar boundary layer flow // Phys. Fluids. 1999. № 12. pp. 3846–3851.

[5] *Kachanov Y. S.* Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // Annu. Rev. Fluid. Mech. 1994. № 26. pp. 411–482.

Bountin D. A., Maslov A. A. *Basic mechanisms of nonlinear interacion in boundary layer in hypersonic flow around a cone*. Studying of laminar-turbulent transition in hypersonic boundary layers is one of the major problems, because drag friction and heat load on a vehicle strongly depend on the flow state on the vehicle surface. In a case of small initial amplitudes, a linear growth of boundary layer disturbances leads to nonlinear interactions, due to which a flow becomes turbulent. At the present moment it is established that the most unstable type of disturbances at hypersonic speeds are acoustic waves, so called second or Mack mode. The growth of this mode leads to turbulent flow in a boundary layer. Linear stage of transition in hypersonic boundary layer is investigated quite well. But nonlinear stage, which can cover a half of the transition length, is almost not studied. The first detailed investigation of nonlinear processes is given in the present work.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛЕГКИХ БЕТОНОВ, СОДЕРЖАЩИХ ТЕХНОГЕННОЕ СЫРЬЕ

Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Окороков Е. П., Павлова Л. Н.

НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону

Легкие бетоны представляют собой универсальный строительный материал (конструкционного, конструкционно-теплоизоляционного и теплоизоляционного назначения), позволяющий при его рациональном использовании решать многие актуальнейшие задачи современного строительства и одновременно — экологические, ресурсосберегающие и экономические проблемы за счет утилизации техногенных отходов. Из техногенных отходов наиболее пригодны для использования в качестве заполнителей в технологии легких бетонов породы шахтных отвалов и золошлаковые отходы. Опыт применения горелых пород в легких бетонах невелик [1]. Наиболее известно применение при производстве легких бетонов зол и золошлаковых отходов [2, 3].

Характерной особенностью этих отходов является наличие пористости, что обусловлено спецификой их происхождения. Источником образования пор является дегидратация глинистых минералов и диссоциация частиц известняка, гипса в процессе высокотемпературного обжига при сжигании топлива в топках и самообжиге пород в отвалах.

Наличием пористости с развитой поверхностью объясняется пониженная насыпная плотность заполнителей из такого техногенного сырья. По этому показателю заполнители из горелых пород шахтных отвалов и золошлаковых отходов сходны с искусственными пористыми заполнителями. Но в отличие от последних заполнители из шахтных пород и золошлаковых отходов имеют большую прочность, определяемую сдавливанием в цилиндре, и более низкие значения по водопоглощению. Благодаря жесткой структуре кристаллической решетки, микропоры в частицах заполнителя не могут переходить в открытые поры, и молекулы воды не проникают в пространство микропор; поэтому водопоглощение таких заполнителей невысокое.

Пористые заполнители из техногенного сырья высококонкурентны в сравнении с керамзитом, а бетоны на таких заполнителях дешевле, чем на обжиговых заполнителях. Для снижения плотности бетона и улучшения его свойств можно применять комбинированные заполнители: щебень, керамзит, отсевы дробления пород, керамзитовый песок золошлаковую смесь, взятые в различных соотношениях. Подбор оптимального соотношения мелкого и крупного заполнителей из дробленых горелых пород и золошлаковых отходов позволяет сократить расход дефицитного и дорогостоящего керамзита на 25–50%, цемента — от 10 до 40% при сохранении заданных значений прочности и плотности бетона. В таблице 1 приведены составы легкого конструкционного бетона, а в таблице 2 — физико-механические свойства таких бетонов.

№ состава	Класс/марка бетона	Расход материалов, кг/см^3							Жесткость смеси, с	Осадка конуса, см	Экономия цемента, %
		Цемент М400	Зола	Золо-шлаковая смесь	Молотая горелая порода	Отсев горелой породы	Песок	Вода			
1	В7,5/100	165	-	-	150	1510	-	285	5-10	-	28,3
2	В10/150	190	-	-	180	1450	-	289	5-10	-	22,4
3	В12,5/150	225	-	-	180	1415	-	295	5-10	-	22,4
4	В15/200	250	-	-	180	1380	-	310	5-10	-	21,9
5	В22,5/300	330	-	-	180	1370	-	317	5-10	-	20,9
6	В7,5/100	150	150	-	-	1500	-	235	-	3-4	34,8
7	В10/150	180	180	-	-	1510	-	250	-	3-4	26,5
8	В12,5/150	210	180	-	-	1470	-	265	-	3-4	27,6
9	В15/200	230	200	-	-	1400	-	285	-	3-4	28,1
10	В22,5/300	310	200	-	-	1320		297	-	3-4	27,9
11	В7,5/100	150	150	1620	-	-	-	178	5-10	-	34,8
12	В10/150	170	150	1590	-	-	-	185	5-10	-	30,6
13	В12,5/150	185	180	1510	-	-	-	245	5-10	-	36,2
14	В15/200	210	200	1470	-	-	-	265	5-10	-	34,4
15	В22,5/300	300	200	1380				310	5-10	-	30,2
16	В7,5/100	185	-	-	-	1470	120	275	-	3-4	19,6
17	В10/150	210	-	-	-	1385	150	288	-	3-4	14,3
18	В12,5/150	250	-	-	-	1340	150	295	-	3-4	13,8
19	В15/200	295	-	-	-	1310	150	315	-	3-4	7,8
20	В22,5/300	360	-	-	-	1240	150	325	-	3-4	16,3

Таблица 1. Составы легких конструкционных бетонов с использованием техногенного сырья

На рисунке 1 показано влияние добавок тонкодисперсных фракций золы и горелой шахтной породы на прочность легкого бетона, на рисунке 2 — изменение прочности бетона при замене части цемента золой уноса.

Наличие в составе бетона золы и активного заполнителя из горелых пород обеспечивает прирост его прочности после тепловой обработки. В возрасте 28 су-

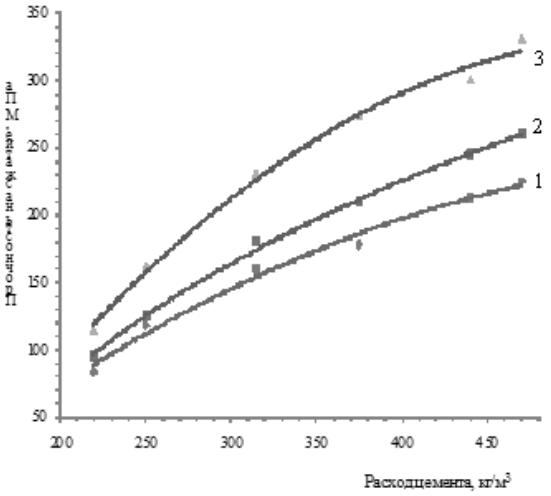


Рис.1. Влияние тонкодисперсных добавок золы и горелой породы на прочность конструкционного легкого бетона
1 – контроль (без добавок)
2 – с золой (200 кг/м3)
3 – с горелой породой (180 кг/м^3)

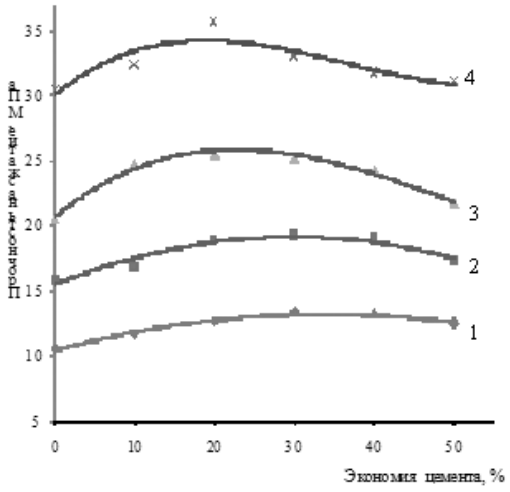


Рис. 2. Изменение прочности на сжатие конструкционного легкого бетона при замене части цемента золой уноса
1 – бетон класс В 7,5 (марка 100)
2 – бетон класс В 10 (марка 150)
3 – бетон класс В 15 (марка 200)
4 - бетон класс В 22,5 (марка 300)

№ состава	Класс/марка бетона	Отпускная прочность, %	Прочность, МПа (после тепловой обработки)		Прочность, МПа (после 28 сут. твердения в естеств. условиях)		Марка по морозостойкости, F	Марка по водонепроницаемости, W	Начальный модуль упругости, МПа ($E \cdot 10^{-3}$)	Пористость, %	Средняя плотность бетона в сухом состоянии, кг/м^3
			на сжатие	при изгибе	на сжатие	при изгибе					
1	B7,5/100	70	7,3	1,27	11,8	1,52	F50	–	13,40	29,8	1825
6	B7,5/100	70	7,8	1,36	12,1	1,63	F50	W2	13,35	30,8	1800
11	B7,5/100	70	8,2	1,68	13,3	2,24	F50	–	14,08	26,1	1920
16	B7,5/100	70	8,0	1,49	12,6	1,81	F35	–	12,87	31,7	1775
2	B10/150	70	10,7	1,47	16,9	1,74	F75	–	14,50	30,0	1820
7	B10/150	70	10,9	1,55	17,2	1,89	F75	W2	14,85	28,1	1870
12	B10/150	70	11,3	1,71	18,3	2,61	F75	W2	15,02	26,5	1910
17	B10/150	70	11,1	1,63	17,8	1,98	F50	–	13,33	32,9	1745
3	B12,5/150	90	13,9	1,52	17,3	1,78	F75	W2	15,45	30,2	1820
8	B12,5/150	90	14,1	1,68	17,7	2,03	F100	W4	15,85	28,5	1860
13	B12,5/150	90	14,6	1,82	18,8	2,73	F75	W4	15,97	27,9	1875
18	B12,5/150	90	14,3	1,77	18,3	2,09	F50	W2	14,50	33,1	1740
4	B15/200	100	20,4	2,06	24,0	2,42	F75	W2	15,88	30,4	1810
9	B15/200	100	21,6	2,12	26,7	2,54	F100	W4	16,25	29,6	1830
14	B15/200	100	21,9	2,30	28,9	3,28	F100	W4	17,15	26,7	1880
19	B15/200	100	20,7	2,18	25,1	3,02	F75	W2	15,38	32,5	1755
5	B22,5/300	100	30,3	2,28	34,9	2,89	F100	W2	18,80	29,6	1830
10	B22,5/300	100	31,3	2,54	37,8	3,12	F100	W4	18,93	29,2	1840
15	B22,5/300	100	31,7	2,73	41,6	4,17	F150	W6	19,38	25,3	1890
20	B22,5/300	100	30,9	2,66	36,7	3,36	F75	W2	17,70	32,7	1750

Таблица 2. Физико-механические свойства легкого конструкционного бетона, содержащего техногенное сырье

ток прирост прочности составил от 18,6 до 32%, а в возрасте 180 суток для бетонов классов В7–В15 — от 18 до 20%, для бетонов классов В3,5–В5 — от 15,4 до 28,0%. Остаточная влажность легких бетонов после пропаривания значительно снижалась и составляла 5,3–6,0% (у контрольных образцов — 10,4–22,5%), водопоглощение бетонов снижалось на 22,5–27,8%. Эти особенности легких бетонов на материалах из техногенного сырья имеют важное значение для практического использования, так как из-за повышенной монтажной влажности наблюдаются случаи промерзания стен керамзитобетона, а повышенное увлажнение тонкостенных конструкций резко ухудшает микроклимат в помещениях.

Испытание образцов легкого бетона было проведено на модельной установке, имитирующей натурные условия эксплуатации изделий в осложненных условиях (колебания влажности и температуры, действие агрессивных сред). Длительные наблюдения подтвердили хорошие эксплуатационные качества испытываемого бетона; признаков разрушения не обнаружено, капиллярное всасывание и водопоглощение экспериментального бетона в 1,7 раза меньше, а прочность на 18–27% выше, чем у керамзитобетона. Выполненные исследования показывают, что использование золошлаковых отходов и пород шахтных отвалов в технологии легких бетонов приводит к улучшению их прочности, водонепроницаемости, устойчивости к деформационным изменениям, стойкости к действию агрессивных сред и перепадам температур. Эти показатели характеризуют долговечность строительных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Буравчук Н. И., Будницкий В. М., Бражников В. Ф., Мелентьев С. А.* Ресурсосбережение в технологии вяжущих и бетонов // Ростов н/Д: Изд-во Северо-Кавказского научного центра высшей школы. 1999, 176 с.

[2] *Гладков Д. И., Ерохина Л. А., Черных А. С.* Новая технология легких бетонов // Строительные материалы. 1994. № 4. 16.

[3] *Иванов И. А.* Легкие бетоны с применением зол электростанций. М.: 1986. 136 с.

Buravchuk N. I., Gurjanova O. V., Okorokov E. P., Pavlova L. N. *Exploration of physical-mechanical properts of the light betons containing technogenic raw material.* Change of physical-mechanical properts of light betons from their composition and the contents of technogenic raw material as add activations and sealers is displayed.

РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ СПЛАВА SiGe В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКЕ

Бычков А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследовано распределение концентрации Ge в пирамидальных островках и полупроводниковой пленке с волнистой свободной поверхностью, состоящих из сплава SiGe. Построена трехмерная модель островков и пленки. Расчет упругих деформаций был выполнен с использованием метода конечных элементов. Для расчета распределения Ge использованы аппроксимирующие формулы и итерационный алгоритм. Расчет показал, что атомы Ge концентрируются в вершинах пирамидальных островков и на выступах возмущенной поверхности пленки. Перераспределение Ge обеспечивает существенную релаксацию упругой энергии в сплаве SiGe.

Известно [1], что на границе раздела напыленной полупроводниковой $\mathrm{Ge}_\eta\mathrm{Si}_{1-\eta}$ пленки на Si подложке возникает деформация несовместности $\varepsilon_0 = (a_f - a_s)/a_s$, за счет различия постоянных решетки и подложки: для Si постоянная решетки $a_s = 0,5431$ нм, а для пленки $\mathrm{Ge}_\eta\mathrm{Si}_{1-\eta}$ постоянная решетки $a_f = 0,5431 + 0,01992\eta + 0,002733\eta^2$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Согласно [2], релаксация напряжения в пленке при малой деформации несовместности $\varepsilon_0 < 1,5\%$ ($\eta < 0,4$) происходит следующими основными способами: 1) с помощью образования волнистой поверхности (выпуклости, разделенные узкими канавками) на первоначально плоской пленке в процессе ее отжига (неустойчивость Азаро–Тиллера–Гринфельда); 2) путем зарождения дислокаций несовместности (ДН) на границе раздела пленки и подложки. В первом случае неустойчивость первоначально плоской пленки связана с тем, что волнистая поверхность напряженной пленки имеет меньшую суммарную энергию (энергия деформирования + поверхностная энергия) вследствие упругой релаксации напряжения в вершинах выступов. С увеличением толщины пленки последовательно возникают первый, а затем второй механизмы релаксации. Механизмом образования плоской или волнистой поверхности пленки является поверхностная диффузия, которая обеспечивает перенос материала вдоль возмущенной поверхности, которая постепенно переходит в состояние равновесия. Причем установление плоской или волнистой равновесной поверхности зависит от типа возмущения, величины деформации несовместности, толщины пленки и свойств ее материала.

Третьим механизмом релаксации упругой энергии за счет уменьшения упругой энергии $\mathrm{Ge}_\eta\mathrm{Si}_{1-\eta}$ полупроводниковой пленки является неоднородное перераспределение атомов Ge и Si вблизи волнистой поверхности пленки, которые равномерно распределены в случае ее плоской поверхности [2, 3]. Атомы Ge «предпочитают» выступы пленки, а Si — впадины между ними [4]. Расчеты в рамках плоской задачи [4] дают 9% снижение средней плотности упругой энергии в пленке за счет механодиффузии в пленке. Однако расчет [4] не учитывал ряд факторов, влияющих на процесс формирования неоднородности состава пленки с волнистой свободной поверхностью: зависимости упругих модулей пленки от состава и собственную

деформацию за счет разноразмерности атомов Si и Ge. Последнее обстоятельство учитывалось в расчете [5]. Четвертый механизм релаксации связан с уменьшением поверхностной энергии пленки $Ge_\eta Si_{1-\eta}$ при увеличении толщины пленки [6]. Этот механизм релаксации свободной энергии существенен при толщинах пленок меньше 3 нм. В данном сообщении приведены результаты расчетов, продолжающие исследование [3] для полупроводниковой пленки с учетом упомянутых дополнений.

Рассматриваются трехмерные модели полупроводниковой SiGe пленки и SiGe пирамидальных островков на Si подложке. Пленка имеет форму полосы шириной d_0, вытянутой вдоль оси Ox (рис. 1).

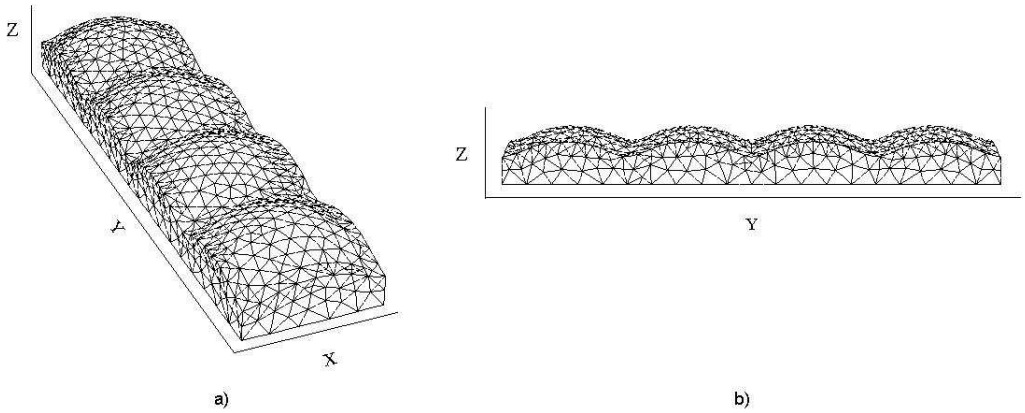


Рис. 1. Вид модельного образца полупроводниковой пленки с волнистой свободной поверхностью (a); вид образца вдоль оси Ox (b).

Будем описывать профиль пленки как $z = h(x, y) = h_0 + h_1(x, y)$, где $h_1(x, y)$ — периодическое возмущение с длинами волн $\lambda_1 = 2\pi a_1$ (вдоль оси Ox) и $\lambda_2 = 2\pi\, a_2$ (вдоль оси Oy), а h_0 — толщина плоской пленки. В данной работе поверхность пленки задавалась в виде двумерной циклоиды, с $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\pi a$. В этом случае форма возмущенной поверхности $h_1(x, y)$ в параметрической форме имеет вид

$$\begin{aligned} x &= au - d\sin u, \\ y &= av - d\sin v, \\ z &= h_0 - d^2/a - d\,(\cos u + \sin v)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u и v — параметры поверхности, а величины a и d имеют смысл, указанный выше. Соотношение (1) учитывает закон сохранения материала пленки при ее возмущении $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_1(u, v)\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}dudv = 0$.

Потеря устойчивости равновесия плоской пленки определяется, аналогично [3], сменой знака у приращения свободной энергии участка поверхности пленки при наложении возмущения на плоскую пленку

$$\delta F = \int_S \tilde{\gamma} dS + \int_S w\; du\, dv - \gamma_0 S - M\varepsilon_0^2 S/2, \tag{2}$$

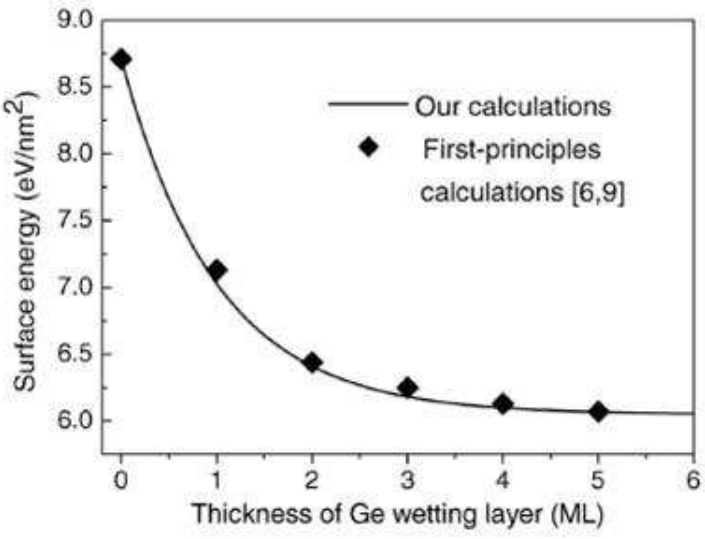


Рис. 2. Зависимость удельной поверхностной энергии γ_{Ge} от толщины пленки Ge (число монослоев) на подложке из Si [6].

где поверхностная жесткость $\tilde{\gamma}(\theta)$ определена формулой $\tilde{\gamma}(\theta) = \gamma(\theta) + \partial^2\gamma/\partial\theta^2$, площадь элемента поверхности и плотность упругой энергии на поверхности пленки в (2) имеют вид

$$dS = \sqrt{[\partial(y,z)/\partial(u,v)]^2 + [\partial(z,x)/\partial(u,v)]^2 + 1}dudv,$$

$$w = \frac{1}{2M}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2.$$

В (2) S — площадь проекции выбранного участка поверхности пленки на плоскость xOy, $M = 2\mu/(1-\nu)$, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона пленки. В нашем случае $\mu = 1,5 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$. Первое и третье слагаемое в (2) определяют приращение поверхностной энергии, второе и четвертое — приращение упругой энергии в пленке.

Расчет упругих напряжений во втором слагаемом (2) выполнен методом конечных элементов (пакет FlexPDE5). При задании возмущенной свободной поверхности пленки циклоида аппроксимировалась отрезками, количество которых менялось с целью достижения необходимой точности расчета. Во всех расчетах подложка предполагалась недеформируемой. Упругие перемещения заданной области малы по сравнению с амплитудами возмущений и не учитывались для определения формы свободной поверхности пленки.

При малых толщинах пленки, расчет должен учитывать уменьшение поверхностной энергии пленки при увеличении ее толщины (рис. 2). В расчетах для пленки $Ge_\eta Si_{1-\eta}$ использовалось следующее выражение для удельной поверхностной энергии

$$\gamma(h(x,y)) = \gamma_{Si}^{\infty} + (c\gamma_{Ge}^{\infty} - (1-c)\gamma_{Si}^{\infty})(1 - exp(-h/a_f)). \qquad (3)$$

В (3) $\gamma(h(x,y))$ — удельная поверхностная энергия пленки Ge толщиной h, γ_{Si}^{∞} — удельная поверхностная энергия полубесконечного кристалла Si, γ_{Ge}^{∞} — удельная

поверхностная энергия полубесконечного кристалла Ge, $c = c(x, y, z)$ — концентрация Ge в пленке.

Связь между неоднородностью концентрации Δc атомов Ge и деформацией ε определялась согласно [5]:

$$\Delta c = \frac{1}{3\varepsilon_0}(Tr\varepsilon - \overline{Tr\varepsilon}) + (\bar{c} - c). \tag{4}$$

При этом предполагалось постоянство количества атомов Ge

$$\frac{1}{V}\int_\Omega \Delta c(x, y, z)dV = 0,$$

$\bar{c}$ — средняя концентрация атомов, а $\overline{Tr\varepsilon} = \frac{1}{V}\int_\Omega \Delta c(x, y, z)dV$ — средняя деформация дилатации.

Для вычисления $c = c(x, y, z)$ использовалась процедура, состоящая из набора последовательных итераций. На первом шаге задавалось начальное распределение $c = c_0$ и вычислялась величина упругой энергии в пленке $E = E_0$. Далее, из (4), вычислялось $c_1 = c_0 + \Delta c$ и новое значение $E = E_1$ и т. д. В итоге, было получено значение $c = c_{min}$ соответствующее минимальной упругой энергии в пленке.

Использовалась следующая расчетная формула для $c = c(x, y, z)$

$$c_{i+1,j} = c_{i,j} + \Gamma\left[\frac{1}{3\varepsilon_0}\left(Tr\ \varepsilon_i - \overline{Tr\ \varepsilon_i}\right) - (\bar{c} - c_{i,j})\right],$$

где $c_{i,0} = c_i$, Γ — малый положительный параметр ($\Gamma \leqslant 10^{-2}$), $c_{i,j}$ сходится при $j \to \infty$ к некоторому $c_{i,\infty} = c_{i+1}$, т. е.

$$\frac{1}{3\varepsilon_0}\left(Tr\ \varepsilon_i - \overline{Tr\ \varepsilon_i}\right) - (\bar{c} - c_{i,\infty}) = 0.$$

При расчете распределения $c = c(x, y, z)$, учитывалось выполнение условия $0 \leqslant c(x, y, z) \leqslant 1$.

Расчеты показали, что доля Ge в вершинах пирамидального островка и на возвышениях возмущенной поверхности пленки значительно превышает ее среднее значения, в тоже время она уменьшается на границе островок–подложка и пленка–подложка. Обнаружена зависимость изменения концентрации от амплитуды возмущения пленки. При увеличении амплитуды возмущения неоднородность растет. Аналогичный эффект наблюдается при росте островков. Для более высоких островков, на поздних стадиях роста, значение увеличивается. Сравнение полученных результатов с расчетом, не учитывающим механизм механодиффузии, показывает существенную релаксацию упругой энергии в пленке, что согласуется с результатом [4], полученным для плоской задачи.

Снижение упругой энергии в пленке с волнистой поверхностью по сравнению с плоской пленкой достигает 10%, что близко к оценке этого релаксационного механизма, полученной в [4]. Это явление приводит к ужесточению условий перехода от плоской пленки к пленке с волнистой поверхностью по сравнению с расчетом, в котором не учитывается данное явление.

Автор благодарит Карпинского Д. Н. за ценные рекомендации при подготовке настоящей статьи. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00050а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Berbezier I., Ronda A.* SiGe nanostructures // Surface Science Report, 2009, V.54, pp. 47–98.

[2] *Paul D. J.* Si/SiGe heterostructures: from material and physics to devices and circuits // Semicond. Sci. Technol. 2004. V.19. R75–R108.

[3] *Бычков А. А., Карпинский Д. Н.* Влияние процессов релаксации на форму поверхности полупроводниковой пленки на подложке // Актуальные проблемы прочности: сборник трудов XLVIII Международной конференции, посвященной памяти М. А. Криштала. Тольятти: ТГУ, 2009. С. 220–221.

[4] *Wu C. C., Hull R.* Composition and stress fields in undulated thin films // J. Appl. Phys., 2006. V.100. 083510.

[5] *Digiuni D., Gatti R., Montalenti F.* Aspect-ratio-dependent driving force for nonuniform alloying in Stranski–Krastanow islands // Physical review, 2009. V. 80. 155436.

[6] *Li X.-L., Yang G. W.* Theoretical determination of contact angle in quantum dot self-assembly // Appl. Phys. Lett., 2008. V.92. 171902.

Bychkov A. A. *Equilibrium distribution the component of alloy SiGe in the semiconductor film.* Distribution of concentration Ge in pyramidal islands and a semi-conductor film with the wavy free surface, consisting of alloy SiGe is investigated. The three-dimensional model of islands and a film is constructed. Calculation of elastic deformations has been executed with use of a finite elements method. For calculation of distribution Ge the approximating formulas and iterative algorithm are used. Calculation has shown, that atoms Ge concentrate in tops of pyramidal islands and on ledges of the indignant surface of a film. Redistribution Ge provides an essential relaxation of elastic energy in alloy SiGe.

МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОДВЕРЖЕННЫХ КОРРОЗИОННОМУ ИЗНОСУ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УЛЬТРАФИОЛЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Гиниятуллин Р. Р.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Разработана установка и проведены исследования образцов, находящихся в агрессивной среде и подвергающихся воздействию ультрафиолетового излучения. Для оценки степени коррозионного износа использовался экспериментально-теоретический подход. Ультрафиолетовое излучение в рассмотренном случае замедляет процесс коррозии.

Согласно электрохимической теории коррозионного износа в начальный период на поверхности металла, находящегося в агрессивной среде, образуется тонкая пленка — пассивирующий слой [1, 2]. Пассивирующий слой до достижения определенного потенциала предотвращает развитие коррозионного процесса. При достижении определенного потенциала пассивирующий слой разрушается и начинается коррозионный износ. Возникает вопрос, влияет ли ультрафиолетовое излучение на разрушение или сохранение пассивирующего слоя и на коррозионный износ в целом? Известно, что ультрафиолетовое излучение — электромагнитное излучение, имеющее высокую химическую активность и большую проникающую способность. Разработана установка, позволяющая проводить исследования образцов, находящихся в агрессивной среде и подвергающихся воздействию ультрафиолетового излучения (рис.

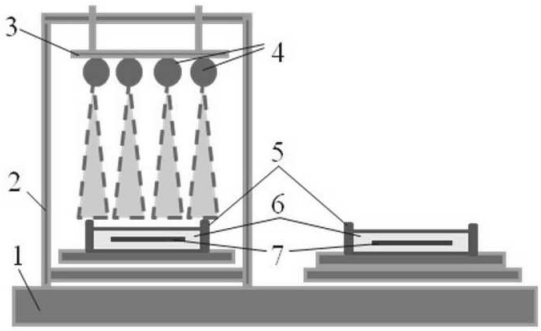


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

Экспериментальная установка размещается на столе 1 и включает в себя каркас 2 для крепления кронштейнов 3, на которые подвешиваются ультрафиолетовые лампы 4. Включает также две емкости 5 для агрессивной среды 6. Одна из емкостей размещается непосредственно под лампами 4, а другая располагается вне зоны излучения ламп 4 — это контрольная емкость. В емкости 5 помещаются исследуемые образцы 7, затем в емкости заливается необходимая агрессивная среда. Необходимость контрольной емкости очевидна — одновременно исследуются два одинаковых образца, один из которых подвергается излучению, а другой — нет.

Таким образом, легко исследовать влияние ультрафиолетового излучения на процессы коррозионного износа.

На разработанной установке был проведен цикл исследований. В частности, были рассмотрены образцы круглой формы из стали толщиной 0,6 мм. Образцы помещались в основную и контрольную емкости с агрессивной жидкостью. Образцы находились в агрессивной среде 1055 часов, при этом один из образцов подвергался излучению ультрафиолетовыми лампами в течение 146 часов, а другой — нет. Диаграмма воздействия ультрафиолетового излучения представлена на рис. 2. Толщина образцов после воздействия агрессивной жидкости, для: образца под воздействием ультрафиолета 0.57 мм и образца без воздействия ультрафиолета 0.58 мм. Для оценки степени коррозионного износа образцов определялись их механические характеристики, используя экспериментально-теоретический подход

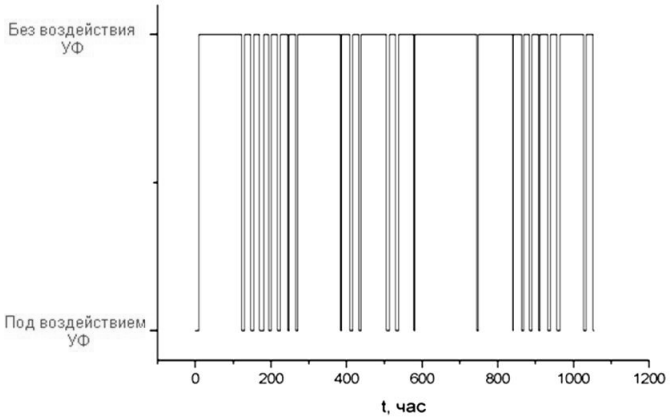


Рис. 2. Режим воздействия на образец ультрафиолетового излучения.

Снимались показания прогиба вершины купола образцов: под воздействием ультрафиолета и без воздействия ультрафиолета. По этим данным строились графики зависимостей «давление–прогиб», показанные на рис. 3, для образцов подвергавшихся и не подвергавшихся воздействию ультрафиолетового излучения.

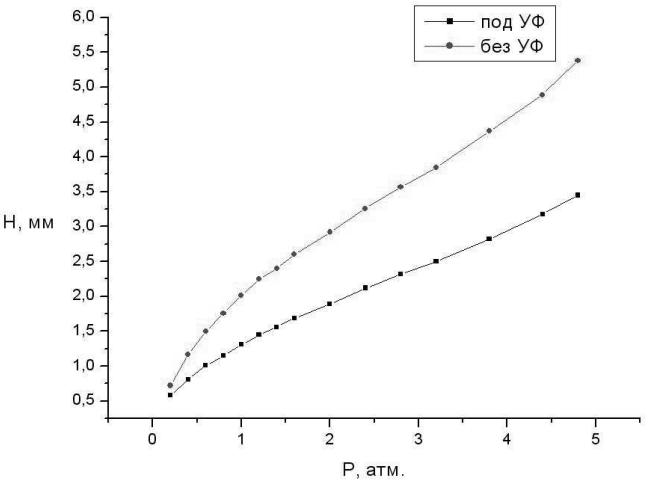


Рис. 3. График зависимости «давление–прогиб».

Анализ результатов показывает, что прогибы образцов, подвергавшихся воздействию ультрафиолетового излучения, меньше, чем у образцов, не подвергавшихся воздействию этого излучения. Очевидно, ультрафиолетовое излучение в рассмотренном случае замедляет процесс коррозии, т. е. способствует более длительному сохранению пассивирующего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Сидоренко С. Н., Якупов Н. М.* Коррозия — союзник аварий и катастроф. Монография. М.: Изд-во РУДН, 2002. 93 с.

[2] *Низамов Х. Н., Сидоренко С. Н., Якупов Н. М.* Прогнозирование и предупреждение коррозионного разрушения конструкций. М.: Изд-во РУДН, 2006. 355 с.

[3] *Нургалиев А. Р., Нуруллин Р. Г., Якупов Н. М., Якупов С. Н.* Предотвращение разрушения строительных конструкций крупногабаритной градирни СК-1200 // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Нижний Новгород, 2006. С. 160–161.

[4] *Нургалиев А. Р., Нуруллин Р. Г., Якупов Н. М.* Исследование механических характеристик металлических мембран в процессе коррозионного износа // Тр. XXI Международной конференции по теории оболочек и пластин, 2005. С. 176–179.

[5] *Нургалиев А. Р., Якупов Н. М.* Исследование механических характеристик тонкостенных элементов конструкций, подверженных коррозионному износу и находящиеся под действием нагрузки // Актуальные проблемы механики сплошной среды к 15-летию ИММ Казанского научного центра Российской академии наук, 2006. С. 244–254.

[6] *Якупов Н. М., Нуруллин Р. Г., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н* Способ испытаний образцов металлических мембран под напряжением и устройство для его осуществления: патент № 2296976, 2007.

[7] *Якупов Н. М., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н.* Методика испытания пленок и мембран в условиях равномерного распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2008. № 11. С. 54–56.

Giniyatullin R. R. *Mechanical characteristics of the thin-walled elements subject to corrosion deterioration at influence of ultra-violet radiation.* Installation is developed and researches of the samples who are in an excited environment and exposed to influence of ultra-violet radiation are conducted. For an estimation of degree of corrosion deterioration the experimentally-theoretical approach was used. Ultra-violet radiation in the considered case slows down corrosion process.

ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СОСТАВНЫХ ТЕРМОНАГРУЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Головин Н. Н., Кувыркин Г. Н.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Изложены результаты решения ряда задач контактного взаимодействия элементов конструкций, выполненных из композитных материалов при термосиловом нагружении.

Рассмотрены особенности работы сложных составных конструкций, состоящих из разнородных деталей, которые в процессе работы нагружаются до высоких температур. К ним относятся изготовленные с использованием композитных материалов на основе углерода выходные патрубки газогенераторов горячего газа, резьбовые узлы соединения термонагруженных трубопроводов и др.

Разрешаемая в данном случае система уравнений включает в себя уравнения нестационарной теплопроводности

$$c\rho\dot{T} = \left(\lambda_{ij}\, T_{,j}\right)_{,i}, \tag{1}$$

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \tag{2}$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{3}$$

где c, ρ — удельная массовая теплоемкость и плотность материала конструкции; T — абсолютная температура, $\dot{(\ )} = \frac{\partial}{\partial t}$, t — время; λ_{ij} — компоненты тензора теплопроводности; $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ — компоненты тензора напряжений, $i, j = 1, 2, 3$; b_i — составляющие вектора массовых сил; ε_{ij} — компоненты тензора деформации; u_i — составляющие вектора перемещения. Соотношения (1)–(3) дополняются условиями однозначности, включающими в себя начальное распределение температуры в каждой точке конструкции

$$T(x_i, 0) = T_0, \tag{4}$$

и граничные условия:

— на поверхности S_T

$$\lambda_{ij} T_{,j} n_i + \bar{\alpha}(T - \tilde{T}_\infty) + \tilde{\varepsilon}\tilde{\sigma}(T^4 - \tilde{T}_f^4) + \rho\nu_n Q = 0, \tag{5}$$

— на поверхности S_σ

$$\sigma_{i\,j} n_j = \tilde{p}_{S_i}, \tag{6}$$

— на поверхности S_u

$$u_i \nu_i = \tilde{u}_\nu. \tag{7}$$

Здесь n_i — составляющие единичного вектора нормали к поверхности; $\bar{\alpha}$ — коэффициент теплообмена; $\tilde{T}_\infty$ — температура окружающей среды; $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$ — коэффициент поглощения излучения и постоянная Больцмана; $\tilde{T}_f$ — температура излучения окружающей среды; ν_n — нормальная линейная скорость уноса массы с нагреваемой поверхности; Q — тепловой эффект термохимического разрушения поверхности материала конструкции.

Кроме того, в рассмотрение введена поверхность возможного контакта двух тел A и B, на которой задаются следующие граничные условия:

$$u_n^A - u_n^B \le \delta_n, \quad \sigma_n^A \le 0, \quad \left|\sigma_r^A\right| \le -\mu\sigma_n^A. \tag{8}$$

Если на границе контактного взаимодействия расположен клеевой слой, то граничные условия (8) дополнены соотношениями

$$u_i^A = u_i^B \ \text{ при } \ 0 < \sigma_n^A \le \left[\sigma_{glue}^+\right] \quad \text{и} \quad \left[\sigma_\tau^A\right] \le \left|\tau_{glue}\right|. \tag{9}$$

Для замыкания разрешаемой системы уравнений (1)–(9) ее необходимо дополнить соотношениями для параметров нагружения

$$\begin{array}{lll} R_i = R_i(t), & \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(x_i, p^*, \ldots), & \tilde{T}_\infty = \tilde{T}_\infty(x_i, p^*, \ldots), \\ \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(x_i, p^*, \ldots), & \tilde{T}_f = \tilde{T}_f(x_i, p^*, \ldots), & \nu_n = \nu_n(x_i, p^*, \ldots), \\ \tilde{P}_{S_i} = \tilde{P}_{S_i}(x_i, p^*, \ldots), & p^* = p^*(t) & \end{array} \tag{10}$$

и определяющими соотношениями в виде

$$\sigma_{i\,j} = C_{ijkl}^* \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \tilde{\varepsilon}_{kl}^{(p)}\right), \tag{11}$$

где C_{ijkl}^* — компоненты переменного в общем случае тензора коэффициентов упругости; $\varepsilon_{kl}^{(T)}$, $\tilde{\varepsilon}_{kl}^{(p)}$ — компоненты тензоров температурной и пластической деформации.

Определение компонент тензора физических констант композитного материала производится в соответствии с моделью неупругого деформирования анизотропных разносопротивляющихся растяжению и сжатию материалов на основе углерода, предложенной в [1]

$$C_{ijkl}^* = C_{ijkl}^* \left(\varepsilon_{mn}, \tilde{\varepsilon}_{mn}^{(p)}, I_{1\varepsilon}, T\right), \tag{12}$$

где $I_{1\varepsilon}$ — первый инвариант тензора деформации, и эндохронная теория неупругого деформирования, распространенная на пространственно армированные композитные материалы и учитывающая различие характеристик компонентов [2]. Параметры определяющих соотношений устанавливаются путем специальной математической обработки результатов одноосных испытаний образцов композитов в характерных для материалов направлениях.

Задача исследования полей температур и термонапряжений в сложных составных конструкциях решается численно методом конечных элементов, реализованным в виде автоматизированных программных комплексов “МАРАТ”, “ORTOPLASCON”, “МАРАТ/Composite” и “ORTOPLASCON/Composite” [3], предназначенных для решение широкого класса задач с учетом температурной зависимости теплофизических и физико-механических характеристик анизотропных

разносопротивляющихся растяжению и сжатию материалов, склонных к неупругому термодеформированию. При этом допускается возможность рассмотрения пространственно армированных композитов, имеющих матрицу и наполнитель с различными характеристиками. Для расчетной оценки изменения геометрических параметров термонагруженных деталей из композитных материалов за счет термохимических процессов на нагреваемых поверхностях используется автоматическая перегенерация расчетной сети конечных элементов на каждом шаге интегрирования по времени.

В качестве примера рассмотрено нестационарное распределение температуры и особенности термодеформирования типовой [4] составной конструкции выходного патрубка газогенератора, выполненной из композитных материалов и изображенной на рис. 1.

По поверхности конструкции $ABCDEF$ происходит взаимодействие с высокотемпературным газовым потоком. По внешнему диаметру керамического корпуса конструкция считается жестко заделанной. Расчетное изменение формы и размеров конструкции вследствие этого взаимодействия показано на рис. 2. Полученные в результате численного моделирования распределения температур в конце работы конструкции и картина деформирования деталей выходного патрубка приведены на рис. 3 и 4.

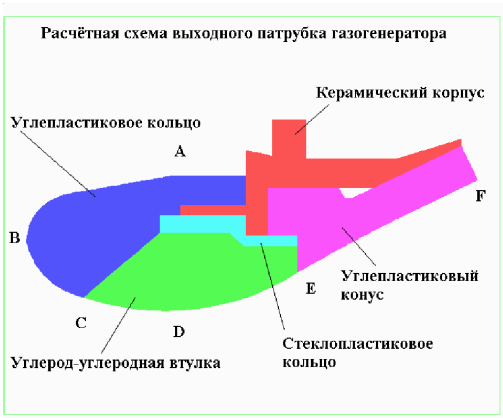


Рисунок 1

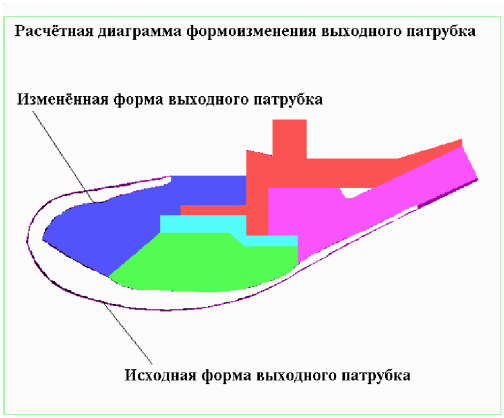


Рисунок 2

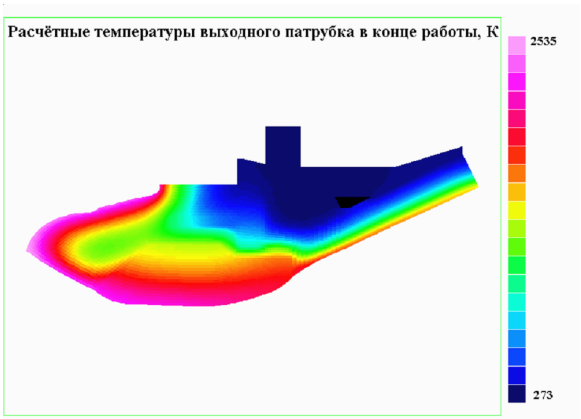


Рисунок 3

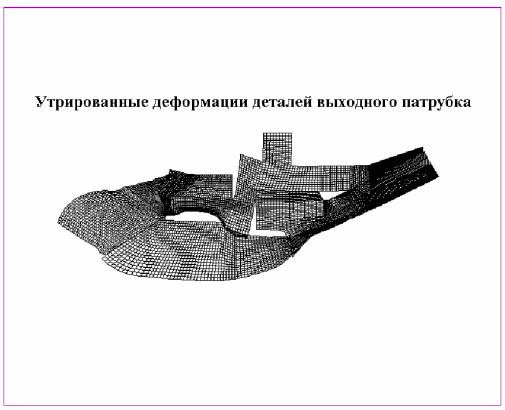


Рисунок 4

Пример выполненной из стальных деталей конструкции термонагружного узла соединения трубопровода горячего газа показан на рис. 5. На внутренней поверхности $ABCD$ заданы условия конвективного и радиационного взаимодействия с имеющим высокое давление газовым потоком, а с нагретых внешних поверхностей штуцера и болта испускается лучистый тепловой поток. Продольные перемещения левого конца штуцера запрещены. В целях герметизации соединения болт завертывается в штуцер с моментом затяжки, обеспечивающим предварительное поджатие уплотнения. Между всеми деталями сборки заданы условия контактного взаимодействия, причем для моделирования предварительной затяжки на взаимодействующих торцевых поверхностях трубки и болта задается предварительный натяг, величина которого определяется калибровкой расчетной схемы без учета нагрева и внутреннего давления.

Результаты численного моделирования термонапряженного состояния конструкции узла соединения трубопровода представлены на рис. 6–8.

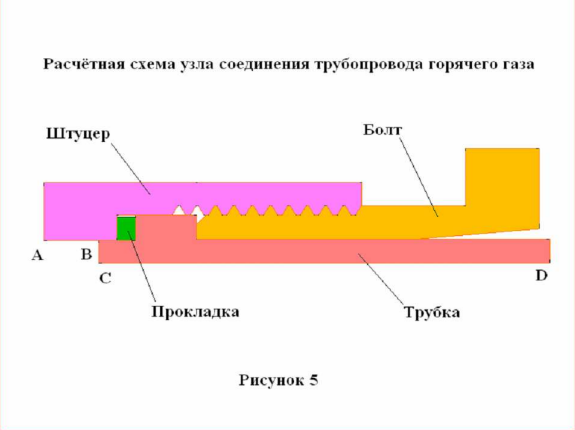


Рисунок 5

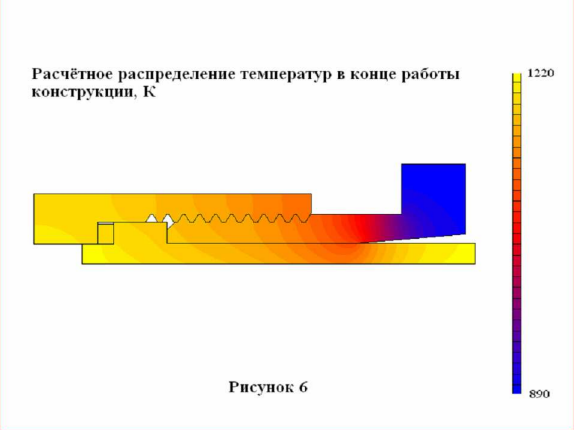


Рисунок 6

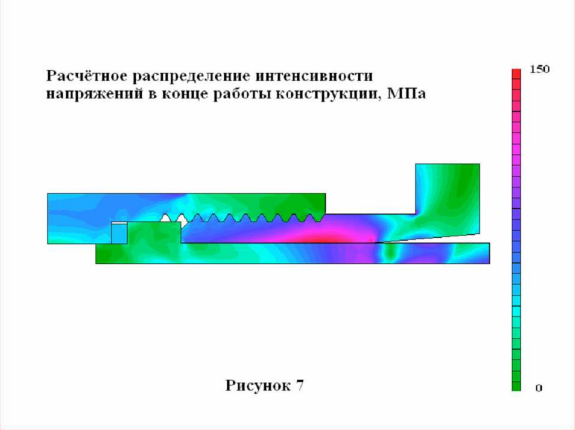


Рисунок 7

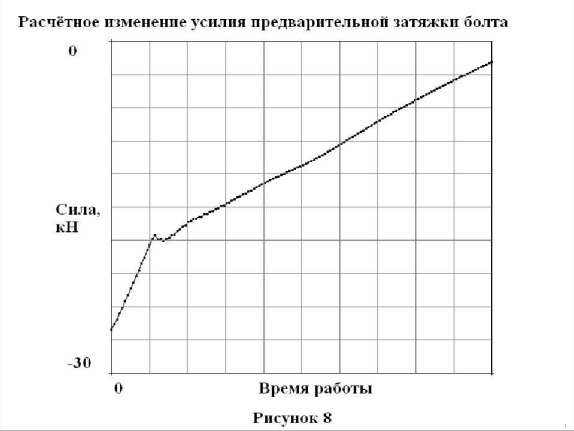


Рисунок 8

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 08-08-00615а, 09-08-00669а и гранта государственной поддержки ведущих научных школ НШ-4046.2010.8.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Головин Н. Н., Кувыркин Г. Н.* Особенности расчёта высокотемпературных конструкций из углерод-углеродных композитов // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34, № 5. С. 761–769.

[2] *Головин Н. Н., Кувыркин Г. Н.* Эндохронная модель неупругого деформирования пространственно армированных углерод-углеродных композитов // Научн. тр. V Межд. сем. «Совр. пробл. прочн.» им. В. А. Лихачева. Т. 1. Великий Новгород, 2001. С. 8–12.

[3] *Головин Н. Н., Кувыркин Г. Н.* Проблемы численного моделирования полей температур и напряжений в конструкциях сопловых блоков РДТТ // Инж.-физ. журнал. 2000. Т. 73, № 1. С. 145–154.

[4] *Кувыркин Г. Н., Головин Н. Н.* Термопрочность элементов конструкции ракетных двигателей твердого топлива. Часть 1. Конструктивные схемы, действующие нагрузки и применяемые материалы. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. 80 с.

Golovin N. N., Kuvyrkin G. N. *Features of contact interaction of elements of the compound thermopower loaded constructions*. Results of the decision of some contact interaction problems of composit materials elements at thermopower loading are presented.

ПРУЖИННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ПОВРЕЖДЕННЫХ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТАХ

Голуб М. В.[*], **Бострём А.** [**]

[*] *Кубанский государственный университет, Краснодар*

[**] *Chalmers University of Technology, Гётеборг*

Изучается возможность применения пружинных граничных условий для описания распространения упругих волн в слоистых композитах с неидеальным контактом компонент или при наличии групп микродефектов на интерфейсе. Поврежденная зона моделируется с помощью пружинных граничных условий, связывающих перемещения и напряжения по разные стороны от поврежденной области. Жесткости в пружинных граничных условиях определяются трещиноватостью (поврежденностью или концентрацией дефектов), характерным размером микродефектов и упругими свойствами окружающих их материалов. При выводе значений эффективных параметров (жесткостей) применяются подходы Баика–Томпсона и Бострёма–Викхема, а также интегральные представления для волновых полей. Выводятся компоненты матриц жесткости из рассмотрения падающей под произвольным углом к интерфейсу плоской волны в антиплоском случае, и под прямым углом в плоском случае. Обсуждается эффективность полученной модели, а также возможность использования полученных результатов в трехмерном случае.

1. Введение. Предвестником разрушения образца из композитного или однородного материала обычно является образование микротрещин, их последующий рост до макротрещин делает его дальнейшую эксплуатацию невозможной или опасной. Появление трещин возможно как на стадии изготовления так и при эксплуатации вследствие усталости материала, близких к критическим нагрузок и т. д. Появление новых композитных материалов лишь повышает актуальность задач обнаружения внутренних неоднородностей и восстановления их параметров, в частности, обнаружение внутренних и поверхностных дефектов с помощью ультразвукового неразрушающего контроля, что требует наличия эффективных математических моделей, описывающих дифракцию упругих волн на дефектах. Отдельный интерес представляют рассматриваемые здесь отслоения или зоны нарушения сплошности и их колебания при динамическом упругом воздействии.

Через зону неидеального контакта имеет место ток энергии ненулевой мощности, тогда как поток энергии через берега трещины отсутствует. Соответственно, вследствие меньшего рассеяния на отслоениях их обнаружение более затруднительно нежели выявление полостей и трещин. Описать динамическое поведение трещиноватой среды или зоны, содержащей внутренние дефекты, можно введением распределения микротрещин (полостей) [1, 2] или, наоборот, пятен контакта между не соприкасающимися слоями [3]. Получили развитие и другие подходы к моделированию поврежденных материалов: замена поврежденной зоны тонким вязко-упругим слоем, в том числе в комбинации с рассматриваемым в работе введением пружинных граничных условий (ПГУ) [4, 5]. В любом случае для описания

поведения упругой среды с отслоением необходима информация о поврежденности (трещиноватости): количество, ориентация, размеры микротрещин и т. д.

2. Пружинные граничные условия. Использование пружинных граничных условий видится весьма эффективным инструментом при моделировании поврежденных интерфейсов и шероховатых контактирующих поверхностей [5], в частности в сочетании с преимуществами интегрального подхода [6,7]. Во-первых, ПГУ являются более общими граничными условиями нежели условия на одиночной трещине и позволяют описывать более широкий класс отслоений. Во-вторых, при моделировании отслоений решение зачастую проще построить для ПГУ нежели для множественных трещин. В-третьих, при решении задач об идентификации дефектов ПГУ могут дать знание о размерах отслоения и степени поврежденности. Для получения этих знаний нужна связь между константами в ПГУ и параметрами отслоения, установление этой связи является основной целью исследования.

В общем трехмерном случае ПГУ в точке $\mathbf{x}$ поверхности S с нормалью $\mathbf{n}$ можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \chi\left(\mathbf{u}_{\mathbf{n}-}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{\mathbf{n}+}(\mathbf{x})\right), \quad \mathbf{x} \in S \tag{1}$$

χ — матрица жесткостей 3×3, $\mathbf{n}\pm$ — внешняя и внутренняя нормали к поверхности в рассматриваемой точке $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}$ — нормальные и касательные компоненты тензора напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ в $\mathbf{x}$, а $\mathbf{u}$ — вектор перемещений. В изотропном случае можно выбрать локальную систему координат в $\mathbf{x}$ таким образом, что ненулевыми остаются лишь три диагональные компоненты матрицы жесткости:

$$\chi_{11} = \chi_x, \qquad \chi_{22} = \chi_y, \qquad \chi_{33} = \chi_z.$$

Если в бóльшей части из имеющихся на настоящий момент работ, использующих пружинную модель, рассматривается повреждение в однородном образце, то здесь выполняется обобщенный теоретический вывод констант в ПГУ для случая интерфейсного отслоения на стыке двух различных изотропных материалов, начатый в [8]. Далее из рассмотрения случая полосовых трещин выводятся выражения для жесткостей χ_i в (1) через трещиноватость и упругие свойства материалов. При выводе значений жесткости для ПГУ используется предположение об относительной малости характерного размера трещины относительно длин волн падающих на дефект. Это предположение может быть использовано для весьма широкого диапазона параметров: если размеры трещин, формирующих отслоение, больше длин волн, то необходимо рассматривать их как отдельные макродефекты, так как они являются потенциально опасными концентраторами напряжений [2].

3. Схема вывода. Рассматривается распространение плоской волны с круговой частотой ω из нижнего упругого полупространства в верхнее (верхние индексы 1 и 2). Здесь используются упругие константы Ламе λ^j, μ^j, плотности материалов ρ^j, $k_m^j = \omega/s_m^j$, $m = 1, 4$, — соответствующие волновые числа, а s_2^j, s_1^j — скорости S- и P-волн. Значения жесткостей для пружинных граничных условий получаются из предположения об эквивалентности коэффициентов прохождения через поврежденный интерфейс, задаваемый распределенным набором трещин и пружинной моделью. Сначала строится решение для одиночной трещины $|x| < l$ на интерфейсе $z = 0$, которое затем обобщается на случай бесконечного набора и, наконец, сопоставляется с пружинной моделью (см. схему на рис. 1).

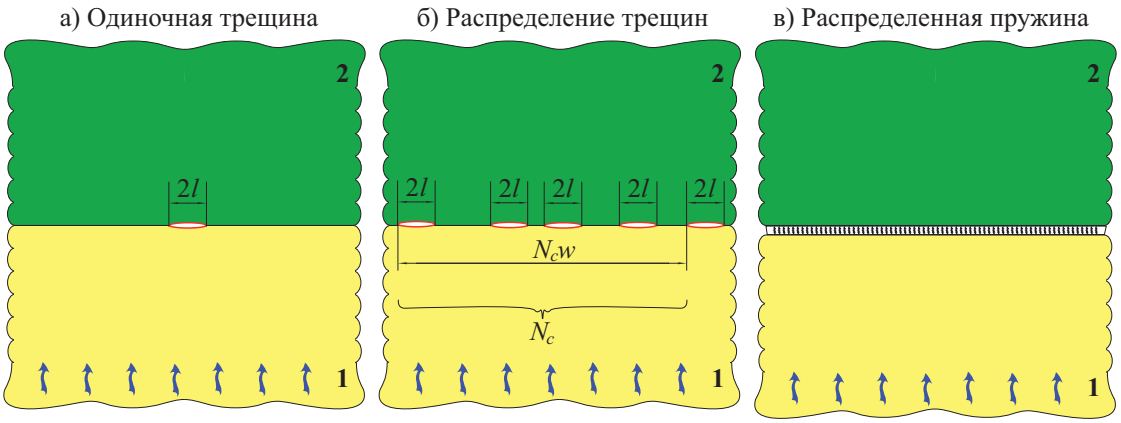


Рис. 1. Общая схема решения.

Рассеянное трещиной поле отыскивается в виде интегрального представления Фурье-символа матрицы Грина [7] и неизвестного скачка смещений $v_i(x)$ раскладываемого в ряд

$$v_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{i,n} \psi_n(x/l) \tag{2}$$

по полиномам Чебышева 2-го рода $\psi_n(s) = \frac{\sin(n \arccos s)}{\sin s}$, составляющих полную систему функций на интервале $[-1, 1]$ и учитывающих поведение решения у краев. В антиплоском случае асимптотическое решение построено для случая падающей под произвольным углом θ плоской волны:

$$v_y^0(x) = 2K_y\sqrt{l^2 - x^2}, \qquad K = i\frac{(\mu^1 + \mu^2)\cos\theta\cos\theta_1}{\mu^1 k_4^1 \cos\theta + \mu^2 k_4^2 \cos\theta_1} k_4^2 k_4^1. \tag{3}$$

В плоском случае рассматривается для простоты только нормальный угол падения P- и SV-волн, соответствующие асимптотические решения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} v_{0,x}^P \\ v_{0,z}^P \end{pmatrix} = iH_P \begin{pmatrix} i\beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \sqrt{l^2 - x^2}, \qquad \begin{pmatrix} v_{0,x}^S \\ v_{0,z}^S \end{pmatrix} = iH_S \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -i\beta_2 \end{pmatrix} \sqrt{l^2 - x^2}. \tag{4}$$

$$\beta_1 = \frac{\lambda^1 + 2\mu^1}{(\lambda^1 + \mu^1)\mu^1} + \frac{\lambda^2 + 2\mu^2}{(\lambda^2 + \mu^2)\mu^2}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{\lambda^1 + \mu^1} - \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2}, \qquad H_s = \frac{c_s^1 c_s^2 k_s^1 k_s^2}{c_s^1 k_s^1 + c_s^2 k_s^2}.$$

В обоих случаях схема вывода сходна с использованной в [3]. Значение жесткости из решения антиплоской задачи имеет вид

$$\chi_y = \frac{4}{C\pi l} \cdot \frac{\mu^1 \mu^2}{\mu^1 + \mu^2} \left(\frac{2\Psi_1(k_4^1 \sin\theta l)}{\pi l} \right)^2,$$

которое может быть упрощено вследствие малости $k_4^1 l$ с применением асимптотики для функций Бесселя $J_n(\alpha) \sim 2^{-n}\alpha^n/n!$ при малых α приводится к виду, не содержащему зависимости от угла падения:

$$\chi_y = \frac{4}{C\pi l} \cdot \frac{\mu^1 \mu^2}{\mu^1 + \mu^2}. \tag{5}$$

Полученное значение совпадает с полученным в [8] для нормального угла падения и очень близко к значению, полученному на низких частотах Ахенбахом и Ли в [9] из энергетических соображений для одинаковых материалов. При малых значениях в плоском случае аналогично выводятся константы для ПГУ, которые вне зависимости от типа волны совпадают:

$$\chi_x = \chi_z = \frac{8}{C\pi l \beta_1}. \tag{6}$$

4. Заключение. В качестве примера приложений пружинных граничных условий на рис. 2 приведены вещественный части фазовых скоростей $\operatorname{Re} v_{\mathrm{ph}}$ в двухслойного волновода при различной поврежденности интерфейса с одинаковыми и различными упругими свойствами. Можно видеть довольно значительное изменение дисперсионных свойств с увеличением поврежденности, таким образом, пружинная модель может быть быть применена для определения степени поврежденности по дисперсионным свойствам многослойного образца.

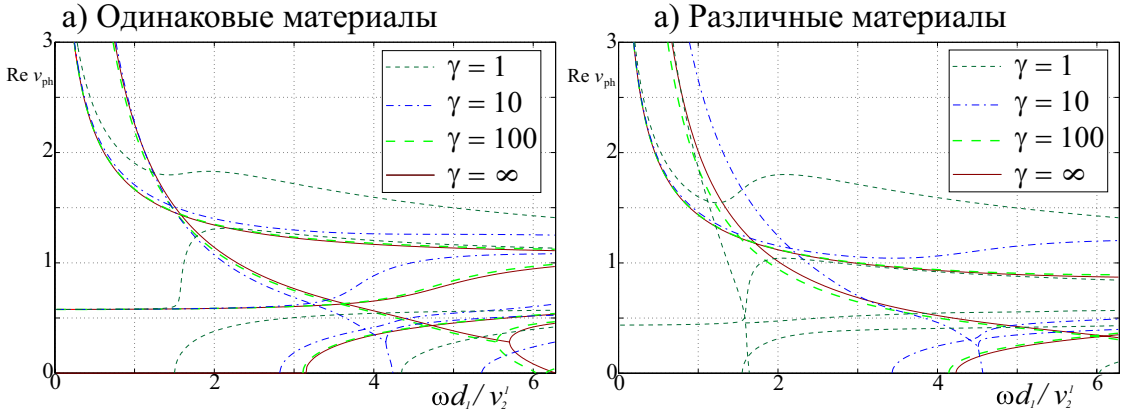


Рис. 2. Вещественные части фазовых скоростей $\operatorname{Re} v_{\mathrm{ph}}$ в композитах с разной степенью поврежденности $\gamma = \chi\, \mu^1 l (\rho^1)^{-2}$.

Основные достоинства пружинной модели — граничные условия для одиночного отслоения более общие по сравнению с моделью одиночной трещины (если $\chi = 0$, то имеет место трещина), кроме того, в моделях для описания зон концентрации дефектов можно использовать ПГУ на поврежденной поверхности вместо множественных трещин. Полученные в работе оценки для констант при контакте разных материалов находятся в соответствии с константами, полученными в [4] и [9] для одинаковых материалов.

На примере χ_y, значение которого фактически не зависят от угла падения, можно сделать вывод о том, что ПГУ могут быть применены для описания отслоений разных размеров в волноводах любого типа (например, типа полосы, цилиндрической структуры, клина и пр.). Разработанная схема может быть расширена с некоторыми изменениями для описания неидеального контакта материалов в трехмерном случае, в том числе для анизотропных материалов (недиагональная матрица жесткостей χ). Если микротрещины имеют явно вытянутый вид (например, вдоль волокон в композите), то в этом случае применимы значения для жесткости, полученные в настоящей работе.

Авторы благодарят профессора Е. В. Глушкова и Н. В. Глушкову за плодотворное обсуждение данной проблемы и ряд ценных замечаний.

Работа выполнена при поддержке АВЦП Минобрнауки «Развитие потенциала высшей школы» (2.1.1/1231).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бабешко В. А.* К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых тел // Доклады академии наук. 1989. Т. 304. Вып. 2. С. 318–321.

[2] *Zhang Ch., Gross D.* On wave propagation in elastic solids with cracks. Southampton: Computational Mechanics Publ., 1998.

[3] *Boström A., Wickham G. R.* On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks // J. Nondestr. Eval. 1991. V. 10. pp. 139–149.

[4] *Baik J. M., Thompson R. B.* Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model // J. Nondestr. Eval. 1984. V. 4. P. 177–196.

[5] *Rokhlin S. I., Huang W.* Ultrasonic wave interaction with a thin anisotropic layer between two anisotropic solids: Exact and asymptotic-boundary-condition methods // J. Acoust. Soc. Am. 1992. Vol. 92. No. 3. pp. 1729–1742.

[6] *Ворович И. И.,Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

[7] *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.

[8] *Boström A., Golub M.* Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions. Quart. J. Mech. Appl. Math. 2009. V. 62. pp. 39–52.

[9] *Achenbach J. D., Li Z. L.* Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens // Wave Motion. 1988. V. 8. pp. 225–234.

Golub M. V., Boström A. *Elastic wave propagation in a layered composite with damages and its modelling via spring boundary conditions*. 2D elastic wave propagation in an elastic layered waveguide with damaged interface is investigated. The damage is modelled as a distribution of small cracks and this is transformed into a spring boundary condition. Spring stiffnesses are derived via integral and distributed spring approach. At first the scattering by a single interface crack is determined explicitly and asymptotic is derived in the low frequency limit. The transmission at an interface with a random distribution of small cracks is then determined and is compared to periodically distributed cracks. The cracked interface is then described by a distributed spring. As an illustration the dispersion properties of the first normal modes in a layered plate with a damaged interface in the middle is given. The spring model efficiency is discussed.

СЕЗОННЫЙ МОНИТОРИНГ ПАРАМЕТРОВ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В РАЙОНАХ ДОБЫЧИ И ТРАНСПОРТИРОВКИ УГЛЕВОДОРОДОВ

Григоренко К. С.[*], **Матишов Д. Г.**[*, **], **Соловьева А. А.**[*], **Хартиев С. М.**[*, **]

[*] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

[**] *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Рассмотрены задачи распространения и затухания внутренних волн. Разработаны программы расчета средней плотности и решения краевой задачи модального анализа с помощью МКЭ. Приведены расчеты для Охотского моря.

В настоящее время изучение динамики океана невозможно себе представить без учета внутренних волн, которые играют важную роль в различных физических, химических, биологических процессах в океанах и морях. Воды океана, как правило, устойчиво стратифицированы, поэтому гравитационные внутренние волны оказываются повсеместным явлением и с их воздействием на гидротехнические сооружения необходимо считаться в районах добычи и транспортировки углеводородов. Само существование и свойства внутренних волн неразрывно связаны с плотностной стратификацией, которая может претерпевать сезонные изменения [1]. Покажем, что даже незначительные сезонные перемены в вертикальной структуре плотности могут привести к существенным количественным и качественным изменениям характеристик волнового движения.

Рассмотрим безграничный в горизонтальных направлениях плоский слой непрерывно стратифицированной по плотности жидкости постоянной глубины H. Выберем начало прямоугольной системы координат XOZ на невозмущенном уровне свободной поверхности, ось Z направим вертикально вверх. Система уравнений, с граничными условиями, описывающая динамику внутренних волн в безразмерной форме, с учетом приближения твердой крышки, имеет вид [2]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{K_L}{H\sqrt{gH}}\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{K_L}{H\sqrt{gH}}\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \frac{D}{H\sqrt{gH}}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \tag{4}$$

$$V_z(-1) = V_z(0) = 0, \tag{5}$$

где безразмерные величины связаны с размерными соотношениями:

$$\overline{z} = Hz, \quad \overline{x} = Hx, \quad \overline{t} = t\sqrt{g^{-1}H}, \quad \overline{V_x} = \sqrt{gH}V_x, \quad \overline{V_z} = \sqrt{gH}V_z, \tag{6}$$

$$\overline{p} = \rho_0(0)gHp, \quad \overline{\rho_0} = \overline{\rho_0}(0)\rho_0, \quad \overline{\rho} = \overline{\rho_0}(0)\rho$$

Здесь, соответственно, V_x и V_z — горизонтальная и вертикальная составляющие волновых возмущений скорости; $\rho_0(z)$ — стационарное распределение плотности; p и ρ — соответственно, волновые возмущения давления и плотности; g — ускорение свободного падения; K_L — коэффициент горизонтального турбулентного обмена; D — коэффициент горизонтальной диффузии плотности;

Решение краевой задачи (1)–(5) ищем в виде:

$$(p, \rho, V_x, V_z) = (P(z), R(z), U(z), W(z))e^{i(kx+\sigma t)} \tag{7}$$

Подставляя (7) в (1)–(5). Получаем относительно $W(z)$ однородную краевую задачу вида:

$$(\rho_0 W')' - k^2(\rho_0' + \omega^2\rho_0)\omega^{-2}W = 0, \quad W(0) = 0; W(-1) = 0 \tag{8}$$

где штрихом обозначены производные по Z;

$$\alpha = \frac{\mu}{2H\sqrt{gH}}; \quad \beta = \frac{\delta}{2H\sqrt{gH}}; \quad \mu = |K_L - D|; \quad \delta = K_L + D \tag{9}$$

$$\omega^2 = -\left(i\sigma + k^2\frac{K_L}{H\sqrt{gH}}\right)\left(i\sigma + k^2\frac{D}{H\sqrt{gH}}\right) \tag{10}$$

Задавая волновое число k, решение однородной краевой задачи (8) ищем с помощью метода конечных элементов. Реализация программы расчета модального состава внутренних волн, составленная в пакете FlexPDE, позволяет найти дисперсионные зависимости $\omega_n(k)$, где n — номер моды *(n=1, 2, 3...)*. Решая далее уравнение (10) относительно σ, имеем:

$$\sigma_{1,2}^n = i\beta k^2 \pm \sqrt{\omega_n^2(k) - \alpha^2 k^4} \tag{11}$$

здесь индекс n принимает целые значения ($n = 1, 2, 3\ldots$).

Рассмотрим случай, когда:

$$\omega_n^2(k) > \alpha^2 k^4 \tag{12}$$

Подставляя выражение (11) в (7), и выделяя действительную часть, находим:

$$ReV_{zn}^{\pm} = W(z)e^{-\beta k^2 t}\cos(kx \pm \sqrt{\omega_n^2(k) - \alpha^2 k^4}t) \tag{13}$$

Поскольку $\omega_n(k) \to 0$ при $n \to \infty$, то неравенство (12) нарушается, начиная с некоторого номера N_0 ($n > N_0$). Таким образом, при выполнении условия (12) существует конечное число N_0 прогрессивных внутренних волн (13), затухающих с одинаковым декрементом:

$$d = \beta k^2 \tag{14}$$

Рассмотрим ситуацию, возникающую при $n > N_0$, когда имеет место неравенство:

$$\omega_n^2(k) < \alpha^2 k^4 \tag{15}$$

Выражение (11) в этом случае принимает вид:

$$\sigma_{1,2}^n = i(\beta k^2 \pm \sqrt{\alpha^2 k^4 - \omega_n^2(k)}) \tag{16}$$

Подставляя (16) в (7), и выделяя действительную часть, получаем:

$$ReV_{zn}^{\pm} = W(z)e^{-(\beta k \pm \sqrt{\alpha^2 k^4 - \omega_n^2(k)})t} \cos kx \tag{17}$$

Формула (17) описывает стоячие внутренние волны каждой n-ой моде, которой соответствуют два декремента:

$$d_1 = \beta k^2 + \sqrt{\alpha^2 k^4 - \omega_n^2(k)}, \quad d_2 = \beta k^2 - \sqrt{\alpha^2 k^4 - \omega_n^2(k)} \tag{18}$$

Первый — быстрому апериодическому режиму затухания, второй — медленному. В обоих случаях $n > N_0$, и апериодических режимов существует бесконечно много $n \to \infty$ [2, 3].

Используя формулы (12)–(18), рассчитаем параметры внутренних волн для стандартного океанологического разреза м. Анива – м. Докучаева, расположенного в южной части Охотского моря (рис. 1). На рис. 2 показаны сезонные изменения плотности $\rho_0(z)$, построенные для данного района с помощью формулы

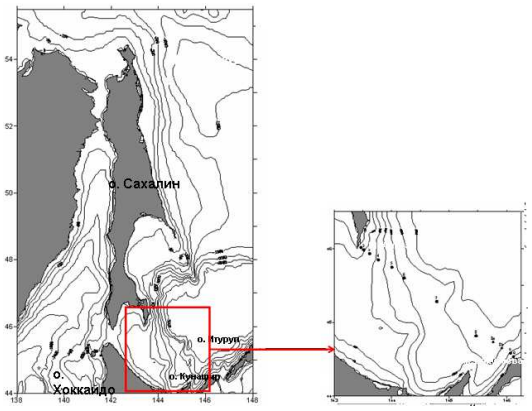


Рис. 1. Исследуемый район охотского моря. Разрез м. Анива – м. Докучаева.

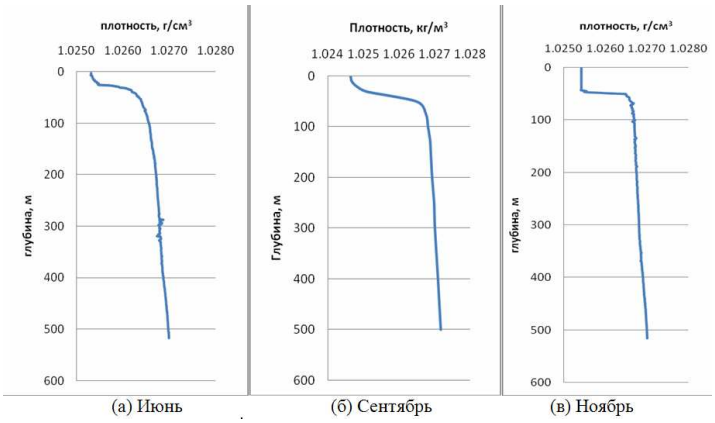


Рис. 2. Распределение плотности, рассчитанные по формуле УС-80 для южной части Охотского моря.

УС 80 [1]. Дисперсионные зависимости $\omega_n(k)$, кривые αk^2 и вертикальные профили мод внутренних волн, соответствующие июньской плотностной стратификации, представлены на рис. 3, 4 (цифрами указан номер моды). Видно, что с увеличением турбулентной вязкости ($\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$) количество мод внутренних волн, затухающих периодически во времени, уменьшается.

На рис. 5, 6 изображены режимы затухания амплитуд внутренних волн, рассчитанных на глубине середины пикноклина в июне (рис. 5) и ноябре (рис. 6)

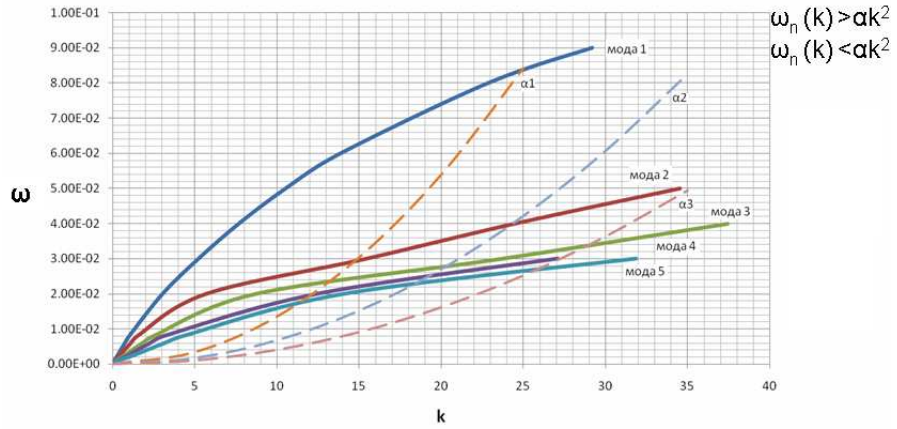


Рис. 3. Дисперсионные кривые.

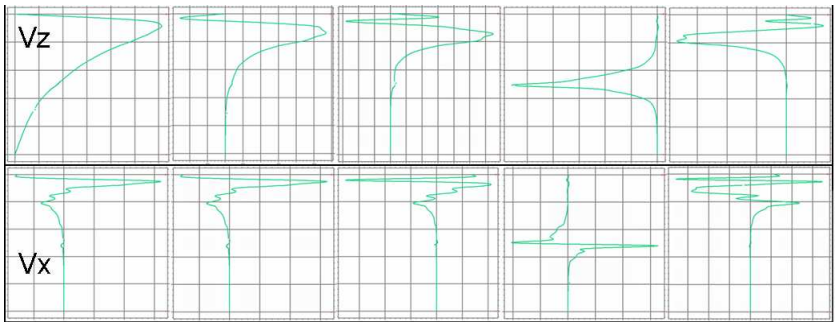


Рис. 4. Формы вертикальной и горизонтальной составляющих скорости первых пяти мод для $\omega = 3.0 \cdot 10^{-2}$.

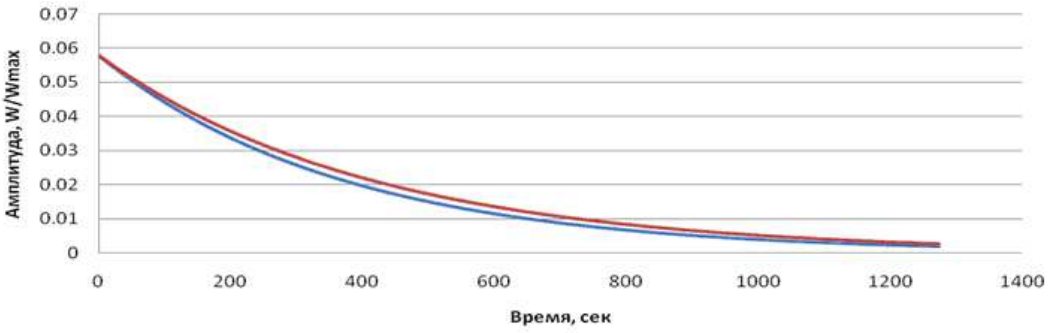


Рис. 5. Апериодический режим затухания амплитуд внутренних волн на глубине середины пикноклина (30 м.), k=15, июнь 2003 г.

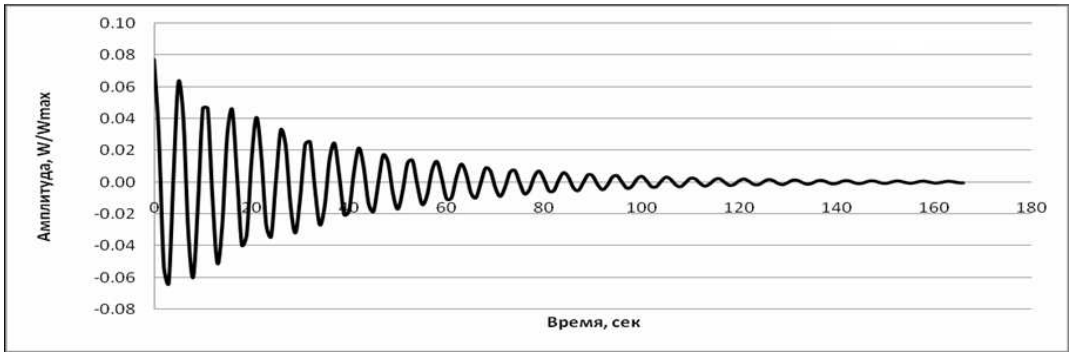


Рис. 6. Периодический режим затухания амплитуд внутренних волн на глубине середины пикноклина (30 м.), k=15, ноябрь 2003 г.

2003 года. Несмотря на то, что сезонные изменения вертикальных профилей плотности в июне и ноябре незначительны (рис. 2), режимы затухания мод внутренних волн существенно меняются.

Так, в июне на глубине середины пикноклина существуют стоячие волны, затухающие апериодически в течение 20 мин., а в ноябре на данной глубине распространяется уже прогрессивная волна, амплитуда которой полностью затухает в течение 2 мин., то есть на порядок быстрее. Отметим, что полученные результаты могут быть использованы при анализе характеристик волнового следа, возникающего за движущимся в толще океана объектом, а также для оценки параметров внутренних волн, генерируемых периодическими колебаниями атмосферного давления и придонными возмущениями.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Архипкин В. С., Добролюбов С. А.* Океанология. Физические свойства морской воды: Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2005. 216 с.

[2] *Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартиев С. М.* Введение в гидродинамику и теорию волн. СПБ.: Гидрометеоиздат, 1992. 264 с.

[3] *Задорожный А. И.* Затухание длинных волн в экспоненциально стратифицированном море. МГИ, 1975, №3. С. 96-106.

Grigorenko K. S., Matishov D. G., Solovieva A. A., Hartiev S. M. *Seasonal parameters internal waves monitoring in regions of extraction and transportation of hydrocarbons*. Tasks of distribution and damping of internal waves surveyed. Programs of calculation of a medial denseness and a solution of a boundary value problem of the modal analysis with help FEM are designed. Calculations for Okhotsk sea are reduced.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИИ В ПОЛИКРИСТАЛЛАХ МЕТОДОМ ЭЛЕМЕНТОВ РЕЛАКСАЦИИ

Дерюгин Е. Е.

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Приведены результаты моделирования начальной стадии макропластического течения поликристалла на основе метода элементов релаксации. Дан анализ влияния различных граничных условий нагружения на характер формирования полос локализованного сдвига.

1. Особенности моделирования методом элементов релаксации.

Развиваемые на основе метода элементов релаксации модели действуют по принципу клеточных автоматов [1]. В данной работе приводятся результаты моделирования начальной стадии макропластического течения поликристалла на основе метода элементов релаксации. Дан анализ влияния различных граничных условий нагружения на характер формирования полос локализованного сдвига.

2. Влияние жесткости испытательного устройства.

Теоретические модели пластичности развиваются в предположении определенных и, как правило, простых граничных условий нагружения. Контролируется либо изменение приложенной силы с течением времени, либо изменение смещений концов моделируемого образца. На практике точные теоретические граничные условия реализовать невозможно. Поэтому вид диаграмм нагружения одного и того же материала существенно зависит не только от способа нагружения (растяжение, сжатие, изгиб, кручение), геометрической формы и размеров образца, но также и от технических характеристик испытательного устройства. При построении макроскопических диаграмм «напряжение-деформация» принципиальную роль играет модуль жесткости M данного устройства. Он определяется как сила, которую необходимо приложить к захватам испытательного устройства, чтобы за счет упругой деформации частей машины переместить их на 1 мм друг относительно друга.

Рассмотрим случай одноосного нагружения плоского поликристалла в двумерной постановке. Структурным элементом материала в данном случае является отдельный кристаллит. Пусть v_0 — скорость движения захватов машины в ненагруженном состоянии. На рис. 1 части машины, которые вносят вклад в упругие смещения частей машины, изображены схематически в виде пружин.

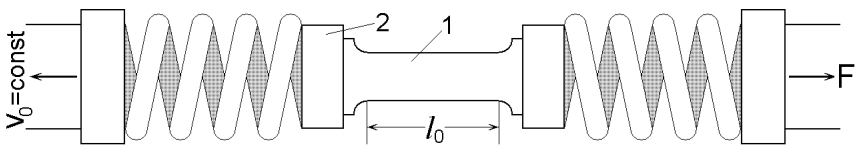


Рис. 1. Схема: 1 — образец, 2 — захват.

Согласно определению, модуль жесткости машины равен

$$M = F/\Delta l_m, \tag{1}$$

где Δl_m — смещение захватов относительно друг друга, обусловленное упругой деформацией самой машины; F — внешняя сила, приложенная к захватам. В [1] получено выражение для изменения силы, приложенной к захватам, в течение времени Δt:

$$\Delta F(\Delta t) = M\Delta t(v_0 - v^p)/[1 + Ml_0/(SE)]. \tag{2}$$

Здесь l_0 — длина рабочей части образца; $v^p = \dot{\varepsilon} l_0$ — скорость изменения длины образца за счет пластической деформации; S — поперечное сечение образца.

Знак ΔF зависит от разности скоростей v_0 и v^p. При $v^p = v_0$ будет наблюдаться площадка текучести, а при $v^p > v_0$ — уменьшение (падение) внешней нагрузки. Чем больше жесткость машины M, тем больше будет величина падения внешней нагрузки. В моменты, когда соблюдается условие $v^p < v_0$, наблюдается непрерывный рост внешнего напряжения.

Выражение (2) преобразовали для вычисления приращения внешнего напряжения $d\sigma$ за промежуток времени dt, в течение которого происходит релаксация напряжения на величину $\Delta\sigma$ в кристаллите, испытавшем пластическую деформацию.

$$d\sigma = \frac{M(v_0 dt - Ka^2\Delta\sigma/bE)}{b + M/E}. \tag{3}$$

Здесь a — размер структурного элемента, b — ширина рабочей части образца соответственно, E — модуль Юнга, dt — время релаксации отдельного структурного элемента при вовлечении в пластическую деформацию, K — коэффициент.

Выражение (3) теперь можно использовать для построения модельных диаграмм нагружения поликристаллов.

3. Влияние различных граничных условий нагружения.

Классические клеточные автоматы обладают свойством однородности системы. Ни один из элементов не может быть отличен от других по каким-либо особенностям. Однако на практике расчетное поле ограничено конечным множеством элементов. В результате имеют место краевые эффекты. Во избежание этого вводят так называемые периодические граничные (краевые) условия.

С целью проверки отклика модели на различные ограничения, накладываемые на края образца, проведено моделирование локализации пластической деформации для трех случаев:

1) Без удаления нормальных и касательных напряжений на краях образца, индуцированных присутствием ЭР.
2) С применением периодических граничных условий.
3) С учетом удаления нормальных и касательных напряжений на краях образца.

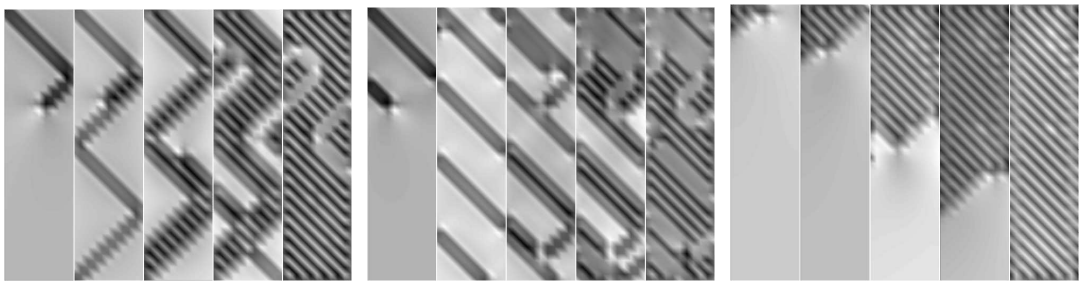
Исходные параметры модели для всех случаев были одинаковыми. Расчетное поле состояло из 10×40 расчетных точек. Структурный элемент (кристаллит) представляли в виде окружности с радиусом a, составляющим половину расстояния между расчётными точками. Падение напряжения в элементе на величину $\Delta\sigma$ вдоль оси растяжения в результате пластической деформации чистого сдвига сопровождается возникновением неоднородного поля внутренних напряжений.

Структурный элемент, испытавший пластическую деформацию, мы будем называть элементом релаксации или ЭР.

Построение диаграмм нагружения производили суммированием отрезков $d\sigma$ за последовательные промежутки времени dt, используя выражение (3).

Ниже приводятся и анализируются результаты моделирования методом элементов релаксации локализации пластической деформации в поликристаллах на начальной стадии макродеформации, т. е. на стадии формирования «зуба» и площадки текучести до стадии сильного деформационного упрочнения.

На рис. 2*a* представлен результат моделирования начальной стали локализации пластической деформации поликристалла без учета краевых эффектов. Достижение критического напряжения сдвига приводит к тому, что начинает формироваться полоса локализованной деформации шириной, равной диаметру ЭР. Ограниченность расчетного поля приводит к тому, что достигнув противоположного края образца происходит отражение полосы локализованного сдвига (ПЛС) и дальнейшее её развитие продолжается в сопряжённом направлении максимальных скалывающих напряжений. После того, как зигзагообразная ПЛС достигнет противоположного края образца, начинается эстафетная передача пластической деформации от зерна к зерну вдоль зигзагообразного фронта сформированных полос локализованного сдвига. За счет этого механизма происходит увеличение толщины ПЛС. На более поздних этапах в пластическую деформацию вовлекаются объемы между сформированными полосами. Все расчетное поле заполняется элементами релаксации. Происходит частичная фрагментация материала за счет нестыковки ЭР вдоль некоторых границ.



a *b* *c*

Рис. 2. Формирование полосовых структур без учета краевых эффектов (*a*), с применением периодических граничных условий (*b*) и с учетом удаления нормальных и касательных напряжений на краях образца (*c*).

Иная структура полос локализованного сдвига получается в случае применения периодических граничных условий (рис. 2*b*). Согласно этому правилу, в момент достижения ПЛС края образца дальнейшее вовлечение ЭР в пластическую деформацию необходимо начинать с противоположной стороны. Искусственный переброс элемента релаксации с одного края на противоположный край сначала приводит к формированию параллельных ПЛС. Затем эти полосы утолщаются и далее между ними формируются мезополосы сопряженного направления. В конечном итоге формируется неупорядоченная структура (рис. 2*b*).

В случае учета краевых эффектов получается эстафетная передача пластической деформации от элемента к элементу вдоль фронта формирующегося очага пластической деформации по механизму распространения полосы Людерса (рис. 2c). Происходит непрерывное расширение зоны пластической деформации, граница которой является фронтом полосы Людерса, ориентированным под углом максимальных скалывающих напряжений по отношению (под углом 45° к оси растяжения).

В связи с одинаковыми начальными граничными условиями нагружения макроскопическая деформация для всех трех случаев начинается при одном и том же высоком напряжении и сопровождается резким падением напряжения (рис. 3). В результате на диаграммах нагружения наблюдается хорошо выраженный «зуб» текучести. Вовлечение отдельных кристаллитов в пластическую деформацию часто приводит к падению напряжения, после чего напряжение далее растёт упругому закону. По этой причине все диаграммы нагружения имеют пилообразный вид. Во всех случаях после того, как пластической деформацией охвачен весь объем, наступает стадия резкого деформационного упрочнения.

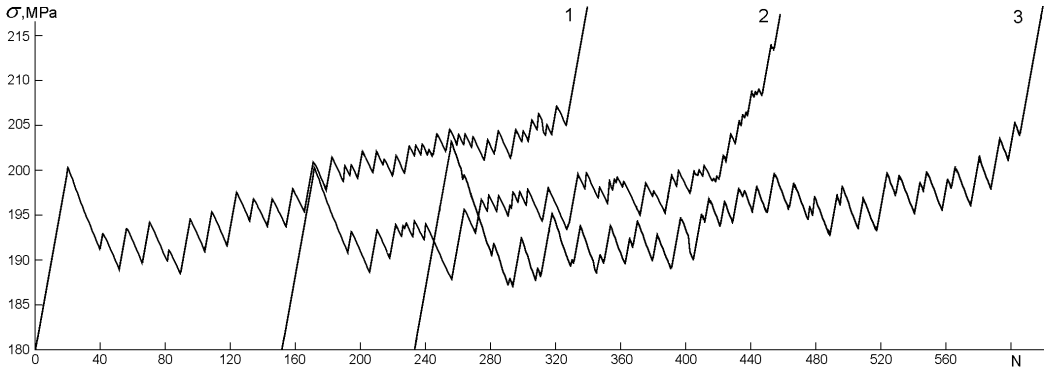


Рис. 3. Модельные диаграммы нагружения образца без учета краевых эффектов (1), с применением периодических граничных условий (2) и с учетом удаления нормальных и касательных напряжений на краях образца (3).

В промежуточном интервале до стадии сильного деформационного упрочнения диаграммы нагружения модельного поликристалла отличаются незначительно. В случае неучёта краевых эффектов (кривая 1) после «зуба» текучести наступает стадия слабого деформационного упрочнения. В среднем по мере заполнения пространства пластической деформацией напряжение течения увеличивается. Учет краевого эффекта путем удаления нормальных и касательных напряжений на краях образца не сопровождаетмя существенным деформационным упрочнением (кривая 3). Использование периодических граничных условий приводит сначала к слабому деформационному упрочнению. Переход к стадии с сильным деформационным упрочнением происходит еще до того, как весь объем будет охвачен пластической деформацией (кривая 2).

Сравнение динамики и геометрии развития зон локализованного сдвига согласно модельным расчётам с наблюдаемыми картинами формирования полос локализованной деформации показывает, что наиболее полное соответствие модели с экспериментом наблюдается только для случая учета краевого эффекта путем

удаления нормальных и касательных напряжений на краях модельного образца. Случай без учёта краевого эффекта (рис. 2*а*) качественно верно отражает поведение поликристаллических материалов, у которых поверхность с двух сторон заблокирована высокопрочным покрытием. Тогда на самом деле пластическая деформация развивается по механизму волны отражения [2]. Задание периодических граничных условий не отражает качественной картины развития зон локализованного сдвига.

Заключение.

Проведенные расчёты показали, что метод элементов релаксации является простым и эффективным при моделировании эффектов локализации пластической деформации. Он позволяет описывать самоорганизацию полос локализованного сдвига и строить макроскопические диаграммы нагружения для различных граничных условий нагружения.

Анализ показал, что использование периодических граничных условий иногда не согласуется с экспериментом при решении определенных задач. На практике часто возникает необходимость отказаться от некоторых свойств классической модели клеточных автоматов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Deryugin Ye. Ye., Lasko G., Schmauder S.* Relaxation Element Method in Mechanics of Deformed Solid // In: Wilhelm U. Oster. Computational Materials. Hauppauge NY: Nova Science Publishers. 2009 pp. 479–545.

[2] *Egorushkin V. E., Panin V. E., Panin A. V.* Non-linear waves of plastic deformation and criteria of quasi-ductile fracture // Физическая мезомеханика. 2004. Т. 7. Спец. выпуск. Часть 1. С. 343–346.

Deryugin Ye. Ye. *Modelling deformation localization in polycrystal by relaxation element method.* The results of simulation of the initial stage of macroplastic flow of polycrystal are presented on the basis of relaxation element method. The analysis of influence of different boundary condition of loading on character of forming of localized shear bands is given.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ГОДОГРАФА В ИССЛЕДОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОФОРЕЗА

Елаева М. С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена математическая модель зонального электрофореза, описывающая процесс разделения двухкомпонентной смеси веществ, в предположении, что проводимость смеси зависит от концентрации компонент. Бездиффузионное приближение этой модели является аналогом задачи Римана о распаде начального разрыва. Заданное начальное распределение сглаживается с помощью бесконечно дифференцируемых функций. Для построения решения используется обобщенный метод годографа Новикова–Дубровина–Царева.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим простейшую классическую модель разделения смеси методом зонального электрофореза (см., например, [1]). В ней не учитываются диффузионные эффекты, поскольку из экспериментов (см., например, [2]) известно, что при больших напряженностях электрического поля они почти не влияют на процесс разделения смеси. Кроме того, рассматривается пространственно одномерная задача, так как процесс протекает в тонком длинном капилляре.

Квазилинейная система уравнений в безразмерных переменных имеет вид (см., например, [1,3])

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_i c_i}{\sigma}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sigma = 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i, \tag{1}$$

где $c_i = c_i(x,t) \geqslant 0$ — концентрация i-ой компоненты, μ_i — электрофоретическая подвижность i-ой компоненты, σ — проводимость смеси, α_i — коэффициенты влияния концентрации компонент смеси на проводимость.

После замены $u_i = \alpha_i c_i$ (коэффициенты α_i могут быть как положительными, так и отрицательными) система (1) примет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_i u_i}{1+s}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad s = \sum_{i=1}^{n} u_i > -1. \tag{2}$$

где u_i — «эффективные» концентрации.

Систему (2) дополним условиями Рэнкина-Гюгонио на линии разрыва $x = x(t)$ (см., например, [1])

$$D\left[u_i\right] = \left[\frac{\mu_i u_i}{1+s}\right], \quad i = 1, \ldots, n, \quad D = \frac{dx(t)}{dt}, \tag{3}$$

где $[f] = f^+ - f^-$, $f^+ = f(x(t)+0, t)$, $f^- = f(x(t)-0, t)$.

Условия устойчивости Лакса для линии разрыва k-ого типа имеют вид (см., например, [1])

$$\lambda_k^- \leqslant D_k \leqslant \lambda_k^+, \quad \lambda_{k-1}^- < D_k < \lambda_{k+1}^+, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Здесь $\lambda_k^- = \lambda_k(u(x(t) - 0, t))$, $\lambda_k^+ = \lambda_k(u(x(t) + 0, t))$, λ_k — собственные значения матрицы $A_{ij} = \partial_j(\mu_i u_i/(1 + s))$, где $\partial_j = \partial/\partial u_j$.

Начальные условия, соответствующие кусочно-постоянному распределению концентраций берем в следующем виде

$$u_i|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ u_i^0, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x > x_2 \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где u_i^0 — известные постоянные концентрации.

Задача (2)–(5) является аналогом задачи Римана о распаде начального разрыва — в начальный момент времени имеется два разрыва в различных точках.

Цель данной работы состоит в том, чтобы показать возможность применения обобщенного метода годографа Новикова–Дубровина–Царева к решению поставленной задачи.

2. Обобщенный метод годографа.

В работе [4] доказано, что решение диагональной гамильтоновой или полугамильтоновой системы $u_t^i = v_i(u)\, u_x^i$, $i = 1, \ldots, n$, определяется решением алгебраической системы уравнений $w_i(u) = x + v_i(u)t$, где x, t — параметры, $w_i(u)$ общее решение системы уравнений на коммутирующие потоки

$$\frac{\partial w_i}{\partial u_k} = \frac{w_k - w_i}{v_k(u) - v_i(u)} \frac{\partial v_i(u)}{\partial u_k}, \quad i \neq k. \tag{6}$$

Для применения метода обобщенного годографа к задаче (2)–(5) следует привести систему (2) к диагональной форме. Диагонализация достигается путем перехода к новым переменным — инвариантам Римана

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + R_i \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} R_k}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mu_k} \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

В работе [5] в случае, когда начальные распределения $R_k(x, 0) = R_k^0(x)$ заданы функциями, имеющими обратные, было получено общее решение системы (7), которое имеет вид

$$x + R_i \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} R_k}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mu_k} t = R_i \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} R_k}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mu_k} \frac{\partial}{\partial R_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(R_k)}{\prod\limits_{m \neq k} (R_m - R_k)}, \tag{8}$$

где $A_k(R_k)$ — произвольные функции одного аргумента.

Таким образом, для применения обобщенного метода годографа в случае задачи (2)–(5) необходимо сгладить начальные данные.

Система (7) после записи условий Рэнкина–Гюгонио (3), Лакса (4), начальных данных (5) в терминах инвариантов Римана допускает решения в виде ударных волн и волн разрежения (см., например, [1]). Существование автомодельных решений легко получить, разыскивая решения в виде $R_i = t^\alpha \Phi_i(z)$, где $z = xt^\beta$. В этом случае система примет вид

$$t^{(\alpha-1)}(\alpha\Phi_i(z) + \beta z\Phi_i'(z)) + t^{(2\alpha+\alpha n+\beta)}\Phi_i(z)\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\Phi_k(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\mu_k}\Phi_i'(z) = 0.$$

При выполнении равенства $\alpha(n+1)+\beta = -1$ переменная t исключается из уравнений и тем самым эти уравнения описывают автомодельные решения.

Аналогичная подстановка $R_i = t^\alpha\Phi_i(z)$ в (8) в предположении, что A_k являются однородными функциями аргумента, то есть $A_k(t^\alpha\Phi_k(z)) = t^M A_k(\Phi_k(z))$, где M — степень однородности, и при условии $\alpha(n+1)+\beta = -1$, приводит к

$$\left(z + \Phi_i(z)\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\Phi_k(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\mu_k}\right)t^{(\alpha n+\alpha+1)} =$$

$$t^{(\alpha M+\alpha)}\Phi_i(z)\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\Phi_k(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\mu_k}\frac{\partial}{\partial\Phi_i(z)}\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k(\Phi_k(z))}{\prod\limits_{m\neq k}(\Phi_m(z)-\Phi_k(z))}.$$

Для исключения t из этих уравнений требуется, чтобы $\alpha = 1/(M-n)$. Это означает, что $\alpha \neq 0$ и классическое автомодельное решение $R_i = R_i(x/t)$ при помощи метода годографа можно получить лишь в случае $\alpha \to 0$ $(M-n \to \infty)$. Отметим, что требование однородности функций A_k является достаточным для наличия автомодельных решений.

4. Вычислительный эксперимент.

Далее ограничем рассмотрение случаем $n = 2$. Систему (2) и начальные условия (5) перепишем в терминах инвариантов Римана R_i (см., например, [1,3]). Затем, для удобства, (см. [5]) сделаем замену переменных $\lambda_i = 1/R_i$, $t = -t$.

Поскольку обобщенный метод годографа не позволяет получить решение в явном виде, то приходится использовать численные методы. Возьмем следующие значения параметров: $\mu_1 = 1/7$, $R_1^- = 1/12$, $\mu_2 = 1/6$, $R_2^- = 1$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 2,9$. Именно при этих значениях параметров наиболее четко видно особенности применения метода годографа.

В виду того, что в окрестности $x = x_1$, $x = x_2$ система (2) гиперболическая, ее решения при малых значениях t можно разыскивать независимо друг от друга. Поэтому разрывы в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ рассмотрим отдельно. Сглаживание проведем с помощью бесконечно дифференцируемых функций следующего вида $\lambda_i(x,0) = a_i\,\mathrm{th}(\beta x) + b_i$, $\beta \longrightarrow \infty$.

Начальные условия для метода годографа (см. рис. 1), это функции 1b (λ_1), 1d (λ_2), 3b (λ_1), 3d (λ_2). В результате вычислений в момент времени $t = 0.5$ были построены функции 2b (λ_1), 2d (λ_2), 4b (λ_1), 4d (λ_2). Для сравнения приведены результаты, полученные в виде явных формул (см. [3]). Разрыву в точке x_1 соответствуют функции 1a (λ_1), 1c (λ_2), разрыву в точке x_2 — функции 3a (λ_1), 3c (λ_2). Эволюция начальных разрывов приводит к образованию ударных волн 2a (λ_1), 4c (λ_2) и волн разрежения 2c (λ_2), 4a (λ_1).

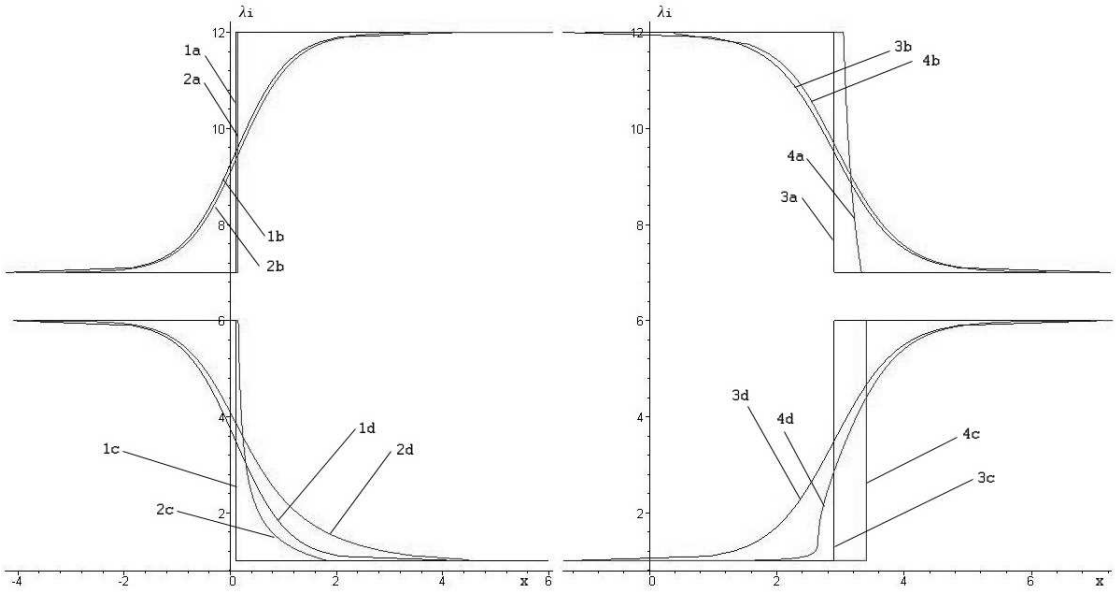


Рис. 1. Эволюция λ_1, λ_2, построенная по явным формулам и с помощью метода обобщенного годографа.

Осуществив переход от инвариантов Римана к концентрациям, посторим решение в терминах концентраций (см., [1,3]). На рис. 2 начальные условия для метода годографа заданы функциями 1b (λ_1), 1d(λ_2), 3b(λ_1), 3d(λ_2). Решения, построенные в момент времени $t = 0,5$: 2b (λ_1), 2d(λ_2), 4b(λ_1), 4d(λ_2). Там же приведены результаты, полученные в виде явных формул. Начальные условия: 1a (λ_1), 1c(λ_2), 3a(λ_1), 3a(λ_2). При $t = 0,5$ эволюция начальных разрывов приводит к образованию кусочно-разрывных функций 2a (λ_1), 2c(λ_2), 4a(λ_1), 4a(λ_2).

Из рис. 2 видно, что функции вычисленные с помощью метода годографа с течением времени сдвигаются вправо, также ведут себя ударные волны и волны разрежения, полученные аналитически. Кроме того, по кривой 4d (λ_2) видно, что она близка к опрокидыванию, а при больших t опрокидывание происходит. Такое поведение ударных волн согласуется с общей теорией (см., например [1]). Однако, как было показано выше, автомодельные решения можно получить, только осуществив предельный переход.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00389 и РФФИ 07-01-92213-НЦНИЛ, а также гранта Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/6095 (2009–2010 гг).

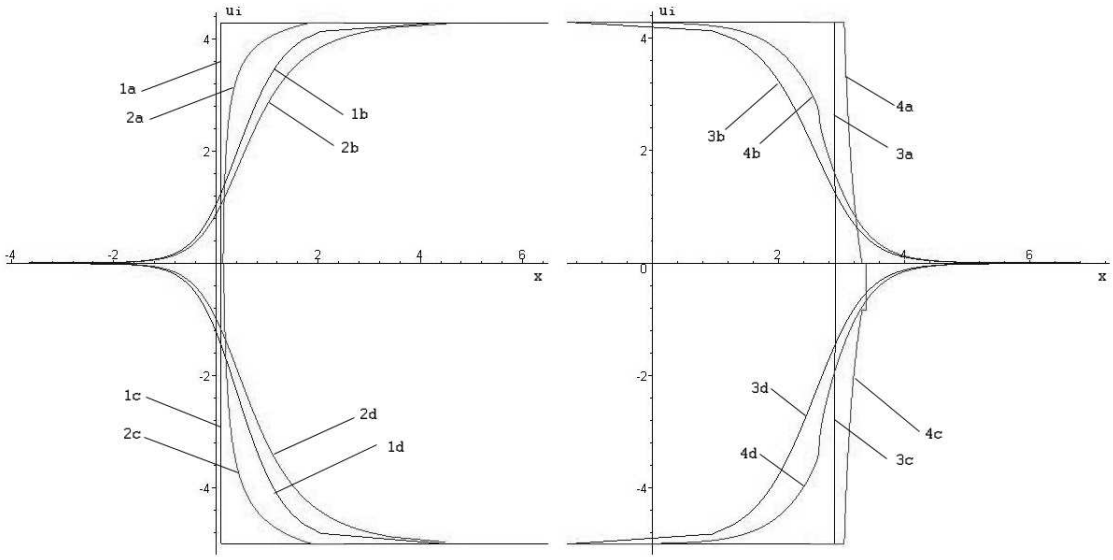


Рис. 2. Эволюция «эффективных» концентраций u_1 ,u_2, построенная по явным формулам и с помощью метода обобщенного годографа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского Университета, 2005. 215 с.

[2] *Константинов Б. П., Ошуркова О. В.* Экспрессный микроанализ химических элементов методом движущейся границы // Доклады АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1110–1113.

[3] *Елаева М. С.* Эволюция компонент смеси под действием электрического поля // Сб. трудов XII международной концеренции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону: Издательство «ЦВВР». С. 61–65.

[4] *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР, серия Математическая. Т. 54. 1990. № 5. С. 1048–1067.

[5] *Павлов М. В.* Гамильтонов формализм уравнений электрофореза. Интегрируемые уравнения гидродинамики. Препринт/ИТФ. М., 1987. № 17.

Elaeva M.S. *Using the generalized hodograph method for investigating the mathematical model of electrophoresis*. Mathematical model of zone electrophoresis which describes separation of two-component mixture is investigated. We assume that conductivity is depended on concentration components of mixture. Diffusion-free approximation of this model is an analogue of the Riemann problem. Initial conditions is smoothed by infinitely differentiable functions. The problem is solved with the help of the generalized Novikov-Dubrovin-Tsarev hodograph method.

ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТЕЛАХ МИКРОННЫХ РАЗМЕРОВ

Жигалин А. Г.
Самарский государственный университет

Получено замкнутое решение связанной задачи термоупругости для конечного цилиндра и шара с неравномерным начальным нагревом. Уравнение баланса тепла сформулировано на основе закона теплопроводности Фурье. Решение строится в классе функций, интегрируемых с квадратом, в форме разложения по полной биортогональной системе. Элементы этой системы получаются как собственные функции пары взаимно сопряженных дифференциальных операторов, порожденных рассматриваемой начально-краевой задачей. Координатные функции разложения определяются независимо друг от друга из решения соответствующих задач Коши.

Выделены краевые условия и симметрии, при которых собственные значения операторного пучка могут быть выражены через нули тригонометрических и цилиндрических функций, что позволяет получать решения с любой заранее заданной точностью. Приведены характерные размеры тел, при которых распределение температуры существенно зависит от взаимного влияния механических и тепловых полей.

Полная система уравнений линейной термоупругости состоит из уравнения движения и уравнения теплопроводности, которые при отсутствии массовых сил и внутренних источников тепла формулируются следующим образом [1]:

$$\begin{cases} \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) - \gamma\boldsymbol{\nabla}\Theta = \rho\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \\ \Delta\Theta - \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial\Theta}{\partial t} - \dfrac{\gamma T_r}{\Lambda}\dfrac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$, T — искомые вектор перемещения и приращение температуры, λ и μ — упругие постоянные Ламе, $\gamma = (3\lambda+2\mu)\alpha$ — термомеханическая постоянная, α — коэффициент теплового расширения, ρ — плотность, $a = \Lambda/\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, $\varkappa$ — теплоемкость тела, T_r — отсчетная температура, Λ — коэффициент теплопроводности.

Граничные условия в общем виде можно представить следующими соотношениями:

$$\mathbf{B}_1\cdot\Big(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big)\Big|_{\partial V} = \mathbf{B}_2\cdot\mathbf{u}\Big|_{\partial V}, \qquad b_1\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\Big|_{\partial V} = b_2\Theta\Big|_{\partial V},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к граничной поверхности ∂V тела V, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений. Тензоры $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ характеризуют упругое закрепление границы, а константы b_1 и b_2 задают на границе условия теплообмена. В частности, если $\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$, а $\mathbf{B}_2 = \mathbf{E}$, имеет место жесткое закрепление границы. Значения $\mathbf{B}_1 = \mathbf{E}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$ соответствуют случаю свободной границы. Аналогично, при $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ тепловой поток через границу равен нулю, а значения $b_0 = 1$, $b_2 = 1$ соответствуют изотермической границе.

Начальные условия имеют вид:

$$\mathbf{u}\Big|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \qquad \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \qquad \Theta\Big|_{t=0} = \Theta_0,$$

	$l = 10^{-2}$м.	$l = 10^{-7}$м.
A	2.77778	2.77778
B	0.0492045	0.0492045
C	689145	6.89145
D	1291500	12.915

Таблица 1. Значения безразмерных коэффициентов для алюминия

где $\mathbf{u}_0$ — начальные перемещения, $\mathbf{v}_0$ — начальные скорости точек тела, а Θ_0 — начальное распределение избыточной температуры.

Температурное слагаемое $\gamma\boldsymbol{\nabla}\Theta$ в первом уравнении системы (1) выражает тот факт, что неоднородное распределение температуры в теле приводит к возникновению в нем деформаций. Наличие во втором уравнении этой системы дилатационного члена $\frac{\gamma T_r}{\Lambda}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})$ означает, что изменение объема тела приводит к перераспределению в нем тепла, причем этот процесс зависит от *скорости* относительного изменения объема.

В большинстве случаев дилатационное слагаемое оказывает весьма незначительное влияние на распределение температуры в теле, что отмечается многими авторами. Поэтому дилатационным членом обычно пренебрегают, решая задачу в рамках теории температурных напряжений. В настоящей работе показывается, что с уменьшением размеров тел связанность полей деформации и температуры начинает существенно сказываться на их распределении. Исследование этого эффекта удобнее проводить в безразмерных переменных.

Уравнения термоупругости (1) в безразмерной форме могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{u}} + A\tilde{\boldsymbol{\nabla}}(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\tilde{\mathbf{u}}) - B\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{\Theta} = (A+1)\dfrac{\partial^2\tilde{\mathbf{u}}}{\partial\tilde{t}^2}, \\ \tilde{\Delta}\tilde{\Theta} - C\dfrac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial\tilde{t}} - D\dfrac{\partial}{\partial\tilde{t}}(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\tilde{\mathbf{u}}) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $l\tilde{\boldsymbol{\nabla}} = \boldsymbol{\nabla}$, а безразмерные коэффициенты вычисляются по формулам $A = \frac{\lambda+\mu}{\mu}$, $B = \frac{\gamma T_r}{\mu}$, $C = \frac{lc}{a}$, $D = \frac{l\gamma c}{\Lambda}$, где l — характерный размер тела.

Начальные и граничные условия преобразуются аналогично.

Далее знак «$\sim$» опускается для краткости, поскольку используются только безразмерные величины.

Заметим, что коэффициенты C и D второго уравнения системы (2) зависят от характерного размера тела l. Если для тел с размерами порядка нескольких метров, или даже сантиметров, значения этих коэффициентов много больше значений коэффициентов A и B, то при уменьшении размеров тел значения всех четырех коэффициентов становятся сопоставимыми. В таблице 1 приведены значения безразмерных коэффициентов для алюминия при различных значениях параметра l.

Построим замкнутое решение поставленной задачи термоупругости в соответствии с методом, изложенным в работе [2]. Решение отыскивается в пространстве L_2 четырехкомпонентных функций, интегрируемых с квадратом, скалярное

произведение в котором определяется соотношением

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = \int\limits_V \sum_{i=1}^{4} f_{1i} \bar{f}_{2i}\, dV,$$

где f_{1i}, f_{2i} — компоненты вектор-функций, а черта над символом означает комплексное сопряжение.

В качестве базисных функций пространства L_2 используются собственные функции $\mathbf{y}_i$ дифференциального операторного пучка [3], порождаемого исходной начально-краевой задачей: $\mathcal{L} = \mathcal{A}_0 + \xi \mathcal{A}_1 + \xi^2 \mathcal{A}_2$. Пространственные дифференциальные операторы $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ имеют вид:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} \Delta + A\mathrm{grad}\ \mathrm{div} & -B\mathrm{grad} \\ \mathbf{0} & \Delta \end{pmatrix},\ \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -D\,\mathrm{div} & -C \end{pmatrix},\ \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -(A+1)\mathcal{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Здесь через $\mathcal{E}$ обозначен единичный оператор.

Искомое решение представляется в виде разложения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t) \mathbf{y}_i(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Оператор $\mathcal{L}$ является несамосопряженным, его собственные функции не образуют ортогональной системы. Чтобы получить несвязанную систему уравнений для определения координатных функций разложения (3), рассматривается дифференциальный оператор, сопряженный к $\mathcal{L}$. Этот оператор имеет вид $\mathcal{L}^* = \mathcal{A}_0^* + \bar{\xi}\mathcal{A}_1^* + \bar{\xi}^2\mathcal{A}_2^*$, где

$$\mathcal{A}_0^* = \begin{pmatrix} \Delta + A\mathrm{grad}\ \mathrm{div} & \mathbf{0} \\ B\,\mathrm{div} & \Delta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & D\mathrm{grad} \\ \mathbf{0} & -C \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2^* = \mathcal{A}_2.$$

Собственные функции $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{y}_j^*$ пары взаимно сопряженных операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$ при $i \neq j$ удовлетворяют соотношениям биортогональности

$$\langle \mathcal{A}_1 \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j^* \rangle + (\xi_i + \xi_j) \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j^* \rangle = 0, \qquad \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j^* \rangle - \xi_i \xi_j \langle \mathcal{A}_0 \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j^* \rangle = 0,$$

что позволяет записать формулу для нахождения координатных функций однородной задачи следующим образом:

$$\phi_i(t) = \frac{1}{N_i} \left[\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \Theta_0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_1^*[\mathbf{y}_i^*] + \bar{\xi}_i \mathcal{A}_2^*[\mathbf{y}_i^*] \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_2^*[\mathbf{y}_i^*] \right\rangle \right] e^{\xi_i t},$$

где

$$N_i = \langle \mathcal{A}_1 \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i^* \rangle + 2\xi_i \langle \mathcal{A}_2 \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i^* \rangle.$$

Применительно к телам канонических форм (параллелепипед, шар, цилиндр и т. д.) основной вычислительной трудностью при решении задач термоупругости рассмотренным методом является нахождение собственных значений ξ_i порождаемых этими задачами дифференциальных операторов. Для нахождения ξ_i требуется решать громоздкое трансцендентное уравнение, корни которого оказываются

комплексными. Понятно, что в общем случае решение такого уравнения возможно только численно.

В некоторых частных случаях процедуры решения трансцендентного уравнения удается избежать. Пусть краевые условия задачи соответствуют теплоизолированной границе, на которой отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения, т. е. имеют место равенства

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\Big|_{\partial V}=0,\quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\Big|_{\partial V}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial V}=0. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичный тензор. Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения:

$$\Delta\Phi+\nu\Phi=0,\qquad \mathbf{n}\cdot\nabla\Phi\Big|_{\partial V}=0. \tag{5}$$

Доказано, что собственные значения ξ связаны алгебраическими соотношениями с собственными значениями ν вспомогательной задачи (5) если:

- тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда;
- тело имеет цилиндрическую форму — при условии осевой симметрии;
- тело имеет форму шара — при условии центральной симметрии.

В этих случаях собственные значения ξ могут быть найдены как корни уравнения

$$C(A+1)\xi^3+\nu(A+1)\xi^2+\nu[(C(A+1)+BD]\xi+\nu^2(A+1)=0.$$

Значения ν в свою очередь выражаются через нули тригонометрических (в случае прямоугольного параллелепипеда) или цилиндрических (в случае цилиндра и шара) функций. Таким образом, собственные значения ξ_i определяются с произвольной степенью точности. Решения соответствующих задач могут быть использованы для исследования различных слабых эффектов, таких как влияние связанности термомеханических полей на распределение температуры.

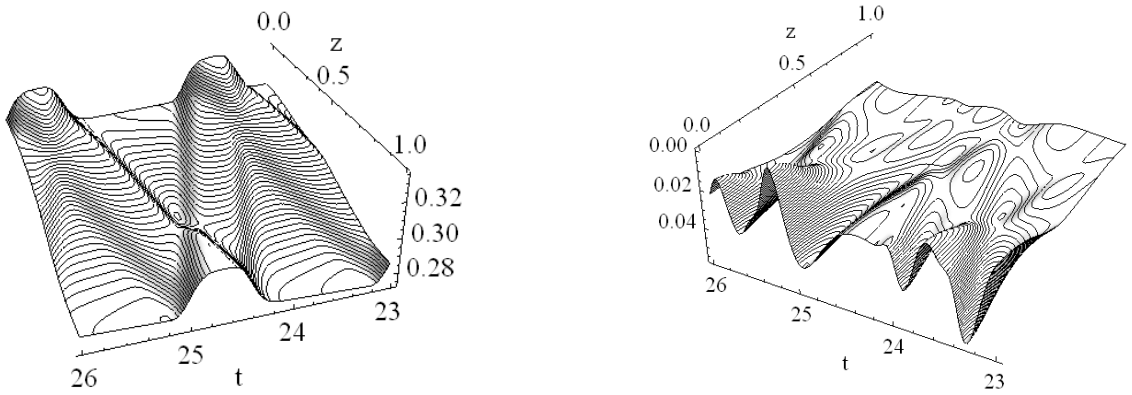
В настоящей работе решена задача о термоупругом деформировании алюминиевого цилиндра радиуса R длины H при граничных условиях (4) и условии осевой симметрии. Начальные перемещения и скорости точек равны нулю. Распределение начальной температуры задано функцией Хевисайда: $T\Big|_{t=0}=\eta(z)-\eta(z-h)$, где $0<h<H$. Результирующая формула имеет вид:

$$T=\frac{Rh}{H}-\frac{2RBCD}{H}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\frac{m_n\xi_{nk}\sin m_nh\cos m_nz}{BDm_n^4+2\xi_{nk}(A+1)(m_n^2+C\xi_{nk})^2}e^{\xi_{nk}t},$$

где $\nu_n=m_n^2$, $m_n=\frac{n\pi R}{H}$.

Кроме того, решена аналогичная задача для алюминиевого шара радиуса R при условии центральной симметрии, когда начальная температура задана функцией Хэвисайда: $T\Big|_{t=0}=\eta(h)-\eta(r-h)$, где $0<h<R$. Результирующая формула имеет вид:

$$T=h^3-\frac{4BCD}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\frac{\xi_{nk}\nu_n\sqrt{\nu_n}\sin\sqrt{\nu_n}r(\sin\sqrt{\nu_n}h-\sqrt{\nu_n}h\cos\sqrt{\nu_n}h)}{(2\sqrt{\nu_n}-\sin 2\sqrt{\nu_n})\left[BD\nu_n^3+2\xi_{nk}\nu_n(A+1)(\nu_n+C\xi_{nk})^2\right]}e^{\xi_{nk}t}.$$



а) Цилиндр, $R = H = 10^{-6}$ м. б) Шар, $R = 10^{-6}$ м.

Рис. 1. Распределение безразмерной температуры в зависимости от времени.

На рисунке 1 приведены графики распределения температуры по истечении некоторого времени после приложения начального возмущения. Отчетливо виден волновой характер процесса распространения температурных возмущений, что вызвано взаимным влиянием температурного и механического полей. Пренебрежение связанностью в тепловых расчетах для тел микронных масштабов может внести существенные искажения в получаемое распределение температуры.

Автор благодарен к.ф.-м.н. С. А. Лычеву за постановку задачи и помощь. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00553-а, 09-08-01194-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

[2] *Лычев С. А.* Связанная динамическая задача термовязкоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 5. С. 95–113.

[3] *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986. 260 с.

Zhigalin A. G. *Thermoelastic waves is the solids of micron scales*. The closed solutions of coupled thermoelasticity problem for non-uniformly heated solid cylinder and sphere are obtained. Fourier heat conduction law is used. The solution is in the form of expansion in a biorthogonal system. Elements of this system are eigenfunctions of the mutually adjoint differential operators. The expansion coefficients can be found independently by solving corresponding Cauchy problems.

Special boundary conditions for the problem under consideration are formulated. These conditions permit the exact calculation of the eigenvalues in terms of the zeros of trigonometric and cylindrical functions. Typical scales of solids for which thermoelastic coupling contributes significantly in the temperature distribution are shown.

ВЗАИМОСВЯЗИ ОСНОВНЫХ ФАКТОРОВ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ В МАШИНОСТРОЕНИИ И ИХ АРТЕФАКТЫ

Журавлев Г. А.
НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону

Применение в теории и практике машиностроения негерцевских взаимосвязей основных факторов контактных задач, вытекающих из эффектов кривизны контакта, позволяет существенно улучшить показатели контактных и трибоконтактных узлов машин.

Здесь поставлена задача дать сравнительную оценку теории и практики расчетов контактных и трибоконтактных узлов машин с позиций анализа их артефактов. Одним из главных показателей достоверности научного результата, как известно, является отсутствие его артефактов [1]. Особенно это важно учитывать в решениях контактных и трибоконтактных задач для тяжелонагруженных узлов машин и механизмов, вынужденно построенных на множестве упрощений и принципиально допускающих некоторую нестрогость доказательств применимости используемых решений. Именно в этих задачах получен и широко применяется ряд закономерностей, не соответствующих реальным (объективным) законам, не подтвержденных практикой и наполненных артефактами [2]. Например, решения плоской и пространственной контактных задач Герца, несмотря на развитие решений конструкционных контактных задач (отличающихся от классических контактных задач учетом общих деформаций конструкций), определяют широкое применение в исследованиях и инженерных расчетах взаимосвязи таких основных факторов контакта как допускаемая сила сжатия F_p и приведенный радиус кривизны контактирующих тел ρ

$$F_p = c\rho. \tag{1}$$

На примере эвольвентной зубчатой передачи рассмотрены три концепции контактных расчетов. Все традиционные физические основы развития силовых зубчатых зацеплений исходят из одной и той же линейной взаимосвязи (1), но дают принципиально разные выводы о влиянии угла зацепления α_{tw} (рис. 1) на несущую способность эвольвентной передачи: об отсутствии такого влияния и вообще каких-либо резервов совершенствования плоских систем зацепления (E. Buckingham – Ю.Н. Будыка – М.Л. Новиков) и о наличии резервов развития плоских систем зацепления благодаря учету особой роли гидродинамических факторов (G. Niemann – H. Richter – Э.Б. Вулгаков).

Эти представления характеризуются (рис. 1*a*), соответственно, условием $\varphi_{HT} = const$ (линия B) и гипотетически возрастающей функцией (область A). Область C (рис. 1*b*) показывает сферу рационального применения эвольвентного зацепления. Она же отражает условия реализации выявленных автором нелинейных взаимосвязей F_p, ρ — эффектов кривизны контакта [3–5], эффектов большего, относительно классических решений плоских и пространственных

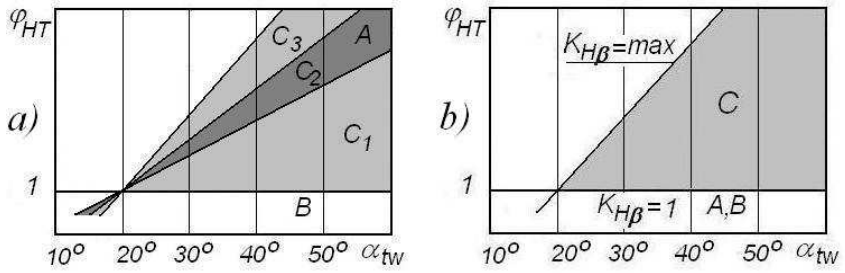


Рис. 1. Схематичное представление традиционных оценок влияния угла зацепления α_{tw} на коэффициент роста контактной прочности околополюсной зоны зубьев φ_{HT} и эвольвентной передачи в целом: a — при гипотетическом (G. Niemann – H. Richter – Э. Б. Вулгаков) учете влияния гидродинамических факторов на положение области A; b — при фактически совпадающих ($\varphi_{HT} \approx 1$) областях A и B.

контактных задач Герца, тепловых задач Блока и Коулмена, влияния кривизн упругих элементов контактных и трибоконтактных узлов машин на несущую способность их контакта. На рис. 1a эта область содержит три составляющие $C_{1,2,3}$ (одна из которых C_2 совпадает с областью A) и охватывает весь диапазон условий по коэффициенту продольной концентрации контактного давления $K_{H\beta}$: $1 \leqslant K_{H\beta} \leqslant K_{H\beta max}$. При этом реально область A, как это показано в работе [3], совпадает с областью B (рис. 1b), а области $C_{1,2,3}$ являются областями артефактов (за исключением линии $K_{H\beta} = 1$) для всех традиционных взаимосвязей факторов контакта.

Область C весьма широка, она базируется на учете реального (негерцевского) влияния фактора ρ и при определении физических основ развития зубчатых зацеплений не ограничена мнимой ролью гидродинамического фактора и не имеющей заметного практического смысла зависимостью (1). Для эвольвентной передачи (рис. 1) эффективность увеличения угла ее зацепления (показатель φ_{HT}) напрямую зависит от уровня локализации контакта зубьев. Достигая максимума при значении $K_{H\beta} = max$, она снижается — вплоть до совпадения с оценкой φ_{HT}=1 через линейную взаимосвязь (1) факторов контакта F_p и ρ при $K_{H\beta}$=1.

Анализ показал, что совершенно все накопленные в мировой литературе результаты экспериментальных исследований резервов улучшения геометрии эвольвентных передач противоречивы и в любом случае представляются (с позиций тех или иных традиционных физических основ) артефактами. При этом экспериментальные результаты на тяжелонагруженных и/или высокоскоростных (наиболее соответствующих современному машиностроению и тенденции его развития) эвольвентных передачах фактически являются артефактами не только для физических основ E. Buckingham – Ю. Н. Будыки – М. Л. Новикова, но и для физических основ G. Niemann – H. Richter – Э. Б. Вулгакова. Таким образом, взаимосвязь (1) и традиционные концепции (A и B) расчета трибоконтакта типа зубчатого узла принципиально не соответствуют самой широкой и самой значимой сфере применения силовых передач (с $K_{H\beta} > 1$) и не показывают реально существующие возможности эффективного развития (с ростом $\varphi_{HT} > 1$) современного машиностроения (рис. 1b).

Наиболее консервативное из традиционных физических основ представление (об отсутствии резервов прочности эвольвентной передачи) не меняется уже около 100 лет. И в XXI веке коллективное отрицание [6] самого факта наличия таких резервов, пренебрежительное отношение к тщательной оценке причин противоречивости теории и практики зубчатых зацеплений, к экспериментальным данным и практике передовых отраслей машиностроения сдерживают прогресс машиностроения, приводят к значительным интеллектуальным и материальным потерям.

На самом деле, эффекты кривизны контакта универсально подтверждаются экспериментами и практикой зубчатых передач, совершенно не имеют артефактов. Для доказательства этого положения рассмотрены различные экспериментальные данные, в том числе — представленные в литературе результаты [7] исследования конечно- элементной модели контакта зубьев эвольвентной передачи (упругих цилиндров с пересекающимися осями), которые трактуются их авторами как подтверждение линейной взаимосвязи (1) факторов контакта (F_p, ρ) и вывода E. Buckingham – Ю. Н. Будыки – М. Л. Новикова об отсутствии каких-либо резервов совершенствования зоны полюса и плоских систем зацепления. На самом деле причиной кажущегося совпадения результатов [7] с получаемыми данными по зависимости (1) является использование модели [7] без учета компенсационных особенностей контактного взаимодействия зубьев эвольвентной передачи, что привело к нарушению условий подобия моделируемой эвольвентной передачи.

Конечность размеров и общей жесткости элементов зубчатой передачи, других контактных и трибоконтактных узлов машин приводит к необходимости моделирования контакта этих элементов в их общеконструкционном деформированном состоянии. Решениями ряда упрощенных конструкционных контактных задач для тел с нагруженными выступами, которые были использованы при выявлении эффектов кривизны контакта (например, [8]), показано, что проявление эффектов кривизны контакта возрастает [2,4] по мере увеличения степени локализации контакта и роста компенсационных деформаций элементов контактного узла.

Компенсационные деформации возникают, например, благодаря конструкционным приемам снижения концентрации контактного давления, в том числе — модификации продольной формы контактных поверхностей и/или выполнения различных выемок в поверхностном слое контактирующих тел. Из всего разнообразия этих приемов выделим лишь строго необходимые — выполняемые для всех, без исключения, контактных и трибоконтактных узлов машин или функционально присущие некоторым из них в силу особенностей их назначения. К первым относится необходимость выполнения фасок или закругления острых кромок деталей, вызванных опасностью их хрупких сколов или пластического деформирования металла у торцов деталей. Вторые возникают конструктивно, например, как выемки в виде впадин между зубьями зубчатых колес передач, зубчатых полумуфт и шлицевых соединений. Влияние и первых, и вторых приемов необходимо учитывать (прямо или косвенно) при построении модели контакта зубьев.

Тяжелонагруженные и/или высокоскоростные передачи чаще всего имеют краевой контакт зубьев, а для его компенсации в ряде случаев зубчатые венцы выполняют с так называемым упреждением зубьев (введением разности углов β_1 и β_2: $\gamma_{fs} = \beta_1 - \beta_2$ или $\gamma_{fs} = \beta_2 - \beta_1$) и/или с их бочкообразной модифика-

цией. Поскольку при разнорежимном нагружении передачи эффективность таких компенсационных изменений формы зубьев может существенно снижаться, целесообразность их применения не всегда очевидна. Моделируемый угол перекоса контактных линий в плоскости зацепления эвольвентной передачи может быть определен как: $\gamma_\Sigma = |\gamma_T \pm \gamma_d \pm \gamma_{fs}| - \gamma_{com}$, где: $\gamma_T, \gamma_{com}, \gamma_d, \gamma_{fs}$ — углы, соответственно, от технологических погрешностей, от изгибно-сдвиговых компенсационных деформаций зубьев, от деформации других (кроме зубьев) элементов передачи, от упреждения зубьев.

Для высокоточных тяжелонагруженных передач уменьшенной массы (пониженной жесткости) введением угла упреждения γ_{fs} удается в той или иной степени компенсировать влияние угла γ_d. И только компенсационным углом γ_{com} можно заметно компенсировать всю сумму углов $\gamma_T \pm \gamma_d \pm \gamma_{fs}$ независимо от величин и фактических знаков углов γ_d, γ_T и γ_{fs}. Именно традиционно неучитываемое влияние параметра ρ на изменение компенсационных явлений и продольной деформации контактирующих тел определяет проявление эффектов кривизны контакта при краевом и срединном начально-точечном контакте.

Расчеты с учетом компенсационных явлений показывают, что результаты [7] не только не дают оснований для сделанного их авторами вывода, а, наоборот, являются очередными артефактами для взаимосвязи (1) и для совершенно всех традиционных физических основ. В то же время эти результаты стали дополнительным подтверждением достоверности эффектов кривизны контакта и отсутствию их артефактов.

Эффекты кривизны контакта проявляются более всего в прогрессивных конструкциях тяжелонагруженных передач, выполненных с высокой технологической точностью и с малым показателем относительной массы (отношением массы передачи к передаваемому ею крутящему моменту).

Опыт анализа публикаций типа [6, 7] показывает насколько важно сопоставлять получаемые результаты со здравым смыслом, диктуемым, например, сравнительной оценкой с данными экспериментальных исследований [2, 5] и с учетом особенностей решения конструкционной контактной задачи [9].

Традиционные взаимосвязи основных факторов контакта (1) и вытекающие из них физические основы взаимопротиворечивы, не подтверждены достоверной экспериментальной оценкой, имеют серьезные артефакты и не доказаны практикой, то есть фактически не представляют собой основы рационального развития зубчатых зацеплений, являются тормозом дальнейшего прогресса теории и практики передач зацеплением. Применение взаимосвязей основных факторов, вытекающих из эффектов кривизны контакта, позволяет существенно уточнить расчеты контактных и трибоконтактных узлов машин. Например, это уже привело к кардинальному совершенствованию традиционных зацеплений (эвольвентного, Новикова), созданию новых (повышенной конкурентоспособности) систем (плоских и пространственных, полюсных и внеполюсных) зацеплений (Журавлев Г. А. Зубчатая передача: Евразийский патент № 011706, 2009.04.28), позволило повысить конструктивную гибкость зубчатых узлов вплоть до реализации высоконагруженных малогабаритных узковенцовых передач без осевого компонента усилий со сколь угодно малым числом зубьев одного из парных колес (вплоть до 1) и с большим

(недостижимым для традиционных систем зацепления) передаточным отношением одной ступени. Таким образом доказано, что традиционными подходами получен ряд закономерностей, не соответствующих реальным (объективным) законам, не подтвержденных практикой и наполненных артефактами. Показано, что причиной ошибочности результатов, подтверждающих универсальность герцевских взаимосвязей основных факторов контакта, является построение моделей контактных и трибоконтактных узлов машин без учета компенсационных особенностей их конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шведков Е. Л. и др.* Словарь-справочник по трению, износу и смазке машин // Киев: Наукова думка. 1979. 188 с.

[2] *Журавлев Г. А.* О физических основах развития силовых зубчатых зацеплений // Труды XIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». 12–15 октября 2009. Ростов-на-Дону. Т.1. 2009. С. 86–90.

[3] *Журавлев Г. А.* К применению решения Герца в задачах о контакте реальных тел // Труды IV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». 27–28 октября 1998, Ростов-на-Дону. 1998. Т.1. С. 146–149.

[4] *Журавлев Г. А.* Оценка применимости решения Герца в задачах о контакте зубьев колес // Техника машиностроения. № 2. 2001. С. 82–90.

[5] *Журавлев Г. А.* Условия трибосопряжения зубьев и пути совершенствования зубчатых зацеплений // Трение и износ. Минск. Т. 20. № 2. 1999. С. 175–188.

[6] *Беляев В. А., Веретенников В. Я. и др.* Совершенствование зубчатых передач Новикова остается одним из важнейших направлений развития редукторостроения // Вестник машиностроения. 2007. № 5. С. 28–35.

[7] *Колосова Е. М., Короткин В. И., Чебаков М. И.* К вопросу о контактных напряжениях и нагрузочной способности эвольвентных зубчатых передач // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Техн. науки. 2008. № 3. С. 107–110.

[8] *Журавлев Г. А.* О выборе формы зубьев и совершенствовании передач зацеплением. Vortragsband Tagung «Zahnradgetriebe Dresden 1989». Teil 2, pp. 406–411.

[9] *Заблонский К. И.* Жесткость зубчатых передач // Киев: Техника. 1967. 259 с.

Zhuravlev G. A. *Interrelation of Major Factors for Contact Problems of Mechanical Engineering and their Artefacts*. Application of the nonhertz interrelations of main factors (arising from the effects of curvature of the contact) for contact problems of theory and practice of mechanical engineering can significantly improve the performance of contact and tribocontact assemblies of machines.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ, УВЛЕКАЕМОГО ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Зайцева А. В.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Рассматривается задача движения и поверхностной устойчивости турбулентного горизонтального слоя, увлекаемого турбулентным потоком газа. Такие задачи возникают при совместном движении газа и конденсата в газопроводах, где неустойчивость определяет начало пробкового режима. Для описания тензора турбулентных напряжений применялась гипотеза Буссинеска в комбинации с соотношением Ван-Дриста для длины смешивания. Найдено решение для безволнового плоскопараллельного течения. Исследуется устойчивость этого течения к малым синусоидальным возмущениям. Применяется метод Галеркина; собственные функции задачи раскладываются по полной системе базисных полиномов, как в газовой фазе, так и в жидкой; к полученным соотношениям проекций добавляются дополнительные соотношения на границе раздела фаз и жесткой границе. Полученная в итоге алгебраическая задача на собственные значения, решается с помощью QR-алгоритма. Резкое изменение профиля скоростей в окрестностях жесткой границы и границы раздела фаз приводят к необходимости применения большого числа базисных функций (N=500–700). Впервые получено согласование теоретических и экспериментальных параметров потери устойчивости в такого рода задачах.

1. Введение. Задача о совместном течении слоя жидкости на горизонтальной поверхности, увлекаемой потоком газа, является весьма актуальной для химической, пищевой и нефте-газовой промышленности [1]. В подавляющем большинстве случаев, поток газа является турбулентным, в то время как поток жидкости может быть как ламинарным, так и турбулентным. Теоретические и экспериментальные исследования случая турбулентного газа и ламинарной жидкости приведены в работах [2, 3, 6]. Модели для турбулентного газа предложены в [4, 5]. В настоящей работе исследуется более сложный случай, когда течения в обеих фазах являются турбулентными. Такая задача является актуальной при исследовании течения конденсата и газа в газопроводах и параметров перехода от расслоенного режима течения к пробковому. Для исследования таких течений обычно применяется гидравлический подход, основанный на грубых эмпирических предположениях [8, 9]. Эксперименты для таких течений как правило, проводятся в круглых трубах. Исключением является работа [7], где брали плоский канал.

2. Теоретические подходы к проблеме. Рассматривается задача о совместном течении турбулентного слоя жидкости конечной толщины и полубесконечного турбулентного потока газа. Плоское течение газа и жидкости описывается следующей системой уравнений и условий:

$$\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t}) < \tilde{y} < \infty :$$

$$\tilde{\rho}_g\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{T}_{xx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{T}_{xy}}{\partial \tilde{y}} \qquad (1)$$

$$\tilde{\rho}_g(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}}) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{T}_{xy}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{T}_{yy}}{\partial \tilde{y}} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = 0; \tag{3}$$

$$\tilde{y} \to \infty :$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_\infty, \quad \tilde{V} = 0; \tag{4}$$

$$0 < \tilde{y} < \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) :$$

$$\tilde{\rho}_l(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{y}} \tag{5}$$

$$\tilde{\rho}_l(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yy}}{\partial \tilde{y}} - \tilde{\rho}_l \tilde{g} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0; \tag{7}$$

$$\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) :$$

$$\tilde{U} = \tilde{u}, \quad \tilde{V} = \tilde{v}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \tag{8}$$

$$-\tilde{p} - \tilde{\sigma}\tilde{K}(\tilde{h}) + \tilde{\tau}_{nx}n_x + \tilde{\tau}_{ny}n_y = -\tilde{P} + \tilde{T}_{nx}n_x + \tilde{T}_{ny}n_y, \tag{9}$$

$$\tilde{\tau}_{nx}n_y - \tilde{\tau}_{ny}n_x = \tilde{T}_{nx}n_y - \tilde{T}_{ny}n_x \tag{10}$$

$$\tilde{y} = 0 :$$

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0, \tag{11}$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{nx} = \tilde{\tau}_{xx}n_x + \tilde{\tau}_{xy}n_y \\ \tilde{\tau}_{ny} = \tilde{\tau}_{xy}n_x + \tilde{\tau}_{yy}n_y \end{cases}$$

Здесь величины в жидкой фазе обозначаются малыми буквами, а в газовой — большими: $\tilde{u}, \tilde{v}$ и $\tilde{U}, \tilde{V}$ — компоненты тензора скорости жидкости и газа; $\tilde{p}, \tilde{P}$ и $\tilde{\tau_{ij}}, \tilde{T}_{ij}$ — давление и компоненты тензора напряжений соответственно в жидкой и газовой фазе; $\tilde{\sigma}$ — поверхностное натяжение; $\tilde{g}$ — ускорение силы тяжести; $\tilde{n_x}, \tilde{n_y}$ — компоненты внешнего, по отношению к жидкости вектора нормали

$$n_x = \frac{-h_x}{(1+h_x^2)^{1/2}}, \quad n_y = \frac{1}{(1+h_x^2)^{1/2}}, \quad \tilde{h_x} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}.$$

Так как рассматривается турбулентный режим течения, то для замыкания задачи необходимо использование полуэмпирических моделей для турбулентных напряжений. Использую гипотезу Буссинеска, напишем выражение для компонентов тензора напряжений в жидкой фазе:

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{xx} = 2\tilde{\rho}_l(\tilde{\nu}_l + \tilde{\nu}_l^{xx})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \\ \tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\rho}_l(\tilde{\nu}_l + \tilde{\nu}_l^{xy})(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}) \\ \tilde{\tau}_{yy} = 2\tilde{\rho}_l(\tilde{\nu}_l + \tilde{\nu}_l^{yy})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_l^{xx} = 2\tilde{l}_l^2 |\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}| \\ \tilde{\nu}_l^{xy} = \tilde{l}_l^2 |\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}| \\ \tilde{\nu}_l^{yy} = 2\tilde{l}_l^2 |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}| = \tilde{\nu}_l^{xx} \end{cases}$$

Здесь $\tilde{\nu}_l$ — молекулярная вязкость, $\tilde{\nu}_T^{ij}$ - тензор компонент турбулентной вязкости, $\tilde{l}_l$ — длина перемешивания Прандля, ρ_l— плотность жидкости.

Аналогичные выражения вводятся для газовой фазы.

Задача приводится к безразмерному виду введением двух разных базисов для величин в жидкой и газовой фазе. Базис для жидкости содержит плотность жидкости $\tilde{\rho}_l$, скорость на поверхности раздела $\tilde{u_N}$, толщину слоя $\tilde{h_N}$. Базис для газа содержит плотность $\tilde{\rho}_g$, динамическую скорость $\tilde{U}_* = \sqrt{\frac{\tilde{\tau_\omega}}{\tilde{\rho}_g}}$ и некоторый характерный размер S, который будет выбран позже.

3. Стационарное решение. Рассмотрим тривиальное, безволновое решение задачи (1)–(11) для однородного слоя толщины $\tilde{h_N}$. При этом $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = 0$. Решение для давления примет вид:

$$\begin{cases} \tilde{P} = 0, \quad \tilde{h_N} < \tilde{y} < \infty, \\ \tilde{p} = \tilde{\rho}_l \tilde{g}(\tilde{h_N} - \tilde{y}), \quad 0 < \tilde{y} < \tilde{h_N}. \end{cases}$$

Решение этой системы дает для всех $\tilde{y} \in [0, \infty]$ постоянное касательное напряжение. Обозначим его через τ_ω:

$$\tilde{\tau_{xy}} = \tilde{T_{xy}} = \tilde{\tau_\omega}.$$

Уравнения для жидкости в безразмерном виде примут вид:

$$\frac{1}{R_l}\frac{\partial u}{\partial y} + l_l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = c_f,$$

где $l_l = \chi y \left[1 - exp\left(\frac{-yR_l\sqrt{c_f}}{A}\right)\right]$, с краевым условием

$$y = 0: \quad u = 0,$$

и условием нормировки:

$$y = 1: \quad u = 1.$$

После решения задачи в жидкой фазе при фиксированном R_l и определения c_f можно переходить к решению задачи в газе. Полная постановка задачи для профиля скоростей в газовой фазе:

$$\frac{1}{R_g}\frac{dU}{dY} + l_g^2 \left(\frac{dU}{dY}\right)^2 = 1,$$

$$l_g = \chi Y \left[1 - exp\left(-\frac{YR_g}{A}\right)\right];$$

$$Y = 0: \quad U = \frac{\tilde{U_N}}{\tilde{U}_*} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} \left(\frac{\tilde{\rho}_g}{\tilde{\rho}_l}\right)^{\frac{1}{2}} = \chi.$$

Рассмотрим устойчивость найденного тривиального безволнового течения к малым возмущениям синусоидального вида. В жидкости:

$$u = u(y) + \varepsilon\hat{u}(y)exp\left[i\alpha(x-ct)\right],$$
$$v = \varepsilon\hat{v}(y)exp\left[i\alpha(x-ct)\right],$$
$$h = 1 + \varepsilon\hat{h}exp\left[i\alpha(x-ct)\right].$$

Перед тем, как рассмотреть возмущения в газовой фазе, введем масштаб $\tilde{S}$, положив его равным $\frac{1}{\tilde{\alpha}}$, где $\tilde{\alpha}$ — размерное волновое число. При этом

$$R_g = \frac{\tilde{U}_*}{\tilde{\alpha}\tilde{\nu}_g} = \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_w}}{\sqrt{\tilde{\rho}_g\tilde{\alpha}\tilde{\nu}_g}}.$$

Тогда возмущения в газе примут вид:

$$U = U(y) + \hat{H}\hat{U}(y)exp\left[i(X-CT)\right],$$
$$V = \hat{H}\hat{V}(y)exp\left[i(X-CT)\right],$$
$$H = \hat{H}exp\left[i(X-CT)\right].$$

Параметрами задачи являются $R_l = \frac{\tilde{U_N}\tilde{h_N}}{\tilde{\nu_l}}$, $G = \frac{\tilde{g}\tilde{h}_N}{\tilde{U_N}^2}$ и $\alpha = \tilde{h}_N\tilde{\alpha}$. Параметр R_g не является независимым и находится из соотношения:

$$R_g = \frac{\sqrt{c_f\gamma_2}R_l}{\alpha}, \quad \gamma_2 = \frac{\tilde{\rho}_l}{\tilde{\rho}_g}\frac{\tilde{\nu}_l^{\,2}}{\tilde{\nu}_g^{\,2}}$$

Вместо параметра G удобно ввести новый $T = \frac{\tilde{\tau_w}}{\tilde{\rho}_l\tilde{g}^{2/3}\tilde{\nu}_l^{\,2/3}}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$G = c_f^{\frac{3}{2}}R_lT^{-\frac{3}{2}}, \quad We = c_f^{-\frac{1}{2}}\gamma_1R_l^{-1}T^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma_1 = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}_l}\tilde{\nu}^{-\frac{4}{3}}\tilde{g}^{-\frac{1}{3}}.$$

Задача описывается R_l, T, α. Параметры G и We выражаются через них. Для системы воздух-вода $\gamma_2 = 3.83$, $\gamma_1 = 2900$.

4. Численное решение. Для численного решения задачи введем функции Φ и Ψ такие, что

$$\hat{u} = \Phi', \quad \hat{U} = \Psi', \quad \hat{v} = -i\alpha\Phi, \quad \hat{V} = -i\Psi.$$

Полученная система, решалась методом, получившим название «divided attack approach», впервые введенным в работах [4, 5, 10] и получившим своё развитие и применение в работах [3, 11] для ламинарного режима течения слоя жидкости и турбулентного режима газа.

На первом шаге решается уравнение для газовой фазы. При этом, влиянием жидкости пренебрегается. Находится неизвестная функция Ψ на границе $Y = 0$, затем найденное решение подставляется в систему для жидкости. Решается задача на собственные значения, находятся c и Φ. Найденное решение снова подставляется в уравнение для газа и процесс повторяется. Численный эксперимент показал, что одного шага достаточно. Для дискретизации задачи использовался метод разложения собственной функции по ортогональным функциям, выбранным из полной системы функций. В качестве ортогональных функций применялись полиномы Чебышева. Для нахождения собственных значений использовалась модификация метода Галеркина, так называемый тау-метод с последующим применением QR-алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Хьюит Д., Холл-Тейлор Н.* Кольцевые двухфазные потоки. М.: Энергия, 1974. 408 с.

[2] *Алексеенко С. В., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю.* Моделирование напряжений на твердой волнистой поверхности, обтекаемой турбулентным потоком газа // Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей: Докл. Молодежной конференции. Вып.11. Новосибирск: Параллель, 2008. С. 43–46.

[3] *Демехин Е.А.* Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой газовым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 37–43.

[4] *Abrams J., Hanratty T.J.* Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface // J. Fluid Mech. 1985. V.151, pp. 443–455.

[5] *Benjamin T.B.* Shearing flow over a wavy boundary // Fluid Mech. 1959. v. 6, pp. 161–205.

[6] *Coles D. E.* Interaction between a turbulent air stream and moving water surface // Fluid Mech. 1956. v.1, pp. 191–201.

[7] *Rossum J. J.* Experimental investigation of horizontal liquid films // Chemical Engineering Science. 1959. v.11. pp. 35–52.

[8] *Lin P. Y.,Hanratty T.J.* Prediction of slugs with linear stability theory // Int. J. Multiphase Flow. 1986. v.12. № 1, pp. 79–98.

[9] *Andritsos N.,Hanratty T. J.* Influence of interfacial waves in stratified gas-liquid flows // AICHE journal. 1987. v.33. № 3, pp. 444–445.

[10] *Cohen L. S.,Hanratty T. J.* Effect of waves at gas-liquid interface on turbulent air flow // Fluid. Mech. 1968. v.31, pp. 467–479.

[11] *Craic A. D. D.* Wind-generated waves in liquid films // Fluid Mech. 1966. v. 26, pp. 369–392.

Zaitseva A. V. *Stability of turbulent layer of liquid involved in movement by turbulent flow of gas*. A problem of movement and surface instability of a turbulent horizontal liquid layer involved in movement by a turbulent flow of gas. Such problems have vide practical application in gas transport and transition from annular regime to plug regime. Boussinesq hypothesis is applied along with Van-Driest formula. Trivial solution for flat plane-parallel flow is found. Stability of this solution against infinitesimal perturbations is investigated. Tau-variant of Galerkin quasi-spectral method is applied either in liquid and gas phases. The algebraic eigen-value problem is solved by OR-algorithm. Rapid changing of velocity profile in the vicinity of the wall and gas-liquid interface leads to necessity of a large number of Galerkin functions (up to 500–700). For the first time agreement between theory and experiment is obtained.

ОБ ОСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ КОНВЕКЦИИ И НЕКОТОРЫХ ВИБРАЦИОННЫХ ЭФФЕКТАХ

Зеньковская С. М.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Изложен вывод осредненных уравнений вибрационной конвекции жидкости, заключенной в контейнер с твердой границей. Применен асимптотический метод — метод осреднения, основу которого составляет разделение движений на плавную и быструю составляющие. Для плавных компонент получены осредненные уравнения, а для быстрых — выражения через плавную температуру. В осредненных уравнениях появилась виброгенная сила, пропоциональная квадрату вибрационного числу Грасхофа. В качестве примера рассмотрена конвекция в плоском горизонтальном слое жидкости. Показано, что высокочастотная вибрация может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на устойчивость квазиравновесия, а также вызывать конвекцию в невесомости и при нагреве сверху.

Введение

Термин «вибрационная конвекция» появился после выхода статьи [1], в которой была поставлена задача о влиянии высокочастотной вертикальной вибрации на возникновение гравитационной тепловой конвекции. Эта работа появилась под влиянием классических работ Н. В. Боголюбова, П. Л. Капицы о маятнике с вибрирующей точкой подвеса. Известны были эффекты: вертикальная вибрация может стабилизировать неустойчивое верхнее положение равновесия, сохраняя устойчивым нижнее. В то же время горизонтальные колебания могут сделать неустойчивым даже нижнее положение маятника. В работах о маятнике был применен метод осреднения Лагранжа–Ван дер Поля–Крылова–Боголюбова. В результате осреднения по быстрому времени получается замкнутая система уравнений. Эти осредненные уравнения содержат новую силу, которую В. И. Юдович назвал «виброгенной». Этот термин подчеркивает ее вибрационную природу, а, с другой стороны, — она автономна. В [2] была показана причина вибрационного эффекта — дополнительная потенциальная энергия — и описан физический эксперимент, который можно легко воспроизвести. В работе [1] были выведены осредненные уравнения Обербека–Буссинеска при действии высокочастотной вертикальной вибрации. Предполагалось, что жидкость находится в контейнере с твердой границей. Показано, что вертикальная вибрация оказывает стабилизирующее влияние на состояние относительного покоя жидкости. Более того, достаточно интенсивная вибрация может даже предотвратить конвекцию — имеет место эффект абсолютной стабилизации. В работе [5] рассмотрен случай наклонных вибраций, направленных под углом φ к горизонтали, так что $\varphi = \pi/2$ соответствует вертикальным, а $\varphi = 0$ — горизонтальным вибрациям. Были выведены осредненные уравнения конвекции жидкости, заключенной в области с твердой границей. На основе анализа осредненных уравнений получены новые вибрационные эффекты, связанные с наклонными вибрациями. Показано, что высокочастотная вибрация может не только стабилизировать, но и дестабилизировать относительное равновесие,

так что может возникнуть новый тип потери устойчивости — возникновение конвекции при нагреве сверху. При выводе осредненных уравнений конвекции был применен тот же метод осреднения как метод разделения движений на плавную и быструю составляющую, так что бесконечномерность системы не влияла на вывод, по крайней мере, на уровне формализма. Что же касается обоснований, то это самостоятельные задачи, которые потребовали применения аппарата функционального анализа, теории операторов и др. Вопросами обоснования методов осреднения посвящены работы И. Б. Симоненко [6, 7] и В. Б. Левенштама [8].

Согласно алгоритму метода осреднения, удается выразить быстрые составляющие неизвестных через медленные, так что вязкие и теплопроводные члены не входят в уравнения для быстрых движений. В результате нарушаются краевые условия прилипания и условия для температуры, что приводит к необходимости учитывать вибрационные пограничные слови. Однако в работах по обоснованию [6–8] показано, что вибрационные пограничные слови не влияют на ведущие члены асимптотики критических значений параметров; их нужно учитывать при нахождении потока тепла или других функционалов, зависящих от градиентов температуры или скорости. В некоторых задачах вибрационные пограничные слои были построены [8]. Метод осреднения для систем со связями был развит В. И. Юдовичем [9].

1. Вывод осредненных уравнений конвекции

Изложим вывод осредненных уравнений вибрационной конвекции. Пусть контейнер $D \subset R^3$, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, совершает колебания в направления орта $\boldsymbol{s} = (cos\varphi, 0, \sin\varphi)$ по закону $\frac{a}{\omega} f(\tau)$. Здесь $f(\tau)$ — 2π-периодическая функция быстрого времени $\tau = \omega t$, имеющая нулевое среднее. В системе координат $(x_1, x_2, x_3 = z)$, жестко связанной с контейнером, уравнения конвекции Обербека–Буссинеска запишем в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}', \nabla)\boldsymbol{v}' = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nu\Delta\boldsymbol{v}' - (\boldsymbol{g} - \boldsymbol{w}_e)\beta T',$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}' = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}', \nabla)T' = \chi\Delta T', \quad \boldsymbol{w}_e = a\omega f''(\tau)\boldsymbol{s}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{v}'$ — относительная скорость, p' — конвективное давление, T' — температура, ρ — плотность, β, χ, ν — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, $\boldsymbol{g} = -g \cdot \boldsymbol{k}$ — ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{k}$=(0,0,1) — орт оси z. На твердой границе ∂D краевые условия возьмем в виде

$$\boldsymbol{v}'\big|_{\partial D} = 0, \quad T'\big|_{\partial D} = -Az + B. \tag{2}$$

Такое задание температуры допускает существование равновесия

$$\boldsymbol{v}_0 = 0, \quad T_0 = -Az + B, \quad p_0 = \rho\beta g\left(-\frac{Az^2}{2} + Bz\right),$$

когда нет вибрации. В общем случае относительное равновесие существует лишь при $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{k}$. Но если f — 2π-периодическая функция, то существует $2\pi/\omega$ - периодическое решение системы (1)–(2). Далее рассматриваем предельный случай

больших частот ω, считаем, что амплитуда скорости вибрации a конечна, тогда амплитуда вибрации a/ω будет мала. Метод осреднения дает следующее асимптотическое ($\omega \to \infty$) представление решения системы

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}(x,t) + \widetilde{\boldsymbol{v}}(x,t,\tau), \quad p' = p(x,t) + \omega\widetilde{p}(x,t,\tau), \quad T' = T(x,t) + \frac{1}{\omega}\widetilde{T}(x,t,\tau).$$

Здесь $\boldsymbol{v}, p, T$ — медленные составляющие, $\widetilde{\boldsymbol{v}}, \widetilde{p}, \widetilde{T}$ — быстрые с нулевым средним. Быстрые неизвестные определяются однозначно условиями

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{v}}}{\partial\tau} = -\nabla\widetilde{p} + a\beta\omega f''(\tau)T\boldsymbol{s}, \quad \operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{v}} = 0, \\ &\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial D} = 0, \quad <\widetilde{\boldsymbol{v}}>= 0, \quad <\widetilde{p}>= 0, \\ &\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\tau} = -(\widetilde{\boldsymbol{v}}, \nabla\widetilde{T}), \quad <\widetilde{T}>= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — орт внешней нормали к границе ∂D. Отсюда можно выразить неизвестные $\widetilde{\boldsymbol{v}}$, $\widetilde{T}$ через медленную температуру $T(x,t)$:

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} = a\beta f'(\tau)\boldsymbol{w}(x,t), \quad \widetilde{T} = -a\beta(\boldsymbol{w}, \nabla T)f(\tau).$$

Здесь $\boldsymbol{w} = \Pi(T\boldsymbol{s})$, где Π — проектор Вейля, так что $\boldsymbol{w} = T\boldsymbol{s} - \boldsymbol{w}'$, $\boldsymbol{w}' = \nabla\Phi$, а функция Φ — любое из решений задачи Неймана

$$\Delta\Phi = (T\boldsymbol{s}), \quad \nabla\Phi\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial D} = T\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}, \quad \nabla\widetilde{p} = a\beta f''(\tau)\boldsymbol{w}'. \tag{4}$$

Поле $\boldsymbol{w}' = \Pi'(T\boldsymbol{s})$, где $\Pi' = I - \Pi$ — потенциальная часть архимедовой силы $T\boldsymbol{s}$.

Уравнения для медленных компонент $\boldsymbol{v}, p, T$ получаются посредством подстановки (3) в (1) и осреднения по быстрому времени τ. В результате приходим к осредненным уравнениям конвекции

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} - \beta T\boldsymbol{g} + a^2\beta^2 <f'^2> (\boldsymbol{w},\nabla)\nabla\Phi, \\ &\boldsymbol{g} = (0,0,-g), \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)T = \chi\Delta T. \end{aligned} \tag{5}$$

Пользуясь равенством $(\boldsymbol{w}',\nabla)\boldsymbol{w}' = T(\boldsymbol{s},\nabla)\boldsymbol{w}' - \nabla\frac{\boldsymbol{w}'^2}{2}$, запишем уравнения движения в (5) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla q + \nu\Delta\boldsymbol{v} - \beta T\boldsymbol{g} + a^2\beta^2 <f'^2> T(\boldsymbol{s},\nabla)\nabla\Phi, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \\ &\frac{dT}{dt} = \chi\Delta T, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla), \quad q = p + \frac{\boldsymbol{w}'^2}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для определения безразмерных параметров, характеризующих вибрационную конвекцию, введем безразмерные переменные, выбрав масштабы следующим образом. За масштаб длины примем высоту L области ∂D, за эталон времени возьмем величину Γ, тогда единицей скорости будет $L\Gamma^{-1}$, а для давления и температуры возьмем масштабы $\rho_0 L^2/\Gamma^2$ и δT — характерный вертикальный перепад температуры. Предполагается, что если контейнер подогревается снизу, то $\delta T > 0$,

в случае нагрева сверху — $\delta T < 0$. Сохраняя за безразмерными переменными те же обозначения, запишем уравнения (6) в безразмерной форме

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla q + \mu\Delta\boldsymbol{v} + GrT\boldsymbol{k} + G_v^2 < f'^2 > (\boldsymbol{s},\nabla)\nabla\Phi,$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{Pr}\Delta T, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{7}$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры $\mu = \frac{\nu\Gamma}{L^2}$ — безразмерная вязкость, $Gr = \dfrac{\beta g\delta T L^3}{\nu^2}$ — гравитационное число Грасхофа, $G_v = \dfrac{\beta a\delta T L}{\nu}$ — вибрационное число Грасхофа, $Pr = \frac{L^2}{\Gamma\chi}$ — число Прандтля. Если в качестве масштаба времени взять $\Gamma = \frac{L^2}{\nu}$, то приходим к общепринятым обозначениям.

2. Конвекция в горизонтальном слое жидкости

В качестве примера исследуем вибрационную конвекцию в плоском слое $|z| \leqslant 1/2$, ограниченном твердыми стенками. Осредненная задача имеет квазиравновесное решение

$$\boldsymbol{v}_0 = 0, \quad T_0 = -z, \quad \boldsymbol{w}_0 = (-z\cos\varphi, 0, 0), \quad \Phi_0 = -\frac{z^2}{2}\sin\varphi + const. \tag{8}$$

Исследуя устойчивость этого решения методом линеаризации, для амплитуд нормальных возмущений получим спектральную задачу

$$\sigma Lu = L^2u - R\alpha^2T + R_v(-\alpha^2\cos^2\varphi T + \alpha^2\sin\varphi W + i\alpha\cos\varphi DW),$$
$$Pr\sigma T = LT + u, \quad LW = -\alpha^2\sin\varphi T - i\alpha\cos\varphi DT. \tag{9}$$

Здесь $L = D^2 - \alpha^2$, $D = \frac{d}{dz}$, α — волновое число,$R = Pr\cdot G$, $R_v = Pr\cdot G_v$ — гравитационное и вибрационное числа Рэлея. Краевые условия при $z = \pm 1/2$ имеют вид

$$u = Du = T = W = 0. \tag{10}$$

Далее исследуем монотонную неустойчивость $\sigma = 0$ в случае невесомости ($R = 0$). Тогда в спектральной задаче (9) остаются три параметра R_v, φ, α.

Можно доказать, что при $\varphi = 0$ все собственные значения R_v положительны, а при $\varphi = \pi/2$ — отрицательны; в обоих случаях они простые.

В случае $\varphi = 0$ и $\pi/2$ задачу (9) можно записать в виде

$$L^4\Psi = \lambda\alpha^4\Psi, \quad z = \pm 1/2: \quad D\Psi = L\Psi = L^2\Psi = DL^2\Psi = 0, \tag{11}$$

где $\lambda = R_v$ при $\varphi = 0$ и $\lambda = -R_v$ при $\varphi = \pi/2$. В результате применения указанной теории получаем, что при любом волновом числе $\alpha \neq 0$ все собственные значения λ положительные и простые, а собственные функции образуют систему Маркова. Таким образом, строго доказана возможность конвекции в условиях невесомости при продольной вибрации ($\varphi = 0$). Если же $\varphi = \pi/2$, то монотонная неустойчивость в невесомости невозможна. Вычисления показывают, что в этом случае нет и колебательной неустойчивости.

Рассмотрена монотонная неустойчивость при наклонных вибрациях, показано, что существуют как положительные, так и отрицательные числа Рэлея при малых значениях вибрационного параметра.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований — номер проекта 09-01-00658-а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.* О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР, МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.

[2] *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. т. 21, Вып. 2. С. 588–597.

[3] *Капица П. Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. т. 44, Вып. 1. С. 7–20.

[4] *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. трудов института строительной механики АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.

[5] *Зеньковская С. М.* О влиянии вибрации на возникновение конвекции // Деп. ВИНИТИ, РЖ «Механика». 1978. № 11. С. 2437–2478.

[6] *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб. 1972. т. 87(129), № 2. С. 236–253.

[7] *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости // Изд. РГУ. 1989. С. 111.

[8] *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях // Сиб. мат. журнал. 1993. № 2. С. 105–122.

[9] *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. т. 4, № 3. С. 26–158.

Zenkovskaya S. M. *Averaged equations of vibrational convection and equilibrium states stability*. Derivation of averaged equations of vibrational convection of fluid, enclosed in container with solid boundary, is stated. Asymptotic averaging method, which is based on separation of motion on slow and fast components, was applied. Averaged equations for slow components and expression of fast through slow temperature, were obtained.

Vibration-generated force, proportional to the square of vibrational Grashof number, emerged in averaged equations. Convection in flat layer of fluid was considered as an example. High-frequency vibration was shown to have both stabilizing and destabilizing influence on equilibrium stability, also to induce convection in zero-gravity.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ В ANSYS WORKBENCH

Зиборов Е. Н.[*], **Напрасников В. В.**[**], **Соловьев А. Н.**[*,***,****], **Шевцов С. Н.**[*,***,****]

[*]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*
[**]*Белорусский национальный технический университет, Минск*
[***]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*
[****]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассчитывается усталостная прочность армированного композита на основе конечно-элементного решения задачи для представительного его объема в ANSYS WORKBENCH.

1. Введение. Проблема прогноза ресурса полимеркомпозитных несущих элементов имеет большое практическое значение в различных областях машиностроения, но далека от своего решения. Изменение прочностных и жесткостных характеристик полимеркомпозитных лонжеронов несущего винта вертолета связана с несколькими факторами, среди которых циклические нагрузки, воздействие окружающей среды (например, эксплуатация в условиях высокой влажности [1]) и др. В мировой литературе имеется большое количество работ, посвященных этой тематике, в которых описываются результаты построения кривых усталости на основе экспериментов например [2, 3], так и моделирования этих свойств, например конечно-элементного [4, 5]. Современные конечно-элементные пакеты представляют возможность проведения расчетов на усталостную прочность конструкций, при этом усталостные свойства материалов их составляющих должны быть известны, для компонентов композитов это требование не всегда выполнено, поэтому требуются либо дополнительные эксперименты, либо решение обратных задач об идентификации этих свойств на основе кривых усталости композита. Отдельной проблемой является моделирование интерфейсных слоев между матрицей и армирующим волокном [5, 6], особенно при наличии повреждений.

В работе рассматривается композиционный материал, усиленный однонаправленными нитями и проводятся расчеты на усталостную прочность в ANSYS WORKBENCH, с помощью выделения представительного объема материала. Проведены две серии расчетов: первая для модельного материала, вторая для полимеркомпозита, полученного термическим отверждением эпоксидного связующего усиленного стекловолокном. Диапазон напряжений выбран с учетом характерных нагрузок на лонжерон лопасти несущего винта вертолета. Получены зависимости числа циклов безотказной работы от интенсивности нагрузки.

Постановка задачи. В рамках линейной теории упругости [7] рассмотрим композиционный материал армированный однонаправленными нитями (рис. 1 слева) и его представительный объем содержащий один армирующий элемент (рис. 1 справа), будем считать, что аримрующие нити и матрица жестко сцеплены.

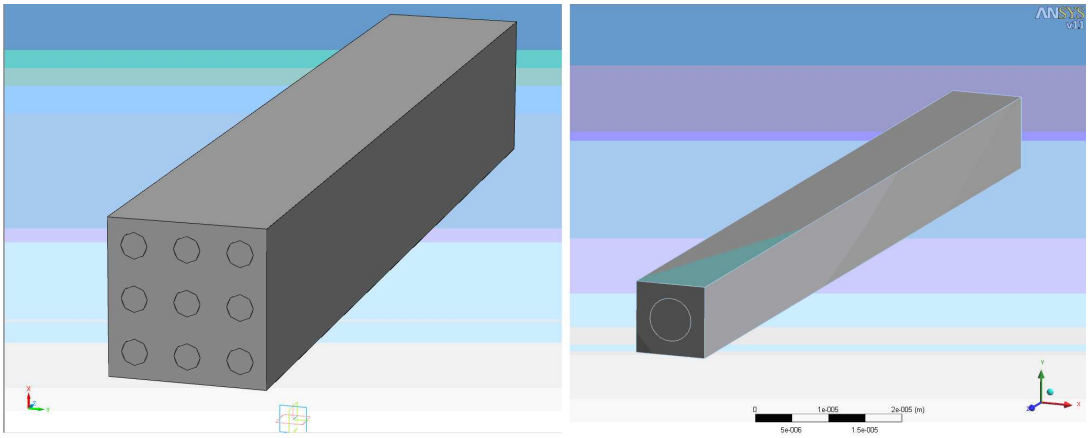


Рис. 1. Армированный композит и его представительный объем.

Один торец элемента (рис. 1 справа) жестко закреплен на другой действует равномерно распредленная нормальная нагрузка, характерная для эксплуатации рассматриваемой конструкции, на боковых поверхностях задаются условия гладкого контакта. Усталостный расчет при много цикловом растяжении — сжатии проводился при симметричном характере нагружения с использованием теории SN-None в конечно-элементном пакете Ansys WorkBench, основанный на эмпирических S-N кривых. В работе [8] описано, как усталостный ресурс может быть найден в замкнутой математической форме: когда аналитическую форму S-N кривой объединяют с распределением вероятностей для размахов напряжений.

Численные результаты. В качестве тестового примера был рассмотрен композитный материал, усталостные кривые которого имеются в стандартных библиотеках программного комплекса. Такими материалов были выбраны конструкционная сталь (армирующие волокна) и алюминий (матрица). Кривые усталости из стандартной библиотеки комплекса ANSYS Workbench представлены на рис. 2. (кривые усталости построены в логарифмических координатах, рис. 2 справа —

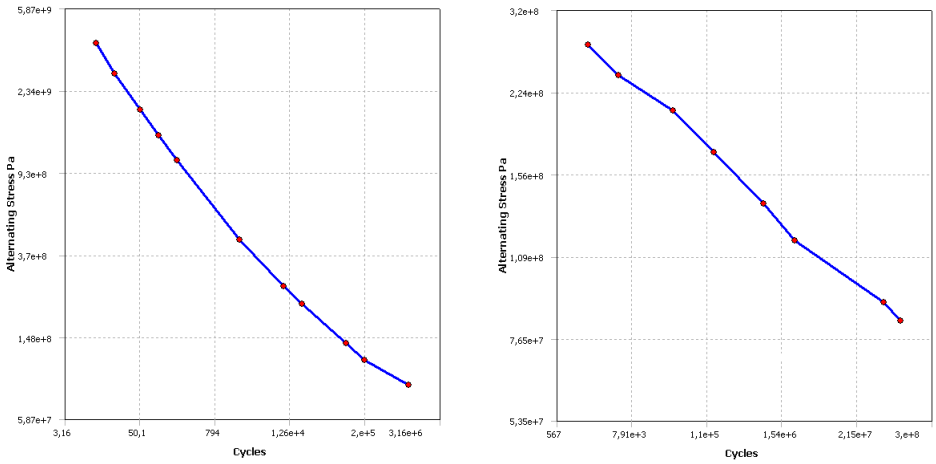


Рис. 2. Кривые усталости для стали (справа) и алюминия (справа).

сталь, рис. 2 слева — алюминий) по горизонтальной оси откладывается количество циклов по вертикали напряжение в Па. Модуль упругости и коэффициент Пуассона для стали: E=$2{\cdot}10^{11}$ Па, ν=0,3, для алюминия: E=$7{,}1{\cdot}10^{10}$ Па, ν=0,33.

Сетка конечных элементов с упорядоченным разбиением представлена на рис. 3 (слева), тип элемента 4-х узловой тетраэдр (количество узлов — 74089, элементов — 14922).

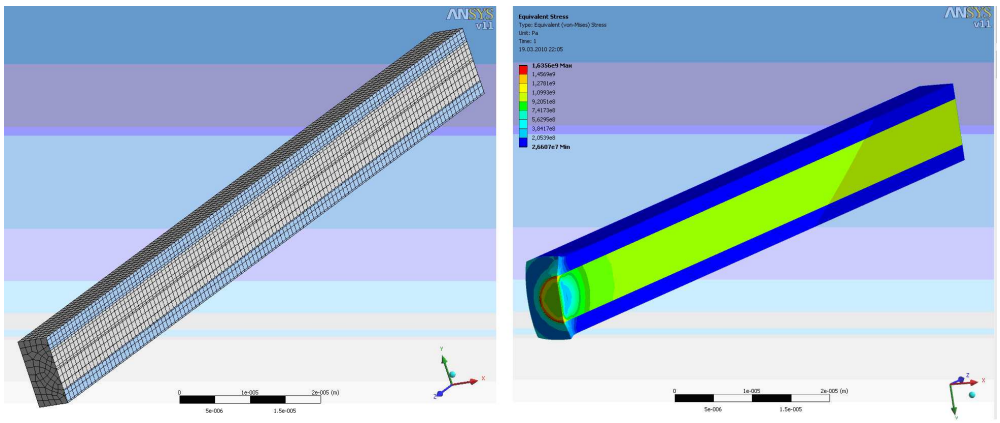


Рис. 3. Конечно-элементная модель и распределение эквивалентных напряжений.

На рис. 3 (справа) представлено распределение эквивалентных напряжений (по Мизесу), полученных в результате статического расчета. На рис. 4 представлены результаты расчета усталостных кривых композиционного материала — горизонтальный участок кривой (рис. 4 слева) соответствует области не накопления повреждений, кривая для композиционного материала находится между соответствующих кривых для аримирующего волокна и матрицы (рис. 4 справа).

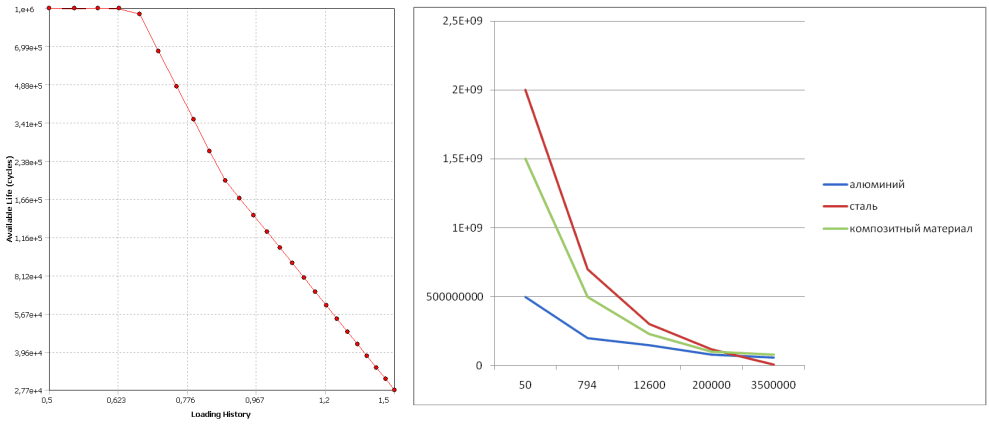


Рис. 4. Кривые усталости композита.

Аналогичные результаты получены для полимеркомпозита из стекловолокна (армирующий материал E=$8{,}7{\cdot}10^{10}$ Па, ν=0,22) и эпоксидной смолы (матрица E=$2{,}55{\cdot}10^{9}$ Па, ν=0,22) и представлены на рис. 5.

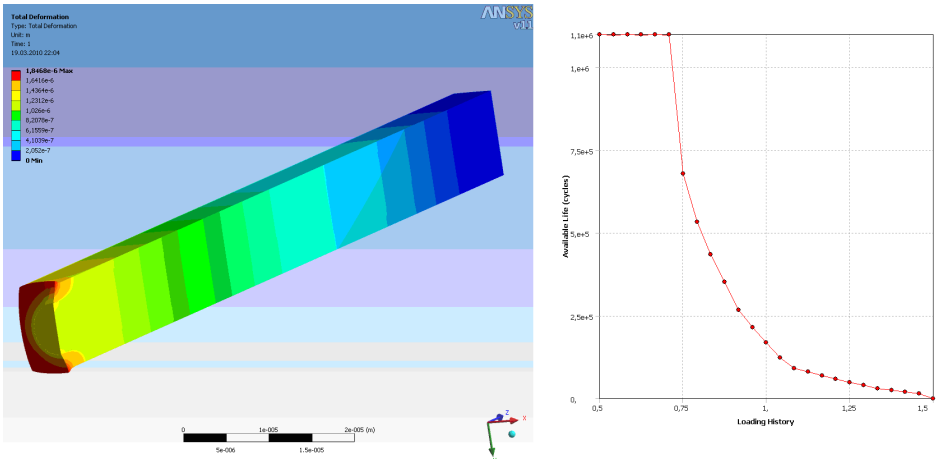


Рис. 5. Деформация и кривая усталости полимеркомпозита.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 10-08-01296-а, 10-01-00194-а, 10-08-00093-а), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Kim Hyo Jin, Seo Do Won.* Effect of water absorption fatigue on mechanical properties of sisal textile-reinforced composites // International Journal of Fatigue 28 (2006) 1307–1314.

[2] *Bathias C.* An engineering point of view about fatigue of polymer matrix composite materials // International Journal of Fatigue 28 (2006) 1094–1099.

[3] *Paepegem W. Van, Degrieck J. De Baets P.* Finite element approach for modelling fatigue damage in fibre-reinforced composite materials // Composites: Part B 32 (2001) 575–588.

[4] *Sekine Hideki, Yan Bo, Yasuho Takeshi.* Numerical simulation study of fatigue crack growth behavior of cracked aluminum panels repaired with a FRP composite patch using combined BEM/FEM // Engineering Fracture Mechanics 72 (2005) 2549–2563.

[5] *Buryan O. K., Novikov V. U.* Modeling of the interphase of polymer-matrix composites: determination of its structure and mechanical properties // Mechanics of Composite Materials, Vol. 38, No. 3, (2002) 187–198.

[6] *Alvarez V. A., Valdez M. E., Va'zquez A.* Dynamic mechanical properties and interphase fiber/matrix evaluation of unidirectional glass fiber/epoxy composites / Polymer Testing 22 (2003) 611–615.

[7] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[8] *S.Gran.* A Course in Ocean Engineering, http://www.dnv.no/ocean/course.htm.

Ziborov E. N., Naprasnikov V. V., Soloviev A. N., Shevtsov S. N. *To determination of fatigue strength of reinforced composites in ANSYS WORKBENCH*. Estimation strength reinforced composites fatigue based on finite element solutions problem for a representative of its volume in ANSYS WORKBENCH are calculated.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВНУТРИГЛАЗНОЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ДВИЖЕНИИ ГЛАЗНОГО ЯБЛОКА

Зимин Б. А.[*], **Бауэр С. М.**[*], **Шелепин Ю. Е.**[**], **Вовненко Н. В.**[*], **Лахман К. О.**[*]

[*] *Санкт-Петербургский государственный университет*

[**] *Институт физиологии им. И. П. Павлова РАН, Санкт-Петербург*

В работе рассматривается многослойная оболочка глаза, заполненная средой из нескольких компонентов, которая вращается в жидкости под воздействием крутящих моментов, создаваемых тремя парами прикрепленных к глазному яблоку мышц. Центр вращения глазного яблока остается неподвижным и в норме находится в среднем на расстоянии 13,5 мм от вершины роговицы. Движение глаз при смене точек фиксации во фронтальной плоскости совершаются скачком. Отклонение от точки фиксации равно $5'–6'$. Траектории движения правого и левого глаза при фиксации неподвижной точки различны. При неточном скачке глаз совершает дополнительный «доскок».

Допуская, что внутриглазная жидкость является идеальной несжимаемой и однородной, рассматривается классическая задача о вихревом движении такой жидкости внутри глазного яблока. В предлагаемой модели рассматривается частный вид движения жидкости — однородное вихревое движение, при котором $\operatorname{rot}\bar{\vartheta} = \text{const}$ ($\bar{\vartheta}$ — скорость жидкости). Методом Галеркина уравнение движения жидкости трансформируется в уравнение Эйлера для движения твердого тела с неподвижной точкой. Как известно, данное уравнение имеет два квадратичных интеграла движения, которыми можно, например, характеризовать процесс чтения. Обладая экспериментальными данными о зависимости угловой скорости движения глаза от времени в процессе различных тестов (при чтении, рассматривании картин и устремлении взглядов в одну точку), можно оценивать затраченную энергию в этом процессе. Для проведения исследований использована система «Jazz Novo Standard».

Многослойная оболочка глаза, заполненная средой из нескольких компонентов (рис. 1), вращается в вязкой жидкости под воздействием крутящих моментов, создаваемых тремя парами прикрепленных к глазному яблоку мышц (рис. 2).

Центр вращения глазного яблока остается неподвижным и в норме находится в среднем на расстоянии 13,5 мм от вершины роговицы. У близоруких глаз это расстояние больше, у дальнозорких — меньше. Движение глазного яблока вокруг неподвижной точки определяется осью зрения и может быть сведено к повороту двух осей (рис. 3). Независимо от исходного положения глаза и траектории поворота, конечное положение основного меридиана и экватора сетчатки относительно зрительной оси является функцией только направления этой оси. Ось глаза A составляет с осью вращения косых мышц B угол около $35°$, а ось вращения верхней и нижней прямых мышц D — угол $70°$. Угол между осями B и D примерно $75°$.

Работа мышц глаза скоординирована с работой зрачковой мышцы и аккомодационных мышц хрусталика, что определяет четкое видение. Движение глаз при

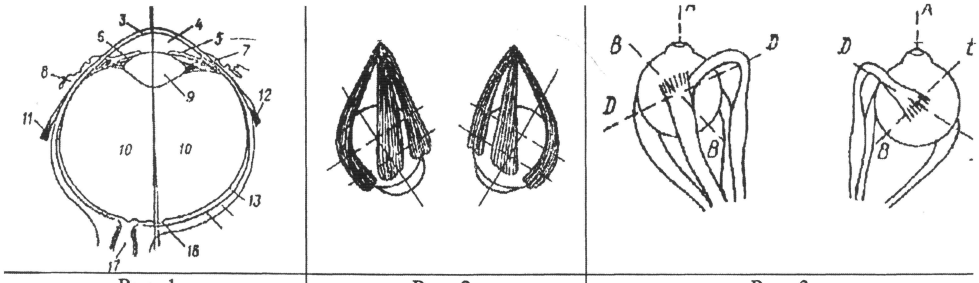


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

смене точек фиксации во фронтальной плоскости совершаются скачком. Отклонение от точки фиксации равно $5'-6'$. Траектории движения правого и левого глаза при фиксации неподвижной точки различны. При неточном скачке глаз совершает дополнительный доскок.

Допуская, что внутриглазная жидкость является идеальной несжимаемой и однородной, рассмотрим задачу о вихревом движении такой жидкости внутри глазного яблока.

Задача о вихревом движении идеальной несжимаемой однородной жидкости внутри эллипсоидальной капсулы является классической [1, 2]. Для идеальной несжимаемой однородной жидкости справедливо уравнение Эйлера [3]

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} + \left(\bar{\nabla} \cdot \nabla\right) \bar{\vartheta} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{1}$$

где ϑ — скорость жидкости, p — давление, ρ — плотность.

При отсутствии теплообмена между отдельными участками жидкости, а также между жидкостью и соприкасающимися с ней телами (капсулой глаза), движение происходит адиабатически [3]. Используя соотношение

$$\frac{1}{2} \nabla \vartheta^2 = [\bar{\vartheta}, \operatorname{rot} \bar{\vartheta}] + \left(\bar{\nabla} \cdot \nabla\right) \bar{\vartheta} \tag{2}$$

можно записать (1) в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - [\bar{\vartheta}, \operatorname{rot} \bar{\vartheta}] = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\vartheta^2}{2} \right) \tag{3}$$

Применив к обеим частям (3) операцию rot, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \bar{\vartheta}) = \operatorname{rot} [\bar{\vartheta}, \operatorname{rot} \bar{\vartheta}] \tag{4}$$

Уравнение (4) с условием бездивергентности

$$\operatorname{div} \bar{\vartheta} = 0 \tag{5}$$

и условием на границе S (поверхность глазного яблока)

$$\left(\bar{\vartheta} \cdot \nabla\right) |_{s=0} = 0 \tag{6}$$

полностью описывает вихревое движение идеальной несжимаемой однородной жидкости внутри объема V с поверхностью S.

Поверхность глазной капсулы в наиболее общем случае считаем эллипсоидальной

$$S(x,y,z) = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0 \tag{7}$$

$a_{i,}(i = 1,2,3)$ — главные полуоси эллипсоида.

Существует частный вид движения жидкости — однородное вихревое движение, в котором $\bar{\Omega} = \operatorname{rot}\bar{\vartheta}$ в каждый момент времени остается постоянным в пространстве и одинаковым для всех частиц жидкости. В рассматриваемой задаче имеются три линейно независимых поля скорости, соответствующие стационарному однородному вращению жидкости вокруг каждой из трех главных осей эллипсоида. Эти бездевиргентные векторные поля скорости зависят линейно от координат, удовлетворяют граничному условию (2) и являются точными решениями уравнения (4) [4]. Это векторное поле можно записать в виде [5]:

$$\begin{array}{l} \bar{W_1} = -\frac{a_2}{a_3} z\bar{j} + \frac{a_3}{a_2} y\bar{k} \\ \bar{W_2} = -\frac{a_3}{a_1} x\bar{k} + \frac{a_1}{a_3} z\bar{i} \\ \bar{W_3} = -\frac{a_1}{a_2} y\bar{i} + \frac{a_2}{a_1} x\bar{j} \end{array} \tag{8}$$

Они удовлетворяют условию на границе (6), являются бездевиргентными, линейно независимыми и ортогональными в том смысле, что

$$\int_V W_i \cdot W_j dV = 0 \tag{9}$$

для $i \neq j$. Следуя [6] решение (4) будем искать в виде:

$$\bar{\vartheta}(\bar{x},t) = \omega_1(t)\bar{W_1}(\bar{x}) + \omega_2(t)\bar{W_2}(\bar{x}) + \omega_3(t)\bar{W_3}(\bar{x}) \tag{10}$$

Запишем $\bar{\vartheta}$ в ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{\vartheta} = \bar{i}\left(\frac{a_1}{a_3} z\omega_2 - \frac{a_1}{a_2} y\omega_3\right) + \bar{j}\left(\frac{a_2}{a_1} x\omega_3 - \frac{a_2}{a_3} z\omega_1\right) + \bar{k}\left(\frac{a_3}{a_2} y\omega_1 - \frac{a_3}{a_1} x\omega_2\right) \tag{11}$$

Подставляя (11) в (4) и произведя все необходимые вычисления, получим систему:

$$\begin{array}{l} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (J_3 - J_1)\omega_2\omega_3 \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 \end{array} \tag{12}$$

где $J_1 = a_2^2 + a_3^2,\ J_2 = a_3^2 + a_1^2,\ J_3 = a_1^2 + a_2^2$.

Полученная система (12) совпадает с уравнением Эйлера для движения гироскопа [7]. Общая теория таких гидродинамических конечномерных моделей основывается на теоретико-групповых соображениях [7]. Уравнение Эйлера (12) имеет два квадратичных интеграла движения:

$$\begin{array}{l} E = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) \\ K^2 = (J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2) \end{array} \tag{13}$$

где E — кинетическая энергия жидкости, K^2 — квадрат кинетического момента.

Предварительные эксперименты были проведены на системе «Jazz Novo Standard» в институте физиологии им. И. П. Павлова. Испытуемым было предложено: 1) смотреть в одну точку, 2) читать текст, 3) рассматривать картину. Если соответствующие затраты энергии обозначить E_1, E_2, E_3, то оказалось, что

$$E_3 \geqslant E_2 > E_1,$$

то есть рассматривание картин вызывает наибольшие затраты энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 09-01-00140а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журн. Русск. физ.-хим. общ., 1885, Т. 17, отд.1, № 6, С. 81–113; № 7, С. 145–199; № 8, С. 231–280.

[2] *Обухов А. М.* Об интегральных характеристиках в системах гидродинамического типа // ДАН СССР, 1969, Т. 184, № 2, С. 309–312.

[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц В. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

[4] *Ламб Н.* Гидродинамика. М. ГИТТЛ, 1947. 929 с.

[5] *Моисеев Н. Н.* Избранные труды. Т.1. Гидродинамика и механика. Оптимизация исследования и теория управления. М.: Тайдекс, 2003. 375 с.

[6] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1961. 203 с.

[7] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

Zimin B. A., Bauer S. M., Shelepin Yu. E., Vovnenko N. V., Lakhman K. O. *Hydrodynamic model the intraocular fluid flow under oculogyration.* We consider the multilayered eye shell filled with the medium of several components, which rotates in a liquid under torque generated by three pairs of muscles attached to the eyeball. Center of rotation of the eyeball is fixed and normally located at an average distance 13.5 mm from the apex of the cornea. When the fixation points in the frontal plane change the eye movement makes the target jump and the post-jump (in the case of non-exact fixation).

In assumption that the intraocular fluid is incompressible and homogeneous the classical problem of vortex motion of a fluid inside the eyeball is considered. The Galerkin equation of motion of the liquid is transformed to the Euler equations for rigid body motion with a fixed point. It is known, that this equation has two quadratic integrals of motion, which may characterize the process of reading.

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ В СЛАБО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Зимин Б. А., Судьенков Ю. В., Вовненко Н. В.
Санкт-Петербургский государственный университет

В системе уравнений динамической термоупругости выделяются две квазинезависимые подсистемы — упругая и тепловая. Дается их описание в терминах дисперсионных функций. Показано, что у системы имеется точка резонанса, определяемая совместным решением соответствующих дисперсионных уравнений. Только в этой точке резонанса возможно совместное решение системы независимых уравнений динамической несвязанной термоупругости. Показано, что при малом коэффициенте связанности в решении дисперсионного уравнения появляется комплексная составляющая частоты, которая описывает диссипацию в среде.

Уравнения связанной динамической термоупругости для одноосного напряженного состояния запишем в виде [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - s\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$
$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} - \chi\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

где $s = \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}{2\mu+\lambda}$, $\varepsilon = \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T Q_0}{\rho c_\varepsilon}$, $c^2 = \frac{2\mu+\lambda}{\rho}$, λ, μ — коэффициенты Ламе, α_T — коэффициент линейного расширения, ρ — плотность материала, c_ε — теплоемкость при постоянной деформации, Q_0 — температура в естественном состоянии, $T = Q - Q_0$, χ — коэффициент температуропроводности, u — перемещение по оси z.

Система уравнений (1) описывает взаимодействие двух различных физических систем — упругого и температурного поля. Будем искать решение уравнений (1) в виде:

$$u(t,z) = \tilde{u}(\omega,k)\exp(-i\omega t + ikz) \qquad (2)$$
$$T(t,z) = \tilde{T}(\omega,k)\exp(-i\omega t + ikz)$$

где $\tilde{u}(\omega,k)$, $\tilde{T}(\omega,k)$ — комплексные величины, ω — частота, k — волновое число.

Подставляя решение (2) в систему (1), получим систему однородных уравнений. Эта система однородных уравнений имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда определитель ее равен нулю. Применительно к (1), (2) запишем этот определитель в виде:

$$D(\omega,k) = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(-i\omega + \chi k^2\right) + i\delta\omega k^2 = 0 \qquad (3)$$

где $\delta = s\varepsilon = \frac{(3\lambda+2\mu)^2}{\lambda+2\mu}\frac{\alpha_T^2 T_0}{\rho c_\varepsilon}$ — коэффициент связанности.

Соотношение (3) является дисперсионным уравнением для определения спектров собственных волн, $D(\omega, k)$ — дисперсионная функция системы (1). При $\delta = 0$, когда упругое и тепловое поле не взаимодействуют, собственные частоты определяются из двух независимых дисперсионных уравнений (для упругих волн D_e и теплового поля соответственно D_T).

$$D_e(\omega, k) = -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{4}$$

$$D_T(\omega, k) = -i\omega + \chi k^2 = 0$$

Взаимодействие полей оказывается слабым при:

$$\delta << 1 \tag{5}$$

В нулевом по взаимодействию приближении $\delta = 0$ собственные частоты определяются из (4). Совместное решение системы (4) определяет точку резонанса [2], где тепловая и упругая волны сильно взаимодействуют

$$\omega_0 = c^2/\chi;\ k_0 = c/\chi \tag{6}$$

Из связи между длительностью импульса и его спектром [3], следует, что время импульса нагружения τ_u такой взаимодействующей системы составлят $\tau_u \sim \omega_0^{-1}$, что для реальных материалов составляет порядка $\tau_u \sim 10^{-12} \div 10^{-13}$ сек.

Если рассматриваются раздельно решения уравнений (4), то для упругой и тепловой волны собственные частоты ω_e и ω_T соответственно равны:

$$\omega_e = kc$$

$$i\omega_T = \chi k^2 \tag{7}$$

При $\delta = 0$ упругое и тепловое поле взаимодействуют в одну сторону — тепловое поле создает деформацию, но деформация не создает теплового поля (нарушается принцип Онзагера [4]), что делает невозможным совместное решение системы (1), кроме точки резонанса (6). Рассмотрим диссипативную функцию (3), которая является комплексной:

$$D(\omega, k) = D_1(\omega, k) + iD_2(\omega, k) \tag{8}$$

где

$$D_1 = \frac{\chi k^2 \omega^2}{c^2} - \chi k^4$$

$$D_2 = \omega k^2 - \frac{\omega^3}{c^2} + \delta \omega k^2$$

$D_1,\ D_2$ — действительная и мнимая части дисперсионной функции. Если $\delta << 1$, то комплексные частоты $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ собственных волн системы определим, используя разложение диссипативной функции $D(\omega, k)$ в ряд, сохраняя линейные по ω_2 члены и выбирая за нулевое приближение действительную часть ω_1 из уравнения

$$D_1 = 0 \tag{9}$$

Первую поправку находим, используя:

$$D(\omega_1 + i\omega_2, k) \approx D_1(\omega_1, k) + i\omega_2 \frac{\partial D_1}{\partial \omega}(\omega_1, k) + iD_2(\omega_1, k) = 0 \tag{10}$$

Из (10) получаем для поправки ω_2:

$$\omega_2 = -D_2(\omega_1, k) \left(\frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^{-1}_{\omega=\omega_1} \tag{11}$$

Наиболее значительны эти поправки в точке резонанса волн (6)

$$\omega_2 = -\frac{\delta}{2} \frac{c^2}{\chi} \tag{12}$$

В диссипативной равновесной среде $\omega_2 < 0$, поэтому решение системы (1) с ростом t экспоненциально затухает.

Таким образом, в работе установлено существование резонансной точки для несвязанной динамической теории термоупругости. При этом резонансная частота определяется совместным решением системы дисперсионных уравнений для упругого поля и теплового. В этой точке упругое и тепловое поля сильно взаимодействуют, и система уравнений динамической несвязанной термоупругости в этой точке является совместной. Для остального диапазона частот она распадается на независимые уравнения. Введение связанности вызывает появление поправок наиболее значительных вблизи резонансной точки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Грибанов В. Ф., Паничкин Н. Г.* Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984. 181 с.

[2] *Кузелев М. В., Рухадзе А. А.* Методы теории волн в средах с дисперсией. М.: Физматлит, 2007. 272 с.

[3] *Харкевич А. А.* Спектры и анализ. М.: Физматлит, 1962. 236 с.

[4] *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.

Zimin B. A., Sud'enkov Yu. V., Vovnenko N. V. *Analysis of dispersion in a weak coupled system of dynamic thermoelasticity*. The coupled theory of thermoelastic wave propagation exhibits two modes of behavior, one of which is predominantly thermal in character and the predominantly mechanical. It is using the dispersion functions. The non coupled theory has a point of resonance, where the thermal mode and mechanical mode are connected. We treat the processes dissipation in the coupled theory of thermoelastic wave propagation.

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ФЕРМЕННОГО ТИПА

Зимин В. Н.

Московский государственный технический университет им Н. Э. Баумана

Проблема создания навесных систем специального функционального назначения с габаритами, превышающими размеры космических аппаратов, сводится к разработке трансформируемых конструкций, удовлетворяющих таким противоречивым требованиям, как минимальные вес и объем в сложенном транспортном состоянии, высокая надежность раскрытия из транспортного состояния в рабочее положение и функционирования на орбите, максимальная площадь рабочей поверхности в раскрытом состоянии, стабильные эксплуатационные характеристики в условиях действия нагрузок. Работоспособность таких конструкций определяется главным образом тем, насколько велики возникающие в них усилия при развертывании, поэтому обеспечение их надежного раскрытия связано с решением сложных задач механики. Расчет на прочность часто оказывается единственной возможностью оценки поведения таких конструкций на орбите. Рассмотрен алгоритм расчета на прочность трансформируемой космической конструкции ферменного типа. Приведен пример численного расчета раскрывающегося на орбите крупногабаритного трансформируемого рефлектора антенны космического аппарата.

Трансформируемые крупногабаритные космические конструкции представляют собой системы, состоящие из десятков тысяч взаимосвязанных между собой отдельных элементов. Конструкции доставляются на космические орбиты в сложенном плотноупакованном состоянии, и дальнейшее приведение их в рабочее положение связано с реализацией процесса раскрытия. Одной из важных задач на этапе проектирования таких конструкций является расчет напряженно-деформированного состояния в момент их полного раскрытия на орбите [1]. Он особенно сложен для конструкций ферменного типа, спроектированных так, что они укладываются в плотную упаковку на земле. Конструкция раскрывается на орбите автоматически при срабатывании механизма зачековки за счет первоначально накопленной упругой энергии пружин, расположенных в узловых шарнирных соединениях (рис. 1).

Экспериментальная отработка раскрытия трансформируемых конструкций космической техники в наземных условиях представляет трудно решаемую проблему, причем создание условий, полностью идентичных условиям эксплуатации в космосе, часто оказывается невозможным. Эти обстоятельства определяют решающую роль математического моделирования и вычислительного эксперимента при разработке и создании таких конструкций.

Анализ прочности трубчатых стержневых элементов конструкций ферменного типа производится в два этапа. На первом этапе ведется расчет раскрытия конструкции в предположении, что все её элементы являются абсолютно твердыми телами и скорости данных элементов определяются в момент принятия конструкцией своего рабочего состояния. На втором этапе исследуется изменение напряженно-деформированного состояния упругой конструкции во времени при заданных (полученных на первом этапе) начальных условиях.

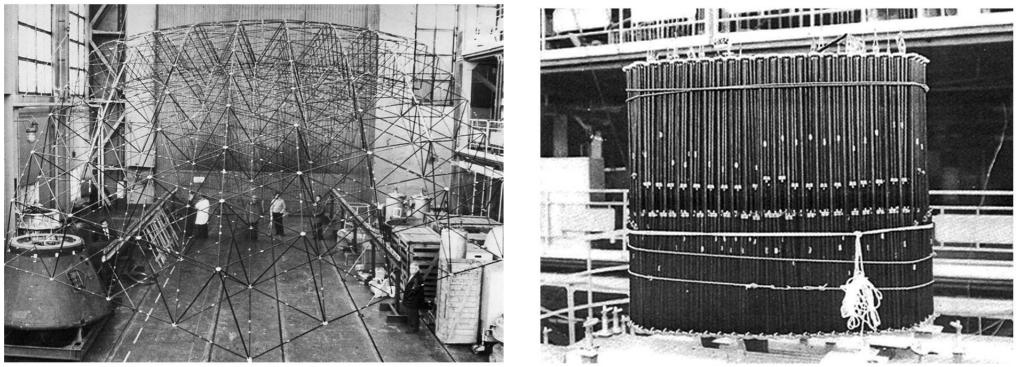


Рис. 1. Крупногабаритная трансформируемая конструкция ферменного типа

Для расчета выбрана конкретная конструкция трансформируемого рефлектора ферменного типа, главным образом, потому что для неё существуют реальные опытные образцы, а также получены экспериментальные результаты, позволяющие проверить применимость алгоритма расчета. Рефлектор антенны состоит из двух поясов: верхнего, на котором закрепляется сетеполотно, и нижнего. Складывающиеся стержни образуют пояса, которые связаны между собой с помощью диагональных стержней. Так как форма рефлектора космической антенны, как правило, представляет собой форму пологой оболочки, то в качестве модели можно рассматривать плоскую конструкцию ферменного типа. Тогда складывающиеся стержни имеют равные длины и связаны между собой с помощью узловых шарниров, обеспечивающих поворот стержней в определенных плоскостях. Сами складывающиеся стержни представляют собой пару шарнирно соединенных трубчатых стержней одинаковой длины.

Для плоской конструкции можно построить одностепенную расчетную модель раскрытия и приближенно определить поле скоростей всех ее узловых элементов в момент времени, соответствующий полному раскрытию [2].

Начальные перемещения принимаем равными нулю, а начальные скорости узлов принимаем равными скоростям узлов, полученным с помощью одностепенной расчетной модели. Расчетная модель основана на методе конечных элементов, и анализ ее динамики сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$M\,\ddot{\boldsymbol{u}} + D\,\dot{\boldsymbol{u}} + K\,\boldsymbol{u} = 0$$

при начальных условиях

$$\boldsymbol{u}\,(0) = \boldsymbol{u}_0\,, \quad \dot{\boldsymbol{u}}\,(0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0\,,$$

где M, D, K — соответственно, матрицы масс, демпфирования и жесткости конструкции; $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}$ — векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений.

Для прямого интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка использованы специальные процедуры, ориентированные на метод конечных элементов. Шаг интегрирования для обеспечения

точности и устойчивости вычислительной схемы выбирается на основе результатов решения задачи по определению частот собственных колебаний конструкции [3]. Он должен составлять долю от наименьшего периода (наибольшей частоты собственных колебаний конструкции).

Прочностной расчет проведен с использованием программного комплекса MSC/NASTRAN. В расчетной модели использовали балочный элемент «beam», учитывающий работу стержней на растяжение–сжатие, кручение и изгиб.

На рис. 2 приведен пример изменения по времени максимальных напряжений для узла 2582 и соответствующая спектральная плотность.

Проведенные расчеты показали, что наибольшее напряжение составляет $\sigma_{\text{наиб}} = 308$ МПа. Из экспериментальных исследований механических характеристик трубчатых образцов из углепластика (рис. 3) следует, что среднее значение разрушающих напряжений $\bar{\sigma}_{\text{разр}} = 392$ МПа при значениях коэф-

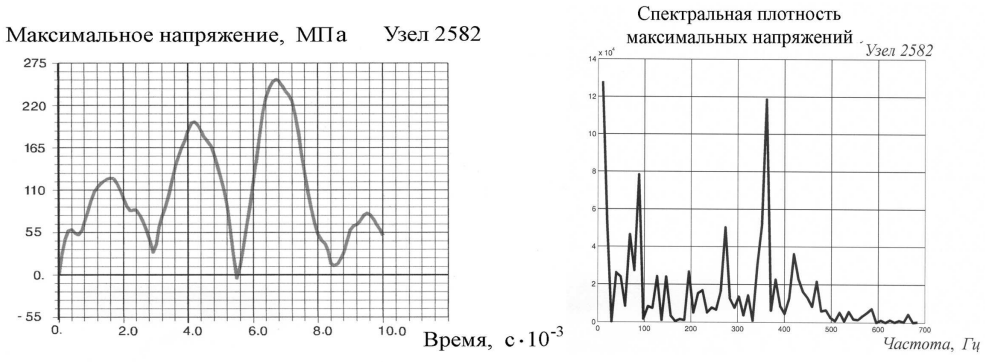


Рис. 2. Изменение максимальных напряжений для узла 2582 трансформируемой конструкции ферменного типа и соответствующая спектральная плотность

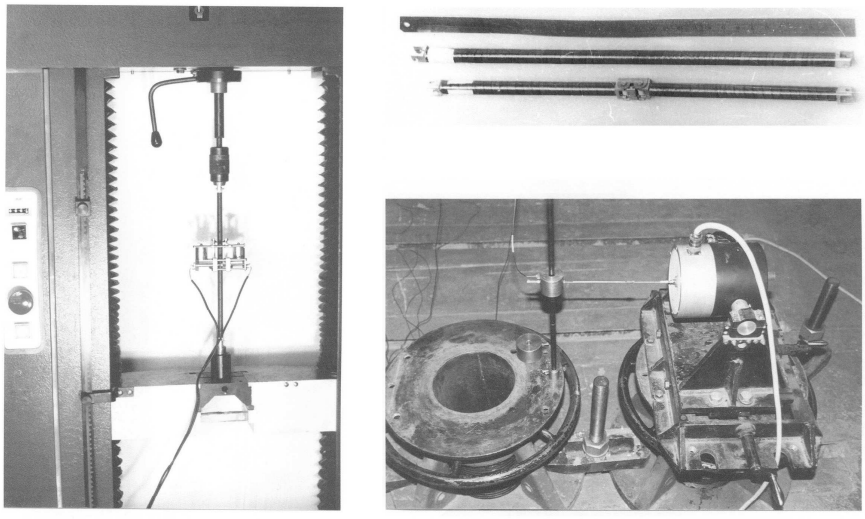


Рис. 3. Экспериментальные исследования механических характеристик

фициентов вариации $k_\nu = 26\%$. Данное значение получено для образцов, для которых клей между металлическими законцовками и углепластиком не приобрел максимально возможных прочностных свойств. В процессе же температурных воздействий прочность клеевого слоя увеличивается за счет дополнительной полимеризации. В результате $\bar{\sigma}_{\text{разр}} = 532$ МПа. Таким образом, коэффициент запаса $n_{\text{з}} = \bar{\sigma}_{\text{разр}}/\sigma_{\text{наиб}}$ может принимать значения от 1,27 до 1,72.

Для трансформируемых конструкций, отличных от плоской ферменной структуры, составить функцию Лагранжа и ее производные не представляется возможным из-за громоздких аналитических выкладок. Необходимо заметить, что в этом случае не могут даже помочь такие мощные компьютерные системы символьной математики, как Maple и Mathematica.

Целесообразно использовать возможности современных пакетов моделирования динамики механических систем. Для решения задачи можно воспользоваться программным комплексом MSC.ADAMS 2005 (Automatic Dynamics Analysis of Mechanical Systems) или программным комплексом автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER.

В данном программном комплексе построена модель и проведен численный анализ динамики раскрытия конструкции ферменного типа (рис. 4).

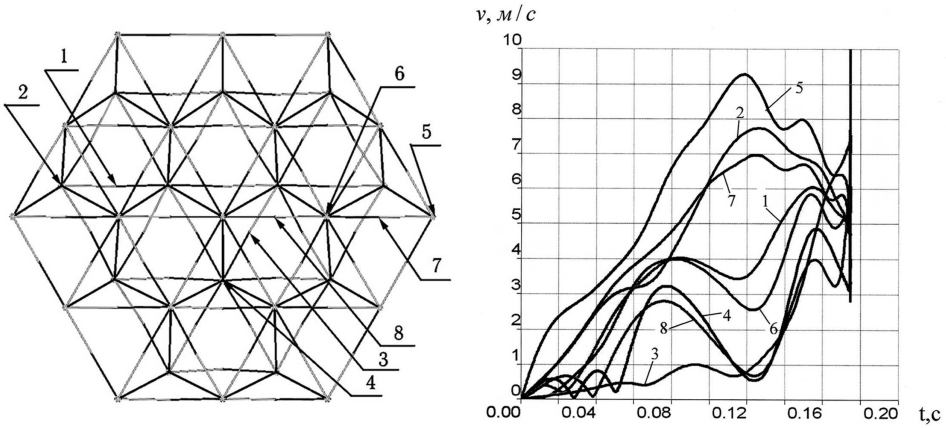


Рис. 4. Модель ферменной конструкции и скорости узлов в процессе раскрытия

Проведенные исследования и расчеты показали, что для конструкций ферменного типа, отличных от плоских, начальные значения обобщенных координат для сложенного транспортного состояния необходимо определять исходя из предположения, что центры узловых шарнирных элементов должны располагаться на поверхности (параболической, сферической, цилиндрической и т. д.), соответствующей раскрытому рабочему положению конструкции.

Как уже отмечалось, анализ напряженно-деформированного состояния упругой конструкции во времени при заданных начальных условиях сводится к решению задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для рассматриваемых конструкций размерность такой системы оказывается весьма значительной. Поэтому непосредственное инте-

грирование уравнений динамики в ряде случаев становится неэффективным, и для анализа поведения конструкций необходимо использовать метод разложения перемещений по собственным формам колебаний и формирование редуцированной аналитической модели для определения вектора нормальных координат меньшей размерности [3]. Данный подход позволяет существенно снизить размерность системы уравнений, описывающей поведение конструкций, и оказывается весьма эффективным при анализе их динамики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Механика больших космических конструкций / *Н. В. Баничук, И. И. Карпов, Д. М. Климов и др.* М.: Факториал, 1997. 302 с.

[2] *Зимин В. Н.* Об одном подходе к расчету прочности элементов космических ферменных конструкций при их раскрытии // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение, 2008. № 2–3. С. 3–10.

[3] *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

Zimin V. N. *Space transformable frames dynamics and strength analysis*. Special systems with size bigger then size of spacecraft on that the system have to be hang up, can be developed as transformable structures with following properties: minimal weight and volume during transportation, high reliability of unfolding from transport- to working state and operation in the orbit, maximal working area in deployed state, safe operation under loads. Generally, the structure serviceability depends on the loads during deploy, and complicated problems must be solved to provide a reliable unfolding. Strength analysis is often the only way to estimate behavior of such structures in the orbit. Calculation of transformable space frame strength is under consideration. Numerical results for large spacecraft reflector deploying in the orbit are given.

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИЗНАШИВАНИЯ ПРИ ТРЕНИИ

Иваночкин П. Г.*, Иваночкина Т. А.**

**Ростовский государственный университет путей сообщения*

***Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Одним из путей повышения работоспособности тяжелонагруженных узлов трения является использование в узлах трения специальных полимерных композитов и покрытий на их основе. Однако расширение области рационального использования этих материалов сдерживается в связи с отсутствием обоснованных рекомендаций по созданию трибосистем на их основе и выбору режимов их эксплуатации.

В настоящее время используется следующая физическая модель механизма трения и изнашивания наполненных полимеров при их взаимодействии с металлами. В условиях трения на композитный материал воздействует механическая нагрузка в виде контактного давления p и скорости скольжения V, которые вызывают процесс упругопластической деформации поверхностного слоя, сопровождающийся формированием поля напряжений. Под влиянием напряженно-деформированного состояния в поверхностном слое развиваются процессы структурно-фазовых превращений, характеризуемых изменением степени кристалличности. Одновременно идет процесс повышения температуры и накопления теплоты. Повышение температуры и деформация вслед за структурными изменениями вызывают активацию процессов формирования слоистой надмолекулярной структуры, аморфизацию полимерного материала.

Все вышеперечисленное говорит о том, что для описания поведения поверхностного слоя композита необходимо привлекать представления сильно неравновесной конденсированной среды, которые основаны на неэргодичности статистического ансамбля, возникновении иерархических структур, структурной релаксации, взаимном влиянии подсистемы, испытывающей фазовый переход и окружающей среды и т. д. Последнее возможно на основе синергетического подхода, учитывающего особенности коллективного поведения сильно неравновесных статистических ансамблей.

Одной из моделей, удовлетворяющих указанным требованиям и удовлетворительно объясняющей физические аспекты процесса изнашивания, является модель, предложенная в работах Н. М. Алексеева и М. Н. Добычина [1]. Эта модель основана на следующих предположениях:

— структура фрикционного контакта содержит пограничный слой, его подслой (слой Сен-Венана) и материал основы;

— движение вещества пограничного слоя осуществляется посредством вязкопластического течения элементов его структуры и локальных микроразрушений;

— локальные микротрещины зарождаются на дефектах структуры разной природы и масштабов;

— слой Сен-Венана, испытывая небольшие упругопластические деформации, выполняет буферные функции по отношению к материалу основы и сглаживает флуктуации давления пограничного слоя.

В процессе трения происходит массообмен между пограничным слоем и его подслоем, обусловленный изменением контактного давления и структуры пограничного слоя. Износ поверхности при этом определяется разрыхлением материала и выносом его из зоны трения. Скорость выноса материала за пределы оны контакта зависит от толщины пограничного слоя, с увеличением которой она возрастает; линейных размеров поверхности контакта и величины контактного давления. Изменение давления в процессе контакта приводит к развитию микроповреждений и способствует накоплению повреждений более крупных масштабов.

Нами предлагается для аналитического описания рассматриваемой модели на макроуровне использовать систему нелинейных эволюционных уравнений, поведение которых характеризуется широким спектром частот изменений и бифуркацией форм состояний, а также малым горизонтом предсказуемости. Основой используемого подхода является схема Лоренца, в рамках которой эволюция системы представляется параметром порядка, сопряженным ему полем и управляющим параметром.

Переменными состояния в предлагаемой трехмерной динамической системе являются следующие характеристики: h — толщина пограничного слоя (область, занятая разрыхленным материалом), w — износ поверхности, определяемый как изменение первоначального положения границы тел, и контактное давление p.

$$\begin{cases} \tau_1 \dot{p} = -p + A_1 h \\ \tau_2 \dot{w} = -w + A_2 p h \\ \tau_3 \dot{h} = (A_3 p - h) - A_4 p w \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем, что темп изменения давления пропорционален избытку приращения толщины пограничного слоя (перемещения границы связаны как с увеличением толщины погранслоя, обусловленным разрыхлением и дилатансией, так и с уменьшением его толщины, обусловленным изменением давления в зоне контакта).

Член $A_2 p h$ означает, что на изменение износа положительно влияют как давление в зоне контакта, так и толщина пограничного слоя. Кроме того, мы предполагаем, что любое изменение величины износа отрицательно влияет на ее текущее состояние.

Изменение толщины пограничного слоя задается двумя членами: $(A_3 p - h)$ и $A_4 p w$. Величину A_3 мы интерпретируем как скорость разрыхления материала, нормированную по давлению. Член $(A_3 p - h)$ связан с избытком диспергированного при трении материала. Он влияет на направление смещения первоначальной границы контакта: $w > 0$, если граница смещается вглубь материала, и $w < 0$, если она перемещается в противоположном направлении. Помимо этого, на положение границы оказывает влияние контактное давление и износ поверхности. Член $A_4 p w$ учитывает последний факт.

Уравнения (1) содержат семь констант — три времени релаксации τ_i $(i = 1 \div 3)$ и четыре константы связи A_i $(i = 1 \div 4)$. Характерная особенность системы состо-

ит в линейности первого уравнения и нелинейности двух других. Отрицательный знак перед нелинейным слагаемым в третьем уравнении отражает действие принципа Ле-Шателье – Брауна, а плюс перед ph — положительную обратную связь между параметром порядка h и управляющим параметром p, которая является причиной самоорганизации системы.

Параметры системы связаны с кинематикой узла трения и физико-механическими свойствами материала, такими как вязкость разрушения, адгезионные свойства материала, коэффициент дилатансии и другими характеристиками фрикционного контакта.

Линеаризуем систему (1) вблизи режима установившегося износа $w = w_0(t),\ p = p_0 = const,\ h = h_0 = const.$

Рассмотрим малые отклонения характеристик системы, т. е.

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad w = w_0 + \tilde{w}, \quad h = h_0 + \tilde{h}.$$

После подстановки в исходную систему, с учетом условий установившегося износа и малости $\tilde{p}\tilde{h}$ и $\tilde{p}\tilde{w}$, получим линеаризованную систему

$$\begin{cases} \tau_1\dot{\tilde{p}} = -\tilde{p} + A_1\tilde{h}, \\ \tau_2\dot{\tilde{w}} = -\tilde{w} + A_2p_0\tilde{h} + A_2\tilde{p}h_0, \\ \tau_3\dot{\tilde{h}} = (\tilde{p} - A_3\tilde{h}) - A_4p_0\tilde{w} - A_4\tilde{p}w_0. \end{cases} \tag{2}$$

Из первого уравнения (2) следует

$$\tilde{h} = \frac{1}{A_1}\left(\tilde{p} + \tau_1\dot{\tilde{p}}\right).$$

После подстановки во второе уравнение (2) получим

$$\tau_2\dot{\tilde{w}} = -\tilde{w} + \left(A_2h_0 + \frac{A_2}{A_1}p_0\right)\tilde{p} + \frac{A_2}{A_1}p_0\tau_1\dot{\tilde{p}}.$$

В рамках этой модели перемещения, обусловленные износом $\tilde{w}$, связаны с изменениями контактных давлений $\tilde{p}$ соотношением

$$\tilde{w} + \tau_2\dot{\tilde{w}} = \left(A_2h_0 + \frac{A_2}{A_1}p_0\right)\tilde{p} + \frac{A_2}{A_1}p_0\tau_1\dot{\tilde{p}},$$

которое по структуре совпадает с одномерной моделью тела Кельвина, обладающей ограниченной ползучестью:

$$\tilde{w} + T_\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} = \frac{h}{E_L}\left(\tilde{p} + T_\sigma\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}\right).$$

$T_\varepsilon = \tau_2$ — время последействия, $T_\sigma = \frac{A_2p_0\tau_1}{(A_1A_2h_0 + A_2p_0)} = \frac{\tau_1}{2}$ — время релаксации, $\frac{h}{E_L} = \left(A_2h_0 + \frac{A_2}{A_1}p_0\right) = 2A_2h_0$, $E_L = \frac{1}{2A_2}$ — длительный модуль упругости, $E_1 = \frac{\tau_2}{A_2\tau_1}$ — мгновенный модуль упругости.

Для исследования поведения полученной системы (1) можно использовать разработанные в синергетике [2] приемы и методы, позволяющие ответить на вопрос, что же произойдет с системой на больших характерных временах, т. е. выяснить,

что представляют собой притягивающие множества (аттракторы) полученной системы уравнений.

Заменой переменных

$$t = t' A_3 \tau_3; \sigma = \frac{\tau_3 A_3}{\tau_1}; r = A_1 A_3; b = \frac{\tau_3 A_3}{\tau_2};$$

$$x = \left(\frac{A_2 A_4 \tau_3}{\tau_2}\right)^{\frac{1}{2}} A_3 p; y = \left(\frac{A_2 A_4 \tau_3}{\tau_2}\right)^{\frac{1}{2}} A_1 A_3 h; z = A_1 A_3 A_4 w$$

система уравнений (1) сводится к известной системе уравнений Лоренца:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x)\,, \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz\,, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz\,. \end{cases} \tag{3}$$

Исследованию поведения системы Лоренца посвящено много работ [3]. Для изучения системы предложено множество подходов, комбинирующих различные аналитические и численные методы. Легко видеть, что при $r < 1$ существует только одно устойчивое состояние $x = y = z = 0$. При $r > 1$ оно становится неустойчивым, и возникают два новых ненулевых

$$z = r - 1, \;\; x = y, \;\; x^2 = b(r - 1).$$

Затем при $r \approx 24,74$ они также становятся неустойчивыми, и возникают нерегулярные колебания.

Для качественной оценки поведения нелинейных систем используются характеристические показатели Ляпунова [2]. Они позволяют охарактеризовать аттрактор системы, т. е. оценить его фрактальную размерность, энтропию динамической системы и характерное время предсказуемости поведения системы.

Ляпуновские показатели для аттрактора системы Лоренца

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + 1 + b).$$

Если аттрактор не неподвижная точка, то один из показателей равен нулю. В случае предельного цикла $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2, \lambda_3 < 0$, в случае странного аттрактора $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$.

Таким образом, существуют три существенно различных режима изнашивания. Один характеризуется затухающим характером изменения переменных состояния (аттрактор — устойчивая неподвижная точка). При большой продолжительности изнашивания происходит выравнивание давлений и толщин пограничного слоя. Характер процесса изнашивания во втором режиме (аттрактор — устойчивый предельный цикл) — незатухающий колебательный процесс, который становится стационарным по прошествии некоторого промежутка времени. Наконец, для третьего режима, который соответствует странному аттрактору, характерны нерегулярные колебания давления и толщины погранслоя и, практически непредсказуемое на больших интервалах времени поведение системы. Смена видов изнашивания происходит не монотонно, а скачком, при переходе значений управляющего параметра, которым в нашем случае является r, через критические точки.

Полученные результаты позволяют дать объяснение некоторым экспериментально наблюдаемым закономерностям процесса изнашивания, таким как постоянство скорости изнашивания сопряжения в приработанном состоянии и связь ее с давлением в зоне контакта, независимость характеристик системы в приработанном состоянии от начальных параметров и, наконец, волновой характер изнашивания при условии постоянства внешних факторов. Становится понятной и часто наблюдаемая невозможность «чистого» воспроизведения повторных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Алексеев Н. М., Добычин М. Н.* Модели изнашивания // Трибология: Исследования и приложения: Опыт США и стран СНГ. М.: Машиностроение; Нью-Йорк: Алертон пресс, 1993. С. 66–87.

[2] *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.

[3] *Sparrow C.* The Lorenz Equations: bifurcation, chaos and strange attractors. StateplaceBerlin: Springer, 1982. 269 p.

Ivanochkin P. G., Ivanochkina T. A. *A phenomenological approach to the modeling of wear in friction*. A model of wear in the form of a system of nonlinear evolution equations. State variables in the considered dynamical system are the boundary layer thickness, wear and contact pressure. Under the proposed model well explains many experimentally observed facts.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ПОРОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Игумнов Л. А., Карелин И. С.
НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского

Продемонстрирована возможность применения гранично-элементной методики при получении решения краевой динамической задачи трехмерной пороупругости. Представлен пример численного моделирования волны Рэлея на пороупругом полупространстве.

Введение. В работе для учета пористости используется теория М. Био [1, 2]. Вопросами распространения волн в пористых насыщенных средах в последние годы занимались Н. С. Городецкая (1998), Н. Дунин, Д. Михайлов, В. Николаевский (2002), R. Ababou и др. (2002), D. F. Aldridg и др. (2005), J. Jocker и D. Smenlders (2005), G. Chao и др. (2005), H. F. Wang (2000) и многие другие.

На основе граничных интегральных уравнений (ГИУ) пороупругости [3, 4] получено гранично-элементное решение трехмерной динамической задачи.

1. Гранично-элементное моделирование. Детали редукции исходной начально-краевой задачи трехмерной теории пороупругости к эквивалентной системе разрешающих ГИУ можно найти в [4–6]. Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматриваем регуляризованные уравнения:

$$\alpha_\Omega \tilde{\upsilon}_k(x,s) + \int\limits_\Gamma \left(\tilde{T}_{ik}(x,y,s)\tilde{\upsilon}_i(y,s) - \tilde{T}^0_{ik}(x,y,s)\tilde{\upsilon}_i(x,s) - \tilde{G}_{ik}(x,y,s)\tilde{t}_i(y,s) \right) d\Gamma = 0, \tag{1}$$

$$\alpha_\Omega \tilde{\upsilon}_k(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \left(\tilde{T}_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{\upsilon}_i(y,\tau) - \tilde{T}^0_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{\upsilon}_i(x,\tau) - \tilde{G}_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{t}_i(y,\tau) \right) d\Gamma d\tau = 0, \tag{2}$$

$$x \in \Gamma,\ \tilde{t} = [t_1, t_2, t_3, q]^T,\ \tilde{\upsilon} = \{u_1, u_2, u_3, q\},\ s = \alpha + i\omega,$$

где u, t — перемещения и силы; p, q — давление и поток; $\tilde{G}$, $\tilde{T}$ — матрици фундаментальных и сингулярных решений, а $\tilde{T}^0$ — матрица особенностей сингулярных решений.

Для численного обращения решения ГИУ (1) использован алгоритм, предложенный Дурбином [7]:

$$f(t_j) \approx 2\frac{e^{j\alpha\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\overline{f}(\alpha)\right\} + \mathrm{Re}\left\{ \sum_{n=0}^{N} \left(A(n) + iB(n)\right) W^{jn} \right\} \right],$$

$$s_n = \alpha + in\frac{2\pi}{T}, \quad W = e^{i2\pi/N},$$

$$A(n) = \sum_{l=0}^{L} \mathrm{Re}\left\{\overline{f}\left(\alpha + i(n+lN)\frac{2\pi}{T}\right)\right\},$$

$$B(n) = \sum_{l=0}^{L} \mathrm{Im}\left\{\overline{f}\left(\alpha + i(n+lN)\frac{2\pi}{T}\right)\right\},$$

$$n = 0, 1, \ldots, N, \quad l = 0, 1, \ldots, L, \quad t_j = j\Delta t = jT/N, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Для решения ГИУ (2) применен метод квадратур сверток [8, 9]:

$$y(t) = \int_0^t q(t-\tau)g(\tau)d\tau,\ y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t),\ n = 0, 1, \ldots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1} \overline{q}\left(\gamma\left(Re^{il2\pi L^{-1}}\right)/\Delta t\right) e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\gamma(z) = \frac{3}{2} - 2z + \frac{z^2}{2},\ R^N = \sqrt{\varepsilon},\ \varepsilon = 10^{-6}.$$

Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности Γ на граничные элементы: четырехугольные и треугольные восьмиузловые биквадратичные элементы. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы (рис. 1). Связь локальной и глобальной систем координат $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (y_1(\xi), y_2(\xi), y_3(\xi))$ записывается через функции формы $N^i(\xi)$:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^{8} N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \qquad i = 1, 2, 3, \quad \xi \in \Delta_e,$$

где $\beta(k, l)$ — глобальный номер узла, имеющего в k-м элементе локальный номер l. Далее определяется естественный базис, метрический тензор и единичная нормаль на элементе.

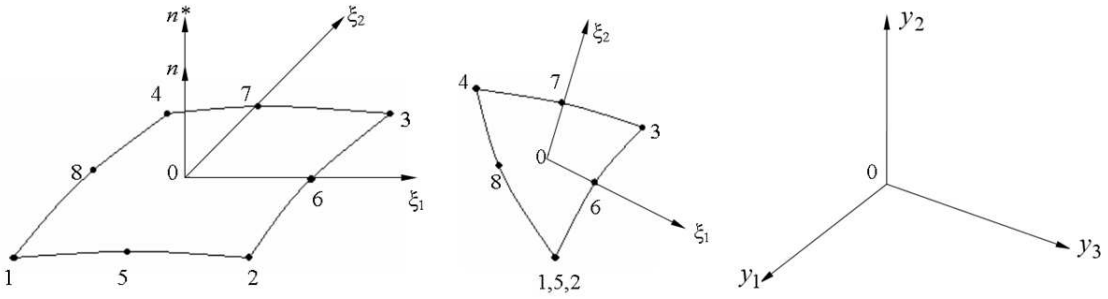


Рис. 1.

Неизвестные граничные поля $(\tilde{v}, \tilde{t})$ интерполируются через узловые значения. Рассматриваем случай, называемый согласованным интерполированием, где для аппроксимации обобщенных граничных перемещений применяем билинейные элементы, а для аппроксимации обобщенных поверхностных сил — постоянные элементы.

Для получения дискретного аналога ГИУ применяем метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. Регулярный интеграл вычисляется на основе квадратурной формулы Гаусса. Для интегралов с особенностью используется прием ее устранения. В итоге формируется система линейных алгебраических уравнений, которая решается численно.

2. Численные результаты. Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $t_3(t)=P_0 f(t)$, $P_0=-1000$ Н/м^2, $f(t)=H(t)$ на поверхность полупространства со следующими параметрами материала: $E=2,544 \cdot 10^8$ Н/м^2; $k=3,55 \cdot 10^{-10}$ м^4/Нс; $\nu=0,298$; $R=1,2 \cdot 10^9$ Н/м^2; $\rho=1884$ кг/м^3; $\rho_f=1000$ кг/м^3; $\phi=0,48$; $\alpha=0,98$. Поверхность полупространства описывается ГЭ-сеткой (рис. 2), состоящей из 1200 элементов, радиус ГЭ-сетки 80 м. Нагрузка прилагается к центральному элементу (окрашен).

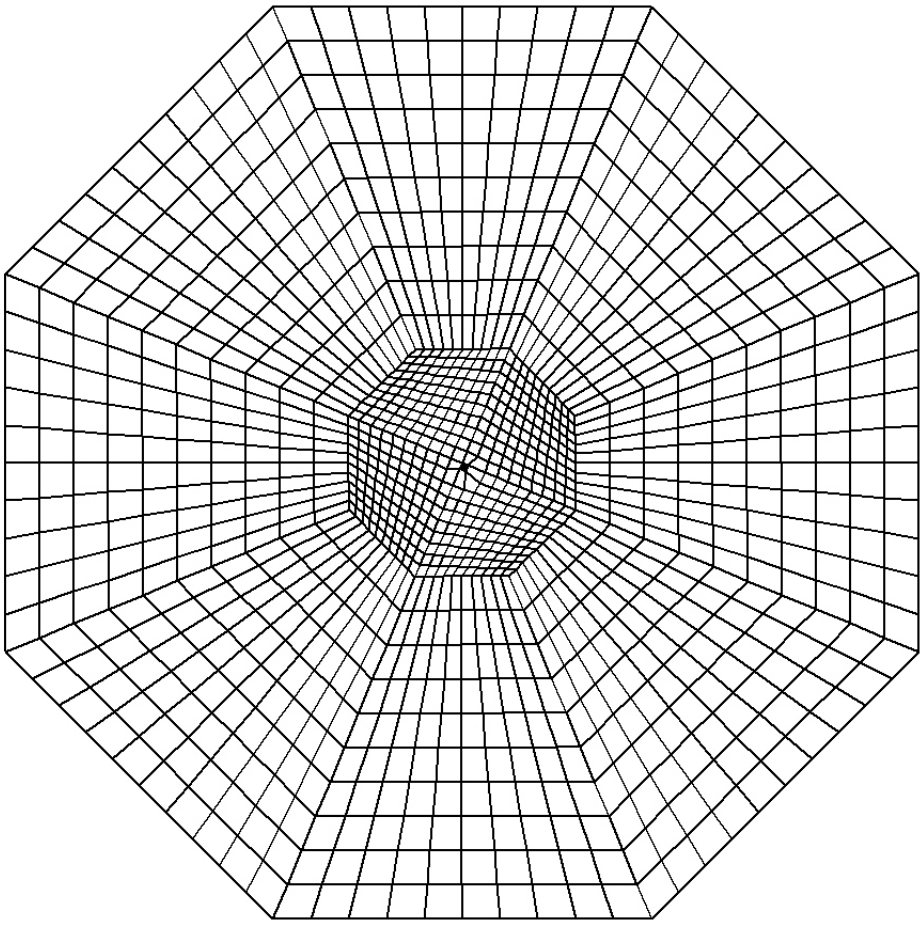


Рис. 2.

На рис. 3 приведены спектральные функции в безразмерных величинах для вертикальных премещений на расстоянии 20 м от области нагружения, на рис. 4 приведены вертикальные перемещения во времени: сплошная линия соответствует ГЭ-решению, штриховая линия соответствует решению из [3].

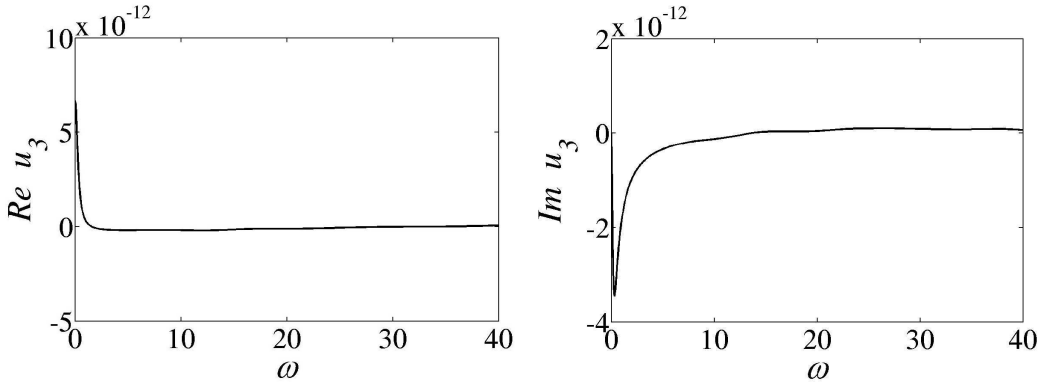


Рис. 3.

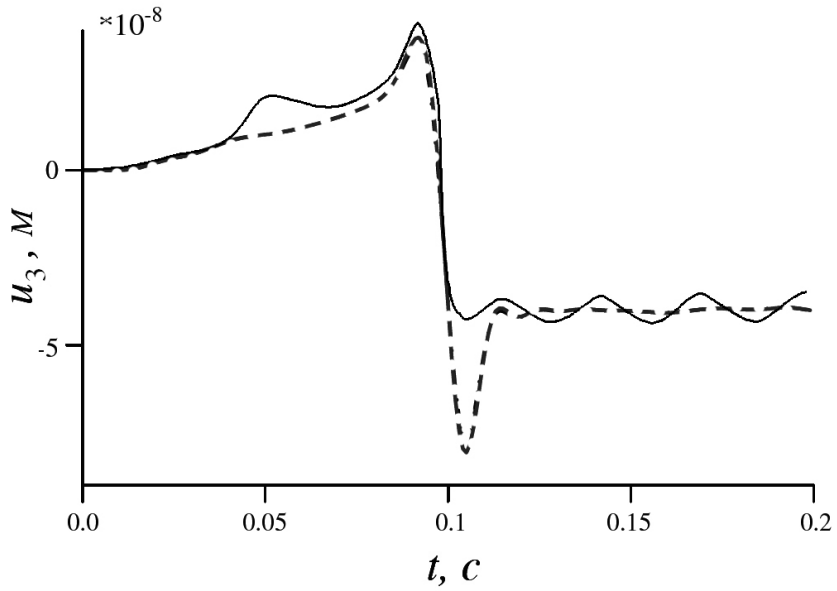


Рис. 4.

Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, при поддержке РФФИ (проект № 10-08-01017-а) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8 «Динамика, прочность и ресурс аппаратов и установок ядерной техники».

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Biot M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28, № 2 pp. 168–178.

[2] *Biot M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28, № 2 pp. 179–191.

[3] *Schanz M* Wave Propogation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

[4] *Амензицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз.сб. 2009. № 71. С. 164–171.

[5] *Амензицкий А. В., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз.сб. 2008. № 70. С. 71–78.

[6] *Баженов В. Г., Игумнов Л. А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

[7] *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer Journal. 1974. V. 17, № 4 pp. 371–376.

[8] *Lubich C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. I // Numerische Mathematik. 1988. № 52 pp. 129–145.

[9] *Lubich C.* Convolution quadrature and discretized operational calculus. II // Numerische Mathematik. 1988. № 52 pp. 413–425.

Igumnov L. A., Karelin I. S. *Modeling surface waves on the boundary of a porous-elastic half-space*. The applicability of the boundary-element methodology for obtaining a solution of the boundary dynamic problem of 3-D porous-elasticity is demonstrated. An example problem of numerically modeling a Rayleigh wave on a porous-elastic half-space is presented.

АЛГОРИТМЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕКОТОРЫХ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Кабельков А. Н., Казначеева О. К.

Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)

Предлагается методика определения свойств материалов, в том числе композитных, непосредственно на изделиях. Новизна подхода состоит в том, что рассматривается совместная математическая модель конструкции и системы измерения, регистрирующей деформации реальной конструкции при заданных нагрузках и граничных условиях. Разыскиваются значения упругих характеристик, доставляющих минимум квадратичному критерию качества — суммарной оценке рассогласований расчетных и экспериментальных значений деформаций в области наклейки тензорезисторов или установки датчиков перемещений конструкции.

Предлагаются алгоритмы экспериментально-теоретического метода оценивания реологических характеристик изделий из композитных материалов при действии статических нагрузок.

Уравнение состояний наблюдаемой конструкции, моделируемой конечно-элементной системой с $\nu \leqslant n$ неизвестными параметрами p_i, представляем в виде

$$\left(\mathbf{H}_0 + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{H}_i p_i\right) \boldsymbol{Q} = \mathbf{B}_F \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{Q} \in R^n,$$
$$\boldsymbol{Z} = \mathbf{C}\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{Z} \in R^n.$$

Здесь $\mathbf{H_0}$ — матрица жесткости конструкции, заданная в некотором приближении; $\mathbf{H}_i p_i$ — поправка к матрице жесткости, зависящая от неизвестных параметров p_i, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}$ — векторы обобщенных перемещений конструкции и внешних сил; $\mathbf{B}_F$ — заданная матрица; $\mathbf{C}$ — постоянная $(m \times n)$ — матрица, компоненты которой обусловлены числом, типом и схемой размещения тензорезисторов.

Полагаем, что деформации изделия регистрируются тензорезисторной системой измерения. Матрицы $\mathbf{H}_i$ считаем заданными. Перейдем к безындексной форме, осуществляя суммирование по повторяющимся индексам

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_i p_i.$$

Вводим целевую функцию

$$\psi = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \left(\boldsymbol{Z}_Д - \mathbf{C}\boldsymbol{Q}\right)^* \mathbf{V}_1 \left(\boldsymbol{Z}_Д - \mathbf{C}\boldsymbol{Q}\right) + \boldsymbol{Q}^* \tilde{\mathbf{H}}^* \mathbf{V}_2 \tilde{\mathbf{H}} \boldsymbol{Q} + \\ +2\boldsymbol{L}^* \left(\mathbf{H}_0 \boldsymbol{Q} + \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{Q} - \mathbf{B}_F \boldsymbol{F}\right) \end{array}\right] \to \min.$$

Здесь $\boldsymbol{Z}_{\text{Д}}$ — действительные показания датчиков СИ; $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ — симметричные определенно положительные матрицы весовых коэффициентов, $\boldsymbol{L}$ — вектор «неопределенных» коэффициентов Лагранжа.

Составляя условия Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{Q}} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{H}}} = 0,$$

получаем

$$-\left(\boldsymbol{Z}_{\text{Д}} - \mathbf{C}\boldsymbol{Q}\right)^{*} \mathbf{V}_1 \mathbf{C} + \boldsymbol{Q}^{*}\tilde{\mathbf{H}}^{*}\mathbf{V}_2\tilde{\mathbf{H}} + \boldsymbol{L}^{*}\left(\mathbf{H}_0 + \tilde{\mathbf{H}}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{L} = -\mathbf{V}_2\tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{Q}. \tag{2}$$

Подставляя формулу (2) в транспонированное выражение (1), имеем

$$\left(\mathbf{H}_0 - \mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{H}_0^{-1}\mathbf{C}^{*}\mathbf{V}_1\mathbf{C}\right)\boldsymbol{Q} = \mathbf{B}_F\boldsymbol{F} - \mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{H}_0^{-1}\mathbf{C}^{*}\mathbf{V}_1\boldsymbol{Z}_{\text{Д}}.$$

После определения перемещений конструкции вычисляем вектор

$$\Delta = \mathbf{B}_F\boldsymbol{F} - \mathbf{H}_0\boldsymbol{Q}$$

и составляем систему уравнений

$$\mathbf{K}\boldsymbol{p} = \Delta, \tag{3}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{K} = [\mathbf{H}_1\boldsymbol{Q} \quad \mathbf{H}_2\boldsymbol{Q} \ldots \mathbf{H}_\nu\boldsymbol{Q}] \ , \quad \boldsymbol{p} = [p_1\ p_2 \ldots p_\nu]^{*},$$

Уравнение (3) может быть решено различными способами.

Предлагаемая методика использована для определения приведенных характеристик в готовых изделиях (конических оболочках), выполненных из композитного материала (УПА-3М).

Конечно-элементная (КЭ) модель изделия, способ нагружения и опирания, схема размещения тензорезисторов (ТР) на внешней и внутренней поверхностях показаны на рис. 1. Общее число КЭ, каждый из которых обладает 18-ю степенями свободы, составляет 80.

Композит в оболочках приближенно можно считать трансверсально-изотропным однородным материалом с пятью независимыми характеристиками

$$p_1 = E_s\,, \qquad p_2 = E_n\,, \qquad p_3 = \nu_{ns}\,, \qquad p_4 = \nu_{s\theta}\,, \qquad p_5 = G_{ns}; \tag{4}$$

При проведении физических экспериментов обеспечивалась независимость испытаний: демонтаж установки после каждого опыта, повторная сборка установки, проверка равномерности опирания изделия и поверка средств измерения. Выполнено три независимых нагружения (μ= 3) равномерным давлением p = 0,1 МПа по всей поверхности изделия (рис. 1 *в*).

Регистрация и обработка результатов экспериментов осуществлялась с помощью автоматизированной информационно-измерительной тензометрической системы СИИТ-2. Разработано и реализовано программное обеспечение «Тензор»

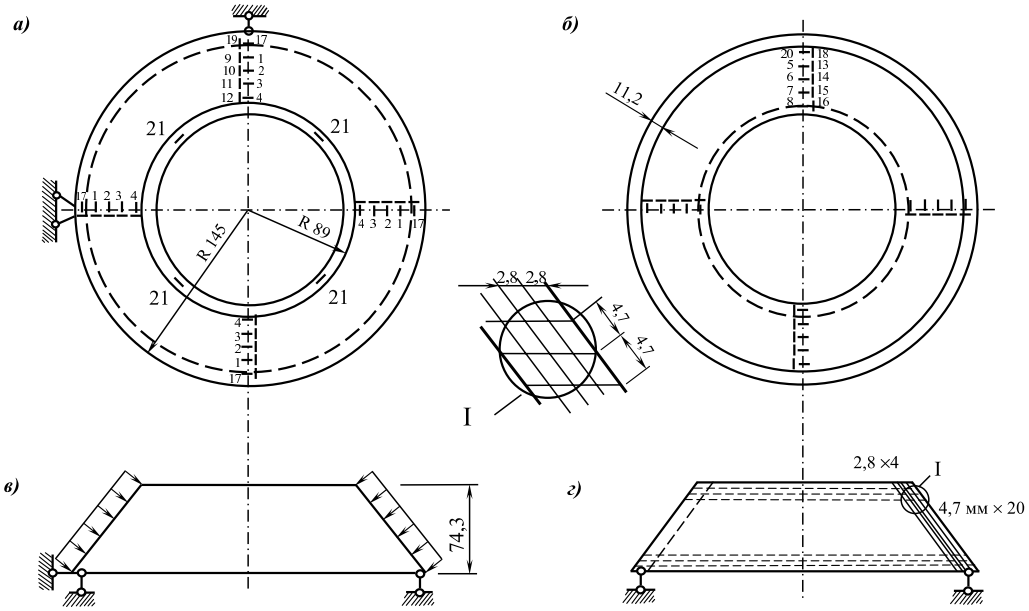


Рис. 1. Расчетная схема наблюдаемого изделия: размещение ТР на внешней (а) и внутренней (б) поверхностях; нагружение и опирание изделия (в); разбивка на конечные элементы (г).

Упругие характеристики	№№ экспериментов			Доверительные интервалы
	1	2	3	при =0,05
E_s, МПа	6344	6323	6421	6363 ± 103
E_n, МПа	1211	1203	1260	1223 ± 62
ν_{ns}	0,13	0,12	0,11	$0{,}12 \pm 0{,}03$
$\nu_{s\theta}$	0,19	0,19	0,18	$0{,}18 \pm 0{,}02$
G_{ns}, МПа	653	758	838	750 ± 261

Таблица 1. Значения упругих характеристик, найденные по данным независимых экспериментов.

к СИИТ-2 для управления работой системы, автоматизированной обработки, анализа и документирования результатов эксперимента.

Значения характеристик (4), полученных с использованием предлагаемых алгоритмов представлены в табл. 1.

Kabelkov A. N., Kaznacheyeva O. K. *Algorythms of experimental and theoretical evaluation characteristics of some polymer materials.* The method of defining the materials properties using the produced things is suggested. The composite materials are taken in particular. The novelty of such approach is the combined mathematical model of construction and measuring system that regists the deformations of real construction under given loads and bordering conditions. The values of characteristics are being searched giving minimum quadratiqre criterion of quality — the summary evaluation of differences between preestimated and experimental meanings of deformations in the field of labelling tenzoresistors or installing of measuring devices of removing constructions.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОСНОВАНИЙ С ПОКРЫТИЯМИ И ШТАМПОВ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ОСНОВАНИЯ

Казаков К. Е.[*], **Федотов И. А.**[**]
[*]*Институт проблем механики им. А. Ю Ишлинского РАН, Москва*
[**]*Тшванский университет технологий, Претория*

В работе описан новый метод построения решения известной задачи о контакте вязкоупругого основания с покрытием и жесткого штампа. Этого метод позволяет получать эффективные решения в случае, когда форма основания штампа описывается сложной быстро осциллирующей функцией. Для плоской контактной задачи выведено разрешающее смешанное интегральное уравнение, решение которого получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы основания выделена отдельным слагаемым, то есть удается найти тонкую структуру решения.

1. Введение. Задача о контактном взаимодействии оснований с покрытиями и штампов рассматривалась ранее, например в [1] (для упругих оснований), [2] (для вязкоупругих стареющих оснований). Решения соответствующих задач в этих работах были построены в виде рядов по ортонормированным полиномам Лежандра. Однако очевидно, что в случае, когда основание штампа описывается сложной, в частности быстро осциллирующей функцией, подобные решения становятся неэффективными. Поэтому возникла необходимость разработки новых подходов к решению таких задач. Методом, развитие которого позволило строить эффективные решения, стал обобщенный проекционный метод А. В. Манжирова [3].

2. Постановка задачи. Рассмотрим вязкоупругий стареющий слой 2 толщины H с тонким покрытием 1, лежащий на недеформируемом подстилающем основании. Будем считать, что жесткость покрытия меньше жесткости нижнего слоя, либо они имеют один и тот же порядок. В некоторый момент времени τ_0 на него начинает действовать жесткий штамп с силой $P(t)$ и эксцентриситетом ее приложения $e(t)$ (рис. 1). Ширина штампа $2a$ значительно больше толщина покрытия h, т. е. $2a \gg h$. Форма основания штампа описывается функцией $g(x)$.

Интегральное уравнение исследуемой задачи имеет вид [2]:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\frac{\theta q(x,t)h}{E_1(t-\tau_1)}+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{F}\frac{2(1-\nu_2^2)q(x,t)}{\pi E_2(t-\tau_2)}=\delta(t)+\alpha(t)x-g(x),\quad x\in[-a,a],\ (1)$$

где $E_k(t)$ — модули упругомгновенной деформации покрытия ($k=1$) и нижнего слоя ($k=2$), ν_2 — коэффициент Пуассона нижнего слоя; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор; $\mathbf{V}_k$ — интегральные операторы Вольтерра с ядрами ползучести при растяжении $K^{(k)}(t,\tau)$ ($k=1,\,2$), $C^{(k)}(t,\tau)$ ($k=1,\,2$) — меры ползучести при растяжении; θ — безразмерный коэффициент, зависящий от коэффициент Пуассона покрытия и от условий соединения покрытия с нижним слоем, $\mathbf{F}$ — интегральный оператор с известным ядром плоской контактной задачи $k_{\rm pl}[(x-\xi)/H]$ [1, 4], $\delta(t)$ — осадка штампа, а $\alpha(t)$ — угол его поворота.

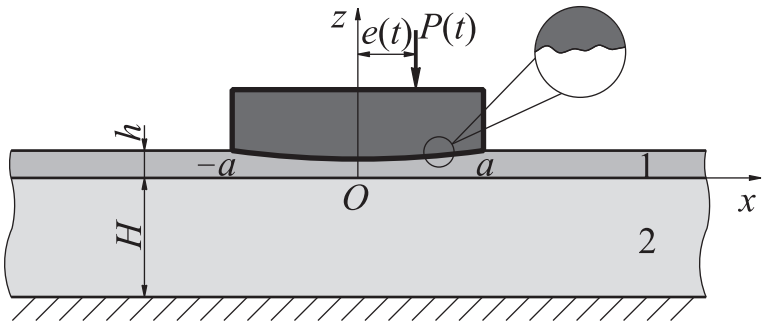


Рис. 1. Контактное взаимодействие слоя с покрытием и штампа.

Уравнение (1) дополним условиями равновесия штампа на основании

$$\int\limits_{-a}^{a} q(\xi,t)\,d\xi = P(t), \quad \int\limits_{-a}^{a} \xi q(\xi,t)\,d\xi = M(t). \tag{2}$$

Здесь $M(t) = e(t)P(t)$ — момент приложения силы $P(t)$.

Сделав в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$x^* = \frac{x}{a}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{a},$$

$$g^*(t^*) = \frac{g(x)}{a}, \quad \delta^*(t^*) = \frac{\delta(t)}{a}, \quad \alpha^*(t^*) = \alpha(t), \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t-\tau_2)}{E_1(t-\tau_1)}\frac{\theta}{1-\nu_2^2}\frac{h}{2a},$$

$$q^*(x^*,t^*) = \frac{2(1-\nu_2^2)q(x,t)}{E_2(t-\tau_2)}, \quad P^*(t^*) = \frac{2P(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)a}, \quad M^*(t^*) = \frac{2M(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)a^2},$$

$$\mathbf{V}_k^* f(x^*,t^*) = \int\limits_{1}^{t^*} K_k(t^*,\tau^*) f(x^*,\tau^*)\,d\tau^*, \quad k = 1,\, 2,$$

$$\mathbf{F}^* f(x^*,t^*) = \int\limits_{-1}^{1} k^*(x^*,\xi^*) f(\xi^*,t^*)\,d\xi^*,$$

$$K_1(t^*,\tau^*) = \frac{E_1(t-\tau_1)}{E_1(\tau-\tau_1)}\frac{E_2(\tau-\tau_2)}{E_2(t-\tau_2)} K^{(1)}(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\tau_0,$$

$$K_2(t^*,\tau^*) = K^{(2)}(t-\tau_2,\tau-\tau_2)\tau_0, \quad k^*(x^*,\xi^*) = \frac{1}{\pi}k_{\rm pl}\Big(\frac{x-\xi}{H}\Big) = \frac{1}{\pi}k_{\rm pl}\Big(\frac{x^*-\xi^*}{\lambda}\Big),$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q(x,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{F}q(x,t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad x \in [-1,1] \tag{3}$$

с дополнительными условиями

$$\int\limits_{-1}^{1} q(\xi,t)\,d\xi = P(t), \quad \int\limits_{-1}^{1} \xi q(\xi,t)\,d\xi = M(t). \tag{4}$$

3. Решение задачи. Будем искать решение уравнения (3) при условиях (4) в классе функций непрерывных по времени t в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ (см., например [2]). Для этого построим сначала ортонормированную в $L_2[-1,1]$ систему функций такую, чтобы первая функция была пропорциональна 1, вторая была линейной комбинацией 1 и x, третья — 1, x, $g(x)$, а остальные функции базиса можно было представить в виде линейной комбинации функций, зависящих от степеней x и функции $g(x)$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, может быть построена на основании [5]:

$$\int_{-1}^{1} p_i(\xi)p_j(\xi)\,d\xi = \delta_{ij}, \quad p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{J_{00}}}$$

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} J_{00} & J_{01} & \cdots & J_{0n} \\ J_{10} & J_{11} & \cdots & J_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad n < 2, \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1\Delta_2}} \begin{vmatrix} J_{00} & J_{01} & J_{02} \\ J_{10} & J_{11} & J_{12} \\ 1 & x & g(x) \end{vmatrix},$$

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} J_{00} & J_{01} & J_{02} & \cdots & J_{0n} & \\ J_{10} & J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{n-1\,0} & J_{n-1\,1} & J_{n-1\,2} & \cdots & J_{n-1\,n} & \\ 1 & x & g(x) & \cdots & x^{n-1} & \end{vmatrix}, \quad n > 2,$$

$$J_{ij} = J_{ji} = \int_{-1}^{1} \xi^{j+i}\,d\xi, \quad J_{i2} = J_{2i} = \int_{-1}^{1} g(\xi)\xi^{i}\,d\xi, \quad i,j < 2,$$

$$J_{ij} = J_{ji} = \int_{-1}^{1} \xi^{j+i-2}\,d\xi, \quad J_{i2} = J_{2i} = \int_{-1}^{1} g(\xi)\xi^{i-1}\,d\xi, \quad i,j > 2,$$

$$J_{ij} = J_{ji} = \int_{-1}^{1} \xi^{j+i-1}\,d\xi, \quad i > 2,\ j < 2,$$

$$J_{22} = \int_{-1}^{1} g^2(\xi)\,d\xi, \quad \Delta_{-1} = 1, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} J_{00} & J_{01} & \cdots & J_{0n} \\ J_{10} & J_{11} & \cdots & J_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n0} & J_{n1} & \cdots & J_{nn} \end{vmatrix}.$$

Представим гильбертово пространство $L_2[-1,1]$ в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2[-1,1] = L_2^{(1)}[-1,1] \oplus L_2^{(2)}[-1,1]$, где $L_2^{(1)}[-1,1]$ — евклидово пространство с базисом $\{p_0(x),\, p_1(x)\}$, а $L_2^{(2)}[-1,1]$ — гильбертово пространство с базисом $\{p_2(x),\, p_3(x),\, \ldots\}$. Подынтегральная функция и правая часть (3) представляются в виде алгебраической суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(1)}[-1,1]$ и $L_2^{(2)}[-1,1]$, соответственно, т. е.

$$q(x,t) = q_1(x,t) + q_2(x,t), \quad f(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t)$$
$$q_1(x,t) = z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x), \quad g(x) = g_0p_0(x) + g_1p_1(x) + g_2(x),$$
$$f_1(x,t) = [\sqrt{J_{00}}\delta(t) - g_0]p_0(x) + [\sqrt{J_{11}}\alpha(t) - g_1]p_1(x), \quad f_2(x,t) \equiv -g_2(x),$$

В представлении для контактных давлений известно слагаемое $q_1(x,t)$, функции разложения которого определяются дополнительными условиями (4):

$$z_0(t) = \frac{P(t)}{\sqrt{J_{00}}}, \quad z_1(t) = \frac{M(t)}{\sqrt{J_{22}}},$$

а слагаемое $q_2(x,t)$ требуется найти. В правой части требуется определить $f_1(x,t)$, а $f_2(x,t) \equiv -g_2(x)$. Таким образом, полученная задача является частным случай обобщенной проекционной задачи, поставленной и решенной в [6].

Не останавливаясь на выкладках приведем лишь окончательные результаты. Контактное давление под штампом имеет вид

$$q(x,t) = z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x),$$

где

$$z_k(t) = -(\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{g_k + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\left[z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)}\right]}{c(t) + \gamma_k},$$

$$K_k^{(0)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n}\varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n}\varphi_n^{(k)}, \quad k = 2,\, 3,\, \ldots,$$

$$\mathbf{W}_k f(x,t) = \int_1^t R_k^*(t,\tau)f(x,\tau)\,d\tau,$$

функции $\varphi_k(x)$ определяются из решения спектральной задачи

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_i^{(k)} p_i(x), \quad \sum_{n=2}^{\infty} R_{mn}\varphi_n^{(k)} = \gamma_k \varphi_m^{(k)}, \quad k,\, m = 2,\, 3,\, \ldots,$$

$$R_{mn} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k(x,\xi)p_m(x)p_n(\xi)\,dx\,d\xi, \quad R_{nm} = R_{mn}, \quad m,\, n = 0,\, 1,\, \ldots,$$

а $R_k^*(t,\tau)$ $(k = 2,\, 3,\, \ldots)$ — резольвента ядра

$$K_k^*(t,\tau) = \frac{c(t)K_1(t,\tau) + \gamma_k K_2(t,\tau)}{c(t) + \gamma_k}.$$

Следует отметить, что полученное решение имеет следующую структуру:

$$q(x,t) = z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x) + Z(t)g(x) + \ldots,$$

где $z_k(t)$, $Z(t)$ — функции времени. Таким образом удается выделить в решении функцию формы основания штампа, то есть найти тонкую структуру решения. Это позволяет получать эффективные решения задач контактного взаимодействия для оснований с покрытиями в случае, когда форма основания штампа описывается сложными, в частности, быстро осциллирующими функциями.

Осадку и угол поворота штампа можно также получить в аналитическом виде.

Авторы благодарны Манжирову А. В. за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №08-01-00003, №08-01-00553 и №09-01-00343) и Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программа №13 ОЭ).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

[2] *Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.* Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.

[3] *Polyanin A. D., Manzhirov A. V.* Handbook of Integral Equations, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 1144 p.

[4] *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

[5] *Szegö G.* Orthogonal Polynomials. Providence: Amer. Math. Soc, 1959.

[6] *Манжиров А. В.* Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы V Рос. конф. с междунар. участием / Под ред. акад. Н. Ф. Морозова. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. С. 221–224.

Kazakov K. E., Fedotov I. A. *Contact problem for foundations with coatings and punches with bases of complicated shape*. A new method of solution constructing for the well-known problem of contact interaction between a viscoelastic foundation with a coating and a rigid punch is described. This method allows to obtain effective solutions in the case when the punch base shape describes by complex, oscillating function. Resolving mixed integral equation for plane contact problem was produced. Its analytically solution was constructed. Function of the punch base shape is separated in expressions for the contact pressure. It allows one to find the fine structure of the solution.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ПЛОСКИХ И АНТИПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СРЕД ПРИ ПОДВИЖНЫХ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИСТОЧНИКАХ

Калинина Т. И.[*], **Наседкин А. В.**[**]

[*]*Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)*

[**]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе изучаются фундаментальные решения (ФР) и их кинематические и энергетические характеристики в дальнем поле для плоской и антиплоской задач электроупругости (пьезоэлектричества) при подвижных осциллирующих источниках.

1. Введение. Данная работа является продолжением исследований [1–4], в которых изучались ФР и энергетика волн для установившихся задач электроупругости без движения источника [1], для антиплоских задач теории упругости и электроупругости при подвижных осциллирующих источниках [2, 3] и для антиплоских задач теории упругости при подвижных осциллирующих источниках [4]. Следуя [5], будем использовать следующую терминологию. Задачи, в которых источник волн движется с постоянной скоростью $\mathbf{w}$ и одновременно осциллирует с частотой ω, будем называть задачами B. Если же $\mathbf{w} = 0$, $\omega \neq 0$, то имеем задачи об установившихся колебаниях, которые будем называть задачами A.

Задачи A исследованы для различных сред гораздо более подробно, чем задачи B. Так, ранее для задач A теории электроупругости ФР были построены в [6] для R^2 и в [1, 7, 8] для R^2 и R^3. В [8] можно найти достаточно подробную библиографию по ФР статических и динамических задач электроупругости.

ФР задач B для задач теории упругости были изучены в R^2 и R^3 в [2, 4]. Между тем, задачи B для электроупругих сред, кроме [3], ранее не рассматривались. Отметим, что формы ФР могут существенно отличаться в зависимости от выбираемых интегральных представлений. ФР плоских и антиплоских задач электроупругости, представленные ниже, имеют интегральные представления, во многом аналогичные ФР анизотропной упругой среды [2,4]. Некоторые особенности ФР задач электроупругости обусловлены связанностью механических и электрических полей и наличием отдельного квазистатического электрического потенциала.

2. Постановка задачи. Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную систему координат, отнесенную к рассматриваемой электроупругой (пьезоэлектрической) среде. Пусть τ — время, $\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ — вектор перемещений, $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$ — электрический потенциал, $c^E_{\alpha\beta}$ — упругие модули, измеренные при постоянном электрическом напряжении, ε^S_{ij} — диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянной деформации, $e_{i\alpha}$ — пьезомодули среды в этой системе координат ($i, j = 1, 2, 3$, $\alpha, \beta = 1, 2, ..., 6$). При этом здесь предполагается, что система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ не обязательно является кристаллографической для модулей пьезоэлектрического материала.

Будем считать, что в плоскости $O\xi_1\xi_2$ существует возможность постановки плоской или антиплоской задач электроупругости, что, как известно [9], налагает условия равенства нулю некоторых модулей среды. Для плоской задачи полевые функции и все соответствующие величины будем снабжать нижним индексом «p» ($\mathbf{u}_p = \{u_{p1}, u_{p2}\}$, $u_{pj} = u_{pj}(\xi_1, \xi_2, \tau)$, $j = 1, 2$, $\varphi_p = \varphi_p(\xi_1, \xi_2, \tau)$), а для антиплоской задачи — нижним индексом «a» ($\mathbf{u}_a = \{u_{a3}\}$, $u_{a3} = u_{a3}(\xi_1, \xi_2, \tau)$, $\varphi_a = \varphi_a(\xi_1, \xi_2, \tau)$).

Предположим, что источники колебаний является сосредоточенными в плоскости $O\xi_1\xi_2$, двигаются в этой же плоскости с постоянной скоростью $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}$ и одновременно осциллируют с частотой ω, т. е.

$$\{\mathbf{f}_{p(a)}, q_{p(a)}\} = \{f_{p(a)0}\mathbf{l}_{p(a)}, q_{p(a)0}\}\delta(\xi_1 - w_1\tau, \xi_2 - w_2\tau)\exp(i\omega\tau), \tag{1}$$

где $\mathbf{f}_{p(a)}$ — массовая сила, $q_{p(a)}$ — электрический заряд, $f_{p(a)0}$, $q_{p(a)0}$ — const, $\mathbf{l}_{p(a)}$ — направляющий вектор силы $\mathbf{f}_{p(a)}$.

Введем в рассмотрение подвижную систему координат $\{x_1, x_2, x_3\}$, движущуюся относительно неподвижной системы координат $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ со скоростью источника $\mathbf{w}$. Время в подвижной системе координат обозначим через t. Эти две системы координат связаны между собой следующим образом:

$$x_1 = \xi_1 - w_1\tau, \quad x_2 = \xi_2 - w_2\tau, \quad x_3 = \xi_3, \quad t = \tau, \tag{2}$$

$$\partial/\partial\xi_j = \partial/\partial x_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad \partial_\tau = \partial_t - \mathbf{w}\cdot\nabla_2^x, \quad \nabla_2^x = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2\}. \tag{3}$$

Будем считать, что при действии источников (1) для перемещений $\mathbf{u}_{p(a)}$ и электрического потенциала $\varphi_{p(a)}$ в подвижной системе координат (2) существует режим установившихся колебаний:

$$\mathbf{u}_{p(a)} = \mathbf{v}_{p(a)}(x_1, x_2)\exp(i\omega t), \quad \varphi_{p(a)} = \psi_{p(a)}(x_1, x_2)\exp(i\omega t). \tag{4}$$

Переходя в классических уравнениях электроупругости к подвижной системе координат (2) и используя соотношения (3), для амплитудных функций $\mathbf{v}_{p(a)}$ и $\psi_{p(a)}$ из (4) будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$\rho(i\omega - \mathbf{w}\cdot\nabla_2^x)^2\mathbf{v}_{p(a)} - \mathbf{\Gamma}_{p(a)}(\nabla_2^x)\cdot\mathbf{v}_{p(a)} - \boldsymbol{\gamma}_{p(a)}(\nabla_2^x)\psi_{p(a)} = f_{p(a)0}\mathbf{l}_{p(a)}\delta(x_1, x_2), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^*_{p(a)}(\nabla_2^x)\cdot\mathbf{v}_{p(a)} - \varepsilon_{p(a)}(\nabla_2^x)\psi_{p(a)} = -q_{p(a)0}\delta(x_1, x_2), \tag{6}$$

где

$$\mathbf{\Gamma}_{p(a)}(\nabla_2^x) = \mathbf{L}^*_{p(a)}(\nabla_2^x)\cdot\mathbf{c}^E_{p(a)}\cdot\mathbf{L}_{p(a)}(\nabla_2^x),$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{p(a)}(\nabla_2^x) = \mathbf{L}^*_{p(a)}(\nabla_2^x)\cdot\mathbf{e}^*_{p(a)}\cdot\nabla_2^x, \quad \varepsilon_{p(a)}(\nabla_2^x) = \nabla_2^{x*}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^S_{p(a)}\cdot\nabla_2^x,$$

причем для плоских задач

$$\mathbf{L}_p(\nabla_2^x) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}^E_p = \begin{bmatrix} c^E_{11} & c^E_{12} & c^E_{16} \\ c^E_{12} & c^E_{22} & c^E_{26} \\ c^E_{16} & c^E_{26} & c^E_{66} \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}^*_p = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{12} & e_{22} \\ e_{16} & e_{26} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\varepsilon}^S_p = \begin{bmatrix} \varepsilon^S_{11} & \varepsilon^S_{12} \\ \varepsilon^S_{12} & \varepsilon^S_{22} \end{bmatrix},$$

а для антиплоских задач

$$\mathbf{L}_a(\nabla_2^x) = \begin{Bmatrix} \partial_2 \\ \partial_1 \end{Bmatrix}, \ \mathbf{c}^E_a = \begin{bmatrix} c^E_{44} & c^E_{45} \\ c^E_{45} & c^E_{55} \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}^*_a = \begin{bmatrix} e_{14} & e_{24} \\ e_{15} & e_{25} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\varepsilon}^S_a = \begin{bmatrix} \varepsilon^S_{11} & \varepsilon^S_{12} \\ \varepsilon^S_{12} & \varepsilon^S_{22} \end{bmatrix}.$$

Для выделения единственного решения системы (5), (6) используем принцип предельного поглощения или постепенно усиливающегося источника [10], согласно которому перейдем к ε-задаче, заменив в (5), (6) $\mathbf{v}_{p(a)}$ на $\mathbf{v}_{p(a)\varepsilon}$, $\psi_{p(a)}$ на $\psi_{p(a)\varepsilon}$, ω на $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. По принципу предельного поглощения под решением $\{\mathbf{v}_{p(a)}, \psi_{p(a)}\}$ будем понимать предел решения $\{\mathbf{v}_{p(a)\varepsilon}, \psi_{p(a)\varepsilon}\}$ системы уравнений (5), (6) для ε-задачи при $\varepsilon \to +0$: $\mathbf{v}_{p(a)} = \lim_{\varepsilon\to+0} \mathbf{v}_{p(a)\varepsilon}$, $\psi_{p(a)} = \lim_{\varepsilon\to+0} \psi_{p(a)\varepsilon}$.

Отметим, что глубокий математический анализ взаимосвязи различных принципов выделения единственных решений в задачах A для неограниченных и полуограниченных сред был дан в исследованиях И. И. Воровича, обобщенно представленных в фундаментальной монографии [11].

3. Фундаментальные решения. Применяя интегральное преобразование Фурье по x_1, x_2 для ε-задачи и методы контурного интегрирования при вычислении обратного преобразования Фурье, после ряда преобразований, аналогичных [2,4], можно получить следующие интегральные представления для амплитуд ФР $\mathbf{v}_{p(a)}$ и $\psi_{p(a)}$:

$$\mathbf{v}_{p(a)} = \mathbf{v}^d_{p(a)} + \mathbf{v}^0_{p(a)}, \quad \psi_{p(a)} = \psi^d_{p(a)} + \psi^0_{p(a)} + \psi^{ns}_{p(a)}, \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^d_{p(a)} \\ \psi^d_{p(a)} \end{array} \right\} = \frac{i}{4\pi\rho} \sum_j (\sum_k{}')(-1)^{k+1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{I}^{vd}_{p(a)jk} \\ I^{\psi d}_{p(a)jk} \end{array} \right\}, \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{I}^{vd}_{p(a)jk} \\ I^{\psi d}_{p(a)jk} \end{array} \right\} = \int\limits_{-\pi/2+\tilde\theta}^{\pi/2+\tilde\theta} \frac{H[(-1)^k c^A_{p(a)j}(\theta) - w_n]}{c^A_{p(a)j}(\theta) c^{B(k)}_{p(a)j}(\theta)} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}^v_{p(a)j} \\ F^\psi_{p(a)j} \end{array} \right\} \exp(-i\omega \mathbf{L}^{B(k)}_{p(a)j} \cdot \mathbf{x})\, d\theta,$$

$$\mathbf{F}^v_{p(a)j} = \mathbf{P}_{p(a)j}(\mathbf{n}) \cdot (f_{p(a)0} \mathbf{l}_{p(a)} + q_{p(a)0} \frac{\boldsymbol{\gamma}_{p(a)}(\mathbf{n})}{\varepsilon_{p(a)}\mathbf{n})}), \quad F^\psi_{p(a)j} = \frac{\boldsymbol{\gamma}^*_{p(a)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{F}^v_{p(a)j}}{\varepsilon_{p(a)}(\mathbf{n})},$$

$$\mathbf{P}_{p(a)j}(\mathbf{n}) = \mathbf{p}_{p(a)j}(\mathbf{n}) \mathbf{p}^*_{p(a)j}(\mathbf{n}),\ \mathbf{L}^{B(k)}_{p(a)j} = \mathbf{n}/c^{B(k)}_{p(a)j}(\theta),\ \mathbf{L}^{B(k)}_{p(a)j} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}| \cos(\theta - \tilde\theta)/c^{B(k)}_{p(a)j}(\theta),$$

$$\mathbf{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{x}/|\mathbf{x}| = \{\cos\tilde\theta, \sin\tilde\theta\},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^0_{p(a)} \\ \psi^0_{p(a)} \end{array} \right\} = \frac{i}{4\pi^2\rho\omega} \sum_j \int\limits_{-\pi/2+\tilde\theta}^{\pi/2+\tilde\theta} \frac{1}{c^A_{p(a)j}(\theta)} I^0_j \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}^v_{p(a)j} \\ F^\psi_{p(a)j} \end{array} \right\} d\theta,$$

$$I^0_j = \int\limits_0^{+\infty} \left(\alpha^+_j \frac{\alpha^+_j - i\eta}{(\alpha^+_j)^2 + \eta^2} - \alpha^-_j \frac{\alpha^-_j - i\eta}{(\alpha^-_j)^2 + \eta^2} \right) \exp(-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}\eta)\, d\eta,$$

$$\alpha^\pm_j = \omega/(\pm c^A_{p(a)j} - w_n), \quad w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n},$$

$$\psi^{ns}_{p(a)} = -\frac{q_{p(a)0}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\varepsilon_{p(a)}(\mathbf{n})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \exp(-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}\alpha)\, d\alpha.$$

Здесь при суммировании по j индекс $j = 1, 2$ для плоских задач, и $j = 1$ для антиплоских задач; $c^A_{p(a)j}(\mathbf{n}(\theta))$ — фазовые скорости в задаче A; $c^{B(k)}_{p(a)j}(\mathbf{n}(\theta))$ — фазовые скорости в задаче B $\left(\mathbf{w} \neq 0,\ c^{B(k)}_{p(a)j}(\mathbf{n}(\theta)) = (-1)^k c^A_{p(a)j}(\mathbf{n}(\theta)) - w_n\right)$; $\mathbf{p}_{p(a)j}(\mathbf{n})$ —

собственные векторы задачи A на собственные значения для плоских волн

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{p(a)}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{p}_{p(a)j}(\mathbf{n})=\rho c^{A2}_{p(a)j}(\mathbf{n})\mathbf{p}_{p(a)j}(\mathbf{n}),\quad \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{p(a)}(\mathbf{n})=\mathbf{\Gamma}_{p(a)}(\mathbf{n})+\frac{\boldsymbol{\gamma}_{p(a)}(\mathbf{n})\,\boldsymbol{\gamma}^{*}_{p(a)}(\mathbf{n})}{\varepsilon_{p(a)}(\mathbf{n})}.$$

Аналогично [2, 4], будем считать фазовую скорость в задаче B неотрицательной, что позволяет определить ее для фиксированного $\mathbf{n}$ следующим образом в зависимости от соотношения между фазовой скоростью $c^{A}_{p(a)j}(\mathbf{n})$ задачи A и w_n:

$$(c^{A}_{p(a)j}(\mathbf{n})>w_n)\ \wedge\ (c^{A}_{p(a)j}(\mathbf{n})\geqslant -w_n)\quad\Rightarrow\quad c^{B}_{p(a)j}(\mathbf{n})=c^{A}_{p(a)j}(\mathbf{n})-w_n, \tag{9}$$

$$c^{A}_{p(a)j}(\mathbf{n})<-w_n\quad\Rightarrow\quad c^{Bk}_{p(a)j}=(\mathbf{n})=(-1)^k c^{A}_{p(a)j}(\mathbf{n})-w_n;\quad k=0,1, \tag{10}$$

$$c^{A}_{p(a)j}(\mathbf{n})\leqslant w_n\quad\Rightarrow\quad \text{нет прямых плоских волн.} \tag{11}$$

Случаи (9), (10) можно обозначить единым образом: $c^{B(k)}_{p(a)j}(\mathbf{n})=(-1)^k c^{A}_{p(a)j}(\mathbf{n})-w_n$, $(k=0)\vee(k=0,1)$, т. е. для случая (9) $c^{B}_{p(a)j}=c^{B(0)}_{p(a)j}$.

В соответствие с возможностями (9)–(11), реализующимися в зависимости от режима движения, $\sum'_k$ в (7) означает наличие или отсутствие суммирования по k.

Формулы (6), (7) и последующие определяют ФР плоских и антиплоских динамических задач теории электроупругости при подвижных осциллирующих источниках и пригодны для различных режимов движения.

В полученных выражениях для амплитуд $\{\mathbf{v}_{p(a)},\psi_{p(a)}\}$, как и в [1], содержатся динамические составляющие $\{\mathbf{v}^{d}_{p(a)},\psi^{d}_{p(a)}\}$, статические — $\{\mathbf{v}^{0}_{p(a)},\psi^{0}_{p(a)}\}$, и несвязанный квазиэлектростатический потенциал $\psi^{ns}_{p(a)}$.

Поскольку полученные выражения для динамических составляющих $\{\mathbf{v}^{d}_{p(a)},\psi^{d}_{p(a)}\}$ по структуре полностью идентичны соответствующим составляющим ФР для плоских и антиплоских задач теории упругости [2, 4], то полученные в [2, 4] асимптотики дальних полей и их анализ с учетом необходимых изменений будут справедливы и для плоских и антиплоских задач электроупругости.

Так, число волн в дальней зоне определяется числом седловых точек $\mathbf{n}^{(k)}_{p(a)jm}(\mathbf{x})$ на кривых медленности $\mathbf{L}^{B(k)}_{p(a)j}$. Как и в задачах B для упругих сред, здесь для стационарных значений $\mathbf{n}^{(k)}_{p(a)jm}(\mathbf{x})$ вектор групповой скорости $\mathbf{c}^{B(k)}_{gp(a)jm}(\mathbf{n}^{(k)}_{p(a)jm})$ направлен вдоль вектора $\mathbf{x}$ физической плоскости. В связи с этим, для фиксированного направления $\mathbf{x}$ число волн можно вычислить, как число пересечений луча $0\mathbf{x}$ с кривой групповых скоростей. Поэтому для антиплоских задач электроупругости, как и для антиплоских задач теории упругости [2], в зависимости от режима движения число распространяющихся волн может изменяться от 0 до 2, а для плоских задач электроупругости, как и для плоских задач теории упругости [4], число распространяющихся волн может изменяться от 0 до 8. При этом при трансзвуковых и при сверхзвуковых режимах движения существуют зоны распространения быстрых и медленных волн, ограниченные конусами Маха. Для волн в дальней зоне здесь также справедливы общие энергетические соотношения [12], и групповая скорость $\mathbf{c}^{B}_{gp(a)jm}$ является скоростью переноса энергии как для неподвижного, так и для подвижного наблюдателей [12].

Таким образом, для ФР в задачах электроупругости движение источника вносит дополнительную анизотропию в кинематические и энергетические картины волновых полей. Например, появляются различия в волновых картинах впереди и позади источника, обнаруживаются зоны с различным числом распространяющихся волн, быстрые и медленные волны и т. д. Здесь, как и в других задачах с подвижными источниками [12], при трансзвуковом и сверхзвуковом движениях медленные волны переносят отрицательную энергию, измеренную подвижным наблюдателем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Белоконь А. В., Наседкин А. В.* Фундаментальные решения в задачах электроупругости при установившихся колебаниях // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 23–25.

[2] *Iovane G., Nasedkin A. V., Passarella F.* Fundamental solutions in antiplane elastodynamic problem for anisotropic medium under moving oscillating source // Europ. J. Mech. A/Solids. 2004. V. 23, pp. 935–943.

[3] *Калинина Т. И., Наседкин А. В.* Фундаментальные решения антиплоской задачи электроупругости при движущемся осциллирующем источнике // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. С. 103–113.

[4] *Iovane G., Nasedkin A. V., Passarella F.* Moving oscillating loads in 2D anisotropic elastic medium: plane waves and fundamental solutions // Wave Motion. 2005. V. 43, №. 1, pp. 51–66.

[5] *Белоконь А. В.* Колебания упругой неоднородной полосы, вызванные движущимися нагрузками // ПММ. 1982. Т. 46, №. 2. С. 296–302.

[6] *Ватульян А. О., Кубликов В. Л.* О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ. 1989. Т. 53, No. 6. С. 1037–1041.

[7] *Norris A. N.* Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelectric solids // Proc. Roy. Sos. London. A. 1994. V. 447, No. 1929, pp. 175–188.

[8] *Wang C. Y., Zhang Ch.* 3-D and 2-D Dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids // Eng. Anal. Bound. Elem. 2005. V. 29, pp. 454–465.

[9] *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

[10] *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкости. М.: Мир, 1981. 598 с.

[11] *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

[12] *Белоконь А. В., Наседкин А. В.* Энергетика волн, генерируемых подвижными источниками // Акуст. ж. 1993. Т. 39, No. 3. С. 421–427.

Kalinina T. I., Nasedkin A. V. *Fundamental solutions in plane and antiplane problems for electroelastic media under moving oscillating sources*. The plane and antiplane problems of concentrated point force moving with constant velocity and oscillating with constant frequency in unbounded homogeneous piezoelectric media are studied. The explicit representation of fundamental solution is obtained by using Fourier integral transform techniques for all rates of source motion as a sum of the integrals over the finite interval. The stationary phase method is applied to derive an asymptotic approximation at the far wave field.

ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ТРЕЩИНАМИ ВДОЛЬ ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Калоеров С. А., Петренко А. В.
Донецкий национальный университет, Донецк

Дано решение задачи электромагнитоупругости для бесконечной пластинки с рядом трещин вдоль одной прямой. Оно основано на решении ряда задач Римана–Гильберта для разрезов на многолистной плоскости для обобщенных комплексных переменных и обеспечивает точное удовлетворение граничных условий на берегах трещин. Приведены результаты численных исследований для пластинки с различным числом одинаковых трещин в случае действия механических сил или однородного электромагнитного поля.

В последние десятилетия в связи с широким применением пьезоматериалов в различных областях промышленности, электроники, радиотехники большое внимание уделяется разработке методов и решению задач электромагнитоупругости [1, 2]. Предложены методы и даны решения ряда двумерных и плоских задач электро- или магнитоупругости для тел из пьезоматериалов с отверстиями, трещинами и включениями [3]. В работах [4–6] для многосвязных сред эти методы распространены на решения задач электромагнитоупругости. В данной статье предложен метод определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пластинок с трещинами вдоль одной прямой, основанный на решении задач Римана–Гильберта для комплексных потенциалов и обеспечивающий точное удовлетворение граничных условий на берегах трещин.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим бесконечную пластинку из пьезоматериала с трещинами $[c_n, d_n]$ $(n = \overline{1, N})$ вдоль одной прямой, принимаемой за ось Ox прямоугольной системы координат Oxy. Прерывистую линию из разрезов $c_n d_n$ обозначим через L',область, занимаемую пластинкой, — через S. На бесконечности на пластинку действуют механические усилия σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞ и однородное электромагнитное поле, характеризуемое компонентами векторов индукции электрического поля D_x^∞, D_y^∞ и магнитного поля B_x^∞, B_y^∞ или компонентами векторов напряженности E_x^∞, E_y^∞ и H_x^∞, H_y^∞. На берегах трещин индукции равны нулю $(D_y = B_y = 0)$, на них действуют усилия σ_y, τ_{xy}, главный вектор которых равен нулю на каждой из них. В точках z_j^0 $(j = \overline{1, J})$ области S действуют сосредоточенные силы $P_j^0(X_j^0, Y_j^0)$, электрические заряды $Q_{\text{э}j}^0$ или заряды магнитных диполей $Q_{\text{м}j}^0$. Угол поворота всей пластинки как целой равен нулю.

Решение задачи об определении ЭМУС рассматриваемой пластинки сводится к нахождению обобщенных комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ $(k = \overline{1, 4})$ [3, 6], где $z_k = x + \mu_k y$; μ_k — корни известного характеристического уравнения восьмого порядка, из граничных условий на берегах трещин

$$2Re \sum_{k=1}^{4} g_{ki}^0 \Phi_k'(t_k) = f_i(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \tag{1}$$

в которых $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (-\tau_{xy}, -\sigma_y, 0, 0)$; g^0_{ki} — постоянные, зависящие от физико-механических свойств материала.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k, получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$. При этом разрезы $[c_n, d_n]$ в областях S_k совпадают с разрезами L' области S.

Производные комплексных потенциалов в данном случае представим в виде [3, 6, 7]

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + 2A'_k(z_k) + \Phi'_{k0}(z_k), \tag{2}$$

где Γ_k и $A'_k(z_k)$ — известные постоянные и функции, определяемые из условий на бесконечности и заданными сосредоточенными воздействиями; $\Phi'_{k0}(z_k)$ — функции, кусочно-голоморфные в областях S_k и имеющие линию скачков L'.

С использованием методов решения задач линейного сопряжения для разрезов в многосвязной области для производных комплексных потенциалов получены выражения [3, 6]

$$\Phi'_k(z_k) = X^{-1}(z_k)F_k(z_k) + f_{k0}(z_k) + R_k z_k + c_{k0}, \tag{3}$$

в которых

$$F_k(z_k) = f_k 1(z_k) + D_k(z_k) + P_{kN}(z_k);$$

$$X(z_k) = \prod_{n=1}^{N} \sqrt{(z_k - c_n)(z_k - d_n)};$$

$$f_{k0}(z_k) = \frac{1}{4\pi i}\int_{L'} \frac{\nu_k(t)dt}{t - z_k}, \quad f_{k1} = \frac{1}{4\pi i}\int_{L'} \frac{X(t)g_k(t)dt}{t - z_k};$$

$$R_k(z_k) = A'_k(z_k) - \overline{r}_k\overline{A'}_k(z_k) - \overline{s}_{k+1}\overline{A'}_{k+1}(z_k) - \overline{e}_{k+2}\overline{A'}_{k+2}(z_k) - \overline{m}_{k+3}\overline{A'}_{k+3}(z_k),$$

$$D_k(z_k) = B'_k(z_k) + \overline{r}_k\overline{B'}_k(z_k) + \overline{s}_{k+1}\overline{B'}_{k+1}(z_k) + \overline{e}_{k+2}\overline{B'}_{k+2}(z_k) + \overline{m}_{k+3}\overline{B'}_{k+3}(z_k);$$

$$B'_k(z_k) = \sum_{j=1}^{J} \frac{A^0_{kj}X(z^0_{kj})}{2(z_k - z^0_{kj})}; \quad P_{kN}(z_k) = \sum_{p=0}^{N} d_{kp}z_k^p;$$

$\nu_k(t)$, $g_k(t)$ — функции, зависящие от заданной нагрузки на берегах трещин; $\overline{r}_k$, $\overline{s}_{k+1}$, $\overline{e}_{k+2}$, $\overline{m}_{k+3}$ — величины, зависящие от физико-механических постоянных материала; c_{k0}, d_{kp} $(p = \overline{0, N})$ — неизвестные постоянные, определяемые из условий разрешимости задачи [7]. После нахождения последних постоянных производные комплексных потенциалов становятся известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (напряжения, перемещения, напряженности и индукции электрического и магнитного полей) и КИНИН (коэффициенты интенсивности напряжений, напряженностей и индукций) для концов трещины [4, 6].

Пластинка с двумя трещинами. Пусть пластинка имеет две одинаковые трещины $[-b, -a]$ и $[a, b]$ одной прямой (рисунок); на бесконечности заданы $\sigma_y^\infty = p$, $E_y^\infty = \varepsilon$, $H_y^\infty = \mu$; на берегах трещин $\sigma_y = \tau_{xy} = D_y = B_y = 0$. В этом случае

$$c_1 = -b, \quad d_1 = -a, \quad c_2 = a, \quad d_2 = b; \quad f_i(t) = 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad \nu_k(t) = g_k(t) = 0;$$

$$X(z_k) = \sqrt{(z_k^2 - c_1^2)(z_k^2 - d_1^2)}; \quad A_k'(z_k) = D_k(z_k) = 0; \quad dk0 = 0;$$

$$\Phi_k'(z_k) = \frac{d_{k2} z_k^2 + d_{k1} z_k}{X(z_k)} + c_{k0}.$$

Были проведены численные исследования определения ЭМУС для пластинок из $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (М1) [4] и $Material1$ (М2) [8]. Ниже описаны некоторые из полученных результатов. Значения величин даны с точностью до приложенной

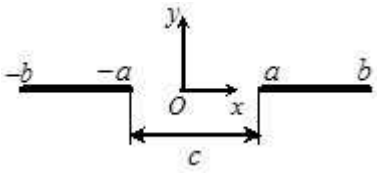


Рис. 1.

нагрузки как множителя (для растяжения с точностью до p, для электрического и магнитного воздействий — до ε и μ), причем все значения приведены в мегадолях, т. е. КИНИН k_1 — в МПа$\sqrt{\text{м}}$, k_E — в МВ/$\sqrt{\text{м}}$, k_B — в МТл$\sqrt{\text{м}}$. При таком подходе растягивающая нагрузка p задается в МПа, напряженность электрического поля ε — в МВ/м, напряженность магнитного поля μ — МА/м.

В табл. 1 для случаев действия усилия $\sigma_y^\infty = p$, электрического поля с напряженностью $E_y^\infty = \varepsilon$ и магнитного поля с напряженностью $H_y^\infty = \mu$ в зависимости от отношения c/l расстояния между трещинами к полудлине одной из них приведены значения КИНИН для верши левой трещины (для вершин правой трещины в силу симметрии они легко восстанавливаются). Значения коэффициента k_1 для случая растяжения пластинки из различных материалов получаются одинаковыми, поэтому для них материал не указан. При действии электрического поля больших значений достигают КИНИН электрической напряженности k_E, а при действии магнитного поля — КИНИН магнитной индукции k_B. Остальные КИНИН значительно меньше, поэтому в табл. 1 они не приведены.

Как видно из табл. 1, с уменьшением расстояния между трещинами КИНИН по модулю возрастают. При $c/l < 0,001$ обе трещины могут рассматриваться как одна трещина полудлины $2l$. Например, k_1 для концов трещины полудлины $2l$ в случае растяжения в соответствии с приведенным в [6] решением равняется $\sqrt{2} \approx 1,414$. Как видно, к этому же значению стремится и k_1^- при $c/l \to 0$. На значение КИНИН k_E, k_B существенно влияют физико-механические свойства материала, особенно при действии магнитного поля. В пластинке из материала М1 с большими магнитными постоянными эти КИНИН оказываются существенно больше, чем в пластинке из М2 с меньшими магнитными постоянными.

Пластинка с конечным числом трещин. Исследовалось также ЭМУС пластинки с N трещинами вдоль одной прямой. Некоторые из полученных результатов для растяжения пластинки усилиями $\sigma_y^\infty = p$ приведены в табл. 2. Трещины считались единичной полудлины, расстояние между их вершинами равно c. В табл. 2 даны значения КИНИН k_1 для концов тещины, начиная с первой и заканчивая средней, для которой $(m = (N+1)/2)$. Не приведенные здесь значения

Материал	КИНИН	c/l				
		2,0	1,0	0,5	0,1	0,01
		Действие усилий $\sigma_y^\infty = p$				
	k_1^-	1,028	1,112	1,081	1,151	1,253
	k_1^+	1,048	1,052	1,229	1,795	3,262
M1	$k_E^- \cdot 10^2$	-0,660	-0,675	-0,694	-0,739	-0,804
	$k_E^+ \cdot 10^2$	-0,673	-0,714	-0,789	-1,152	-2,094
M2	$k_E^- \cdot 10^2$	-2,822	-2,887	-2,968	-3,160	-3,440
	$k_E^+ \cdot 10^2$	-2,877	-3,054	-3,374	-4,928	-8,954
		Действие электрического поля с $E_y^\infty = \varepsilon$				
M1	k_E^-	1,025	1,049	1,078	1,148	1,250
	k_E^+	1,045	1,110	1,226	1,790	3,253
M2	k_E^-	1,012	1,036	1,065	1,134	1,234
	k_E^+	1,032	1,096	1,210	1,768	3,212
		Действие магнитного поля с $H_y^\infty = \mu$				
M1	k_B^-	86,476	88,473	90,945	96,830	105,417
	k_B^+	88,160	93,586	103,384	151,002	274,379
M2	k_B^-	17,868	18,280	18,791	20,007	21,781
	k_B^+	18,215	19,337	21,361	31,200	56,692

Таблица 1. Значения КИНИН для пластинки с двумя трещинами.

коэффициента k_1 при $N = 2$ можно восстановить по данным табл. 1. Как следует из данных табл. 2, с уменьшением расстояний между трещинами и с увеличением их количества значения k_1. При $N > 10$ дальнейшее увеличение количества тре-

N	c	k_1 для вершин с координатами $(m = (N+1)/2)$										
		c_1	d_1	c_2	...	c_3	...	c_4	d_4	...	c_m	d_m
1	-	1,000	1,000									
3	1,0	1,069	1,139	1,168								
	0,5	1,110	1,284	1,321								
	0,1	1,217	1,992	2,031								
10	1,0	1,091	1,167	1,208		1,235		1,245	1,247		1,249	1,249
	0,5	1,150	1,343	1,400		1,456		1,477	1,483		1,486	1,488
	0,1	1,320	2,229	2,300		2,517		2,606	2,643		2,648	2,658
16	1,0	1,094	1,171	1,212		1,240		1,251	1,254		1,263	1,263
	0,5	1,156	1,350	1,408		1,466		1,491	1,499		1,517	1,517
	0,1	1,335	2,258	2,327		2,557		2,659	2,706		2,764	2,757

Таблица 2. Значения КИНИН k_1 для пластинки с конечным числом трещин при дейсвии $\sigma_y^\infty = p$.

щин N практически не влияет на значения этого коэффициента для центральной трещины. Качественные закономерности изменения остальных КИНИН в этом случае остаются такими же, как и в случае пластинки с двумя трещинами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. К.: Наук. думка, 1989. 280 с.

[2] *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

[3] *Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. Донецк: Юго-Восток, 2007. 270 с.

[4] *Калоеров С. А., Петренко А. В.* Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред // Матем. методи та фіз.-мех. поля. 2008. Вип. 51. С. 208–221.

[5] *Калоеров С. А., Петренко А. В., Хорошев К. Г.* Задача электромагнитоупругости для пластинки с отверстиями и трещинами // Прикладная механика. 2006. Т. 46, № 2. С. 93–105.

[6] *Калоеров С. А., Петренко А. В.* Решение плоской задачи электромагнитоупругости для пластинки с трещинами методом линейного сопряжения // Теорет. и прикладная механика. 2009. Вып. 46. С. 42–56.

[7] *Калоеров С. А.* Решение двумерных задач теории трещин методом линейного сопряжения // Концентрация напряжений. К.: А.С.К., 1998. С. 51–91. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7).

[8] *Peng-Fei Hou, Gao-Hang Teng, Hao-Ran Chen* Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Mat. 2009. Vol. 41, pp. 329–338.

Kaloerov S. A., Petrenko A. V. *Magneto-Electro-Elastic State of the Infinite Plate with Straight Line Cracks*. The solution for the magneto-electro-elastic infinite plate with straight line cracks is given. It is based on the solution of the Riemann–Hilbert problem for slits on a multisheeted surface for the generalized complex potentials and provides exact satisfaction of the boundary conditions on the faces of cracks. Numeric results of the magneto-electro-elastic state investigation for plates with the different number of identical cracks are given.

ПОИСК ОГРАНИЧЕНИЙ НА НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ УСТОЙЧИВЫЙ РЕЖИМ СПИРАЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРА

Келлер И. Э.[*], **Кыласова Т. А.**[**]

[*] *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

[**] *Пермский государственный технический университет*

Существует проблема формулировки ограничений на феноменологические нелинейно-вязкие определяющие соотношения, соответствующих сверхпластическим состояниям металлов. В макроскопических экспериментах эти состояния проявляются в необыкновенной стабильности свободной поверхности сплошных цилиндрических образцов при одноосном растяжении или кручении по отношению к развитию локализации деформации, что обеспечивает развитие аномально больших деформаций. В технически привлекательном эксперименте на кручение процесс сопровождается спиральной локализацией деформации. В работе ставится соответствующая начально-краевая задача, для которой требуется найти устойчивые автомодельные решения со спиральной симметрией и условия их существования в виде ограничений на материальную функцию зависимости интенсивности напряжений от интенсивности скоростей деформаций определяющих соотношений жидкости Рейнера–Ривлина. Вводится спиральная система координат, в терминах которой подбирается максимально простой абзац, имеющий сдвиговую структуру. Обсуждаются подходы к решению получающейся в результате системы.

1. Постановка задачи.

Пусть изменение конфигурации цилиндра подчиняется уравнениям [1]:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+\frac{\tau(\zeta)}{\zeta}\boldsymbol{D},\quad \boldsymbol{D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}),\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\nabla}$ — пространственный градиент, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{D}$ — тензоры напряжений и деформаций скорости, p — гидростатическое давление, I — единичный тензор второго ранга, $\boldsymbol{v}$ — скорость перемещений, $\zeta=\sqrt{\frac{1}{2}\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D}}$ — интенсивность скоростей деформаций, $\tau(\zeta)$ — материальная функция, а также статическим

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}w=0 \tag{2}$$

и кинематическим

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w=0 \tag{3}$$

условиям на свободной поверхности $w=\rho-\eta(\xi,\eta,t)=0$. Средняя скорость вращения двух произвольных сечений цилиндра вокруг образующей, отнесенная к расстоянию между данными сечениями, считается фиксированной.

Для задачи (1)–(3) требуется найти устойчивые автомодельные решения со спиральной симметрией и условия их существования в виде ограничений на функцию $\tau(\zeta)$.

Данная задача имеет отношение к проблеме классификации феноменологических определяющих соотношений вязко-пластичности с целью рациональной формулировки ограничений, соответствующих сверхпластичности.

Уравнения (1) сводятся к системе

$$-\frac{2\zeta}{\tau}\boldsymbol{\nabla}p+\Delta\boldsymbol{v}+(m-1)(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{4}$$

где $m=\frac{\partial\ln\tau}{\partial\ln\zeta}$ — чувствительность к скорости деформаций. Предлагается решить (4), (2) с неопределенными функциями времени, затем последние подчинить (3).

2. Уравнения в спиральной системе координат. Построение анзацев удобно выполнять в терминах спиральной системы координат, которая вводится следующими соотношениями:

$$\xi=\tfrac{1}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}\rho\varphi-\tfrac{f(\rho)}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}z,\quad \eta=\tfrac{f(\rho)}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}\rho\varphi+\tfrac{1}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}z,\quad r=\rho,$$

где r,φ,z — цилиндрические координаты. Радиус-вектор в терминах спиральных координат имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\rho(\cos\tfrac{\xi+f(\rho)\eta}{\rho\sqrt{1+f^2(\rho)}}\boldsymbol{a}_1+\sin\tfrac{\xi+f(\rho)\eta}{\rho\sqrt{1+f^2(\rho)}}\boldsymbol{a}_2)+\tfrac{\eta-f(\rho)\xi}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}\boldsymbol{a}_3,$$

а ортонормированный локальный репер конструируется из векторов

$$\boldsymbol{e}_\xi=\tfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi}=\tfrac{1}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}\boldsymbol{e}_\varphi-\tfrac{f(\rho)}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_\eta=\tfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\eta}=\tfrac{f(\rho)}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}\boldsymbol{e}_\varphi+\tfrac{1}{\sqrt{1+f^2(\rho)}}\boldsymbol{e}_z, \tag{5}$$

к которым присоединяется вектор

$$\boldsymbol{e}_\rho\equiv\boldsymbol{e}_r \tag{6}$$

Производные векторов (5) по координатам ξ,η вычисляются:

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\xi}{\partial\xi}=\chi_1\boldsymbol{e}_\rho,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\eta}{\partial\eta}=\bar\chi_1\boldsymbol{e}_\rho,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\xi}{\partial\eta}=\frac{\partial\boldsymbol{e}_\eta}{\partial\xi}=-\chi_2\boldsymbol{e}_\rho, \tag{7}$$

где

$$\chi_1=-\tfrac{\rho^{-1}}{1+f^2(\rho)},\quad \bar\chi_1=-\tfrac{\rho^{-1}f^2(\rho)}{1+f^2(\rho)},\quad \chi_2=-\tfrac{\rho^{-1}f(\rho)}{1+f^2(\rho)}, \tag{8}$$

остальные $\frac{\partial\boldsymbol{e}_\alpha}{\partial\beta}$, где α,β — произвольные спиральные криволинейные координаты из набора ρ,ξ,η, определяются условием непрерывности ортонормированного репера (5), (6). Из них

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\rho}\equiv0,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\xi}{\partial\rho}=-\chi\boldsymbol{e}_\eta,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\eta}{\partial\rho}=\chi\boldsymbol{e}_\xi, \tag{9}$$

причем последние две вычисляются по формулам (5) при фиксированном базисе $\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$

$$\chi=\tfrac{f'(\rho)}{1+f^2(\rho)}, \tag{10}$$

а остальные следуют из соотношений Френе

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\xi}=-\chi_1\boldsymbol{e}_\xi+\chi_2\boldsymbol{e}_\eta,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\eta}=-\bar\chi_1\boldsymbol{e}_\eta+\chi_2\boldsymbol{e}_\xi. \tag{11}$$

Соотношения (5) позволяют выяснить асимптотическое поведение двугранника $\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta$ в касательной плоскости к цилиндрической поверхности при $\rho \to 0, \infty$ в зависимости от шкалы $f(\rho)$. Когда f не зависит от ρ, ориентация этого двугранника также не зависит от ρ, что вряд ли соответствует симметриям каких-либо имеющих физический смысл решений в цилиндре. Все остальные случаи соответствуют правдоподобным ситуациям: при $\rho \to 0 \quad \boldsymbol{e}_\xi \to \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\eta \to \boldsymbol{e}_z$, а при $\rho \to \infty \quad \boldsymbol{e}_\xi \to -\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_\eta \to \boldsymbol{e}_\varphi$; шкала $f(\rho)$ отвечает за скорость этих стремлений.

Соотношения (5) позволяет выяснить также параметризацию и асимпотическое поведение периодов спиральных координатных кривых ξ и η в зависимости от шкалы $f(\rho)$. Если при $\rho \to 0 \quad f(\rho) \propto \rho^\nu$, период спирали ξ равен ∞ при $\nu < -1$, конечной величине $2\pi/\tau$, где τ называется круткой, при $\nu = -1$ и нулю при $\nu > -1$. При этом период спирали η равен нулю при $\nu < 1$, конечной величине $2\pi/\tau$ при $\nu < 1$ и ∞ при $\nu > 1$.

Ненулевые аффинные связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial \beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\gamma \tag{12}$$

(здесь $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \neq \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$) согласно (7), (9) и (11) равны:

$$\begin{gathered} \Gamma^1_{22} = \chi_1,\ \Gamma^1_{33} = \bar\chi_1,\ \Gamma^2_{12} = -\chi_1,\ \Gamma^3_{13} = -\bar\chi_1, \\ \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = -\chi_2,\ \Gamma^2_{13} = \Gamma^3_{12} = \chi_2,\ \Gamma^2_{31} = -\Gamma^3_{21} = \chi. \end{gathered} \tag{13}$$

При помощи (12)–(13) находятся выражения для градиента, дивергенции и оператора Лапласа векторного поля в рассматриваемой системе координат:

$$[\nabla_\alpha v_\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} & \frac{\partial v_\xi}{\partial \rho} + \chi v_\eta & \frac{\partial v_\eta}{\partial \rho} - \chi v_\xi \\ \frac{\partial v_\rho}{\partial \xi} + \chi_1 v_\xi - \chi_2 v_\eta & \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - \chi_1 v_\rho & \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \chi_2 v_\rho \\ \frac{\partial v_\rho}{\partial \eta} + \bar\chi_1 v_\eta - \chi_2 v_\xi & \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \chi_2 v_\rho & \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \bar\chi_1 v_\rho \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \Delta v_\rho = \frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \eta^2} + 2\chi_1 \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + 2\bar\chi_1 \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - 2\chi_2 (\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}) - \\ -(\chi_1 + \bar\chi_1)\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} - (\chi_1^2 + \bar\chi_1^2 + 2\chi_2^2) v_\rho, \\ \\ \Delta v_\xi = \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} + 2\chi \frac{\partial v_\eta}{\partial \rho} - 2\chi_1 \frac{\partial v_\rho}{\partial \xi} + 2\chi_2 \frac{\partial v_\rho}{\partial \eta} - \\ -(\chi_1 + \bar\chi_1)\frac{\partial v_\xi}{\partial \rho} - (\chi_1^2 + \chi^2 + \chi_2^2) v_\xi + (\chi' + (\chi_1 + \bar\chi_1)(\chi_2 - \chi)) v_\eta, \\ \\ \Delta v_\eta = \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \eta^2} - 2\chi \frac{\partial v_\xi}{\partial \rho} - 2\bar\chi_1 \frac{\partial v_\rho}{\partial \eta} + 2\chi_2 \frac{\partial v_\rho}{\partial \xi} - \\ -(\chi_1 + \bar\chi_1)\frac{\partial v_\eta}{\partial \rho} + ((\chi_1 + \bar\chi_1)(\chi_2 + \chi) - \chi') v_\xi - (\bar\chi_1^2 + \chi^2 + \chi_2^2) v_\eta. \end{gathered} \tag{16}$$

Отметим, что согласно (8), (10) коэффициенты этих операторов зависят только от ρ. При $f(\rho) = \tau\rho$ или $f(\rho) = (\tau\rho)^{-1}$ имеем равенство $\chi_2 = -\chi$ и независимо от шкалы f — равенства $\chi_1 + \bar\chi_1 = \rho^{-1},\ \chi_1^2 + \bar\chi_1^2 + 2\chi_2^2 = \rho^{-2}$.

Подобная система координат использовалась в работах [2, 3].

3. Построение простейших сдвиговых анзацев. Для сдвигового поля скоростей с ненулевой компонентой $v_{\xi(\eta)}$ с помощью (14)–(16) получаем уравнения

$$\frac{2\zeta}{\tau}\frac{\partial p}{\partial \rho} + 2\chi_2\frac{v_\xi}{\partial \eta} + (m-1)(\chi+\chi_2)\frac{\partial \ln\zeta}{\partial \eta}v_\xi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} - (\chi_1^2+\chi^2+\chi_2^2)v_\xi + (m-1)\frac{\partial \ln\zeta}{\partial \eta}(\chi_1 v_\xi + \frac{v_\xi}{\partial \eta}) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{2\zeta}{\tau}\frac{\partial p}{\partial \eta} - 2((\chi_1+\bar{\chi}_1)(\chi_2+\chi)-\chi')v_\xi + (m-1)(\chi+\chi_2)\frac{\partial \ln\zeta}{\partial \eta}v_\xi = 0,$$

где $\zeta^2 = (\chi_1^2+(\chi+\chi_2)^2)v_\xi^2 + (\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta})^2$. Система (17) содержит неизвестные функции $v_{\xi(\eta)},\ p(\rho,\eta),\ f(\rho),\tau(\zeta)$. В контексте данной работы нас интересуют периодические по η решения, отвечающие спиральной симметрии поля скоростей, для существования которых необходимо, чтобы $m \neq 1$. Более сложное сдвиговое поле скоростей $v_\rho(\rho,\eta), v_\xi(\xi,\eta)$, несжимаемое при $v_\rho = -\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}\rho$ и линейности v_ξ по ξ, дополнительно предусматривает линейное натяжение материальных кривых вдоль спиралей $\rho,\ \eta = const$.

Работа выполнена при поддержке гранта № 10-01-96053 конкурса РФФИ-Урал и Интеграционной программы УрО, СО и ДВО РАН, проект N 09-С-1-1008.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Келлер И. Э.* Автомодельные формы свободной границы при одноосном растяжении нелинейно-вязкой полосы // ПМТФ. 2010, т.51. № 1. С. 117–124.

[2] *Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А.* Изгиб, растяжение и кручение естественно закрученных стержней // ПММ. 1985. Т. 49, Вып. 6. С. 978–991.

[3] *Устинов Ю. А.* Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // ПММ. 2003. Т. 67, Вып. 1. С. 99–108.

Keller I. E., Kylasova T. A. *Search for restrictions on the nonlinear viscous constitutive relations providing a stable spiral mode of strain localization in a cylinder under torsion.* There is a problem of formulating of restrictions on the phenomenological nonlinearly viscous constitutive relations corresponding to superplastic states of metals. In macroscopic experiments these states are manifested in the extraordinary stability of the free surface of solid cylindrical specimens in uniaxial tension or torsion with respect to deformation localization development, which leads to abnormally large deformations. In technically attractive experiment on torsion the process is accompanied by spiral localization of deformation. The corresponding initial-boundary problem was formulated for which stable solutions of helical symmetry need to be found with their existence conditions in the form of restrictions on the material function of the dependence of the stress tensor intensity on the strain rate tensor intensity of the Reiner–Rivlin liquid constitutive relations. The spiral coordinate system was introduced in terms of which the simplest shear ansatz was chosen. Approaches to solving the resultant system is discussed.

РАСЧЕТ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИХ ВБЛИЗИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИФУРКАЦИЙ РОЖДЕНИЯ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА И АЗИМУТАЛЬНЫХ ВОЛН, МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Колесов В. В., Романов М. Н.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Излагаются результаты расчета стационарных, периодических и квазипериодических движений вязкой жидкости между проницаемыми бесконечными вращающимися концентрическими цилиндрами в случае, когда спектр устойчивости основного режима содержит ноль и пару чисто мнимых значений.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая однородная несжимаемая жидкость заполняет полость между двумя твердыми бесконечными проницаемыми концентрическими цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), вращающимися с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2. Будем считать, что внешние массовые силы отсутствуют. Тогда в безразмерных цилиндрических координатах r, φ, z (ось z направлена вдоль оси цилиндров) исходная задача для вектора скорости $\boldsymbol{V}$ и давления Π состоит из уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности и краевых условий. При этом краевые условия соответствуют случаю, когда количество жидкости, втекающей через поверхность одного цилиндра, совпадает с количеством жидкости, вытекающей через поверхность другого цилиндра.

Уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности допускают точное решение с вектором скорости $\boldsymbol{V}_0$ и давлением Π_0 [1–4]

$$\boldsymbol{V}_0 = \{v_{0r}, v_{0\varphi}, 0\}, \quad v_{0r} = \frac{\chi_0}{r}, \quad v_{0\varphi} = \begin{cases} ar^{\chi+1} + \dfrac{b}{r}, & \chi \neq -2, \\ \dfrac{a_1 \ln r + 1}{r}, & \chi = -2, \end{cases}$$

$$\Pi_0 = \int_1^r \left(\frac{v_{0\varphi}^2}{s} + \frac{\chi_0^2}{s^3} \right) ds + \text{const}, \tag{1}$$

$$a = \frac{\Omega R^2 - 1}{R^{\chi+2} - 1}, \quad b = 1 - a, \quad a_1 = \frac{\Omega R^2 - 1}{\ln R}, \quad R = \frac{R_2}{R_1}, \quad \Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}.$$

Здесь $\chi = S/\nu$ — радиальное число Рейнольдса, S — коэффициент, определяющий интенсивность поступления жидкости через поверхность одного цилиндра и вытекания ее через поверхность другого цилиндра, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\lambda = \Omega_1 R_1^2/\nu$ — число Рейнольдса, $\chi_0 = \chi/\lambda$. При $\chi > 0$ радиальный поток жидкости направлен от внутреннего цилиндра к внешнему, а при $\chi < 0$ — наоборот.

Компоненты поля скорости и давления будем считать периодическими по φ и z с известными периодами соответственно $2\pi/m$ и $2\pi/\alpha$, где m, α — азимутальное и аксиальное волновые числа.

Выполненные в работах [3, 4] вычисления показали, что с ростом числа Рейнольдса λ течение (1) может потерять устойчивость двумя способами. В результате его монотонной вращательно-симметричной неустойчивости возникает стационарный вторичный режим типа вихрей Тейлора (его расчет путем прямого численного интегрирования нелинейной задачи для возмущений выполнен в работе [5]). Колебательная трехмерная неустойчивость порождает автоколебательный режим с бегущими в азимутальном направлении волнами. Соответствующие нейтральные кривые при определенных значениях параметров задачи могут пересекаться. Вблизи таких бикритических точек нелинейное взаимодействие тейлоровской и азимутальной мод может приводить к образованию различных режимов движения жидкости [4]. Целью данной работы является отыскание таких режимов, а также исследование их устойчивости и бифуркаций.

2. Амплитудная система. Пусть (Ω_*, λ_*) — точка на плоскости параметров (Ω, λ), отвечающая пересечению нейтральных кривых монотонной вращательно-симметричной и колебательной трехмерной потери устойчивости течения (1). Предположим, что λ близко к λ_*, а Ω — к Ω_*, так что $\delta_1 = \lambda - \lambda_*$, $\delta_2 = \Omega - \Omega_*$ — малые параметры одного порядка.

Следуя [6], будем искать решение нелинейной задачи для возмущений в виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{V} = \sqrt{|\delta_1|}\ (\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^*), \quad \Pi = \sqrt{|\delta_2|}(p + p^*), \\ \boldsymbol{\Phi} = \eta_0(\xi)\boldsymbol{\Phi}_0(r,z) + e^{ic_*t}\ [\eta_1(\xi)\boldsymbol{\Phi}_1(r,\varphi,z) + \eta_2(\xi)\boldsymbol{\Phi}_2(r,\varphi,z)] + \ldots, \\ p = \eta_0(\xi)p_0(r,z) + e^{ic_*t}\ [\eta_1(\xi)p_1(r,\varphi,z) + \eta_2(\xi)p_2(r,\varphi,z)] + \ldots \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь η_0, η_1, η_2 — неизвестные комплексные амплитуды — функции «медленного» времени $\xi = |\delta_1|t$; c_* — неизвестная циклическая частота (фазовая скорость) азимутальных волн при $\lambda = \lambda_*$ и $\Omega = \Omega_*$; $\boldsymbol{\Phi}_0$, p_0 — собственное решение линеаризованной задачи устойчивости для монотонных вращательно-симметричных возмущений; $\boldsymbol{\Phi}_1$, p_1 и $\boldsymbol{\Phi}_2$, p_2 — независимые собственные решения линеаризованной задачи устойчивости для колебательных трехмерных возмущений. При этом вектор $\boldsymbol{\Phi}_2$ получается инверсией из вектора $\boldsymbol{\Phi}_1$, так что $\boldsymbol{\Phi}_2 = J\boldsymbol{\Phi}_1$. Здесь инверсия J представляет собой зеркальную симметрию относительно отражений в плоскости поперечного сечения цилиндров. Величины порядков δ_1, δ_2 и выше в (2) опущены.

Амплитуды η_0, η_1, η_2 разложений (2) удовлетворяют следующей системе с кубическими ведущими нелинейными членами [6, 7]

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{d\xi} &= (\sigma + A|\eta_0|^2 + B|\eta_1|^2 + B^*|\eta_2|^2)\eta_0 + D\eta_0^*\eta_1^*\eta_2, \\ \frac{d\eta_1}{d\xi} &= (\mu + P|\eta_0|^2 + Q|\eta_1|^2 + R|\eta_2|^2)\eta_1 + S\eta_0^{*2}\eta_2, \\ \frac{d\eta_2}{d\xi} &= (\mu + P|\eta_0|^2 + R|\eta_1|^2 + Q|\eta_2|^2)\eta_2 + S\eta_0^2\eta_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты системы (3) выражаются явно через решения серии линейных краевых задач. При этом коэффициенты A, D являются вещественными, а B, P, Q, R, S — комплексными. Величины σ и μ являются свободными параметрами задачи. Алгоритм и результаты расчета коэффициентов амплитудной системы (3) приводятся в работе [8].

Представим комплексные амплитуды η_0, η_1, η_2 в полярной форме: $\eta_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}$, $\eta_1 = \rho_1 e^{i\psi_1}$, $\eta_2 = \rho_2 e^{i\psi_2}$. Тогда для модулей амплитуд ρ_0, ρ_1, ρ_2, и фазового инварианта $\beta = 2\psi_0 + \psi_1 - \psi_2$ получается замкнутая система, называемая моторной подсистемой амплитудной системы [6]

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho_0}{d\xi} = \left[\sigma + A\rho_0^2 + B_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)\right]\rho_0 + D\rho_0\rho_1\rho_2\cos\beta,\\
&\frac{d\rho_1}{d\xi} = (\mu_r + P_r\rho_0^2 + Q_r\rho_1^2 + R_r\rho_2^2)\rho_1 + (S_r\cos\beta + S_i\sin\beta)\rho_0^2\rho_2,\\
&\frac{d\rho_2}{d\xi} = (\mu_r + P_r\rho_0^2 + R_r\rho_1^2 + Q_r\rho_2^2)\rho_2 + (S_r\cos\beta - S_i\sin\beta)\rho_0^2\rho_1,\\
&\frac{d\beta}{d\xi} = C(\rho_1^2 - \rho_2^2) - 2D\rho_1\rho_2\sin\beta - \left[S_i(\rho_1^2 - \rho_2^2)\cos\beta + S_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)\sin\beta\right]\frac{\rho_0^2}{\rho_1\rho_2},\\
&C = 2B_i + Q_i - R_i.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь учтено, что σ, A, и D — вещественные; индекс r означает вещественную, а i — мнимую часть комплексной величины.

Фазовые переменные ψ_0, ψ_1, ψ_2 находятся из соответствующей системы простым интегрированием, причем одну из них можно выразить через две другие и β.

Система (4) инвариантна относительно преобразования $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$, $\beta \to -\beta$, что является следствием инвариантности исходной задачи относительно инверсии J. Отсюда, в частности, вытекает, что решения системы (4) либо являются J-симметричными (переводятся в себя преобразованием $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$, $\beta \to -\beta$), либо образуют J-связанные пары (переводятся этим преобразованием друг в друга).

3. Расчет равновесий моторной подсистемы. Как показано в [6, 7], у моторной подсистемы (4) существуют следующие равновесия, лежащие на ее инвариантных подпространствах: основной режим MF, вихри Тейлора TV, пара спиральных волн SW, чистые азимутальные волны AW, смешанные азимутальные волны первого MW^+ и второго рода MW^-.

Помимо перечисленных равновесий, у системы (4) может существовать до четырех пар равновесий общего положения, которые не лежат на инвариантных подпространствах [6]. Они находятся путем отыскания корней полинома 4-й степени.

Результаты расчета равновесий, лежащих на инвариантных подпространствах, показаны на рис. 1. Здесь σ и μ_r — свободные параметры задачи. Штриховыми линиями изображены неустойчивые режимы, сплошными — устойчивые. Кружками отмечены точки, в которых от равновесий ответвляются циклы моторной подсистемы. Каждому из них соответствует трехчастотное квазипериодическое движение жидкости.

На рис. 1 представлена схема бифуркационных переходов для случая $\chi = -1$, $\alpha = 3$, $\sigma = 10$. Основное стационарное течение MF существует при всех значениях μ_r и неустойчиво. При $\mu_r = \mu_r^2 = 0$ от него ответвляются чистые азимутальные волны AW и пара спиральных волн SW.

Спиральные волны SW существуют при $\mu_r > \mu_r^2$. При $0 < \mu_r < \mu_r^4 = 5.6666$ они неустойчивы, а при $\mu_r > \mu_r^4$ устойчивы.

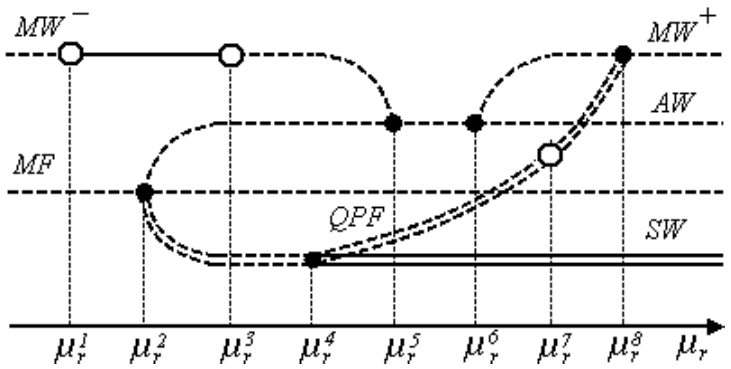


Рис. 1. Схема переходов при $\chi = -1$, $\alpha = 3$, $\sigma = 10$.

Чистые азимутальные волны AW существуют при $\mu_r > \mu_r^2$ и неустойчивы всюду, где существуют. При $\mu_r = \mu_r^5 = 9.7753$ от них ответвляются неустойчивые смешанные азимутальные волны второго рода MW^-. При $\mu_r = \mu_r^6 = 27.1985$ от чистых азимутальных волн AW ответвляются неустойчивые смешанные азимутальные волны первого рода MW^+, которые гибнут на плюс бесконечности.

Смешанные азимутальные волны второго рода MW^- существуют при $\mu_r < \mu_r^5$. В интервалах $-\infty < \mu_r < \mu_r^1 = -650.36$ и $\mu_r^3 < \mu_r < \mu_r^5$ они неустойчивы, а в интервале $\mu_r^1 < \mu_r < \mu_r^3$ — устойчивы ($\mu_r^3 = 4.8702$).

При $\mu_r = \mu_r^1 = -650.36$ от смешанных азимутальных волн второго рода MW^- ответвляется семейство циклов, которые не являются предельными, а при $\mu_r = \mu_r^3$ — J-симметричный предельный цикл.

При $\mu_r = \mu_r^4 = 5.6666$ от пары спиральных волн ответвляется неустойчивая J-связанная пара двухчастотных квазипериодических течений, соответствующая равновесиям общего положения QPF, которая гибнет на смешанных азимутальных волнах первого рода при $\mu_r = \mu_r^8 = 43.5280$.

При $\mu_r = \mu_r^7 = 37.2430$ пара двухчастотных квазипериодических течений, соответствующая равновесиям общего положения QPF, претерпевает бифуркацию Хопфа.

Таким образом, в интервалах $-\infty < \mu_r < \mu_r^1$ и $\mu_r^3 < \mu_r < \mu_r^4$ ни одно из равновесий моторной подсистемы не является устойчивым. Поэтому в рассматриваемом случае при $-\infty < \mu_r < \mu_r^1$ и $\mu_r^3 < \mu_r < \mu_r^4$ в экспериментах следует ожидать, что сразу после потери устойчивости основного режима будут возникать достаточно сложные режимы движения жидкости.

Заключение. Анализ амплитудной системы (3), описывающей пересечение бифуркаций возникновения вторичного стационарного течения типа вихрей Тейлора и вторичного автоколебательного режима с азимутальными волнами в задаче о движениях вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами при наличие радиального потока, показал, что сильное нелинейное взаимодействие тейлоровской и двух азимутальных мод приводит к возникновению устойчивых и неустойчивых вторичных автоколебательных и квазипериодических течений с двумя и тремя независимыми частотами. На устойчивость и бифуркации этих течений существенно влияет радиальное число Рейнольдса χ, определяющее направление и величину радиального потока.

Работа поддержана грантами Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/554, 2.1.1/6095. При финансовой поддержке Федерального агенства по науке и инновациям (гос. контракт № 02.740.11.5189).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шапакидзе Л. Д.* Устойчивость вязкого течения между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Сообщения Академии наук Грузинской ССР. 1968. Т. 49. № 1. С. 19–24.

[2] *Jain N. C., Bansal J. L.* On the flow of a viscous incompressible fluid between two coaxial rotating porous cylinders // Proceedings Mathematical Sciences. 1973. V. 78. № 5. P. 187–201.

[3] *Shapakidze L.* On the stability of flows between two rotating cylinders // Proc. of the Intern. Conf. of Appl. Mech., 1. Beijing, China. 1989. P. 450–454.

[4] *Kolesov V., Shapakidze L.* On oscillatory modes in viscous incompressible liquid flows between two counter-rotating permeable cylinders // Trends in App. Math. to Mech. Chapman & Hall / CRC. 2000. V. 106. P. 221–227.

[5] *Serre E., Sprague M. A., Lueptow R. M.* Stability of Taylor–Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow // Phys. of fluids. 2008. V. 20. Issue 3. P. 034106-1–034106-10.

[6] *Колесов В. В., Юдович В. И.* Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 81–93.

[7] *Chossat P., Iooss G.* The Couette–Taylor problem. New York: Springer–Verlag, 1994. 233 p.

[8] *Колесов В. В., Романов М. Н.* Пересечение бифуркаций возникновения вихрей Телора и азимутальных волн между вращающимися проницаемыми цилиндрами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. Спец. выпуск. 2009. С. 112–114.

Kolesov V. V., Romanov M. N. *The calculation of secondary regimes in a viscous fluid appearing near the intersection with bifurcations of Taylor vortices generation with azimuthal waves between permeable cylinders*. It is presented the result of calculation of stationary periodic and quasi-periodic viscous fluid motions between two rotating permeable concentric cylinders in the case when the stability spectrum of the main mode contains zero and a couple of purely imaginary values.

ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В СИСТЕМЕ ТОНКИХ ЩЕЛЕЙ

Коршун Е. С., Снопов А. И.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследуются особенности течения вязкого газа в смазочном слое эллиптической опоры, поступающего через тонкую щель. Анализируется влияние относительной толщины щели на развитие особенностей потока на её краях.

Исследование течения вязкого газа в системе тонких щелей с внутренними сопряжениями представляет собой актуальную задачу, в частности в разработке теории смазки газостатических опор различных устройств и назначений с поддувом газа в смазочный слой через систему тонких щелей. В работе [1] рассмотрен общий случай газостатической опоры с постоянным зазором, газ в которой подводится через систему ортогональных плоских тонких щелей прямоугольного сечения. Показано, что для определения расходов газа через щели задача сводится к решению системы интегральных уравнений с ядрами, имеющими логарифмические особенности. При реализации этого метода на основе моделирования линии сопряжений потоков в щелях и смазочном слое системами линейных источников выявлено, что плотность источников на краях щели стремится к бесконечности, в то время как давления на выходе из питающей щели остаются практически постоянными. Это противоречит «здравому смыслу» в том, что плотность потока должна быть ограничена. Для выяснения вопроса связано ли это противоречие с физикой явления или с использованной математической моделью, ниже представлены результаты исследования истечения газа через тонкую щель в смазочный слой эллиптической опоры, с предположением что давление на участке сопряжения «смазочный слой - питающая щель» остаётся постоянным по всей длине участка.

Ниже рассматривается плоская эллиптическая в плане с полуосями a и b $(a > b)$ газостатическая опора с софокусной $(\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a1^2 - b1^2})$ эллиптической в поперечном сечении питающей щелью с полуосями $a1$ и $b1$ $(a1 > b1)$. Давление окружающей среды p_a, толщина смазочного h слоя принимается постоянной. Поле квадрата давлений p^2 в смазочном слое удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta p^2 = 0$. Поэтому определение функции p^2 может быть сведено к решению краевой задачи для аналитической функции комплексного переменного $w(z)$,

$$w(z) = p^2(x, y) + \iota\varphi(x, y), \tag{1}$$

где x и y — декартовы координаты точки смазочного слоя, а $z = x + \iota y$ — ее комплексная координата, $\varphi(x, y)$ — функция тока. В рассматриваемой задаче поле давлений в смазочном слое определяем с учетом краевых условий

$$\begin{cases} p = p_a, & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ p = p_a, & \frac{x^2}{a1^2} + \frac{y^2}{b1^2} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

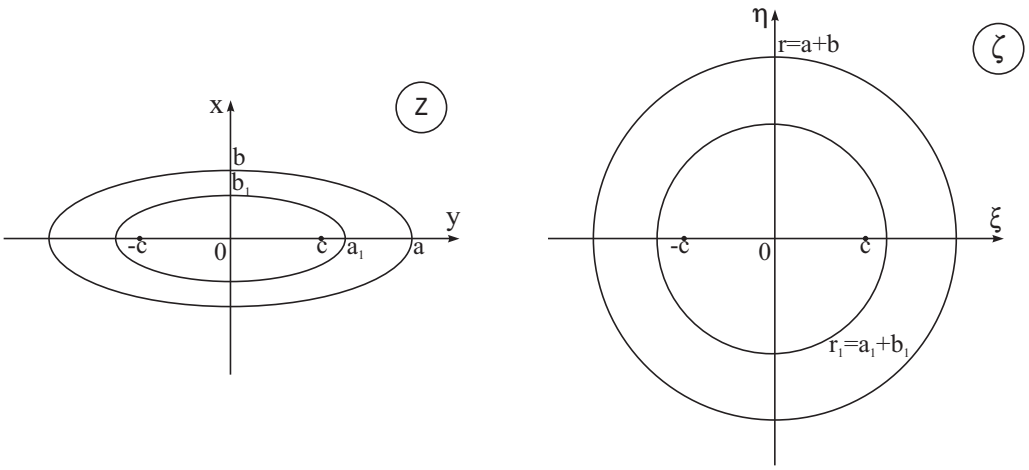


Рис. 1.

p_d — давление на выходе из щели, принимается заданным ($p_a < p_d$).

Исследуются условия, при которых поперечное сечение питающей щели можно моделировать разрезом с непрерывным распределением по нему линейных источников, и анализируется характер распределения последних на линии поддува.

Для решения поставленной задачи, используем методы теории функций комплексного переменного. Эллиптическое кольцо в комплексной плоскости z с помощью функции

$$\zeta = z - \sqrt{z^2 - c^2},$$

обратной функции Жуковского ($z = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{c}{\zeta^2})$), может быть отображено на круглое кольцо в плоскости ζ. Эта функция ставит во взаимно однозначное соответствие точкам внутренней области эллиптического кольца, точки внутренней области круглого кольца с радиусами $|\zeta| = a + b$ и $|\zeta 1| = a1 + b1$.

Если принять, что толщина слоя смазочного слоя в фиктивном потоке такая же, как и в реальном потоке, а газ имеет те же термические параметры, что и в реальной опоре, то в соответствующих точках этих опор будет выполняться равенство давлений при соответствующем равенстве их граничных значений. Сохраняется также равенство величин расходов газа через соответствующие контуры. При этом для комплексного потенциала круглой газостатической опоры с центральным питателем в плоскости имеем ζ

$$W(\zeta) = \frac{p_d^2 - p_a^2}{\ln \frac{a1+b1}{a+b}} \ln \frac{\zeta}{a+b} + p_a^2. \tag{3}$$

Расход газа через опору в фиктивном потоке равен расходу газа через реальную опору. Расход газа через круглую опору определяется по формуле

$$Q = -\frac{\chi \pi h^3}{12 \mu a_s^2} \frac{p_d^2 - p_a^2}{\ln \frac{a1+b1}{a+b}}. \tag{4}$$

В связи с тем что на внутренней кромке кольцевой опоры в фиктивном потоке давление неизменно, плотность расходов газа на ней постоянна.

Плотность расхода газа в фиктивном потоке на входе в смазочный слой всюду одинакова и равна

$$q = \frac{Q}{2\pi(a1 + b1)}, \tag{5}$$

тогда как в реальном потоке этой на линии поддува такой равномерности нет, но при этом расходы в реальном и фиктивном потоках через соответствующие контуры совпадают. Так как исследуется возможность замены эллиптического контура разрезом (линией поддува) при малых отношениях $\frac{b1}{a1}$, то целесообразно рассчитывать плотность источников на этой линии поддува.

Для решения поставленной задачи разбиваем разрез $(-a1, a1)$ на n частей $x_1, x_2, .., x_n$, при этом участкам с координатами $x_i, x_{i-1}, \quad i = 1..n$ находятся в соответствие участки в реальном потоке $z_i, z_{i-1}, \quad i = 1..n$ и в фиктивном $\zeta_i, \zeta_{i-1}, \quad i = 1..n$. Расход газа через одну сторону отрезка на соответствующих участках одинаковый в реальном и фиктивном потоках. Соответственно плотности потока в фиктивном потоке:

$$\Delta Q_i = q(a1 + b1)(\theta_i - \theta_{i-1}), \quad x = 1..n$$

Плотность источников в реальном потоке равняется:

$$q = 2\frac{\Delta Q_i}{(x_i - x_{i-1})}, \quad x = 1..n \tag{6}$$

При $b1$ много меньше чем a1 ($b1 << a1$) плотность расхода:

$$q_i = K\frac{(\theta_i - \theta_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

где $K = -c\frac{\chi\pi h^3}{12\mu a_d^2}\frac{p_d^2 - p_a^2}{\ln\frac{c}{a+b}}$.

Были построены графики распределения плотности газа на участке сопряжения потоков. Так как задача симметрична, то рассматривалась только правая часть питающей щели $x = (0, c)$. На рис. 2 представлены графики для толщин щели $b1 <= a1 \cdot 10^{-3}$, видно, что для этих значений $b1$ входное эллиптическое сечение может быть приближенно разрезом.

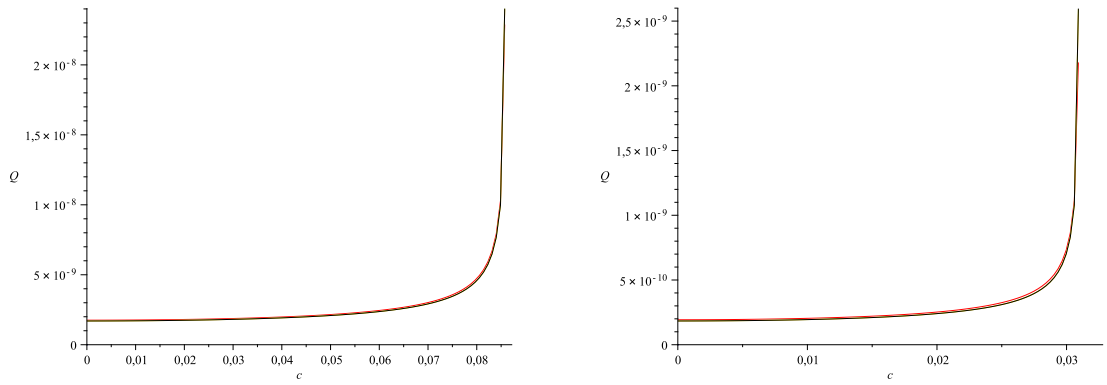


Рис. 2. Графики зависимости плотности расхода газа от толщины смазочной щели.

На графике слева рис. 2 рассмотрен случай эллиптической опоры, у которой $\frac{b}{a} = 0.5$,на графике справа рис. 2, случай $\frac{b}{a} = 0.95$. Из чего следует, что на характер распределения плотности газа на линии поддува форма и размер опоры не влияют. Эти параметры изменяют длину питающей щели.

Графики распределения плотности газа хорошо аппроксимируются логарифмом с постоянными коэффициентами. В первом случае, когда c= 0.0866, плотнось расхода на концах щели приблизили логарифмом: $-10^{-9} \cdot ln(-1.02 \cdot x + c)$, во-втором, когда c= 0.0312, логарифмом: $-10^{-10} \cdot ln(-1.02 \cdot x + c)$.

При $b1 < a1 \cdot 10^{-3}$ эллиптическое поперечное сечение питающей щели можно моделировать разрезом с непрерывным распределением по нему линейных источников.

На краях разреза распределение плотностей растет по логарифмическому закону, что согласуется с выводам работы [1].

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (номер госконтракта 02.740.11.5024).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Снопов А. И. Никитина Н. С.* Моделирование потоков вязкого газа в системе щелей с внутренними сопряжениями // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VI Международной конференции, г. Ростов-на-Дону. 12–14 июня 2000 г. Т 1. С. 188–192.

[2] *Снопов А. И., Коршун Е. С.* Плоская крупногабаритная эллиптическая опора // Успехи современного естествознания. 2010 г. С. 131–132.

Korshun E. S., Snopov A. I. *The features of viscous gas flow in the system of thin cracks*. Features of a viscous gas flow in a lubricant film of the elliptic gas bearing, arriving through a thin cracks are researched. Influence of a crack thickness ratio on development of features of flow at its edges is analysed.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Костин Г. В., Саурин В. В.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

На основе метода интегродифференциальных соотношений разработан регулярный подход к построению математических моделей, описывающих в рамках линейной теории упругости собственные движения прямолинейной балки. С использованием интегральной формы уравнений состояния, связывающих напряжения и деформации, а также скорости и импульсы, система уравнений в частных производных сводится к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для этой цели применяются полиномиальное представление неизвестных функций напряжений, перемещений и импульсов. Получены системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих с различной степенью точности свободные продольные, поперечные и крутильные колебания упругой балки прямоугольного поперечного сечения. Исследовано влияние геометрических и механических параметров системы на частоты и формы собственных колебаний. Показано существование разных типов собственных перемещений и внутренних напряжений балки.

1. Введение. Среди упрощенных моделей, предложенных для приближенных решений краевых задач механики деформированного твердого тела, особое место занимает теория балок, основанная на гипотезах Бернулли [1]. Несмотря на то, что эта теория применима для широкого класса задач, она не учитывает пространственное распределение искомых механических величин в поперечном сечении упругой балки. Уточняющие формулы были предложены в работах [2, 3] (балка Тимошенко, поправка Релея). Ниже для вывода уравнений собственных колебаний балки применяется проекционный подход, основанный на методе интегродифференциальных соотношений [4] и на разложении неизвестных функций перемещений, импульсов и напряжений по малым параметрам (отношению размеров поперечного сечения балки к ее длине) [5] .

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую прямоугольную призму с размерами поперечного сечения $2a_2 \times 2a_3$ и длиной $2a_1$, при этом $a_1 \gg a_2$ и $a_1 \gg a_3$. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, начало которой расположено в середине призмы, а оси Ox_k параллельны ребрам длиной a_k, $k = 1, 2, 3$. Область занимаемая телом определяется, как $\Omega = \{x : -a_k < x_k < a_k,\ k = 1, 2, 3\}$. Ограничим анализ движений изотропного тела (балки) случаем собственных колебаний, описываемым системой дифференциальных уравнений линейной теории упругости [5], которые можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \nabla\sigma, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right); \tag{1}$$

$$\sigma = \mathbf{C} \cdot \varepsilon, \quad \mathbf{p} = \rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \tag{2}$$

Первое уравнение в (1) определяет скорость изменение вектора плотности импульса $\mathbf{p}$ через дивергенцию тензора напряжений σ (уравнение динамического равновесия). Второе соотношение в (1) задает тензор деформаций ε через вектор перемещений $\mathbf{u}$. В (2) записаны уравнения состояния, связывающие напряжения и деформации (закон Гука), а также плотности импульса и скорости точек тела. Здесь $\mathbf{C}$ — тензор модулей упругости, а ρ — плотность материала.

Рассмотрим случай, когда длинные стороны балки свободны от нагрузок

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{\pm}^{(\alpha)} = 0, \quad x_\alpha = \pm a_\alpha, \quad \alpha = 2,3\,, \tag{3}$$

а торцевые поперечные сечения могут быть либо закреплены, либо свободны

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{\pm}^{(1)} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = 0, \quad x_1 = \pm a_1\,. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{n}_{\pm}^{(k)} = (\pm\delta_{1k}, \pm\delta_{2k}, \pm\delta_{3k})^{\mathrm{T}}$ — вектор внешней единичной нормали к границе тела, δ_{kl} — символ Кронекера, $k, l = 1, 2, 3$.

Будем искать неизвестные функции в виде

$$\mathbf{u}(t,x) = \tilde{\mathbf{u}}(x)e^{i\omega t}, \quad \mathbf{p}(t,x) = (i\omega)^{-1}\tilde{\mathbf{p}}(x)e^{i\omega t}, \quad \sigma(t,x) = \tilde{\sigma}(x)e^{i\omega t}\,, \tag{5}$$

опуская в дальнейшем знак «тильда». Здесь ω — неизвестная частота собственных колебаний упругой балки. Для вывода системы приближенных дифференциально-алгебраических уравнений относительно переменной x_1 с соответствующими краевыми условиями при $x_1 = \pm a_1$ используем полиномиальные аппроксимации по нормированным координатам $y_\alpha = x_\alpha/a_\alpha$, $\alpha = 2, 3$

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = \sum_{k+l=0}^{N} \sigma_{11}^{(kl)}(x_1) y_2^k y_3^l, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = g_\alpha \sum_{k+l=0}^{N} \sigma_{\alpha\alpha}^{(kl)}(x_1) y_2^k y_3^l, \quad \alpha = 2,3, \\
\sigma_{1\alpha} = g_\alpha \sum_{k+l=0}^{N-1} \sigma_{1\alpha}^{(kl)}(x_1) y_2^k y_3^l, \quad \sigma_{23} = g_2 g_3 \sum_{k+l=0}^{N-2} \sigma_{23}^{(kl)}(x_1) y_2^k y_3^l, \quad g_\alpha = 1 - y_\alpha^2, \\
u_1 = \sum_{k+l=0}^{N} u_1^{(kl)}(x_1) L_k(y_2) L_l(y_3), \quad u_\alpha = \sum_{k+l=0}^{N-1} u_\alpha^{(kl)}(x_1) L_k(y_2) L_l(y_3), \\
p_1 = \sum_{k+l=0}^{N} p_1^{(kl)}(x_1) L_k(y_2) L_l(y_3), \quad p_\alpha = \sum_{k+l=0}^{N+1} p_\alpha^{(kl)}(x_1) L_k(y_2) L_l(y_3),
\end{gathered} \tag{6}$$

где L_n — нормированные многочлены Лежандра. Это представление автоматически удовлетворяет граничным условиям (3). Для нахождения приближенной системы уравнений, совместной с числом неизвестных функций, введенных в (6), определим, с учетом замены (5), нулевые проекции уравнения равновесия в (1) и уравнений состояния (2) на пространство двумерных полиномов соответствующей размерности

$$\begin{gathered}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w}(y_2, y_3) dy_2 dy_3 = 0, \quad \forall w_1 \in P_N,\ w_\alpha \in P_{N+1}; \\
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}(y_2, y_3) dy_2 dy_3 = 0, \quad \forall v_1 \in P_N,\ v_\alpha \in P_{N-1}; \\
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \xi : \eta(y_2, y_3) dy_2 dy_3 = 0, \quad \forall \eta_{\beta\beta} \in P_N,\ \eta_{1\alpha} \in P_{N-1},\ \eta_{23} \in P_{N-2}; \\
\mathbf{r} = \mathbf{p} - \nabla\sigma, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p} + \omega^2\rho\mathbf{u}, \quad \xi = \sigma - \mathbf{C} : \varepsilon; \quad \alpha = 2,3\,, \quad \beta = 1,2,3.
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\eta(y_2, y_3)$ — тензор, а $\mathbf{v}(y_2, y_3)$ и $\mathbf{w}(y_2, y_3)$ — векторы, компоненты которых — это полные полиномы P_N по координатам y_2 и y_3 указанной в (7) степени. Для сокращения записи введены также вспомогательные тензор ξ и векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{q}$ соответствующей размерности.

В качестве базисных функций для $\eta(y_2, y_3)$, $\mathbf{v}(y_2, y_3)$ и $\mathbf{w}(y_2, y_3)$ удобно выбрать ортогональные двумерные полиномы $L_k(y_2)L_l(y_3)$. В результате из (7) получаем $N_t = 6N^2 + 14N + 11$ уравнений, в которые все функции плотности импульса $p_j^{(kl)}$ и часть функций напряжений $\sigma_{23}^{(kl)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(kl)}$, $\alpha = 2, 3$ (всего $N_a = 3N^2+9N+9$ функций) входят алгебраически. На заданных аппроксимациях конечномерное подпространство тестовых функций позволяет точно удовлетворить исходное векторное уравнение динамического равновесия. Для этого можно разрешить первое интегральное соотношение в (7) относительно функций $p_j^{(kl)}$. Число этих функций и число уравнений равно $N_p = (3N + 7)(N + 2)/2$, при этом дифференциальный порядок этой подсистемы: $N_u = (N+1)(3N+2)/2$. Второе интегральное соотношение в (7) определяет N_u алгебраических равенств и позволяет явно выразить неизвестные функции перемещений через функции напряжений и их первые производные по x_1: $u_j^{(kl)} = -p_j^{(kl)}(\sigma)/(\rho\omega^2)$. Подставляя эти выражения для $u_j^{(kl)}$ в $N_\sigma = 3N^2+5N+3$ уравнений, следующих из интегрального представления закона Гука, и разрешая в получившейся системе $N_\sigma - N_u$ алгебраических соотношений относительно функций $\sigma_{23}^{(kl)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(kl)}$, $\alpha = 2, 3$, получим N_u обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2N_u$. Им соответствуют $2N_u$ краевых условия, следующих из (4), на функции $\sigma_{11}^{(kl)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(kl)}$ и(или) $u_\beta^{(kl)}$, $\alpha = 2, 3$, $\beta = 1, 2, 3$.

Полученная одномерная краевая задача на собственные значения позволяет приближенно определить собственные частоты и формы колебаний балки. При этом пространственные поля перемещений $\mathbf{u}$, импульсов $\mathbf{p}$ и напряжений σ точно удовлетворяют уравнениям (1) и граничным условиям (3), (4). Уравнения состояния (2) задаются приближенно, и для выбранной степени N аппроксимации их невязка может служить основой для построения интегральной энергетической ошибки $\Phi[\mathbf{u}, \mathbf{u}, \sigma]$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\rho^{-1}\omega^{-2}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \xi : \mathbf{C}^{-1} : \xi\right] d\Omega \geqslant 0, \\ \Psi &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\rho\omega^2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma\right] d\Omega = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как приближенное решение определено с точностью до константы, в (8) введена нормировка по величине полной механической энергии $\Psi[\mathbf{u}, \sigma]$.

3. Типы колебаний балки. Анализируя краевую задачу, вытекающую из аппроксимаций (6), интегрального представления уравнений упругости (7) и граничных условий (4), можно выделить четыре независимые подсистемы, описывающие растяжение–сжатие, изгибы относительно осей Ox_2 и Ox_3, а также кручение упругой балки. Такая декомпозиция возникает благодаря симметрии области Ω относительно координатных плоскостей Ox_1x_2 и Ox_1x_3. В табл. 1 для различных собственных движений балки приведены максимальные индексы $N_{2,3}(n)$ по переменным y_2 и y_3, которые встречаются в аппроксимации (6) соответствующих функций перемещений и напряжений. В табл. 1 целое число $n \geqslant 0$ — задает по-

	Растяжение		Изгиб, Ox_2		Изгиб, Ox_3		Кручение	
	N_2	N_3	N_2	N_3	N_2	N_3	N_2	N_3
u_1, $\sigma_{\alpha\alpha}$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n+1$	$2n+1$	$2n$	$2n+1$	$2n+1$
u_2, σ_{12}	$2n-1$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-1$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n+1$
u_3, σ_{13}	$2n-2$	$2n-1$	$2n$	$2n$	$2n-1$	$2n-1$	$2n+1$	$2n$
σ_{23}	$2n-3$	$2n-3$	$2n-1$	$2n-2$	$2n-2$	$2n-1$	$2n$	$2n$

Таблица 1. Симметрия относительно осей Ox_1x_2 и Ox_1x_3 и степень аппроксимации компонент вектора перемещений $\mathbf{u}$ и тензора напряжений σ для различных типов колебаний.

рядок задачи, а $\alpha = 1, 2, 3$. Значение $N_{2,3}$ определяет также четность или нечетность (свойства симметрии) степеней разложения по y_2 и y_3. Если хотя бы одно из $N_{2,3}$ меньше нуля, то соответствующие функции отсутствуют. Дифференциальный порядок краевой задачи равен соответственно для растяжения–сжатия — $(n+1)(3n+2)$, для изгиба — $(n+1)(3n+4)$, для кручения — $(n+1)(3n+6)$.

4. Численные результаты. Для однородной изотропной балки с квадратным сечением выбраны следующие безразмерные геометрические и механические параметры: $a_2 = a_3 = 1$, $\rho = 1$, модуль Юнга $E = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. На рис. 1 представлены расчеты собственных частот ω в зависимости от волновых чисел λ для продольных ($n = 0$) и поперечных ($n = 1$) колебаний балки. Эти частотно-волновые характеристики не зависят от длины балки и типа краевых условий [5]. Для продольных колебаний система сводится к одному бикубическому дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции $\sigma_{11}^{(00)}$, для изгибных — к биквадратному уравнению относительно $\sigma_{11}^{(10)}$. Несмотря на достаточно простые модели, колебания балки имеют сложную структуру и могут относится к различным частотным зонам с особыми типами собственных функций. В рамках выбранных моделей для продольных колебаниях балки можно выделить четыре

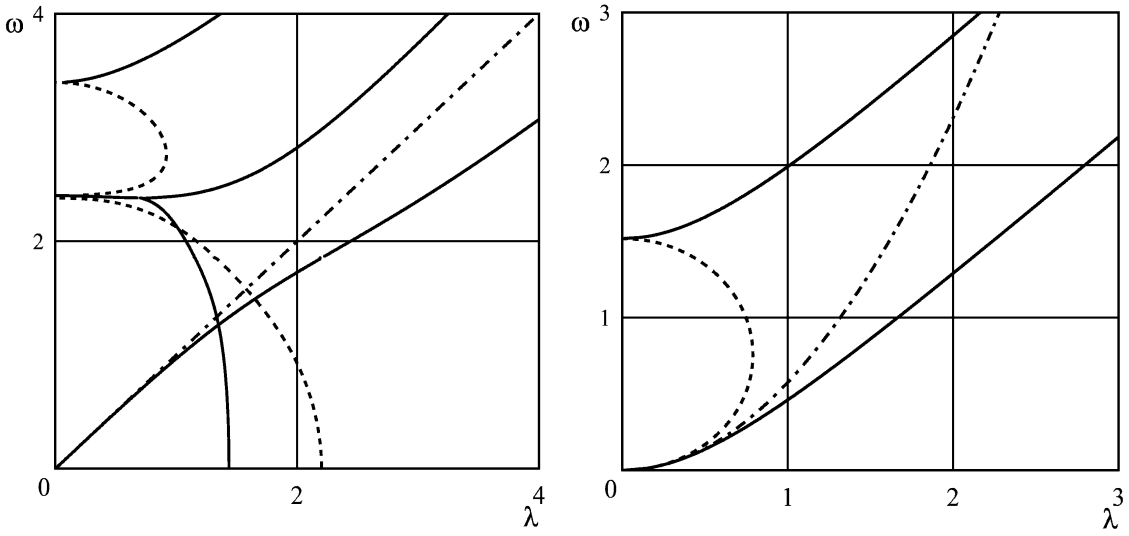


Рис. 1. Частотно-волновые характеристики для продольных (слева) и поперечных (справа) колебаний.

зоны, а для поперечных — две. Сплошные кривые описывают поведение мнимых частей собственных чисел, штриховые — действительных. Для сравнения штрихпунктирные кривые показывают поведение собственных чисел для классической модели балки Эйлера–Бернулли при тех же параметрах задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00234, 09-01-00582, 10-01-00409) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-3288.2010.1, НШ-64817.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.

[2] *Стрэтт Дж. В. (Лорд Релей)* Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 500 с.

[3] *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1960. 379 с.

[4] *Костин Г. В., Саурин В. В.* Вариационные подходы к решению начально-краевых задач динамики линейных упругих систем // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 6. С. 934–953.

[5] *Костин Г. В., Саурин В. В.* Асимптотический подход к задаче о свободных колебаниях балки // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 670–680.

Kostin G. V., Saurin V. V. *Modelling of 3D Elastic Beam Motions Based on the Method of Integrodifferential Relations*. In the frame of linear elasticity, a regular approach to mathematical modelling of natural vibrations for rectilinear beams is developed based on the method of integrodifferential relations. The original system of PDEs is reduced to a system of ODEs with constant coefficients by using integral form of constitutive relations between stresses and strains as well as momentum density and velocities. To this effect the polynomial approximation of unknown stress, displacement and momentum functions is applied. The systems of differential-algebraic equations describing with various accuracy longitudinal, lateral, and torsional vibrations is obtained for elastic beams with the rectangular cross-section. The influence of geometrical and mechanical parameters on the eigenfrequencies and shapes is investigated. The existence of different types of displacement and stress shapes are shown.

О ПОСТРОЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАНОТРИБОЛОГИИ

Кравчук А. С.[*], **Нейттаанмяки П.**[**], **Трубиенко О. О.**[***]

[*] *Московский государственный университет приборостроения и информатики*

[**] *Университет Ювяскюля, Финляндия*

[***] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Работа посвящена численному исследованию механического взаимодействия двух тел на наноуровне. Рассмотрены две модели. Первая из них — это хорошо известная модель Томлинсона, а вторая представляет собой такое обобщение модели Томлинсона, в которой учтены силы дальнодействия любой природы, а также силы вязкого сопротивления. Обе модели одномерные. Приведены примеры численных решений.

1. Введение. Первой работой по нанотрибологии была работа Томлинсона [1], в которой предложена одномерная модель трения. Несмотря на грубость, модель Томлинсона позволила получить ряд важных выводов о характере силового взаимодействия поверхностных слоев атомов. Численные решения задач об определении сил трения в рамках модели Томлинсона были построены в работах авторов. В этих же работах была предложена обобщенная одномерная модель трения, позволяющая учесть взаимодействие любого количества атомов с использованием любого закона парного центрального взаимодействия. Для оценки влияния скорости относительного скольжения необходимо перейти к динамической задаче, вводя силы инерции и вязкого сопротивления, например, по модели Ньютона.

Настоящая работа посвящена численному исследованию динамической модели Томлинсона и ее обобщений, предложенных в предыдущих работах авторов.

2. Динамическая модель Томлинсона. Схематически модель Томлинсона для двумерного случая показана на рис. 1.

Основная гипотеза рассматриваемой модели заключается в том, что взаимодействие двух атомных решеток при их движении друг относительно друга заменяется взаимодействием только поверхностных слоев атомов — нижнего края

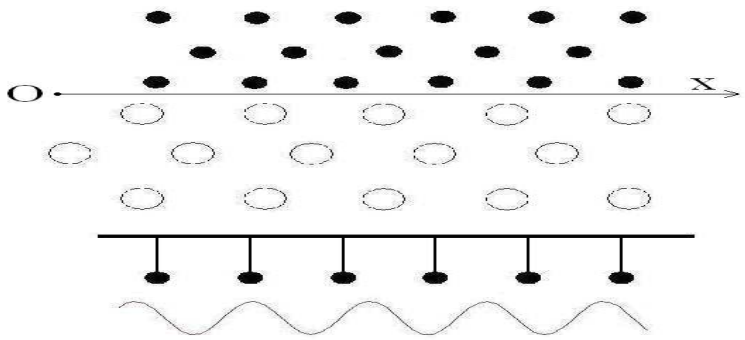


Рис. 1. Модель Томлинсона

верхней решетки и верхнего края нижней решетки. При переходе к одномерной модели взаимодействующие поверхностные слои атомов заменяются цепочками, расположенными на одной прямой. Предполагается, что нижняя решетка (цепочка) является абсолютно жесткой и ее силовое воздействие на верхнюю может быть аппроксимировано синусоидой — см. рис. 1. Атомы деформируемой цепочки (верхней решетки) движутся независимо друг от друга, причем реакция внутренней части деформируемой цепочки является линейно упругой с коэффициентом жесткости k. При этих предположениях уравнение, описывающее поведение отдельного атома в модели Томлинсона, имеет вид:

$$\frac{d^2u_i}{dt^2} = -ku_i - \gamma\frac{du_i}{dt} - f_1\sin\Big[\frac{2\pi}{a}(x_i^0 - u_i + U_c(t))\Big] \qquad (1)$$

где t — время, $u_i(t)$ — перемещение атома, k — коэффициент жесткости основания в модели Томлинсона, γ — коэффициент вязкости, f_1 — амплитуда внешнего воздействия в модели Томлинсона. Введем параметр $\lambda = 2\pi f_1/(ka)$, регулирующий устойчивость состояния равновесия в квазистатике; x_i^0 — начальное положение атома номер i, $i = ... - 2, -1, 0, 1, 2, ...$ Выбирая начало O оси Ox, вдоль которой движутся атомы деформируемой цепочки, в точке $i = 0$, получим $x_i^0 = ib$, где b — период верхней (деформируемой) цепочки. В уравнении (1) $a = b/\eta$ — период жесткой нижней цепочки, являющейся источником силового воздействия на атомы деформируемой цепочки; $U_c(t)$ — заданное смещение жесткой цепочки. Поскольку все атомы движутся независимо, то можно рассмотреть только вариант $i = 1$; всюду ниже индекс $i = 1$ будем опускать. Отметим также, что все коэффициенты в правой части уравнения (1) отнесены к массе атома. Если в аргументе синуса в уравнении (1) пренебречь перемещением $u_i(t) = u(t)$, то получим уравнение линейного осциллятора с линейным демпфированием. Его решение обладает всеми известными из механики свойствами, такими как наличие незатухающих периодических колебаний при $\gamma = 0$, существование резонанса, существование затухающих колебаний или апериодических решений при $\gamma > 0$ и т. д. Если перемещение $u(t)$ остается в аргументе синуса, то уравнение становится нелинейным, однако, как показывает численный анализ, его решение почти не отличается от решения соответствующего линейного уравнения.

Приведем некоторые результаты численного решения. На рис. 2 показаны распределения перемещений для 500 шагов по времени; полное расстояние, пройденное жесткой цепочкой за 500 шагов, равно $10r_e$; период нагрузки $a = 2\pi r_e$; номер шага K. Сплошная кривая соответствует $\gamma = 0$, $\lambda = 0.5$; для точечной кривой $\gamma = 0.5$, $\lambda = 0.5$; для штриховой $\gamma = 0.5$, $\lambda = 2$; константы потенциала Морса соответствуют алюминию. Видно, что вязкость быстро подавляет гармонические колебания, определяемые коэффициентом k — остаются колебания, определяемые синусоидальным внешним воздействием. Их амплитуда зависит от λ.

3. Обобщенная динамическая модель. Схема обобщенной модели представлена на рис. 3.

Как и на рис. 1, светлые кружки соответствуют абсолютно жесткой подвижной цепочке, темные — деформируемой. Начальное положение жесткой цепочки задается расстоянием S, текущее — функцией $U_c(t)$. Атомы деформируемой цепочки занумерованы целыми числами i, $i = 0, 1, ..., N$, атом 0 неподвижен. Цепочка

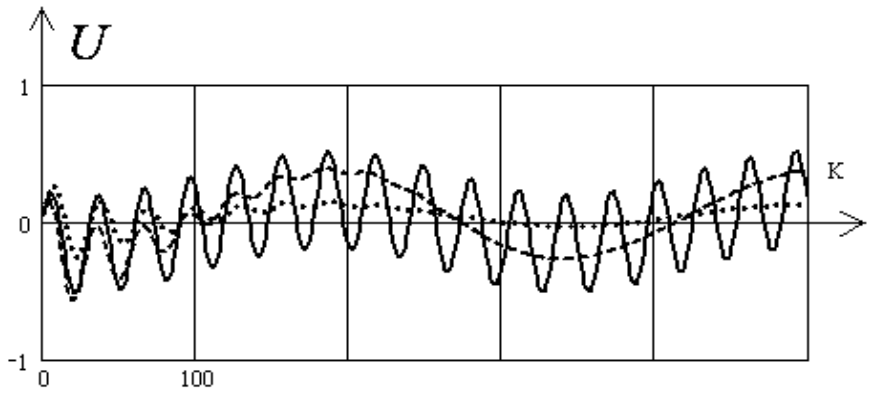


Рис. 2. Распределения перемещений

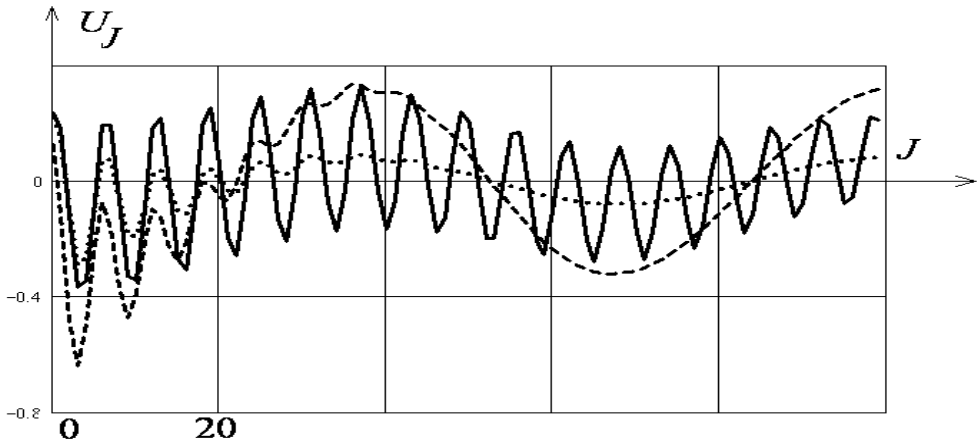


Рис. 3. Обобщенная динамическая модель

характеризуется равновесным расстоянием r_e между двумя соседними атомами, а также их начальными координатами $r_i^0 = x_i^0$. Текущее расстояние r_{ij} между атомами деформируемой цепочки равно $r_{ij} = |r_j^0 + u_j - (r_i^0 + u_i)|$, где u_i, u_j — перемещения из начального состояния. Ось Ox координатной системы направлена вдоль цепочки, O точка совпадает с первым атомом, для которого $i = 0$.

Используется гипотеза о парном центральном взаимодействии и аппроксимации Морса для потенциала силового поля. В результате получается система обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений для перемещений.

На рис. 4 показаны распределения локальных (для атома номер 10) сил трения в зависимости от номера шага по времени для обобщенной модели деформируемой цепочки, в которой расстояние между цепочками равно d; количество атомов в жесткой цепочке обозначено через N_A, $U_c(t) = V_0 t$. Для всех кривых $N = 20$, $N_A = 10$, $S = 0, V_0 = 1$; число шагов по времени равно 500; полное расстояние, пройденное жесткой цепочкой за 500 шагов, равно $10r_e$; номер шага K. Видно, что увеличение вязкости и увеличение расстояния d приводят уменьшению амплитуды колебаний.

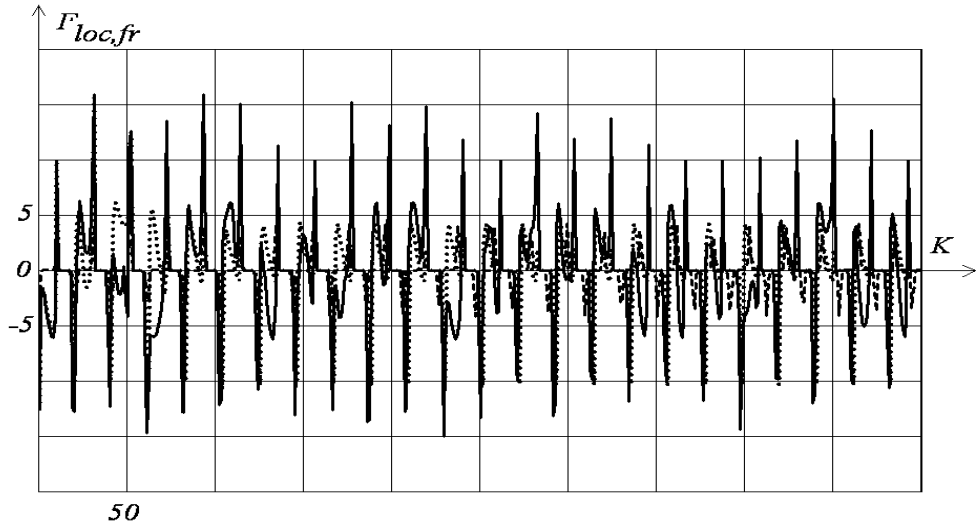


Рис. 4. Распределения локальных сил трения: сплошная кривая соответствует $\gamma = 0$, $d = 1$; для точечной кривой $\gamma = 0.5$, $d = 1$; для штриховой $\gamma = 1$, $d = 1.5$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ №08-01-00349, 10-08-00425-а и проекта 2.1.1/5873 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы».

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ed. Bharat Bhushan, ed* Nanotrybology and nanomechanics. Berlin. Springer, 2006. 1148 p. (2008. 1516 p.)

Kravchuk A. S., Neittaanmaki P., Trubienko O. O. *On the dynamical nanotrybology models*. The work is devoted to an investigation of the mechanical interaction of two solids at nanolevel. The first one is well known Tomlinson's model, and the second is a generalization of Tomlinson's model, which take into account any long interaction forces and viscosity force. Both models are the one-dimensional. Numerical solutions has be found.

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ НАНОТРИБОЛОГИИ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Кравчук А. С.[*], **Победря Б. Е.**[**], **Трубиенко О. О.**[**]
[*]*Московский государственный университет приборостроения и информатики*
[**]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Работа посвящена построению математической динамической модели трения на наноуровне и решению задачи о скольжении кластера меди по кластеру алюминия в трехмерной постановке. Особенностью модели является учет теплоотвода. С использованием метода Верле, реализованного на суперкомпьютере МГУ, построено численное решение, из анализа которого было выявлено существование режима «сцепление-скольжение».

1. Введение.

Нанотехнологию определяют как совокупность приемов и методов манипулирования с нанообъектами и наноструктурами. Предметом наномеханики являются такие задачи нанотехники и нанотехнологий, которые могут быть решены методами классической ньютоновской механики и механики сплошной среды.

Задачи наномеханики условно можно разделить на две группы — задачи об определении напряженно-деформированного состояния деформируемых тел с учетом их атомно-молекулярной структуры. Учет структуры на наноуровне — на расстояниях порядка $10^{-7} - 10^{-9}$нм — может подразумевать отказ от гипотезы о сплошности материала — переход к дискретной системе элементов, взаимодействующих друг с другом на расстоянии. Важнейшим этапом здесь является построение математических моделей нанообъектов и наноструктур, в которых устанавливаются связи между их квантово-механическими и ньютоновскими характеристиками; последние включают такие понятия как сила, положение в пространстве, скорость. Во-вторых, процессы, происходящие на наноуровне, в конечном итоге определяют то, что можно наблюдать на макроуровне — износ, пластическое деформирование, накопление повреждений и разрушение сплошных деформируемых тел. Установление такого рода связей можно назвать континуализацией — переходом от дискретных структур к непрерывной сплошной среде. В частности, можно ставить и решать задачи об определении модулей упругости сплошного линейно деформируемого тела, зная потенциалы взаимодействия дискретных элементов. Актуальность задач первой группы обусловлена в первую очередь развитием нанотехнологий в той их части, которая связано с конструированием исполнительных механизмов наномашин и наноманипуляторов, предназначенных для транспортировки (механического перемещения) отдельных атомов, молекул и их соединений. Вторая группа задач связана, по существу, с важнейшей задачей конструирования новых материалов, позволяющих использовать повышенные жесткостные и прочностные характеристики наноструктурных элементов. В первую очередь это относится к нанокомпозитам — неоднородным материалам, в качестве арматуры в которых используются углеродные структуры и нанопорошки.

Важнейшей задачей наномеханики является проектирование нанопокрытий. Развитие технологий нанесения покрытий, состоящих их нескольких (в пределе —

одного) слоев атомов или молекул, в сочетании с нанорасчетом процесса скольжения одного тела по другому дает возможность увеличить прочность изделий и их износостойкость, резко снизить потери на трение — создать так называемые антифрикционные покрытия.

2. Модели нанотрибологии.

В механике большую роль играют простые модели, которые правильно описывают основные аспекты проблемы. В трибологии таких моделей две — модель Томлинсона и модель Френкеля–Конторовой [2]. В модели Томлинсона задача приводится к исследованию поведения отдельного атома, в модели Френкеля–Конторовой учитывается влияние ближайшей к рассматриваемому атому пары атомов.

Обе модели используются как в квазистатике, так и в динамике. Квазистатические задачи решены, в частности, в работах [1,3,5]. Настоящая работа посвящена решению динамических задач применительно к проблемам нанотрибологии.

3. Моделирование трения методом молекулярной динамики.

Прежде всего необходимо подчеркнуть, что для получения близких к реальности значений коэффициентов трения, модельная система должна быть трехмерной. Моделирование трибосистем осуществляется стандартными методами молекулярной динамики. Контактирующие наносистемы моделируются двумя нанокластерами из различных материалов (см. рис. 1). Считается, что все атомы взаимодействуют между собой, их взаимодействие описывается парным потенциалом Морса (1).

$$V(r_{ij}) = D(e^{-2\alpha r_{ij}} - 2e^{-\alpha r_{ij}}). \tag{1}$$

Нижнее из контактирующих тел считатется неподвижным, а к верхнему через пружину приложена сила, вертикальная компонента которой может моделировать, например, вес, горизонтальная компонента определяется перемещением грани кластера с заданной скоростью v. В процессе моделирования вычисляется сила трения, которая соответствует перемещению грани кластера.

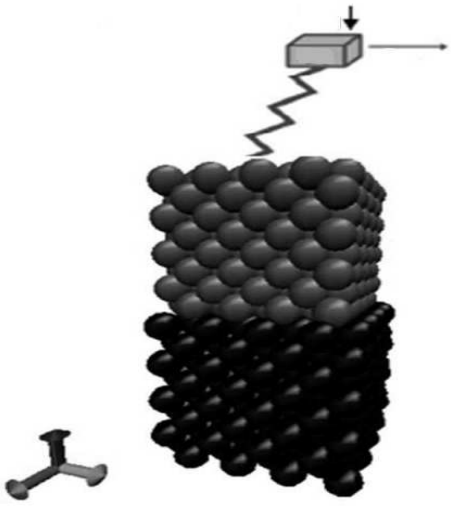


Рис. 1. Схема задачи.

Моделирование трибосистем имеет ту особенность, что приложенная извне сила «накачивает» в систему энергию, и если ее не отводить, то система со временем испарится или взорвется. Для моделирования отвода теплоты в методе молекулярной динамики был использован так называемый термостат Nose-Hoover, в котором энергия из системы удаляется отводом тепла в атмосферу. Этот термостат был успешно применен в ряде работ по наномеханике, например, в работе [6].

Модель системы с термостатом имеет вид:

$$\frac{dr(t)}{dt} = v(t). \tag{2}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{f(t)}{m} - \chi(t)v(t). \tag{3}$$

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_T^2}\left(\frac{\tau}{T_{ext}} - 1\right). \tag{4}$$

где τ — температура системы, τ_T — константа, T_{ext} — внешняя температура $f(t)$ — сила, действующая на данный атом, функция $\chi(t)$ определяет интенсивность теплоотвода.

4. Результаты численных расчетов.

В качестве модельной задаче была рассматрена задача, представленная на рис. 2. Кластер алюминия, состоящий из 6912 атомов, является неподвижной подложкой. По нему движется кластер меди, состоящий из 256 атомов. Постоянные решеток алюминия — 3.253 А, меди — 2.866 А. Наблюдения ведутся при температуре 300^0K. Для решения был использован метод Верле и суперкомпьютер МГУ. Была найдена зависимость силы трения от перемещения верхнего кластера. Полученный график представлен на рис. 3.

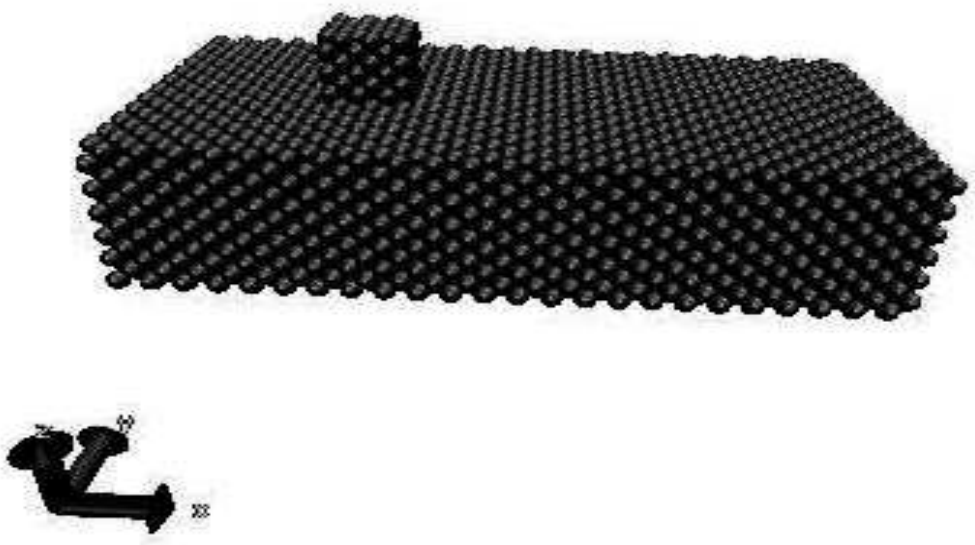


Рис. 2. Расчетная система.

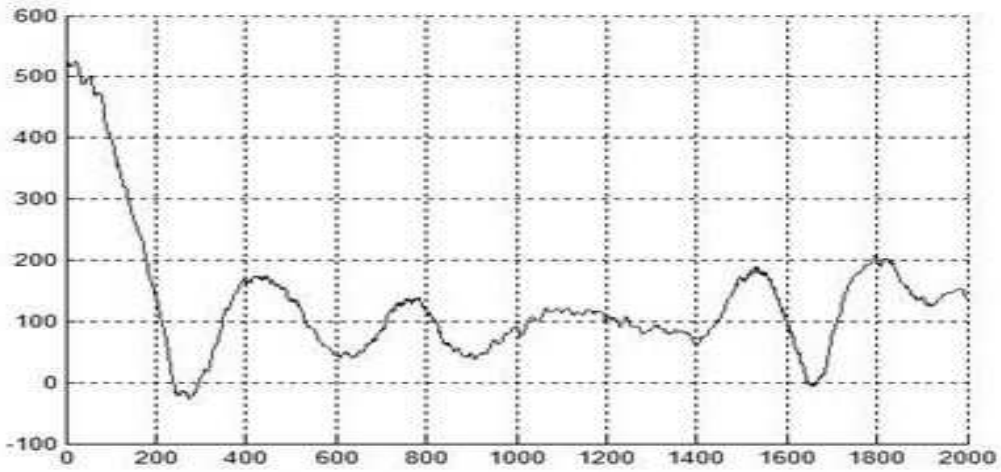


Рис. 3. Зависисмость силы трения от перемещения.

Из анализа графика на рис. 3 видно, что существует режим — stick-slip («слипание-скольжение»). С началом движения пружинка растягивается и сила в ней нарастает, пока не достигнет статического порога. С этого момента кластер начинает двигаться с нарастающей скоростью, пока не догонит конец пружинки. Пружинка при этом опять расслабится и тянущая сила уменньшится. В результате система замедляется вплоть до полной остановки и далее процесс повторяется. При визуализации данного компьютерного эксперимента действительно наблюдается движение кластера с нарастающей скоростью, затем торможение, затем процесс повторяется сначала.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что режим «слипание-скольжение» действительно существует — см. работу [2], в которой измерялась сила трения острия NaCl(001) по поверхности из того же материала.

Результаты численных расчетов представленные на рис. 2–3 свидетельствуют о том, что применение метода молекулярной динамики в сочетании с высокопроизводительными компьютерными мощностями в действительности позволяет находить силу трения и моделировать движение трибосистем.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ №08-01-00349, 10-08-00425-а и проекта 2.1.1/5873 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы».

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Goryacheva I., Kravchuk A., P. Neittaanmaki P.* Numerical solution of nanomechanics problems. Development of the hybrid method // Proc. 8th World Conf. on Computational Mechanics (WCCM VIII) and 5th Europ. Congr. Comput. Methods in Appl. Sci. and Eng-ng (ECCOMAS V). 2008. Venice, Italy

[2] *Bharat Bhushan, ed* Nanotrybology and nanomechanics. Berlin. Springer, 2006. 1148p. (2008. 1516 p.).

[3] *Кравчук А. С.* О моделях и решении задач механики наноконтакта // Сб. трудов Пермс. Гос. Тех. Ун-та «Математическое моделирование систем и процессов». 2007. №15. С. 123–141.

[4] *Френкель Ю. И. Конторова Т.О* теории пластических деформаций и двойникования // ЖЭТФ. 1938. № 8. С. 1340.

[5] *Kravchuk A., Neittaanmaki P.* On a model of nanotribology // 18th Int. Conf. Comp. Methods in Mech. - CMM 2008. Zeliona Gora, Poland. Short Papers. 2009, pp. 253–54.

[6] *Tomanek D., Grenbeck H. Kim S. G. Rosen A.* Hydrogen induced melting of palladium clusters // Z. Phys. 1997. № 40, pp. 469.

Kravchuk A. S., Pobedrya B. E., Trubienko O. O. *The solution of nanotribological 3D-problems using molecular dynamics approach*. The article is devoted to the phenomena of friction on nanoscale. Mutual sliding of nanoclusters has been investigated. Frictional force was calculated using molecular dynamics approach with supercomputer. The regime of stick-slip behavior was found by computer experiment.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Кузнецов С. И.[*], **Федотов И. А.** [**]

[*]*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

[**]*Тшванский университет технологий, Претория*

В статье проведен анализ двух различных методов решения задач нелинейной теории упругости. Первый метод заключается в использовании универсальных решений Эриксена, а второй — в поиске минимума энергетического функционала, порождаемого потенциалом упругой энергии Муни–Ривлина. Предложен способ экспериментального определения соответствующих материальных констант.

1. Введение. В теоретических исследованиях и прикладных расчетах имеются задачи, при решении которых необходимо учитывать конечные деформации исследуемых объектов. В настоящее время существует множество математических моделей, описывающих поведение сплошных сред при конечных деформациях. В данной статье мы будем рассматривать гиперупругие тела — тела, для которых определен потенциал упругой энергии w.

Существует два подхода к решению краевых задач. Первый заключается в решении системы дифференциальных уравнений в частных производных, а второй — в нахождении минимума энергетического функционала.

К несжимаемым материалам относятся такие среды, произвольный элементарный объем которых не меняется в процессе деформации. Математически это выражается следующим образом:

$$I_3(\mathbf{G}) = 1, \tag{1}$$

где $I_3(\mathbf{G})$ — третий инвариант меры деформации Коши-Грина $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{R}\right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{R}\right)^T.$$

Здесь $\overset{\circ}{\nabla}$ — набла-оператор в системе координат, связанный с актуальной конфигурацией, $\mathbf{R}$ — радиус вектор точки в отсчетной конфигурации, а $\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{R}$ — градиент места [4].

Упругий потенциал Муни-Ривлина имеет следующий вид:

$$w(I_1, I_2) = \frac{1}{4}\mu\left[(1+\beta)(I_1(\mathbf{G}) - 3) + (1-\beta)(I_2(\mathbf{G}) - 3)\right], \tag{2}$$

$$\mu > 0, \qquad -1 \leqslant \beta \leqslant 1,$$

где $I_1(\mathbf{G})$ и $I_2(\mathbf{G})$ — первый и второй инвариант меры деформации Коши-Грина, а μ и β — константы материала. При $\beta = 0$ приходим к частному случаю — «неогукову» потенциалу.

Основной трудностью, возникающей в приложениях, является недостаточное количество экспериментальных данных для определения констант материала. В данной статье предложен способ экспериментального определения упругих констант.

2. Аналитический подход. Рассмотрим полый шар, внутренний радиус которого в недеформированном состоянии равен r_0, а внешний — r_1. Пусть массовые силы отсутствуют. Внешняя поверхность шара свободна от напряжений, а на внутреннюю действует давление p_0.

Полагаем, что при деформировании шара соблюдается центральная симметрия. В этом случае решение известно [4, с. 291]. Радиально-симметричное преобразование рассматриваемого тела определяется универсальныой деформацией Эриксена:

$$R^3 = r^3 + A, \tag{3}$$

Соответствующие компоненты тензора напряжений вычисляются по формулам:

$$\sigma_{rr} = -p_0 + 4\int\limits_{R_0}^{R} \frac{R^6 - r^6}{R^4 r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial I_1(\mathbf{G})} + \frac{R^2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial I_1(\mathbf{G})}\right)\frac{dR}{R}, \tag{4}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2R}\frac{d}{dR}R^2\sigma_{rr}, \qquad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0.$$

При подстановке потенциала Муни-Ривлина (2) в соотношение (4) получим

$$\sigma_{rr}(r) = -p_0 + \mu(1+\beta)\int\limits_{r_0}^{r} \frac{(\xi^3+A)^2 - \xi^6}{(\xi^3+A)^{\frac{7}{3}}}\,d\xi + \mu(1-\beta)\int\limits_{r_0}^{r} \frac{(\xi^3+A)^2 - \xi^6}{\xi^2(\xi^3+A)^{\frac{5}{3}}}\,d\xi. \tag{5}$$

Интегралы, присутствующие в выражении (5) вычисляются в замкнутом виде:

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{(\xi^3+A)^2 - \xi^6}{(\xi^3+A)^{\frac{7}{3}}}\,d\xi = \left.\frac{\xi(4A+5\xi^3)}{4(\xi^3+A)^{\frac{4}{3}}}\right|_{r_0}^{r}, \quad \int\limits_{r_0}^{r} \frac{(\xi^3+A)^2 - \xi^6}{\xi^2(\xi^3+A)^{\frac{5}{3}}}\,d\xi = -\left.\frac{\xi^3+2A}{2\xi(\xi^3+A)^{\frac{2}{3}}}\right|_{r_0}^{r}.$$

Значение константы A можно найти из граничных условий:

$$\sigma_{rr}(r)|_{r=r_0} = -p_0, \qquad \sigma_{rr}(r)|_{r=r_1} = 0. \tag{6}$$

Подставив выражение для напряжения (5) в соотношение (6), получим уравнение, из которого может быть определена константа A.

$$-p_0 + \mu(1+\beta)\left.\frac{\xi(4A+5\xi^3)}{4(\xi^3+A)^{\frac{4}{3}}}\right|_{r_0}^{r_1} - \mu(1-\beta)\left.\frac{\xi^3+2A}{2\xi(\xi^3+A)^{\frac{2}{3}}}\right|_{r_0}^{r_1} = 0. \tag{7}$$

Следует отметить, что из формулы (7) не всегда можно вывести однозначную зависимость $A(p_0)$. Более того, при значениях параметра β, близких к 1 одной величине p_0 соответствуют либо два значения A либо ни одного. Однако, что для подавляющего

большинства материалов константы μ и β таковы, что любому давлению p_0 соответствует не более одного значения A.

3. Вариационный подход. Теперь построим решение рассматриваемой задачи используя вариационный принцип Лагранжа. Потенциальная энергия шара для модели Муни-Ривлина в условиях центральной симметрии определяется следующим выражением:

$$W = 4\pi \int\limits_{r_0}^{r_1} w(r) r^2\, dr =$$

$$= 4\pi \int\limits_{r_0}^{r_1} \left[C_1 \left(R'^2(r) + 2\frac{R^2(r)}{r^2} - 3 \right) + C_2 \left(2R'^2(r)\frac{R^2(r)}{r^2} + \frac{R^4(r)}{r^4} \right) \right] r^2\, dr,$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\mu(1+\beta), \qquad C_2 = \frac{1}{4}\mu(1-\beta),$$

где $R(r)$ — место точки r в актуальной конфигурации.

Условие несжимаемости (1) может быть сформулировано в виде:

$$R'^2(r)\frac{R^4(r)}{r^4} - 1 = 0. \tag{8}$$

Условный минимум будем искать используя метод штрафов [2]. Для этого включим в целевой функционал условие (8) с коэффициентом $1/D$, где D достаточно мало. Таким образом, чтобы решить задачу необходимо найти минимум функционала

$$J[f] = 4\pi \int\limits_{r_0}^{r_1} \left[C_1 \left(f'^2(r) + 2\frac{f^2(r)}{r^2} - 3 \right) + \right.$$

$$\left. + C_2 \left(2f'^2(r)\frac{f^2(r)}{r^2} + \frac{f^4(r)}{r^4} \right) + \frac{1}{D} \left(f'^2(r)\frac{r^4}{f^4(r)} - 1 \right) \right] r^2\, dr. \tag{9}$$

Для этого воспользуемся численной процедурой, а именно разобьем отрезок $r \in [r_0, r_1]$ на n интервалов:

$$[r_0, r_1] = \bigcup_{i=1}^{n} [r_{i-1}, r_i], \qquad r_{i+1} - r_i = h_i \qquad i = \overline{1, n}, \tag{10}$$

а функцию $f(r)$ аппроксимируем следующим выражением:

$$f(r) \approx \sum_{i=0}^{n} f_i e_i(r), \tag{11}$$

где f_i — числовые коэффициенты. Величины $e_i(r)$ определяются следующим равенством:

$$e_i(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \notin [r_{i-1}, r_{i+1}], \\ \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}, & \text{если } r \in [r_{i-1}, r_i], \\ \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i}, & \text{если } r \in [r_i, r_{i+1}]. \end{cases}$$

Для отыскания минимума функционала (9) подставляем аппроксимацию (11) в выражение (9) и находим частные производные получившейся функции по f_i. В результате приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которой получаем численно, например используя метод Ньютона [1].

Функционал (9) можно использовать и для случая, когда рассматриваемое тело состоит из сжимаемого материала. В этом случае потенциал Муни–Ривлина принимает вид:

$$w(I_1, I_2) = C_1(I_1(\mathbf{G}) - 3) + C_2(I_2(\mathbf{G}) - 3) + \frac{1}{D}(I_3(\mathbf{G}) - 1),$$

где D — коэффициент сжимаемости материала. В предельном случае при $D \to 0$ решение, полученное численно будет близко к аналитическому решению соответствующей задачи о несжимаемом шаре. В этом можно убедиться проведя соответствующие расчеты.

Изложенная процедура позволяет расширить класс решаемых задач на несжимаемые материалы. Аналитическое решение используется для контроля численного алгоритма и определения радиуса разбиения в выражении (10).

4. Методика экспериментального определения материальных констант. Определить значения материальных констант предлагается с помощью следующего эксперимента. На рис. 1 изображена схема экспериментальной установки. Полый шар 1, изготовленный из исследуемого материала, помещен внутрь сферы 2 радиуса R_s. Внешний и внутренний радиус шара равны r_0 и r_1 соответственно. Внутри шара 1 с помощью компрессора К создается давление, измеряемое манометром М. На поверхность исследуемого тела напылен тонкий проводящий слой. Шар и сфера включены в цепь с катушкой индуктивности L. Система из сферы 1 и проводящего слоя 3 шара представляет собой сферический конденсатор, а цепь — колебательный контур. Собственную частоту ν колебаний данного контура можно измерить с помощью частотомера F.

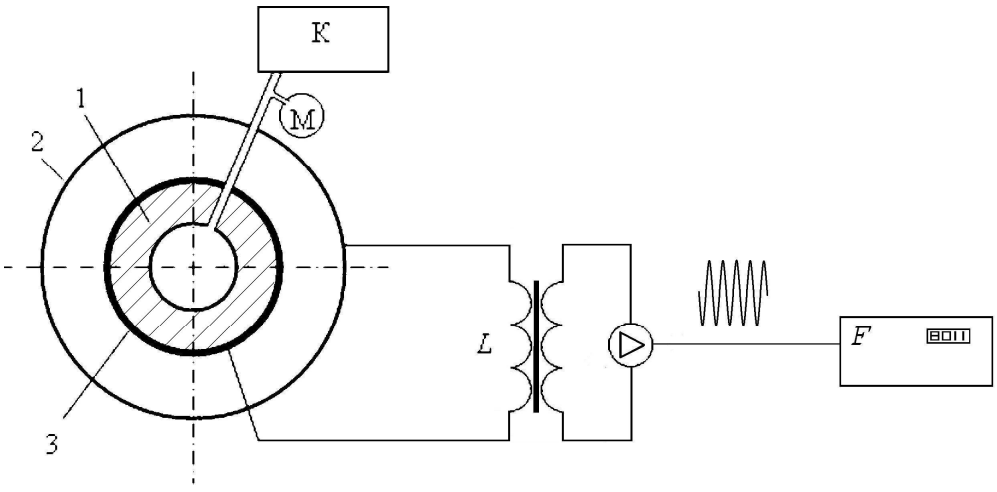


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

Измерив частоту ν и воспользовавшись формулой вычисления емкости сферического конденсатора можно найти внешний радиус исследуемого шара.

$$R = \frac{R_s}{16\pi^3\varepsilon_0\nu^2 L R_s + 1}.$$

В процессе эксперимента проводится серия из n измерений. Пусть давление внутри шара 1 во время i-го измерения равнялось p_i, а вычисленное значение константы A было равно A_i. Тогда подставив полученные данные в выражение (7) и проведя некоторые преобразования, получим следующие равенства:

$$-\frac{1}{\mu}p_i + \beta\,\frac{(2\xi^3+4A_i)(\xi^3+A_i)^{\frac{2}{3}}+\xi^2(4A_i+5\xi^3)}{4\xi(\xi^3+A_i)^{\frac{4}{3}}}\Bigg|_{r_0}^{r_1} = \\ = \frac{(2\xi^3+4A_i)(\xi^3+A_i)^{\frac{2}{3}}-\xi^2(4A_i+5\xi^3)}{4\xi(\xi^3+A_i)^{\frac{4}{3}}}\Bigg|_{r_0}^{r_1}.$$

Далее, используя метод наименьших квадратов [3] можно определить средние значения для $1/\mu$ и β. Затем, вычислив дисперсию полученных величин можно оценить значения материальных констант.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00553-а, 09-08-01194-а). Авторы благодарят профессора Манжирова А. В. за помощь.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.

[2] *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. М.: Высшая школа, 1983. 512 с.

[3] *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск.: Раско, 1991. 272 с.

[4] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.

Kuznetsov S. I., Fedotov I. *Theoretical and numerical research of elastic properties of incompressible finite deformable solids*. At this paper two methods for solving of problems for hyperelastic bodies are considering. The first method is to use the Ericsen universal deformations. The second method is to find minimum of energy functional. The Mooney–Rivlin potential for incompressible material is used. The experimental method for identification the material constants is proposed.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ ПРАВИЛЬНОГО ВИХРЕВОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ВНЕ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Куракин Л. Г.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ

Исследуется устойчивость стационарного вращения системы трех точечных вихрей, помещенных на плоскости в вершинах правильного треугольника вне круговой области. Проведен полный нелинейный анализ. Применены результаты КАМ теории. Перечислены и изучены все встречающиеся здесь резонансы до четвертого порядка включительно. Тем самым завершены исследования Хавелока (1931 г.), решившего эту задачу в линейной постановке.

1. Введение. Система точечных вихрей исследована с разных точек зрения в многочисленных работах (см. обзоры [1–4]). В статьях [5–7] доказана устойчивость стационарного вращения системы семи одинаковых точечных вихрей, расположенных на плоскости в вершинах правильного семиугольника. Вместе с уже известными результатами многих авторов, это привело к полному решению проблемы Кельвина (1878 г.): каково максимальное число вершин *устойчивого* правильного вихревого n-угольника на плоскости? Ответ на этот вопрос: 7.

Решена в точной нелинейной постановке и проблема Кельвина, обобщенная на сферу (см. работы [8–12], а также обзор [4]). Доказано, что кривизна не может стабилизировать правильный вихревой многоугольник, и, в частности, делает семиугольник неустойчивым.

Систематизации основных результатов по движению точечных вихрей внутри и вне круговой области посвящена работа [13]. В статьях [14–16] исследована проблема устойчивости вихревых многоугольников внутри круговой области. В линейной постановке её изучал аналитическими методами Хавелок [17], а численно — Кэмбел [18].

В работе [17] решена в линейной постановке задача устойчивости вихревого n-угольника радиуса R_0, расположеного вне круговой области радиуса R с общим центром симметрии (см. рис. 1). Установлено, что соответствующая линеаризованная система имеет экспоненциально растущие решения при $n \geqslant 7$, а также, если $2 \leqslant n \leqslant 6$ и параметр $q = R^2/R_0^2$ больше некоторой критической величины $q_* = q_*(n)$: $q_* < q < 1$. Во всех остальных случаях в задаче устойчивости имеет место критический случай — собственные значения матрицы линеаризации имеют нулевые вещественные части.

В данной работе исследована устойчивость правильного вихревого треугольника вне круговой области в точной нелинейной постановке, когда $0 < q \leqslant q_*$. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости. Проблема распалась на несколько задач, потребовавших индивидуального подхода и, в частности,

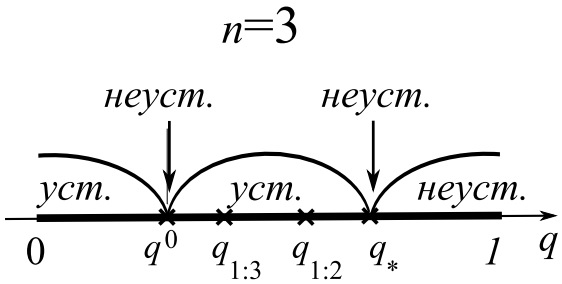


Рис. 1.

применения методов КАМ теории. Все встречающиеся здесь резонансы до четвертого порядка включительно проанализированы на основе результатов Маркеева и Сокольского (см. [19] и обзор [20]). В данной работе мы ограничились формулировкой результатов. Подробные доказательства можно найти в депонированной работе [21].

2. Постановка задачи. Формулировка результатов. Движение системы n точечных вихрей на плоскости вне круга радиуса R, в предположении бесциркулянтности обтекания круга, описывается уравнениями [17, 22]:

$$\dot{z}_k^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{\varkappa_j}{z_k - z_j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\varkappa_j}{z_k - \widehat{z}_j} + \frac{1}{z_k}\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j\right), \quad k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k, k = 1, \ldots, n$ — комплексные переменные, x_k, y_k — декартовы координаты k-го вихря, $\varkappa_k$ — его интенсивность, $\widehat{z}_k = R^2/z_k^*$ — отражение k-го вихря границей круга.

Система (1) — гамильтонова, с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{4\pi}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\varkappa_j\varkappa_k \ln\left|z_j - z_k\right|^2 + \\ & + \frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varkappa_j\varkappa_k\left[\ln\left|R^2 - z_j z_k^*\right|^2 - 2\ln\left|z_k\right|^2\right] \end{aligned} \tag{2}$$

имеет два интеграла: энергию H и суммарный момент инерции

$$M = \sum_{k=1}^{n}\varkappa_k|z_k|^2 \tag{3}$$

Далее будем предполагать, что все вихри имеют одинаковую интенсивность $\varkappa$. Система (1) имеет точное решение ($k = 1, \ldots, n$) :

$$\begin{aligned} z_k(t) &= e^{i\omega t}u_k, \\ u_k &= R_0 e^{2\pi i(k-1)/n}, \qquad \omega = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2}\left(3n - 1 - \frac{2n}{1-q^n}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $q = R^2/R_0^2$, а величина $R_0 > R$.

Таким образом, конфигурация одинаковых вихрей, расположенных на окружности радиуса R_0 в вершинах правильного n-угольника вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega(q)$.

Хорошо известно, что в случае перманентного вращения устойчивость по Ляпунову невозможна, поэтому уточним определения. Заменами переменных переходим от системы (1) к гамильтоновой системе с циклической координатой. В теории устойчивости стационарного движения таких систем, развитой Раусом [23], учитывается, что относительно циклической координаты стационарное движение всегда неустойчиво (возмущения растут линейно со временем). Таким образом, речь должна идти об устойчивости относительно части переменных — позиционных координат и импульсов. Исключая из системы импульс, отвечающий циклической координате, приходим, к так называемой, *приведенной* гамильтоновой системе. Под *устойчивостью по Раусу* стационарного вращения (4) будем понимать устойчивость по Ляпунову положения равновесия этой приведенной системы. Соответственно, неустойчивость вихревого многоугольника будет означать неустойчивость по Ляпунову этого положения равновесия.

Проведенный нами нелинейный анализ (подробности см. в работе [21]) привел к *критерию устойчивости* стационарного вращения (4) *вихревого треугольника*. Критическим значениям параметра q:

$$\begin{aligned} q^\circ &\approx .2625422399, \quad q_{1:3} \approx .2708577054 \\ q_{1:2} &\approx .2724299508, \quad q_* \approx .2736946899 \end{aligned} \tag{5}$$

соответствуют резонансы (см. [19] и обзор [20]): q° — двукратный нуль, диагонализируемый случай; $q_{k:m}$ — резонанс $k : m$; q_* — резонанс 1:1, недиагонализируемый случай.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (08–01–00895, 09-01-92504) и Американского Фонда Гражданских Исследований и Развития (CRDF, RUM1-2943-RO-09).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мелешко В. В., Константинов М. Ю.* Динамика вихревых структур. Киев: Наукова думка, 1993.

[2] *Newton P. K.* The n-vortex problem: Analytical techniques // Appl. Math. Sci. (Springer, New York, 2001). Vol. 145.

[3] *Aref H., Newton P. K., Stremler M. A., Tokieda T., Vainchtein D. L.* Vortex crystals // Adv. Appl. Mech. 2003. Vol. 39, pp. 1–79.

[4] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Математические методы динамики вихревых структур. Москва-Ижевск: ИКИ, 2005.

[5] *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 4. С. 476–482.

[6] *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos. 2002. Vol. 12, pp. 574–595.

[7] *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // В сб.: Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей, ред. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А. Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. С. 238–303.

[8] *Богомолов В. А.* Модель колебаний центров действия атмосферы // ФАО. 1979. Т. 15. С. 243–249.

[9] *Pekarsky S. and Marsden J.* Point vortices on a sphere: stability of relative equilibria //J. Math. Phys. 1998. Vol. 39, pp. 5894–5907.

[10] *Borisov A. V. and Kilin A. V.* Stability of Thomson's configurations of vortices on a sphere // Reg. Chaot. Dyn. 2000. Vol. 5, pp. 189–200.

[11] *Куракин Л. Г.* О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 4. С. 482–487.

[12] *Kurakin L. G.* On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere // Chaos. 2004. Vol. 14, pp. 592–602.

[13] *Килин А. А., Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // В сб.: Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей, ред. Борисов А. В., Мамаев И.С., Соколовский М. А. Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. С. 414–440.

[14] *Куракин Л. Г.* Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 52–55.

[15] *Kurakin L. G.* On stability of a regular vortex polygon in the circular domain // J. Math. Fluid Mech. 2005. Vol. 7. Supplem. 3, pp. S376–S386.

[16] *Kurakin L. G.* On the stability of Thomson's vortex configurations inside a circular domain, Reg. Chaot. Dyn. 2010. Vol. 15 (1), pp. 40–58.

[17] *Havelock T. H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Phil. Mag. 1931. Vol. 11. № 70, pp. 617–633.

[18] *Campbell L. J.* Transverse normal modes of finite vortex arrays // Phys. Rev. A. 1981. Vol. 24, pp. 514–534.

[19] *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

[20] *Куницын А. Н., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники, Общая механика. Т. 4. Москва: ВИНИТИ. 1979. С. 58–139.

[21] *Куракин Л. Г.* Устойчивость вихревого треугольника вне круговой области. Деп. в ВИНИТИ 16.04.2009, 216-В2009.

[22] *Milne-Thomson L. M.* Theoretical hydrodynamics, 1968. = Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.

[23] *Routh E. J.* A Treatise on the stability of a given state motion. London: Macmillan, 1877. 108 p.

[24] *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции гамильтона // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. № 5. С. 13–40.

[25] *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. Москва: Мир, 1973.

[26] *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движений в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.

[27] *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонане первого порядка // Прикл. матем. и механика. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 24–33.

[28] *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // Прикл. матем. и механика. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 791–799.

[29] *Ковалев А. В., Чудненко А. Н.* К устойчивости положений равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот // Докл. АН УССРб. 1977. А. 11. С. 1011–1014.

Kurakin L. G. *On stability of stationary rotation of the rectilinear vortical triangle out of the circular area.* The stability of stationary rotation of a system of three point vortices placed on a surface in apexes of the rectilinear triangle out of the circular area is studied. The full nonlinear analysis is reserched. All the resonances up to fourth order inclusive are enumerated.

ЭФФЕКТИВНЫЕ СХЕМЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Курбатова Н. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Разработанная схема дискретизации вариационных уравнений с использованием лексического анализа апробирована на серии задач растяжения-сжатия кручения и изгиба естественно-закрученного стержня, а также пружины с прямоугольным поперечным сечением.

Метод конечных элементов (МКЭ) занимает особенное место в современных научных исследованиях и приложениях. Такие конечно-элементные пакеты, как ANSYS, MARC, ABAQUS, FlexPDE, ACELAN, успешно применяются в области компьютерного инжиниринга, решения пространственных задач механики деформируемого твёрдого тела, механики конструкций, и т. д. Научное исследование и моделирование трехмерных тел и процессов становится свободным от реализации технологии самого метода конечных элементов и сводится к освоению правил функционирования пакетов. Однако в тех случаях, когда возникает необходимость реализовывать МКЭ (в т. ч. разработчикам пакетов) для задач, модели которых отсутствуют в заявленных пакетах, исследователь стремится минимизировать трудозатраты и гарантировать безошибочные результаты выполнения базовых преобразований.

Так, дискретизация метода начинается с вариационной постановки задачи. Чем сложнее модель (определяющие соотношения, геометрия, качество элементов), тем труднее выполнить дискретизацию вариационного уравнения, не прибегая к методу «проб и ошибок», и получить конечномерный аналог вариационного уравнения.

Особенности реализации МКЭ рассмотрим на примере задач Сен-Венана растяжения-сжатия [1], чистого изгиба и изгиба поперечной силой для естественно-закрученного стержня [2, 3]. Вариационная постановка этих задач сформулирована в монографии [4] относительно искомых функций на сечении. Вариационное уравнение получается в результате подстановки соответствующих задаче элементарных решений

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_7(\xi) = e^{i\tau\xi}\left(\frac{\xi^3}{6}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\xi^2}{2}\boldsymbol{a}_3 + \xi\boldsymbol{a}_9 + \boldsymbol{a}_7\right),\\
&\boldsymbol{u}_8(\xi) = \boldsymbol{u}_7^*(\xi), \quad \boldsymbol{u}_9(\xi) = e^{i\tau\xi}\left(\frac{\xi^2}{2}\boldsymbol{a}_1 + \xi\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_9\right), \qquad (1)\\
&\boldsymbol{u}_{10}(\xi) = \boldsymbol{u}_9^*(\xi), \quad \boldsymbol{u}_{11}(\xi) = \xi\boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{a}_{11}, \quad \boldsymbol{u}_{12}(\xi) = \xi\boldsymbol{a}_6 + \boldsymbol{a}_{12}, \text{ где}\\
&\boldsymbol{a}_1 = \{1, i, 0\}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1^*, \quad \boldsymbol{a}_3 = \{0, 0, -\zeta\},\\
&\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_3^*, \quad \boldsymbol{a}_5 = \{0, 0, 1\}, \quad \boldsymbol{a}_6 = \{-\xi_2, \xi_1, 0\},\\
&\boldsymbol{a}_8 = \boldsymbol{a}_7^*, \quad \boldsymbol{a}_{10} = \boldsymbol{a}_9^*,
\end{aligned}
$$

в выражение плотности потенциальной энергии деформации с последующим применением конечно-элементной аппроксимции и интегрированием. Заметим, что первые шесть решений, соответствующих перемещениям ЕЗС как твердого целого, здесь не приводятся, а элементарные решения Сен-Венана $\boldsymbol{u}_7,\ \boldsymbol{u}_8$ — соответствуют задаче изгиба поперечной силой; $\boldsymbol{u}_9,\ \boldsymbol{u}_{10}$ — чистого изгиба; $\boldsymbol{u}_{11}$ – растяжения-сжатия; $\boldsymbol{u}_{12}$ — кручения. Вектор-функции $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i(\xi_1, \xi_2)\ \ (i = 7, 9, 11, 12)$ являются искомыми на сечении, ортогональном оси $(O\xi)$, в соответствующих задачах.

Обобщенный закон Гука в случае анонсированных задач имеет вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mu[(1+\varkappa)\partial_1 u_1 + \varkappa\partial_2 u_2 + \varkappa(\partial + \tau D)u_3] \\
\sigma_{12} &= \mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) \\
\sigma_{22} &= 2\mu[(1+\varkappa)\partial_2 u_2 + \varkappa\partial_1 u_1 + \varkappa(\partial + \tau D)u_3] \\
\sigma_{13} &= \mu(\partial_1 u_3 - \tau u_2 + (\partial + \tau D)u_1) \\
\sigma_{23} &= \mu(\partial_2 u_3 + \tau u_1 + (\partial + \tau D)u_2) \\
\sigma_{33} &= 2\mu[\varkappa\partial_1 u_1 + \varkappa\partial_2 u_2 + (1+\varkappa)(\partial + \tau D)u_3]
\end{aligned} \tag{2}$$

и компоненты тензора малых деформаций Коши представляются выражениями

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2), \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 \\
&\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}[\partial_1 u_3 + (\partial + \tau D)u_1 - \tau u_2] \\
&\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}[\partial_2 u_3 + (\partial + \tau D)u_2 + \tau u_1], \quad \varepsilon_{33} = (\partial + \tau D)u_3
\end{aligned} \tag{3}$$

В приведенных выше соотношениях u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора смещений $\boldsymbol{u}$; μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона, * — комплексное сопряжение, и $\varkappa = \dfrac{\nu}{1-2\nu}$, $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial\xi_\alpha}$, $\partial = \dfrac{\partial}{\partial\xi}$, $D = \xi_2\partial_1 - \xi_1\partial_2$, $\alpha = 1, 2$, $\zeta = \xi_1 + \imath\ \xi_2$. Нетрудно заметить, исходя из вида элементарных решений (1), что наиболее сложным для алгебраических преобразований и дискретизации является задача изгиба поперечной силой, поскольку элементарное решение $\boldsymbol{u}_7$ учитывает построенное конечно-элементное решение $\boldsymbol{a}_9$ задачи чистого изгиба и комплекснозначно.

Для осуществления дискретизации исходного вариационного уравнения, подставляем $\boldsymbol{u}_7$ в выражения (2), (3) для напряжений и деформаций и варьируем плотность потенциальной энергии деформации:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}_7)\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}_7^*) + \delta\sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}_7)\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}_7^*) \tag{4}$$

Будем искать компоненты (мнимую и комплексную части) вектор-функций $\boldsymbol{a}_7$ $(\boldsymbol{a}_9)$, как линейную комбинацию узловых неизвестных $a_{ji}^{k\ell}$, $\ell = 7$ $(\ell = 9$ $)$ и базисных функций $N_k(\xi_1, \xi_2)$ виде:

$$a_{ji}^{\ell}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^{4} N_k(\xi_1, \xi_2) a_{ji}^{k\ell},\ \ j = 1, \ldots, 3;\ \ i = 1, 2;\ \ \ell = 7, 9 \tag{5}$$

(пусть m — индекс суммирования вторых сомножителей (4) в представлении (5)), здесь $N_k(\xi_1,\xi_2) = r_k\dfrac{(\xi_1-\xi_1^{0k})(\xi_2-\xi_2^{0k})}{h_a h_b}$ — базисные функции, $\boldsymbol{r} = \{1,-1,1,-1\}$, $\xi_1^0 = \{h_a,0,0,h_a\}$, $\xi_2^0 = \{h_b,h_b,0,0\}$; h_a, h_b — линейные размеры прямоугольного четырехузлового элемента. Заметим, что в каждом узле шесть неизвестных, а в случае $\ell = 9$ формула (5) представляет конечно-элементное решение задачи чистого изгиба.

Получение элементов локальных матриц, являющихся основой ансамблирования и построения системы линейных алгебраических уравнений всей модели, сводится к функциональному реплицированию «представительного» блока шестого порядка. Элементы такого блока непосредственно используются в расчетной схеме конечно-элементной программы, и с его помощью строится текущая локальная матрица элемента блочного вида.

Так в задачах растяжения-сжатия и кручения элементарные решения являются вещественными и блоки локальных матриц имеют третий порядок (число неизвестных в текущем узле); получение элементов блоков локальной матрицы является весьма трудоемкой процедурой. Несмотря на быстрое развитие и доступность использования пакетов аналитических преобразований *Maple*, *Matlab*, подстановка элементарного решения (5) в (4) не может быть получена с их помощью. Число слагаемых, получаемых в результате такой подстановки равно 688-ми, оказывается велико для получения корректных преобразований.

Чтобы провести преобразования и использовать преимущества MatLab, вводится псевдопеременная y и искомые узловые неизвестные полагаются зависимыми от нее $a_{ij}^{k7}(y)$, при этом a_{ij}^{k9} остаются известными константами, полученными на этапе решения задачи чистого изгиба.

В рамках такого подхода варьирование узловых неизвестных заменяется дифференцированием по y. Упорядочим узловые перемещения и введем обозначение $\boldsymbol{d}$ следующим образом $\boldsymbol{d} = \{d_1(y),\ldots,d_6(y)\} \equiv \{a_{11}^{k7}(y), a_{12}^{k7}(y),\ldots,a_{32}^{k7}(y)\}$. Используем процедуру дифференцирования, реализованную в Matlab, и введем аналог вариации узловых перемещений g_k в виде

$$\{g_1,\ldots\, g_6\} = \{\mathrm{diff}(d_1(y),y),\ldots,\mathrm{diff}(d_6(y),y)\}.$$

Тогда из условия существования экстремума и независимости вариаций коэффициенты при g_k вариационного (энергетического) уравнения равны нулю; эти коэффициенты соответствуют k-й строке представительного блока и являются линейной комбинацией узловых перемещений d_m; дальнейшее дифференцирование этих строк по d_m позволяет получить аналитическое выражение (k,m)–го элемента блока локальной матрицы. Программирование репликации характерного блока при построении локальной матрицы описано в [6]. Рассмотрим пример, $b(1,2)$ элемента блока, полученного в MatLab:

$$\begin{aligned} b(1,2) = {} & -2*tau\wedge 2*xi2*diff(Nk(xi1,xi2),xi1)*Nm(xi1,xi2) \\ & +2*tau\wedge 2*xi1*diff(Nk(xi1,xi2),xi2)*Nm(xi1,xi2) \\ & +2*tau\wedge 2*Nk(xi1,xi2)*xi2*diff(Nm(xi1,xi2),xi1) \\ & -2*tau\wedge 2*Nk(xi1,xi2)*xi1*diff(Nm(xi1,xi2),xi2) \end{aligned} \qquad (6)$$

Код такого вида является входным потоком из символов и знаков, который подлежит семантическому анализу и «переводу» на язык программирования самого конечно-элементного расчета.

Элементы семантического анализа

Пусть S — элемент входного потока, вида (6), условимся называть множество Q — алфавитом исходного языка, содержание которого в рассматриваемом случае определяется вариационным уравнением, с элементами

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ diff(Nk(xi1, xi2), xi2),\ diff(Nm(xi1, xi2), xi2),\ xi1,\ xi1 \wedge 2 \\ 1,\ diff(Nk(xi1, xi2), xi1),\ diff(Nm(xi1, xi2),\ xi1),\ xi2,\ xi2 \wedge 2 \end{array} \right\}$$

Отметим, что алфавит Q распадается на два «подалфавита», соответствующих элементам строк $\boldsymbol{q}_J$, $\bigcup \boldsymbol{q}_J = Q$, $J = 1, 2$. Слова формируются в рамках одного подмножества и определяются только набором букв, без учета их положения. Это обстоятельство являются следствием свойства коммутативности произведения, а также факторизованного $R(\xi_1) * T(\xi_2)$ вида подынтегральных функций при интегрировании по элементу.

Алгоритм определения входного слова в серии слов, соответствующих S, заключается в идентификации букв слова во входном потоке, в соответствии с Q, каждой найденной букве ставится в соответствие признак из I_q

$$I_q = \quad [0000 \quad 0001 \quad 0010 \quad 0100 \quad 01000]$$

и правило перевода букв в слова, т. е. формирование кода слов $C_W(J)$, $J = 1, 2$ в новом словаре. Правило заключается в суммировании кода найденных букв из I_q, при этом такая буква из входного потока исключается и алгоритм повторяется до истощения букв во входном слове.

Особенная ситуация возникает при обнаружении выражений из множества исключений $Q^{exc} = \{Nk(xi1, xi2), Nm(xi1, xi2)\}$, каждый элемент которого содержит по букве обоих алфавитов (это следует из вида функций формы). Таким образом после идентификации элементов данного подмножества признаки слов $C_W(J)$, $J = 1, 2$, соответствующие алфавитам Q_1, Q_2 изменяются на величину 0001 или 0010 для k-го или m-го индекса соответственно.

Заметим, что оставшиеся во входном потоке символы являются коэффициентами и используются в неизменном виде как коэффициенты при словах в пространстве переводов. Так коэффициент первого слагаемого в (6) в результате идентификации всех букв согласно данному алгоритму будет иметь вид $-2 * tau \wedge 2 * xi2$.

Детерминированный конечный автомат. Идентифицированной лексеме входного множества на основе [5] детерминированного конечного автомата (ДКА) или, так называемого словаря, посредством сформированного кода C_W слова переводов (лексемы выходного множества) однозначно определяется лексема W_J множества переводов. Набор всевозможных лексем F выходного множества имеет вид:

$$F = \begin{pmatrix} \text{a} & \text{f1a} & \text{f2a} & \text{f3ma} & \text{f3ka} & \text{f4a} & \text{f5ma} & \text{f5ka} & \text{f6ma} & \text{f00a} \\ \text{b} & \text{f1b} & \text{f2b} & \text{f3mb} & \text{f3kb} & \text{f4b} & \text{f5mb} & \text{f5kb} & \text{f6mb} & \text{f00b} \end{pmatrix}$$

и таблица соответствий двоичных кодов $C_W(J)$ слов W_J выходного пространства:

$J \setminus C_W$	0000	0011	1011	0101	0110	0111	0001	0010	1001	0100
1	a	$f1a$	$f2a$	$f3ma$	$f3ka$	$f4a$	$f5ma$	$f5ka$	$f6ma$	$f00a$
2	b	$f1b$	$f2b$	$f3mb$	$f3kb$	$f4b$	$f5mb$	$f5kb$	$f6mb$	$f00b$

Согласно таблице переходов, выражение $b(1,2)$, например, в пространстве «переводов» примет вид, понятный КЭ программе, написанной в языках *Fortran* или *MatLab*:

$$b(1,2) = -2 * tau \wedge 2 * xi2 * f1b * f5ma + 2 * tau \wedge 2 * xi1 * f1a * f5mb \qquad (7)$$
$$+2 * tau \wedge 2 * f5ka * f4b - 2 * tau \wedge 2 * f5kb * f4a$$

Здесь идентификаторы, рассматриваемые как переводы нашего словаря, являются результатом выполнения процедур интегрирования от конечного числа подынтегральных функций, вид которых приведен в [6].

Выражаю глубокую признательность Ю. А. Устинову за постановку задач, руководство, интерес и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 09-01-00065а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Устинов Ю. А., Курбатова Н. В.* Задачи Сен-Венана для стержней с физической и геометрической анизотропией // Изв. вузов. Сев.-Кавказ.регион. Естеств. науки. Мат. модел. 2001. Спецвыпуск. С. 154–157.

[2] *Гуглева Ю. С., Курбатова Н. В., Чумакова Е. С.* Анализ некоторых характеристик естественно закрученного стержня при изгибе поперечной силой // Тр. V Школа-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в совр. университете» 1–5 июня 2009 г. Ростов-на-Дону. ООО «Терра Принт», 2009 г. С. 34–35.

[3] *Устинов Ю. А., Курбатова Н. В., Чумакова Е. С.* Конечно-элементное моделирование задачи Сен-Венана изгиба ЕЗС поперечной силой // Международная научная конференция по механике «Пятые Поляховские чтения», 3–6 февраля 2009 года, Санкт-Петербург. Россия. С. 192.

[4] *Устинов Ю. А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Наука, 2003. 128 с.

[5] *Фридл Дж.* Регулярные выражения. Изд. Питер. 2001.

[6] *Курбатова Н. В., Романова Н. М.* Конечно-элементное решение задачи изгиба для естественно закрученного стержня // Соврем. пробл. мех. спл. среды: Тр. X Междунар. конф. 5–9 дек. 2006 г. Ростов н/Д, Т.1. ООО «ЦВВР» 2006. С. 172–176

Kurbatova N. V. *The effective scheme of discretization by finite element method*. The scheme discretization of variational equations using lexical analysis was tested on a series of problems of tension-compression, torsion and bending natural twisted rod, and springs with rectangular cross-section.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ НАВЬЕ–СТОКСА С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Левенштам В. Б.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ

В ограниченном цилиндре пространства-времени рассматривается начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных, обобщающей классическое уравнение Навье–Стокса с высокочастотной массовой силой. Правая часть системы (аналог массовой силы) осциллирует во времени с высокой частотой и полиномиально, произвольной степени, зависит от неизвестной (аналог скорости течения). Кроме того, правая часть содержит линейное высокочастотное слагаемое с большой амплитудой. В работе построена предельная задача и обоснован предельный переход.

Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства R^3 с C^2 — гладкой границей $\partial\Omega$, m — целое неотрицательное, n — натуральное, а ν и T — положительные числа. В цилиндре $Q = \bar{\Omega} \times [0, T]$ рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v \;+\; & \nabla P + (v, \nabla)v = \sum_{1\leqslant j\leqslant 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v, x, t, \omega t) + \\ + \;& b(v, x, t, \omega t) + \sqrt{\omega} c(v, x, t, \omega t), \quad \operatorname{div} v = 0, \qquad (1) \\ & v|_{\partial\Omega\times(0,T]} = 0, \qquad (2) \\ & v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \qquad (3) \end{aligned}$$

в которой неизвестными являются вектор-функция $v(x, t)$ и функция $P(x, t)$ со значениями в R^3 и R^1 соответственно[1], ω — большой параметр.

Будем предполагать, что вектор-функции $a_j(v, x, \tau)$, $b(v, x, \tau)$ и $c(v, x, \tau)$ со значениями в R^3 имеют следующую структуру:

$$a_j = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} a_{jk}, \quad b = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} b_k, \quad c = \sum_{0\leqslant k\leqslant 1} c_k, \quad a_{jk}(v, x, t, \tau) = \sum_{|r|\leqslant n} a_{jk}^{(r)}(v, x, t) e^{ir\tau},$$

$$b_k(v, x, t, \tau) = \sum_{|r|\leqslant n} b_k^{(r)}(v, x, t) e^{ir\tau}, \quad c_k(v, x, t, \tau) = \sum_{0<|r|\leqslant n} c_k^{(r)}(v, x, t) e^{ir\tau},$$

где $a_{jk}^{(r)}(v, x, t)$, $b_k^{(r)}(v, x, t)$ и $c_k^{(r)}(v, x, t)$ являются однородными формами степени k относительно v. Таким образом, $c(v, x, t, \tau) = c_0(x, t, \tau) + c_1(x, t, \tau)v$, где c_0 и c_1 — вектор и матрица, а компоненты $a_{jk\ell}^{(r)}$ и $b_{k\ell}^{(r)}$ вектор-функций $a_{jk}^{(r)}$ и $b_k^{(r)}$ имеют вид:

$$a_{jk\ell}^{(r)}(v, x, t) = \sum_{|s|=k} \overset{s}{a}{}_{j\ell}^{(r)}(x, t) v_1^{s_1} v_2^{s_2} v_3^{s_3}, \quad b_{k\ell}^{(r)}(v, x, t) = \sum_{|s|=k} \overset{s}{b}{}_{\ell}^{(r)}(x, t) v_1^{s_1} v_2^{s_2} v_3^{s_3},$$

[1]Векторы пространства R^3 будем считать вектор-столбцами.

причем $c_0 = \bar{c}_0$, $c_1 = \bar{c}_1$, $\overset{s}{a}{}^{(r)}_{j\ell} = \overline{a^{s(-r)}_{j\ell}}$, $\overset{s}{b}{}^{(r)}_{\ell} = \overline{b^{s(-r)}_{\ell}}$. Здесь $s = (s_1, s_2, s_3)$, $s_j = 0, 1, \ldots, k$, $|s| = s_1 + s_2 + s_3$, v_j $(j = 1, 2, 3)$ — компоненты вектора v, а чертой обозначена операция комплексного сопряжения. Будем рассматривать данные $a^{s(r)}_{j\ell}(.,t)$, $b^{s(r)}_{\ell}(.,t)$, $c^{(r)}_0(.,t)$, $c^{(r)}_1(.,t)$ и $v_0(.,t)$ как вектор-функции от t со значениями в соответствующих банаховых пространствах и предполагать, что $a^{s(r)}_{j\ell}$, $b^{s(r)}_{\ell} \in C([0,T], L_\infty(\Omega))$, $c_0, c_1, \frac{\partial c_0}{\partial t}, \frac{\partial c_1}{\partial t} \in C([0,T], W^2_\infty(\Omega))$, $v_0 \in S_{p_0}$, $p_0 > \max(3(m-1), 3)$. Здесь $S_{p_0} \equiv S_{p_0}(\Omega)$ — известное в математической гидродинамике пространство соленоидальных векторов, являющееся подпространством $S_{p_0}(\Omega)$.

Введем определения решения и обобщенного решения начально-краевой задачи (1)–(3).

Решением задачи (1)–(3) назовем определенную в цилиндре Q трехмерную вещественную вектор-функцию $v(x,t)$, для которой найдется определенная в том же цилиндре скалярная вещественная функция $P(x,t)$, такая что при некотором $q > 1$ будут выполнены следующие условия:

1) вектор-функции $\hat{v}(t) = v(\cdot, t)$ и $\hat{P}(t) = P(\cdot, t)$ являются непрерывными, как отображения: $\hat{v} : [0,T] \to S_q$, $\hat{v} : (0,T] \to \overset{\circ}{S}{}^2_q$, $\hat{P} : (0,T] \to W^1_q(\Omega)$, и равенство (3) выполнено в S_q;

2) отображение $\hat{v} : (0,T) \to S_q$ непрерывно дифференцируемо и первое равенство (1) справедливо при всех $t \in (0,T)$ в S_q;

3) второе равенство (1) при $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T]$ и равенство (2) выполняются в обычном классическом смысле.

Прежде чем сформулировать определение обобщенного решения задачи (1)–(3) опишем известную процедуру (см., например, [1]) перехода от задачи (1)–(3) к соответствующему интегральному уравнению. Пусть $v(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), $q > 3$. Подействовав на уравнение (1) известным в гидродинамике (см., например, [2]) пректором Π и обозначив $v(t) = \Pi v(\cdot, t) = v(\cdot, t), v(0) = v(\cdot, 0) = v_0$ перейдем от начально-краевой задачи (1)–(3) к задаче Коши в S_{p_0} для абстрактного параболического уравнения:

$$\frac{dv}{dt} + A_0 v = \Pi\left[-(v, \nabla)v + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v, \cdot, t, \omega t) + b(v, \cdot, t, \omega t) + \sqrt{\omega} c(v, \cdot, t, \omega t)\right] \equiv$$
$$\equiv \Pi\psi_1(v,t) \equiv \psi(v,t), \quad t \in (0,T],$$
$$v(0) = v_0.$$

Из результатов [1, 2] теперь следует, что всякое решение $v(\cdot, t)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = e^{-tA_0} v_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} \psi\,[v(\tau), \tau, \omega t]\, d\tau \equiv\ [N_\omega(v)](t).$$

Обобщенным решением задачи (1)–(3) на участке $t \in [0,T]$ называется трехмерная вещественная вектор-функция $v(t) = v(\cdot, t) \in C([0,T], S_{p_0})$, удовлетворяющая равенству

$$v - N_\omega(v) = 0.$$

Наряду с возмущенной задачей (1)–(3) в цилиндре $Q = \bar{\Omega} \times [0,T]$ рассмотрим следующую задачу, которую естественно называть усредненной

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u - \nabla Q - (u,\nabla)u &= \sum_{1\leqslant j\leqslant 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j^{(0)}(u,x,t) + b^{(0)}(u,x,t) + \\
&\quad + \sum_{0<|r|\leqslant n} \frac{i}{r} c_1^{(r)}(x,t)\Pi\big[c_0^{(-r)}(x,t) + c_1^{(-r)}(x,t)u\big], \\
\operatorname{div} u &= 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\
u|_{\partial\Omega\times[0,T]} &= 0, \\
u(x,0) &= v_0(x), \quad x \in \bar{\Omega},
\end{aligned}$$

где $a_j^{(r)} = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant m} a_{jk}^{(r)}$, $b^{(r)} = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant m} b_k^{(r)}$. Будем предполагать, что она имеет обобщенное решение $u_0(x,t)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены указанные выше условия. Тогда существует положительное число ω_0, при котором справедливы следующие утверждения.*
1. Возмущенная задача (1)–(3) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное обобщенное решение $v_\omega(x,t)$, и при этом справедливо предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} \|v_\omega - u_0\|_{C([0,T],S_{p_0})} = 0.$$

2. Если дополнительно выполнены условия: при некотором $\alpha \in (0,1]$, $v_0 \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\overset{s}{a}{}_{ikl}^{(r)} \in C([0,T],C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}))$, $\overset{s}{b}{}_{kj}^{(r)}, c_0, c_1 \in C([0,T],C^\alpha(\bar{\Omega}))$, то вектор-функция $v_\omega(x,t)$ является решением задачи (1)–(3).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.

[2] *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической устойчивости. Ростов н/Д.: Изд. Ростовского университета, 1984. 190 с.

Levenshtam V. B. *Passage to the limit in extended Navier–Stokes equation with large high-frequency terms*. We consider in boundid cylinder of space-time a sistem of differential equations with partial derivatives who extendes classical Navier–Stokes equation. A right part this sistem (analog of mass forces) oscillate from time with large frequency and it polinomial depend on unknown (analog flowes speed). Moteover a right part contain linear high-frequency term with large amplitude. In paper limit problem construct and passage to the limit proof.

АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИНЫ С НАЧАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

Локшина Л. Я.*, Костандов Ю. А.*, Васильев Л. М.**

* *Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь*

** *Институт геотехнической механики им. Н. С. Полякова НАН Украины, Днепропетровск*

Выполнен анализ напряженно-деформированного состояния пластины, ослабленной произвольно ориентированной трещиной, при ее одноосном сжатии. Установлены зависимости предельного сжимающего напряжения, направления развития начальной трещины и ориентации наиболее опасной трещины от коэффициента внутреннего трения, ориентации начальной трещины и условий контакта ее берегов.

Во многих работах о разрушении материалов считается, что после образования большого числа малых трещин происходит преимущественное развитие лишь некоторых наиболее опасных трещин, которые легко инициируемы при данных условиях. Такой характер разрушения является характерным для горных пород, обладающих естественной трещиноватостью и блочной структурой, образованной системами различно ориентированных трещин. За счет этого их разрушение происходит, как правило, по отдельным плоскостям ослабления. В связи с этим возникают задачи определения параметров предельного состояния горных пород, ослабленных трещинами, и выявления наиболее опасных трещин.

В настоящей работе исследуется задача о предельном состоянии пластины с макроскопической трещиной в случае не совпадения плоскости трещины с плоскостью симметрии внешних напряжений. Рассмотрим бесконечную пластину с прямолинейной трещиной длиной $2l$ полагая, что в бесконечно удаленных точках пластины к ней приложена одноосная сжимающая нагрузка p под произвольным углом α к плоскости трещины, как показано на рис. 1. Предположим, что материал пластины подчиняется закону Гука вплоть до момента разрушения. Определим предельное значение напряжения $p = p^*$, при котором трещина теряет устойчивость.

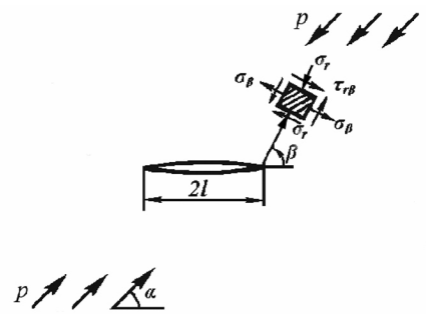


Рис. 1. Трещина в бесконечной пластине при одноосном сжатии

Будем считать, что начальное распространение трещины происходит в плоскости, для которой эффективные касательные напряжения τ_{ef} имеют максимальные значения.

Тогда на основании этой гипотезы для определения предельных значений внешних напряжений можно записать:

$$\lim_{r\to 0}\left\{\sqrt{r}\tau^*_{ef}\left(r,\beta^*\right)\right\} = \frac{L_c}{\pi}, \tag{1}$$

где $\tau^*_{ef}\left(r,\beta^*\right)$ — эффективные касательные напряжения при $p=p^*$, L_c — модуль сцепления при сдвиге, β^* — угол, определяющий начальное направление распространения трещины [1].

Под понятием эффективного касательного напряжения τ_{ef} понимается активное касательное напряжение $\tau_{r\beta}$ за вычетом фрикционной составляющей [2]. В полярных координатах эффективные касательные напряжения, согласно закону Кулона, записываются в виде

$$\tau_{ef} = \tau_{r\beta} - \mu\sigma_\beta, \tag{2}$$

где μ — коэффициент внутреннего трения материала.

Согласно линейной механике разрушения напряжения в вершине трещины определяются следующими формулами [3]:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_\beta = \frac{1}{4\sqrt{2r}}\left\{k_1\left(3\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{3}{2}\beta\right)-3k_2\left(\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{3}{2}\beta\right)\right\}+0\left(1\right),\\ \tau_{r\beta} = \frac{1}{4\sqrt{2r}}\left\{k_1\left(\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{3}{2}\beta\right)+k_2\left(\cos\frac{\beta}{2}+3\cos\frac{3}{2}\beta\right)\right\}+0\left(1\right),\end{array}\right\},$$

где $\sigma_\beta, \tau_{r\beta}$ — нормальные и касательные напряжения в полярных координатах r и β; k_1 и k_2 — коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины; $0\left(1\right)$ — ограниченная часть компоненты тензора напряжений при $r\to 0$.

В случае одноосного сжатия $k_1=0$, а $k_2 = p\sqrt{l}\left(\sin\alpha\cos\alpha - f\sin^2\alpha\right)$. Здесь f — коэффициент трения скольжения, которое может возникнуть между берегами трещины при их соприкосновении и проскальзывании друг относительно друга. С учетом этого выражение (2) запишем в виде

$$\tau_{ef} = \frac{1}{4\sqrt{2r}}k_2\left(\cos\frac{\beta}{2}+3\cos\frac{3}{2}\beta\right)+\mu\frac{1}{4\sqrt{2r}}3k_2\left(\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{3}{2}\beta\right). \tag{3}$$

Из выражений (1) и (3) получим

$$\frac{k_2}{4\sqrt{2r}}\left\{\left(\cos\frac{\beta^*}{2}+3\cos\frac{3}{2}\beta^*\right)+3\mu\left(\sin\frac{\beta^*}{2}+\sin\frac{3}{2}\beta^*\right)\right\} = \frac{L_c}{\pi}. \tag{4}$$

Угол $\beta=\beta^*$, определяющий начальное направление распространения трещины, находим из условия экстремума (максимума) функции $\tau_{ef}\left(r,\beta\right)$ по β

$$\lim_{r\to 0}\left\{\sqrt{r}\frac{\partial\tau_{ef}\left(r,\beta\right)}{\partial\beta}\right\}_{\beta=\beta^*} = 0,$$

что приводит к уравнению

$$2\ \mathrm{tg}^3\frac{\beta^*}{2} - 6\mu\ \mathrm{tg}^2\frac{\beta^*}{2} - 7\,\mathrm{tg}\frac{\beta^*}{2} + 3\mu = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (5) следует, что величина β^* зависит только от коэффициента внутреннего трения материала и не зависит от приложенной нагрузки.

Соответствующий физическому смыслу корень уравнения (5) имеет вид

$$\beta^* = 2\operatorname{arctg}\left[R\left(-\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right)+\mu\right], \tag{6}$$

где $R=\sqrt{\mu^2+1,17}$; $\varphi=\arccos\ \frac{\mu\left(\mu^2+1\right)}{(\mu^2+1,17)^{3/2}}$.

Теперь из уравнения (4) находим выражение для предельного напряжения

$$p^* = \frac{4\sqrt{2}\ L_c}{\pi\sqrt{l}\left(\sin\alpha\ \cos\alpha - f\sin^2\alpha\right)\ \left(c_1+3\mu\ c_2\right)}, \tag{7}$$

где $c_1=\cos\frac{\beta^*}{2}+3\cos\frac{3}{2}\beta^*$ и $c_2=\sin\frac{\beta^*}{2}+\sin\frac{3}{2}\beta^*$.

Таким образом, зная коэффициент внутреннего трения материала μ и угол ориентации трещины α, по формулам (6) и (7) можно найти значения угла начального распространения трещины β^* и величину предельного напряжения p^* для каждой конкретной задачи.

Из выражения (7) следует, что с ростом μ значение p^* уменьшается. Следовательно, чем больше коэффициент внутреннего трения μ и меньше модуль сцепления при сдвиге L_c, тем чувствительней материал к наличию в нем трещин, поскольку разрушение в нем начинается при меньших значениях предельного напряжения p^*.

Для решения практических задач часто бывает необходимо знать ориентацию наиболее опасной трещины, т. е. трещины, которая начнет развиваться при наименьшей нагрузке. Угол наклона α_0 такой трещины находится из условий экстремума для предельного напряжения p^*: $\frac{\partial p^*}{\partial\alpha}=0$, $\frac{\partial^2 p^*}{\partial\alpha^2}<0$. Эти условия приводят к уравнению

$$\cos 2\alpha_0 - f\sin 2\alpha_0 = 0, \tag{8}$$

откуда

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{f}. \tag{9}$$

В случае полного контакта между берегами трещины (слипание), т. е. при $f=\mu$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\mu}.$$

Учитывая, что $\mu=\operatorname{tg}\rho$, где ρ — угол внутреннего трения, получаем:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}. \tag{10}$$

Если не учитывается внутреннее трение материала, т. е. $\mu=0$, а значит и $\rho=0$, то, как следует из выражения (10), самая опасная трещина в материале оказывается ориентированной под углом $\alpha_0=\pi/4$, что соответствует теории прочности по максимальным касательным напряжениям.

В случае отсутствия взаимодействия между берегами трещины, т. е. при $f = 0$, из выражения (8) следует, что самая опасная трещина в материале будет также ориентирована под углом $\alpha_0 = \pi/4$.

Введем безразмерную величину предельного напряжения p^*:

$$p_m^* = \frac{\pi\sqrt{l}}{4\sqrt{2}}\frac{p^*}{L_c} = \frac{1}{\left(\sin\alpha\ \cos\alpha - f\sin^2\alpha\right)\left(c_1 + 3\mu c_2\right)} \tag{11}$$

Графики зависимостей величины p_m^* от коэффициента внутреннего трения μ и угла ориентации трещины α при $f = 0$ приведены на рис. 2a и рис. 2b соответственно. На рис. 2a графики построены для углов $\alpha \leqslant \pi/4$, поскольку при $f = 0$ выражение (11) симметрично относительно $\alpha = \pi/4$.

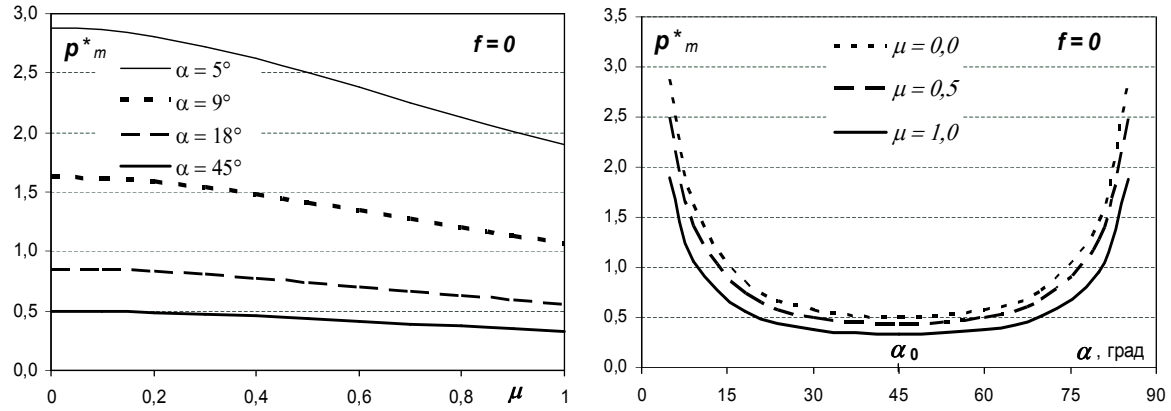


Рис. 2. Зависимость предельного напряжения p_m^* от коэффициента внутреннего трения μ и угла ориентации трещины α при $f = 0$

Рис. 2 иллюстрирует сделанные выше выводы о том, что при отсутствии взаимодействия между берегами трещины наиболее опасная трещина ориентирована под углом $\alpha_0 = \pi/4$ и для любого угла α увеличение коэффициента внутреннего трения μ при неизменном значении модуля сцепления при сдвиге L_c приводит к снижению предельного напряжения p_m^* от значения $(p_m^*)_{\max}$ при $\mu = 0$ до значения $(p_m^*)_{\min}$ при $\mu = 1$.

Отметим, что симметричность кривых, представленных на рис. 2б, относительно $\alpha_0 = \pi/4$ обусловлена отсутствием взаимодействия между берегами трещины.

На рис. 2 приведена зависимость предельного напряжения p_m^* от угла приложения нагрузки α при наличии взаимодействия между берегами, когда коэффициент трения скольжения $f = 0,4$ и коэффициент внутреннего трения $\mu = 0,5$. Из сравнения рис. 3 и рис. 2б можно сделать вывод об уменьшении значения угла α_0, определяющего ориентацию в материале наиболее опасной трещины, с увеличением величины f. Так для зависимости, представленной на рис. 2, согласно (7), $\alpha_0 = 34°$.

Из рис.3 видно, что $p_m^* \to \infty$ при увеличении угла α до некоторого его значения α_k. Угол α_k соответствует обращению в ноль знаменателя в выражении (7)

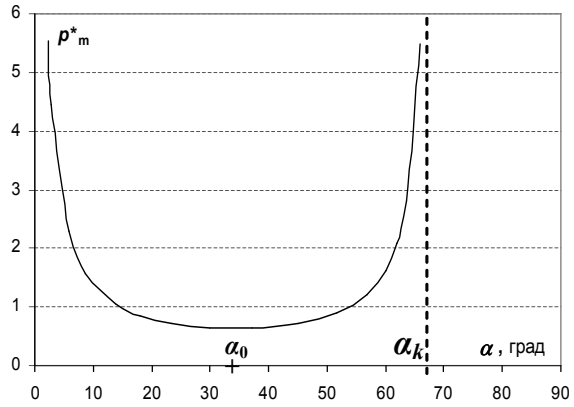


Рис. 3. Зависимость предельного напряжения p_m^* от угла ориентации трещины α в случае взаимодействия между берегами трещины при $f = 0,4$ и $\mu = 0,5$

из-за равенства нулю разности функций, зависящих от угла α. Т. е., угол α_k определяется из условия $\left(\sin\alpha_k \cos\alpha_k - f\sin^2\alpha_k\right) = 0$, откуда:

$$\alpha_k = arctg\frac{1}{f}. \tag{12}$$

Наличие критического угла α_k означает, что при ориентации трещины в пластине под углом $\alpha > \alpha_k$ пластина реагирует на эту трещину так же, как и на трещину, ориентированную под углом α_k.

Из сравнения выражений (12) и (9) следует: $\alpha_k = 2\alpha_0$. Поэтому для случая, приведенного на рис. 3, $\alpha_k = 68°$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Васильев Л. М., Кононыхина А. В., Бычков О. Н., Родин А. В.* Предельные кривые разрушения трещиноватых горных пород при плоской деформации // Интенсификация процессов разрушения горных пород: сб. науч. тр. / ИГТМ АН Украинской ССР. К.: Наук. думка, 1986. С. 48–528.

[2] *Локшина Л. Я., Костандов Ю. А., Васильев Д. Л.* Расчет предела прочности хрупких материалов с учетом внутреннего трения // Геотехническая механика. Межвед. сб. научн. трудов. Днепропетровск. 2009. № 82. С. 199–206.

[3] *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1968. 246 с.

Lokshyna L. Ya., Kostandov Yu. A., Vasilyev L. M. *The analysis of the limiting condition of the plate with the initial crack at the monoaxial compression.* The analysis stress-strain state of the plate loosened by the arbitrarily oriented crack at its monoaxial compression is carried aut. Dependences of the limiting compressed tension, a direction of an initial crack development and orientation of the most dangerous crack from an internal friction factor, orientation of an initial crack and its shores conditions of contact are established.

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ В СЛОЕ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

Лукащик Е. П., Иванисова О. В., Колесникова Ю. Н.
Кубанский государственный университет, Краснодар

В данной работе приводится постановка связанной задачи гидроупругости тонкого профиля в слое весомой жидкости, формулируется подход к ее решению на основе преобразования Фурье. Проведено исследование гидродинамической устойчивости профиля в зависимости от параметров течения и упругих свойств профиля.

Прогресс в области создания высокопрочных мягких материалов позволил расширить сферы применения таких материалов в технике, что в свою очередь обуславливает необходимость углубленного исследования вопросов аэроупругости упруго-деформируемых несущих поверхностей.

Для упругих несущих поверхностей геометрическая форма поверхности заранее не известна и определяется в зависимости от возникающих аэродинамических нагрузок, в то время как сами аэродинамические нагрузки существенно зависят от упругих перемещений несущей поверхности.

Задача определения перепада давления (гидродинамическая) и задача определения упругих перемещений (упругая) должны решаться совместно.

Авторами работ [1–4] предлагались различные подходы к решению задач аэроупругости. Однако рассмотрение дополнительных параметров при движении гибких крыльев (как, например, ограниченность потока, весомость жидкости) вновь требует анализа качества процесса влияния упругих деформаций на аэродинамические характеристики.

В настоящей работе проводится исследование гидродинамического поведения тонкого упругого крыла бесконечного размаха, движущегося в слое тяжелой жидкости.

Постановка задачи

Рассмотрим движение тонкого упругого крыла бесконечного размаха под свободной поверхностью тяжелой жидкости на некотором отстоянии от твердого дна. Давление и скорость невозмущенного потока на бесконечности от профиля P_∞ и V_∞, соответственно. Длина полухорды профиля a.

В уравнении свободной поверхности $y = h_1+\eta(x)$ и в уравнении $y = f_0(x)+f(x)$, определяющем форму тонкого упругого профиля, отдельно выделим деформационные составляющие ($\eta(x)$ – изменения свободной поверхности относительно невозмущенного уровня, $f(x)$ — упругие смещения относительно заданной первоначальной формы границы профиля $f_0(x)$).

Предположения о тонкости профиля и малости деформаций позволяют линеаризовать постановку задачи, снести соответствующие граничные условия на невозмущенный уровень жидкости и на проекцию профиля. Математическая модель описанного движения представляет собой связанную задачу гидроупругости тонкого упруго-деформируемого профиля.

Гидродинамическая часть задачи

Потенциал возмущенного течения $\varphi(x, y)$ внутри слоя, кроме области профиля $G = \{y = 0,\ x \in [-a,\ +a]\}$, является гармонической функцией

$$\Delta\varphi = 0, \quad -h_2 < y < h_1. \tag{1}$$

На границах потока удовлетворяет следующим условиям:

Условие на свободной поверхности

$$\varphi''_{xx} + \frac{1}{Fr^2}\varphi'_y = 0 \quad \text{при} \quad y = h_1, \tag{2}$$

где $Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{g}}$ — число Фруда.

Условие плавного обтекания тонкого крыла

$$\varphi'_y = v_y(x) = V_\infty\left(f'_{0x} + f'_x\right) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant a,\ y = 0. \tag{3}$$

Условие непротекания твердой границы

$$\varphi'_y = 0, \quad \forall x, y = -h_2. \tag{4}$$

А также *условиям на бесконечности*, обеспечивающим отсутствие возмущений по мере удаления от профиля.

На основе интеграла Бернулли, связывающего давление с потенциалом, имеем следующее выражение для распределения давления вдоль профиля:

$$p_- - p_+ = \rho V_\infty \gamma(x); \qquad \gamma(x) = \left(\frac{\partial\varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_-}{\partial x}\right)\Big|_{y=0}, \quad |x| \leqslant a, \tag{5}$$

где $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$ — потенциал скорости выше и ниже уровня $y = 0$ соответственно.

Применяя преобразование Фурье по переменной x, сведем задачу (1)–(4) к уравнению

$$G(\alpha)K(\alpha) = V(\alpha), \tag{6}$$

где $G(\alpha)$, $V(\alpha)$ — образы по Фурье функций $\gamma(x)$ и $v_y(x)$, соответственно,

$$K(\alpha) = \frac{1}{i}\frac{\operatorname{sh}(\alpha h_2)\left(2\alpha Fr^2 \operatorname{ch}(\alpha h_1) - \operatorname{sh}(\alpha h_1)\right)}{2\alpha Fr^2 \operatorname{ch}\left(\alpha\left(h_1 + h_2\right)\right) - \operatorname{sh}\left(\alpha\left(h_1 + h_2\right)\right)}.$$

Применим обратное преобразование Фурье к уравнению (6), используя теорему о свертке функций:

$$\int_{-a}^{a} \gamma(\xi)k(x - \xi)d\xi = V_\infty\left(f'_{0x} + f'_x\right),\ k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{7}$$

При определении функции $k(x)$ для обеспечения условий на бесконечности при $x > 0$ контур интегрирования замыкаем на нижнюю полуплоскость, при $x < 0$ — на верхнюю полуплоскость (α). Применяя теорию вычетов, получим для $k(x)$ аналитические выражения.

Упругая часть задачи

В качестве уравнения связи формы профиля с распределением давления вдоль его границ возьмем уравнение равновесия для случая цилиндрического изгиба пластины при наличии усилий в срединной плоскости [4].

$$D\frac{d^4 f}{dx^4} - T\frac{d^2 f}{dx^2} = \rho V_\infty \gamma(x), \tag{8}$$

где D — изгибная жесткость, T — усилие в срединной плоскости, $T > 0$ в случае растягивающих усилий, $T < 0$ — для сжимающих усилий.

Уравнение (8) должно быть дополнено краевыми условиями закрепления кромок профиля. Так закрепление концов профиля в шарнире приводит к исчезновению смещений и момента сил на концах, что описывается соотношениями

$$f(\pm a) = f''_{xx}(\pm a) = 0. \tag{9}$$

Решение упругой задачи (8)–(9) выразим через произвольное распределение давления по профилю, используя функцию Грина $G(x,s)$. Получим следующие соотношения

для мягкого (мембранного) профиля $(D = 0, T \neq 0)$

$$f(x) = \mu \int_{-1}^{1} \gamma(s) G_1(x,s)\, ds = \mu \left[\frac{(x+1)}{2} \int_{-1}^{1} \gamma(s)(1-s)\, ds - \int_{-1}^{x} \gamma(s)(x-s)\, ds \right];$$

для упругого профиля $(D \neq 0, T = 0)$

$$f(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \gamma(s) G_2(x,s)\, ds = \tfrac{\lambda}{6} \int_{-1}^{x} \gamma(s)(x-s)^3\, ds -$$
$$-\tfrac{\lambda}{12}(x+1) \int_{-1}^{1} \gamma(s)(1-s)\left[(x+1)^2 + (1-s)^2 - 4\right] ds.$$

Здесь $\gamma(x)$ — безразмерный перепад давления, $\lambda = \frac{\rho V_\infty^2 a^3}{D}$, $\mu = \frac{\rho V_\infty^2 a}{T}$, $\beta^2 = \frac{\lambda}{\mu}$.

Методика решения

Выражение для упругих перемещений $f(x)$ подставим в уравнение (7), которое в безразмерном виде примет вид

$$\int_{-1}^{1} \gamma(\xi) \left[k(x-\xi) d\xi - \beta \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) \right] d\xi = \frac{df_0}{dx}, \tag{10}$$

$\beta = -\mu$ для мембранного профиля, $\beta = \lambda$ для упругого профиля.

Заметим, что $k(x)$ является сингулярным ядром типа Коши, так как $K(\alpha) \underset{|\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2i} sgn(\alpha)$.

Для численного решения уравнения (10) используем метод дискретных вихрей, который успешно применяется в гидродинамике для решения сингулярных уравнений данного типа [2]. Для обеспечения условия Жуковского–Чаплыгина

о конечности давления в выходной кромке профиля выберем следующую схему расположения дискретных вихрей и точек коллокации:

$$\xi_j = -1 + \frac{2}{N}\left(j - \frac{3}{4}\right);\ x_i = -1 + \frac{2}{N}\left(i - \frac{1}{4}\right);\ i, j = \overline{1..N}.$$

Соответствующая уравнению (10) система линейных алгебраических уравнений в матричном виде имеет вид

$$\mathbf{A}\gamma - \beta\mathbf{B}\gamma = \mathbf{C},$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы порядка N, $\mathbf{C}$ — вектор правой части, γ — вектор неизвестных γ_i.

На основе численного решения получены значения гидродинамических характеристик и формы упругого профиля.

Анализ результатов

Упругие деформации изменяют скос потока или эффективный угол атаки крыла, что приводит к перераспределению нагрузки вдоль хорды и сказывается на суммарных аэродинамических характеристиках. На рис. 1А и 1Б представлены результаты расчетов характеристик для мембранного профиля, на рис. 2А и 2Б — для гибкого профиля. При переходе параметра гибкости β через некоторые критические значения подъемная сила (рис. 1А) и кривизна профиля (рис. 2А) скачком меняют знак. Значения β, при которых происходит потеря статической устойчивости, соответствуют собственным значениям β_k матрицы $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. На рис. 2Б показано, как влияет весомость жидкости на устойчивость профиля. Полученные закономерности согласуются с результатами работы [5] для безграничной жидкости.

Границы потока влияют на устойчивость профиля, так представленные на рис. 1Б зависимости показывают, что вблизи свободной поверхности весомой жидкости скорость потери статической устойчивости возрастает, т. е. профиль становится более устойчивым.

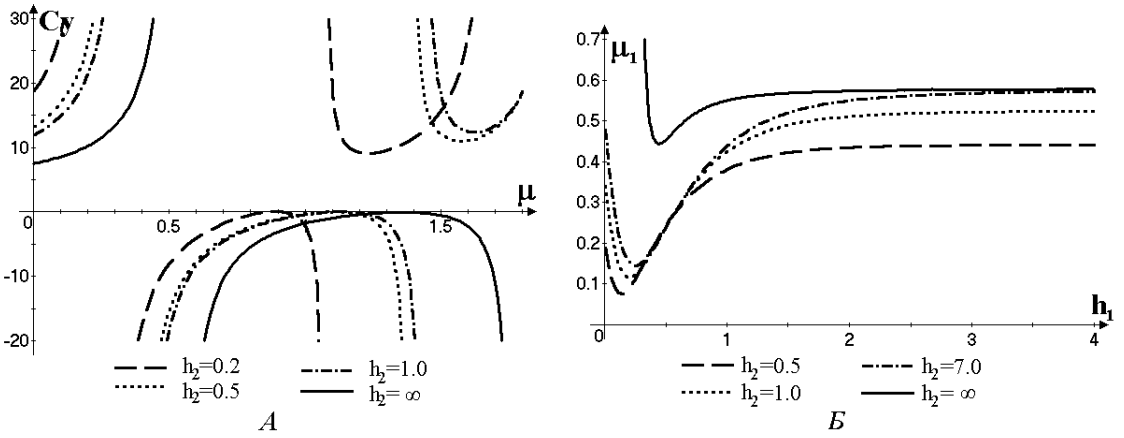


Рис. 1. А — зависимость коэффициента подъемной силы от натяжения ($h_1 = 0.8$, $Fr = 0.5$); Б — зависимость критического значения натяжения от числа Фруда ($Fr = 0.5$)

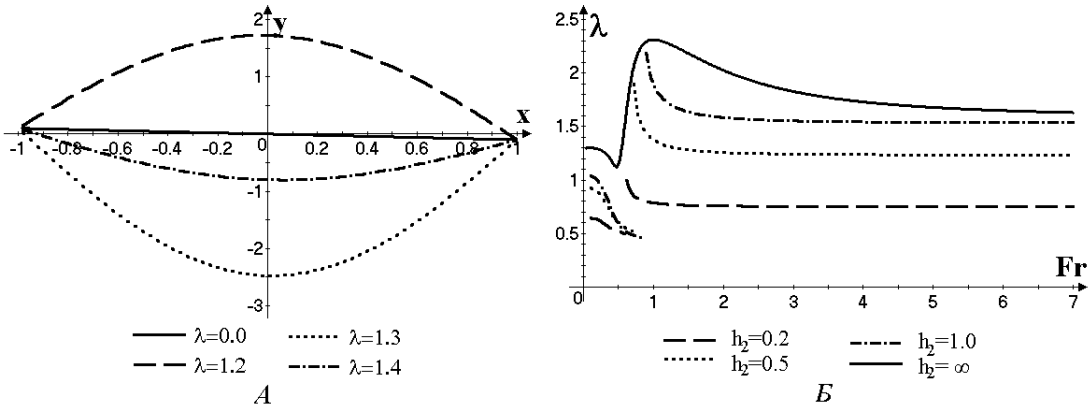


Рис. 2. А — распределение упругих перемещений по длине профиля ($h_1 = 0.5$, $h_2 = 0.5$, $Fr = 2$); Б — зависимость критического значения натяжения от числа Фруда ($h_1 = 0.5$)

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гур-Мильнер С. И.* О форме упругого равновесия и устойчивости пластины в плоскопараллельном потоке несжимаемой жидкости // Труды ЛКИ. 1969. Вып. 65.

[2] *Белоцерковский С. М., Вольмир Ф. С., Ништ М. И., Пономарев А. Т.* Некоторые задачи аэроупругости при отрывном обтекании // Изв.АН СССР. Механика твердого тела. 1975. № 5. С. 150–157.

[3] *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.

[4] *Ефремов И. И., Марко М. Э., Семененко В. Н.* Некоторые задачи теории гибких и проницаемых несущих поверхностей // Тезисы докладов Всесоюзной научно-техн. конф. по теории корабля. Л.: Судостроение, 1977. С. 117–120.

[5] *Ефремов И. И., Макасеев М. В.* Обтекание тонкого упругого профиля под свободной поверхностью весомой жидкости // Научные основы современных технологий орошения: Сборник научных трудов. Краснодар. КГАУ. 1992. С. 67–76.

Lukaschik E. P., Ivanisova O. V., Kolesnikova Yu. N. *Title of the paper*. In this work the statement of the connected problem of thin profile hydroelasticity into a layer of heavy liquid is given and the approach to its decision on the basis of Fourier transformation is formulated. The study of hydrodynamical stability of a profile depending on parameters of a flow and elastic properties of the profile has been carried out.

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ РАСТУЩЕГО УПРУГОГО ШАРА

Лычев С. А.
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Рассматривается задача о центральносимметричном деформировании растущего упругого шара. Деформации полагаются конечными, а материал — несжимаемым. Закон состояния формулируется относительно полного тензора дисторсии, который может быть представлен как композиция тензора начальной дисторсии и градиента деформаций, реализуемых в составе растущего тела. Поле начальной дисторсии индуцирует связность на материальном многообразии, которое в результате становится плоским пространством аффинной связности с нетривиальным кручением.

Рассматривается центральносимметричноя деформация растущего упругого шара. Деформации считаем конечными. Материальное многообразие $\mathfrak{M}$ может быть представлено в $\mathbb{R}^3$ открытым шаром (с выколотым центром) радиуса $\mathfrak{R}$, который допускает естественное расслоение на концентрические сферы $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^3}$. Каждая сфера — это слой расслоения, а база расслоения представляет собой открытый интервал $\mathfrak{B} = (0, \mathfrak{R})$ [1]. При этом $\mathfrak{X}^3 \in \mathfrak{B}$ — координата базы, а $\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2$ — координаты слоя, в качестве которых могут быть выбраны сферические углы географической системы координат. Считаем, что материал несжимаем, что позволяет воспользоваться универсальными решениями Ривлина–Эриксена для описания деформирования каждого слоя [2].

Пусть $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\theta$ — физический (ортонормированный) базис сферической системы координат. Полагаем, что каждый слои имеет натуральную конфигурацию и она представляет собой сферу. Объединение таких сфер не является конфигурацией какого-либо тела, поскольку не представляет связанного множества. После надлежащего деформирования эти сферы в объединении образуют шар. Таким образом может быть получена конфигурация, не свободная от напряжений. Соответствующее поле дисторсии имеет следующий вид

$$\boldsymbol{K} = \frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r + \frac{r}{(r^3-\alpha)^{1/3}}\,(\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta)\,. \tag{1}$$

Здесь $r = r(\mathfrak{X}^3)$ — пространственная (радиальная) координата, $\alpha = \alpha(\mathfrak{X}^3)$ — параметр дисторсии, $\mathfrak{X}^3$ — материальная метка слоя. Поле $\boldsymbol{K}$ можно интерпретировать как градиент деформации, определяемой отображением $r = \sqrt[3]{r_0^3 + \alpha}$ и вычисляемой для инфинитезимального сферического слоя $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^3}$, который обладает естественной конфигурацией при $r = r_0$.

Выберем одну из таких конфигураций в качестве отсчетной и обозначим ее символом $\varkappa_R$. Деформация отсчетной конфигурации в текущую $\varkappa$ определяется изохорическим диффеоморфизмом $\varkappa_R \to \varkappa$. Это отображение для условий несжимаемости и центральной симметрии принадлежит семейству $R = \sqrt[3]{r^3 + A}$, где A — константа. Градиент такой трансформации определяется соотношением:

$$\boldsymbol{F} = \frac{r^2}{(r^3+A)^{2/3}}\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r + \frac{(r^3+A)^{1/3}}{r}\,(\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta)\,.$$

Полный градиент трансформации каждого слоя $\boldsymbol{H}$ из его естественного состояния может быть найден как композиция дисторсии $\boldsymbol{K}$ и трансформации $\boldsymbol{F}$, т. е.

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{(r^3+A)^{2/3}}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_r + \frac{(r^3+A)^{1/3}}{(r^3-\alpha)^{1/3}}\left(\boldsymbol{e}_\varphi\otimes\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta\right).$$

Соответствующая мера деформаций Коши-Грина имеет вид

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^* = \frac{(r^3-\alpha)^{4/3}}{(r^3+A)^{4/3}}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_r + \frac{(r^3+A)^{2/3}}{(r^3-\alpha)^{2/3}}\left(\boldsymbol{e}_\varphi\otimes\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta\right).$$

Инварианты мер деформации могут быть найдены следующим образом

$$I_1(\boldsymbol{G}) = \frac{(r^3-\alpha)^{4/3}}{(r^3+A)^{4/3}} + 2\frac{(r^3+A)^{2/3}}{(r^3-\alpha)^{2/3}},\quad I_2(\boldsymbol{G}) = \frac{(r^3+A)^{4/3}}{(r^3-\alpha)^{4/3}} + 2\frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{(r^3+A)^{2/3}}.$$

Мера, обратная мере деформаций Коши, вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{G}^{-1} = \frac{(r^3+A)^{4/3}}{(r^3-\alpha)^{4/3}}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_r + \frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{(r^3+A)^{2/3}}\left(\boldsymbol{e}_\varphi\otimes\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta\right).$$

Рассмотрим уравнения равновесия при отсутствии объемных сил:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}.$$

Здесь $\boldsymbol{T}$ — тензор напряжений Коши, который здесь может быть представлен диадным разложением

$$\boldsymbol{T} = T_{RR}\boldsymbol{e}_R\otimes\boldsymbol{e}_R + T_{\theta\theta}\left(\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi\otimes\boldsymbol{e}_\varphi\right).$$

Будем полагать, что краевые условия формулируются в виде:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\Big|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\Big|_{\Gamma_2} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{B}$ — нагрузка на внутренней поверхности шара Γ_1, Γ_2 — поверхность роста, свободная от напряжений. Дополнительное условие определяет натяг присоединяемых слоев f, т. е.

$$\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_\theta\Big|_{\Gamma_2} = T_{\theta\theta}\Big|_{\Gamma_2} = f. \tag{3}$$

Важно отметить, что условие для натяга – это не условие краевой задачи, а условие, из которого определяется функция $\alpha(R) = \alpha(R(r(\mathfrak{X})))$, т. е. определяется поле дисторсии $\boldsymbol{K}$ (1).

В сферических координатах при условии центральной симметрии уравнения равновесия и краевые условия принимают вид

$$\frac{\partial T_{RR}}{\partial R} + \frac{2}{R}\left(T_{RR} - T_{\theta\theta}\right) = 0,\quad T_{RR}\Big|_{r=r_0} = B,\quad T_{RR}\Big|_{r=r_1} = 0.$$

Здесь $r_0 = \sqrt[3]{R_0^3 - A}$, $r_1 = \sqrt[3]{R_1^3 - A}$, R_0 — внутренний, а R_1 — внешний радиусы шара в текущей конфигурации $\varkappa$.

Для несжимаемого изотропного в естественном состоянии гиперупругого материала тензор напряжений Коши может быть представлен следующей зависимостью [2]

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{E} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{G} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\boldsymbol{G}^{-1},$$

где $p = p(R)$ — давление, определяемое из условий равновесия, W — упругий потенциал. Если в качестве отсчетной конфигурации использовать $\varkappa_R$, то упругий потенциал следует записать в виде [3]:

$$W = J_{\boldsymbol{K}}^{-1} W_{\varkappa_C}\left(\boldsymbol{H}, \mathfrak{X}\right) = J_{\boldsymbol{K}}^{-1} W_{\varkappa_C}\left(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{F}, \mathfrak{X}\right).$$

Здесь $W_{\varkappa_C}$ — потенциал, калибровка которого осуществляется локально для каждого слоя относительно естественного состояния этого слоя. Поскольку в рассматриваемом примере материал несжимаемый, $J_{\boldsymbol{K}} = 1$. В этой связи

$$W = W_{\varkappa_C}\left(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{F}, \mathfrak{X}\right). \tag{4}$$

Подстановка $\boldsymbol{T}$ из (2_2) в уравнение равновесия приводит к следующему уравнению относительно давления p, т. е.

$$-\boldsymbol{\nabla}p + 2\left(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial W}{\partial I_1} - \boldsymbol{G}^{-1}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G}^{-1}\right) = \boldsymbol{0}.$$

Используя вычисленные выше величины и учитывая, что в силу центральной симметрии $\boldsymbol{\nabla}p = \boldsymbol{e}_R\frac{dp}{dR}$, приходим к уравнению относительно $p(R)$:

$$\begin{aligned}
-\frac{dp}{dR} + 2\Bigg\{ &\frac{(r^3-\alpha)^{4/3}}{(r^3+A)^{4/3}}\frac{d}{dR}\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{(r^3+A)^{4/3}}{(r^3-\alpha)^{4/3}}\frac{d}{dR}\frac{\partial W}{\partial I_1} + \\
&+ \frac{\partial W}{\partial I_1}\left[\frac{d}{dR}\frac{(r^3-\alpha)^{4/3}}{(r^3+A)^{4/3}} + \frac{2}{R}\left(\frac{(r^3-\alpha)^{4/3}}{(r^3+A)^{4/3}} - \frac{(r^3+A)^{2/3}}{(r^3-\alpha)^{2/3}}\right)\right] - \\
&- \frac{\partial W}{\partial I_2}\left[\frac{d}{dR}\frac{(r^3+A)^{4/3}}{(r^3-\alpha)^{4/3}} + \frac{2}{R}\left(\frac{(r^3+A)^{4/3}}{(r^3-\alpha)^{4/3}} - \frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{(r^3+A)^{2/3}}\right)\right]\Bigg\} = 0.
\end{aligned}$$

Интеграл этого уравнения очевиден

$$\begin{aligned}
p(R') = p_0 + 2&\left[\frac{(r^3-\alpha)^{4/3}}{(r^3+A)^{4/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{(r^3+A)^{4/3}}{(r^3-\alpha)^{4/3}}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right] - \\
-4\int\limits_{R_0}^{R'}&\left\{\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(\frac{(r^3+A)^{4/3}}{(r^3-\alpha)^{4/3}} - \frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{(r^3+A)^{2/3}}\right) - \frac{\partial W}{\partial I_1}\left(\frac{(r^3-\alpha)^{4/3}}{(r^3+A)^{4/3}} - \frac{(r^3+A)^{2/3}}{(r^3-\alpha)^{2/3}}\right)\right\}\frac{dR}{R}.
\end{aligned}$$

Здесь верхний предел интегрирования $R' \in (R_0, R_1)$ представляет собой радиальную координату, которая определяет положение сферического слоя внутри текущей конфигурации $\varkappa$, p_0 — постоянная интегрирования, которая соответствует

постоянному гидростатическому давлению. Полученное выражение можно заменой переменных $R \mapsto r$ преобразовать к виду (учитывая, что $\frac{dR}{R} = \frac{r^2}{r^3+A}dr$)

$$p(r') = 2\left[\frac{(r^3-\alpha)^{4/3}}{(r^3+A)^{4/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{(r^3+A)^{4/3}}{(r^3-\alpha)^{4/3}}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right] - \\ - 4\int\limits_{r_0}^{r'} \frac{r^2(A+\alpha)(2r^3+A-\alpha)}{(r^3-\alpha)^{4/3}(r^3+A)^{5/3}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{(r^3+A)^{2/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)dr + p_0.$$

Верхний предел интегрирования $r' \in (r_0, r_1)$ определяет положение сферического слоя внутри отсчетной конфигурации $\varkappa_R$. Соответственно,

$$T_{RR}(r') = -p_0 + 4\int\limits_{r_0}^{r'} \frac{r^2(A+\alpha)(2r^3+A-\alpha)}{(r^3-\alpha)^{4/3}(r^3+A)^{5/3}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{(r^3+A)^{2/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)dr.$$

Из краевого условия $T_{RR}\Big|_{r=r_1} = 0$ вытекает, что

$$T_{RR}(r') = 4\int\limits_{r_1}^{r'} \frac{r^2(A+\alpha)(2r^3+A-\alpha)}{(r^3-\alpha)^{4/3}(r^3+A)^{5/3}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r^3-\alpha)^{2/3}}{(r^3+A)^{2/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)dr.$$

Окружные напряжения $T_{\theta\theta}$ могут быть найдены из уравнений равновесия и выражены через T_{RR} следующим образом

$$T_{\theta\theta} = T_{RR} + \frac{R}{2}\frac{\partial T_{RR}}{\partial R}.$$

В граничном слое они должны быть равны заданной величине натяга f (3), т. е.

$$T_{\theta\theta}\Big|_{\Gamma_2} = T_{\theta\theta}\Big|_{r=r_1} = T_{RR}\Big|_{r=r_1} + \frac{\sqrt[3]{r_1^3+A}}{2}\frac{\partial T_{RR}}{\partial R}\Big|_{r=r_1} = \\ = 2\left[\frac{(A+\alpha)(2r_1^3+A-\alpha)}{(r_1^3-\alpha)^{4/3}(r_1^3+A)^{2/3}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r_1^3-\alpha)^{2/3}}{(r_1^3+A)^{2/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)\right]\Bigg|_{r=r_1} = f. \quad (5)$$

Из этого уравнения определяется зависимость $\alpha = \alpha(r_1, A, f)$ Из второго краевого условия (2) определяется параметр A.

Соотношение (5) может быть сформулировано в терминах скорости изменения напряжения $\dot{T}_{RR}$. Действительно, поскольку, $T_{RR}\Big|_{r=r_1} = 0$, то

$$\frac{R}{2}\frac{dT_{RR}}{dR}\Big|_{r=r_1} = f.$$

В условиях центральной симметрии $dR = Vdt$, где V — скорость движения поверхности роста. Таким образом, это соотношение может быть записано в виде

$$\frac{dT_{RR}}{Vdt}\Big|_{r=r_1} = \frac{2}{R}f,$$

или, вводя обозначения $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ для тензора натяжения материальной поверхности [4], который в рассматриваемой задаче может быть представлен следующим диадным разложением $\boldsymbol{\mathcal{T}} = f\,(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi)$, и $\boldsymbol{L}$ для тензора кривизны материальной поверхности, которая представляет собой сферу радиусом R, в следующей форме:

$$\dot{T}_{RR}\Big|_{r=r_1} = (2V/R)f = V\,(\boldsymbol{\mathcal{T}} : \boldsymbol{L})\,.$$

Тензорное поле дисторсии (1) индуцирует связность на материальном многообразии, которое в результате становится плоским пространством аффинной связности (т. е. с пространством нулевой кривизны) с нетривиальным кручением [3, 5]. Отличные от нуля компоненты тензора кручения определяются следующими соотношениями

$$\mathfrak{T}^{\varphi}_{\cdot r\varphi} = \mathfrak{T}^{\theta}_{\cdot r\theta} = \frac{1}{3r^3 - 3a}\frac{\partial\alpha(r)}{\partial r}, \quad \mathfrak{T}^{\varphi}_{\cdot r\varphi} = \mathfrak{T}^{\theta}_{\cdot r\theta} = -\frac{1}{3r^3 - 3a}\frac{\partial\alpha(r)}{\partial r}. \tag{6}$$

Обратим внимание, что тензор кручения (6) обращается в ноль, если $\alpha = \mathrm{Const}$. Это соответствует согласованному наращиванию, в результате которого получаем тело неотличимое от тела постоянного состава. Если же параметр раздувания слоев является некоторой функцией от материальной метки слоя, т. е. $a = a(\mathfrak{X}^3)$, то тело, полученное в результате процесса наращивания, не обладает естественной конфигурацией, погружаемой в $\mathbb{E}^3$. С точки зрения механики это означает, что никакие гладкие деформации выращенного тела не освободят его от напряжений.

Автор благодарен профессору А. В. Манжирову за постановку задачи и помощь. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№09-08-01194-а, №08-01-00553-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M.* Analysis, manifolds and physics. Part 1. Basics. North-Holland, 1982. 649 p.

[2] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости М.: Наука, 1980. 512 с.

[3] *Maugin G. A.* Material inhomogeneities in elasticity. Ch. & Hall, London, 1993. 294 p.

[4] *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rational Mech. Anal. 1975. Vol. 57 pp. 291–323.

[5] *Wang C. C., Truesdell C.* Introduction to rational elasticity. Noordhoff Pub, 1973. 556 p.

Lychev S. A. *Finite deformations of accreted elastic globe*. The centrally symmetric problem for an accreted elastic globe is considered. The deformations are supposed to be finite and the material is to be incompressible. The constitutive equations are formulated with respect to complete distortion tensor which may be representing as the composition of initial distortion and compatible deformation gradient. The initial distortion induces the linear connection on the material manifold which becomes a flat space of affine connectivity with nontrivial torsion.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАСТУЩИХ ПО ТОЛЩИНЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Лычева Т. Н.

Московский государственный университет приборостроения и информатики

Рассмотрена динамическая задача о наращивании круглой пластины. Для постоянной скорости наращивания решение получено в замкнутой форме. Показаны характерные особенности математической модели и динамической реакции растущих пластин.

1. Исследуются вынужденные колебания растущих по толщине круглых пластин. Задача рассматривается в приближении малых деформаций. Материал пластин считается упругим и изотропным. Толщина пластины непрерывно увеличивается в результате притока материала извне. Полагается, что в начальный момент времени пластина имеет постоянную толщину. В каждый последующий момент присоединяется инфинитезимальный слой так же постоянной толщины. Таким образом, толщина растущей пластины изменяется во времени, но постоянна относительно пространственных координат. Полагается, что в процессе роста положение срединной поверхности не изменяется, т. е. наращивание пластины происходит равномерно на обеих лицевых поверхностях. Пластина рассматривается в постановке технической теории: принимаются кинематические гипотезы Кирхгофа–Лява и допущение об отсутствии обжатия по толщине. При этих допущениях начально-краевая задача для растущей по толщине жестко защемленной на опорном контуре пластины может быть сформулирована следующим образом:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\nabla}^2\dot{w}+\rho h\ddot{w}=\dot{q},\quad w\Big|_{\Gamma}=\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\Gamma}=0,$$
$$w\Big|_{t=0}=w_0,\quad \dot{w}\Big|_{t=0}=v_0,\quad \ddot{w}\Big|_{t=0}=a_0. \tag{1}$$

Здесь $w=w(\boldsymbol{r},t)$ — прогиб пластины, $\boldsymbol{r}$ — вектор места материальных точек на срединной поверхности, t — время, $q=q(\boldsymbol{r},t)$ — динамическая поперечная нагрузка, $h=h(t)$ — толщина пластины, изменяемая во времени, E — модуль Юнга материала, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность массы, $\boldsymbol{\nabla}^2$ — оператор Лапласа, $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к контуру пластины Γ. Точкой обозначены производные по t. Отметим, что уравнения движения имеют третий порядок по времени и второй по пространственным переменным. В качестве начальных данных задаются смещения $w_0=w_0(\boldsymbol{r})$, скорости $v_0=v_0(\boldsymbol{r})$ и ускорения $a_0=a_0(\boldsymbol{r})$.

Для круглых пластин целесообразно использовать полярные координаты r, φ:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\,r\cos\phi+\boldsymbol{j}\,r\sin\phi,\quad \boldsymbol{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

а также перейти к безразмерным независимым переменным $\tilde{\boldsymbol{r}}$, $\tilde{t}$ и прогибам $\tilde{w}$ (R — радиус пластины):

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}/R,\quad \tilde{t}=E^{1/2}\rho^{-1/2}\,t/R,\quad \tilde{w}=w/R.$$

В безразмерных переменных дифференциальные операции принимают вид

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2 = R^2\,\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad \partial_{\tilde{t}} = R\sqrt{\frac{\rho}{E}}\,\partial_t,$$

контур Γ отображается на единичную окружность, а краевая задача (1) формулируется следующим образом

$$\tilde{h}^2\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\partial_{\tilde{t}}\tilde{w} + \partial_{\tilde{t}}^3\tilde{w} = \partial_{\tilde{t}}\tilde{q}, \quad \tilde{w}\Big|_{\tilde{r}=1} = \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=1} = 0,$$
$$\tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} = \tilde{w}_0, \quad \partial_{\tilde{t}}\tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} = \tilde{v}_0, \quad \partial_{\tilde{t}}^2\tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} = \tilde{a}_0. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{h} = \tilde{h}(\tilde{t})$ — безразмерная толщина, $\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{\boldsymbol{r}},\tilde{t})$ — безразмерная поперечная динамическая нагрузка, $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_0(\tilde{\boldsymbol{r}})$, $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_0(\tilde{\boldsymbol{r}})$, $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(\tilde{\boldsymbol{r}})$ — безразмерные начальные перемещения, скорости и ускорения:

$$\tilde{h}(\tilde{t}) = \frac{1}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}\,h\left(R\sqrt{\frac{\rho}{E}}\tilde{t}\right), \quad \tilde{q}(\tilde{\boldsymbol{r}},\tilde{t}) = \frac{R}{hE}\,q\left(R\tilde{\boldsymbol{r}}, R\sqrt{\frac{\rho}{E}}\tilde{t}\right),$$
$$\tilde{w}_0(\tilde{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{R}w_0(\tilde{R\boldsymbol{r}}), \quad \tilde{v}_0(\tilde{\boldsymbol{r}}) = \sqrt{\frac{\rho}{E}}v_0(R\tilde{\boldsymbol{r}}), \quad \tilde{a}_0(\tilde{\boldsymbol{r}}) = R\frac{\rho}{E}a_0(R\tilde{\boldsymbol{r}}).$$

2. Решение начально-краевой задачи (2) представляется в форме разложения

$$\tilde{w}(\tilde{\boldsymbol{r}},\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})b_{nm}(\tilde{t}), \tag{3}$$

где $a_{nm} = a_{nm}(\boldsymbol{r})$ — собственные функции оператора $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2$, т. е. нетривиальные решения следующей задачи Штурма–Лиувилля

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2 a_{nm} = \lambda_{nm}^4 a_{nm}, \quad a_{nm}\Big|_{\tilde{r}=1} = \frac{\partial a_{nm}}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=1} = 0. \tag{4}$$

Следуя принятой терминологии, будем называть функции $a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})$ базисными, а $b_{nm}(\tilde{t})$ — координатными. Решения дифференциального уравнения (4) образуют два семейства, первому принадлежат четные по переменной φ функции a_{nm}^e, а второму — нечетные a_{nm}^o:

$$a_{nm}^e = [c_1 J_n(\lambda\,\tilde{r}) + c_2 I_n(\lambda\,\tilde{r})]\cos n\varphi, \quad a_{nm}^o = [c_1 J_n(\lambda\,\tilde{r}) + c_2 I_n(\lambda\,\tilde{r})]\sin n\varphi.$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные постоянные, $J_n(z)$ — функции Бесселя 1-го рода порядка n, $I_n(z)$ — функции Бесселя 2-го рода порядка n. Далее, там, где это не приводит к неоднозначности, будет использоваться общее для четных и нечетных решений обозначение

$$a_{nm} = [c_1 J_n(\lambda\,\tilde{r}) + c_2 I_n(\lambda\,\tilde{r})]\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Собственные значения λ_{nm} задачи (4) определяются как нули уравнения

$$\begin{vmatrix} J_n(\lambda) & I_n(\lambda) \\ \frac{\lambda}{2}\left(J_{n-1}(\lambda)+J_{n+1}(\lambda)\right) & \frac{\lambda}{2}\left(I_{n-1}(\lambda)-I_{n+1}(\lambda)\right) \end{vmatrix} = \lambda\left(I_n(\lambda)J_{n+1}(\lambda)-I_{n+1}(\lambda)J_n(\lambda)\right)=0. \tag{6}$$

Нули уравнения (6) определяются численно. Для реализации вычислительной процедуры более удобным оказывается уравнение, в котором левая часть умножается на весовой множитель $\lambda^{-1}e^{\lambda}$, а именно

$$e^{\lambda}\left(I_n(\lambda)J_{n+1}(\lambda)-I_{n+1}(\lambda)J_n(\lambda)\right)=0 \quad \text{или} \quad \frac{J_{n+1}(\lambda)}{J_n(\lambda)}=\frac{I_{n+1}(\lambda)}{I_n(\lambda)}.$$

Все нули уравнения (6) простые. Функции (5) удовлетворяют краевым условиям (4) при $\lambda=\lambda_{nm}$ и $c_1=-c_2$. Следовательно, собственные функции могут быть представлены в виде:

$$a_{nm}=c_{nm}\left[J_n(\lambda_{nm}\tilde{r})I_n(\lambda_{nm})-I_n(\lambda_{nm}\tilde{r})J_n(\lambda_{nm})\right]\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}. \tag{7}$$

Здесь c_{nm} — постоянные, которые удобно выбрать таким образом, чтобы квадрат нормы[1] собственных функций (7) был равен единице. Из вычислений

$$\|a_{nm}\|^2=c_{nm}^2A_{nm},\quad A_{nm}=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\left[J_n(\lambda\tilde{r})I_n(\lambda)-I_n(\lambda\tilde{r})J_n(\lambda)\right]\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}\right)^2 rdrd\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}^2(\lambda)I_n^2(\lambda)-I_{n-1}^2(\lambda)J_n^2(\lambda)\right]+$$
$$+\frac{n-1}{\lambda}\left[I_n(\lambda)I_{n-1}(\lambda)J_n^2(\lambda)-J_{n-1}(\lambda)J_n(\lambda)I_n^2(\lambda)\right]+I_n^2(\lambda)J_n^2(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_{nm}}$$

вытекает, что c_{nm} могут быть определены в замкнутом виде: $c_{nm}=A_{nm}^{-1/2}$. В силу самосопряженности бигармонического оператора, область определения которого задается краевыми условиями (4), его собственные функции a_{nm} удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_0^r\int_0^{2\pi}a_{nm}(\tilde{r},\varphi)a_{kl}(\tilde{r},\varphi)\,\tilde{r}\,d\tilde{r}d\phi=\begin{cases}1, n=k\wedge m=l\\ 0, n\neq k\vee m\neq l\end{cases}.$$

Оператор ортогонального проектирования произвольного элемента f пространства $\mathbb{H}$ на соответствующие собственные подпространства может быть представлен в виде[2]

$$P_{nm}[f]=\int_0^1\int_0^{2\pi}a_{nm}(\tilde{r},\varphi)f(\tilde{r},\varphi)\,\tilde{r}\,d\tilde{r}d\varphi. \tag{8}$$

[1]Здесь и далее собственные функции рассматриваются как элементы пространства $\mathbb{H}$ квадратично интегрируемых функций, определенных в области $(0,1)\times(0,2\pi)$, со скалярным произведением

$$\langle u,v\rangle=\int_0^1\int_0^{2\pi}u(\tilde{r},\varphi)v(\tilde{r},\varphi)\,\tilde{r}\,d\tilde{r}d\varphi.$$

[2]Оператор P_{nm} представляет собой функционал, вычисляющий проекцию, т. е. осуществляющий отображение $\mathbb{H}\to\mathbb{R}$. Проектор, как оператор, *действующий в* $\mathbb{H}$, определяется выражением $\hat{P}_{nm}[f]=a_{nm}P_{nm}[f]$.

Самосопряженность оператора (4) обеспечивает полноту системы проекторов (8), что может быть выражено следующим соотношением

$$\forall u \in \mathbb{H}\ \forall v \in \mathbb{H} \quad \langle u, v\rangle = \langle u, \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} P_{nm}[v]\rangle.$$

Последнее равенство означает, что искомые представления (3) решения являются *слабыми*, т. е. сходятся в среднеквадратичном, но не обязательно поточечно. Выделение поточечно сходящихся решений осуществляется на основе теорем Тауберова типа, а построение таких решений для произвольных правых частей и начальных данных может быть осуществлено с помощью корректирующих функций.

Подстановка представления (3) в уравнение движения (2) дает:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\tilde{h}^2(\tilde{t})\left(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2 a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})\right)\partial_{\tilde{t}}\, b_{nm}(\tilde{t}) + a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})\partial_{\tilde{t}}^3\, b_{nm}(\tilde{t})\right] = \partial_{\tilde{t}}\tilde{q}. \tag{9}$$

Поскольку базисные функции a_{nm} являются собственными функциями оператора $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\nabla}^2$, т. е. удовлетворяют уравнению (4), то из (9) вытекает следующее уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\tilde{h}^2(\tilde{t})\lambda_{nm}^4 a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})\partial_{\tilde{t}}\, b_{nm}(\tilde{t}) + a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})\partial_{\tilde{t}}^3\, b_{nm}(\tilde{t})\right] = \partial_{\tilde{t}}\tilde{q}. \tag{10}$$

Подстановка (3) в начальные условия (2) приводит к соотношениям:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})b_{nm}(\tilde{t})\Big|_{t=0} = \tilde{w}_0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})\partial_{\tilde{t}}b_{nm}(\tilde{t})\Big|_{t=0} = \tilde{v}_0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})\partial_{\tilde{t}}^2 b_{nm}(\tilde{t})\Big|_{t=0} = \tilde{a}_0. \tag{11}$$

Для нахождения координатных функций $b_{nm}(\tilde{t})$ осуществим ортогональное проектирование левых и правых частей уравнения (10) и начальных условий (11), действуя на них оператором P_{nm}. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\tilde{h}^2(\tilde{t})\lambda_{nm}^4\partial_{\tilde{t}}\, b_{nm}(\tilde{t}) + \partial_{\tilde{t}}^3\, b_{nm}(\tilde{t}) = \Phi(\tilde{t}),\\
&b_{nm}(\tilde{t})\Big|_{t=0} = \Psi_0, \quad \partial_{\tilde{t}}b_{nm}(\tilde{t})\Big|_{t=0} = \Psi_1, \quad \partial_{\tilde{t}}^2 b_{nm}(\tilde{t})\Big|_{t=0} = \Psi_2,\\
&\Phi = \int_0^1\int_0^{2\pi} a_{nm}(\tilde{r},\varphi)\partial_{\tilde{t}}\tilde{q}(\tilde{r},\varphi,\tilde{t})\,\tilde{r}\,d\tilde{r}d\varphi, \quad \Psi_0 = \int_0^1\int_0^{2\pi} a_{nm}(\tilde{r},\varphi)\tilde{w}_0(\tilde{r},\varphi)\,\tilde{r}\,d\tilde{r}d\varphi,\\
&\Psi_1 = \int_0^1\int_0^{2\pi} a_{nm}(\tilde{r},\varphi)\tilde{v}_0(\tilde{r},\varphi)\,\tilde{r}\,d\tilde{r}d\varphi, \quad \Psi_2 = \int_0^1\int_0^{2\pi} a_{nm}(\tilde{r},\varphi)\tilde{a}_0(\tilde{r},\varphi)\,\tilde{r}\,d\tilde{r}d\varphi.
\end{aligned} \tag{12}$$

В виду ортогональности системы функций $a_{nm}(\tilde{\boldsymbol{r}})$ проекции представляют собой последовательность несвязанных задач Коши. Их решения определяют координатные функции $b_{nm}(\tilde{t})$. Таким образом, все компоненты представления (3) определены. В силу полноты системы проекторов P_{nm} это представление однозначно

определяет слабое решение рассматриваемой начально-краевой задачи. Отметим, что дифференциальные уравнения (12) имеют третий порядок, а коэффициент при первой производной является, вообще говоря, произвольно заданной функцией переменной $\tilde{t}$. В этой связи решения $b_{nm}(\tilde{t})$, в отличие от классических задач динамической теории упругих пластин, не являются периодическими. В общем случае аналитическое решение задачи Коши (12) найти не удается, но для частных видов функции $\tilde{h}(\tilde{t})$ такие решения могут быть выражены через известные специальные функции.

3. Пусть скорость роста пластины постоянна, т. е. $h(t) = \alpha + \beta t$. Параметр α задает начальную толщину пластины, а параметр β — скорость изменения ее толщины, вызванную присоединением нового материала. Безразмерная толщина $\tilde{h}(\tilde{t})$ определяется безразмерными начальной толщиной $\tilde{\alpha}$ и скоростью $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{h}(\tilde{t}) = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\tilde{t}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad \tilde{\beta} = \beta\sqrt{\frac{\rho}{12E(1-\nu^2)}}.$$

Решение дифференциального уравнения (12) может быть записано в виде

$$b_{nm}(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} \Big\{ a^2_{nm}\omega^1_{nm}(\tau) + a^3_{nm}\omega^2_{nm}(\tau) + \\ + \int_0^{\tau} \frac{\omega^2_{nm}(\tau)\omega^1_{nm}(\sigma) - \omega^1_{nm}(\tau)\omega^2_{nm}(\sigma)}{\omega^1_{nm}(\sigma)\partial_\sigma\omega^2_{nm}(\sigma) - \omega^2_{nm}(\sigma)\partial_\sigma\omega^1_{nm}(\sigma)}\,\Phi(\sigma)\,d\sigma \Big\}\,d\tau + a^1_{nm}.$$

Здесь a^1_{nm}, a^2_{nm}, a^3_{nm} — постоянные, определяемые начальными условиями,

$$\omega^1_{nm} = D_{-\frac{1}{2}}\left(\lambda_{nm}\tilde{\beta}^{-1/2}(1+i)(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\tilde{t})\right), \quad \omega^2_{nm} = D_{-\frac{1}{2}}\left(\lambda_{nm}\tilde{\beta}^{-1/2}(1-i)(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\tilde{t})\right),$$

$D_\xi(z)$ — функции параболического цилиндра.

Рассмотрим частный случай. Пусть пластина к началу наращивания изогнута равномерно распределенной нагрузкой $\tilde{q}_0$. В момент начала наращивания нагрузка снимается, в результате чего пластина приходит в движение. В течение всего процесса наращивания на пластину поперечная нагрузка не действует. Тогда

$$\tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} = \tilde{w}_0, \quad \partial_{\tilde{t}}\tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} = 0, \quad \partial^2_{\tilde{t}}\tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} = \tilde{q}_0,$$

где $\tilde{w}_0 = \sum_{m=0}^{\infty} b^0_{0m}a_{0m}(\tilde{\boldsymbol{r}})$ — прогиб пластины в момент начала наращивания,

$$b^0_{0m} = \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{\alpha}_0\lambda^4}\int_0^1\int_0^{2\pi} a_{0m}(\tilde{r},\varphi)\,\tilde{r}d\tilde{r}d\varphi = \frac{2\pi\tilde{q}_0}{\tilde{\alpha}_0\lambda^5_{0m}A_{0m}}(I_0(\lambda_{0m})J_1(\lambda_{0m}) - I_1(\lambda_{0m})J_0(\lambda_{0m})).$$

Анализ полученного решения позволяет указать на характерные особенности динамического наращивания пластин, а именно, на увеличение частоты колебаний, уменьшение их амплитуды и смещение нейтрального положения пластины.

Автор благодарен профессору А. В. Манжирову за постановку задачи и помощь. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№09-08-01194-а, №09-08-01180а, №08-01-00553-а).

Lycheva T. N. *Driven oscillations of transversally accreted elastic plates.* The dynamic problem for the transversally accreted circular plate is considered. In the case of constant rate of accretion the solution is obtained in closed form. Specific features of the mathematical model and dynamic response of accreted plates are shown.

СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Мелешко В. В.[*], **Папков С. О.**[**]

[*]*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко*

[**]*Севастопольский национальный технический университет*

Рассматривается классическая задача о колебаниях пластины со свободными краями. На основе анализа однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений находятся собственные частоты и формы колебаний пластины. Проводится сравнение с экспериментальными данными.

1. Введение. В этом году состоялись юбилеи двух замечательных публикаций, относящихся к классической задаче о колебаниях тонких изотропных прямоугольных пластин со свободными краями: 200 лет французского перевода [1] трактата Хладни по акустике и 100 лет статьи Ритца [2] с применением вариационного метода (сам автор назвал его Die Integrationsmethode) для расчета собственных частот и форм колебаний. Статья Ритца [2] (увы, последняя в его недолгой яркой жизни) содержала изумительный по ясности теоретического изложения и количеству числовых данных, полученных действительно «вручную», анализ спектра собственных частот и форм колебаний квадратной пластинки. Впервые применив вариационный методов для уравнений колебаний в частных производных, Ритц сделал предположение (по сути, ускользнувшее от внимания практически всех многочисленных исследователей) о том, что собственные частоты и формы колебаний пластинки $w_{mn}(x,y)$ весьма точно описываются комбинациями $u_m(x)u_n(y) \pm u_n(x)u_m(y)$, в которых $u_m(x)$ и $u_n(y)$ являются собственными функциями упругого стержня со свободными краями. В последующие годы задача о колебаниях пластины со свободными краями была предметом исследований многих авторов, в том числе предпринимались попытки решения на основе метода суперпозиции [4,5]. Заметим, что в данных работах вопрос о точности выполнения нулевых граничных условий не ставился. В данной статье поставленная задача решается в точной постановке на основе анализа соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

2. Постановка задачи и сведение к бесконечным системам уравнений. Фигуры Хладни являются узловыми линиями функции нормального прогиба $W(x,y)$ срединной поверхности изотропной пластины постоянной толщины, таким образом, задача об их аналитическом построении сводится к нахождению собственных форм колебаний следующей краевой задачи

$$\Delta\Delta W - \chi^4 W = 0 \tag{1}$$

при $x = \pm a$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} = 0 \tag{2}$$

при $y = \pm b$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0 \tag{3}$$

(ν — коэффициент Пуассона).

Общее решение дифференциального уравнения (1) строится в виде суммы решений для полос $x \in [-a;a]$ и $y \in [-b;b]$ в форме тригонометрических рядов. Выбираем решение таким образом, чтобы тождественно удовлетворить условия на третьи производные и иметь достаточный произвол для выполнения оставшихся двух граничных условий. Выделяя слагаемые по четности (индекс S — симметрия по обеим осям, SA — симметрия по Ox и антисимметрия по Oy, AS — антисимметрия по Ox и симметрия по Oy, A — антисимметрия по обеим осям) функцию прогиба можно записать как

$$W = W_S + W_{SA} + W_{AS} + W_A \tag{4}$$

$$W_S = \frac{bx_0^s}{\chi}\left(\frac{\cos\chi y}{\sin\chi b} - \frac{\operatorname{ch}\chi y}{\operatorname{sh}\chi b}\right) + \frac{ay_0^s}{\chi}\left(\frac{\cos\chi x}{\sin\chi a} - \frac{\operatorname{ch}\chi x}{\operatorname{sh}\chi a}\right) + \tag{5}$$

$$+b\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n^s A(y,b,\alpha_n)\cos\alpha_n x + a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y_n^s A(x,a,\beta_n)\cos\beta_n y;$$

$$W_{SA} = \frac{bx_0^{sa}}{\chi^2}\left(\frac{\sin\chi y}{\cos\chi b} + \frac{\operatorname{sh}\chi y}{\operatorname{ch}\chi b}\right) + b\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n^{sa} B(y,b,\alpha_n)\cos\alpha_n x - \tag{6}$$

$$-a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n y_n^{sa} A(x,a,\delta_n)\sin\delta_n y;$$

$$W_A = b\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n^a B(y,b,\gamma_n)\sin\gamma_n x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y_n^a B(x,a,\delta_n)\sin\delta_n y; \tag{7}$$

где $\alpha_n = \frac{\pi n}{a}$, $\beta_n = \frac{\pi n}{b}$, $\gamma_n = \frac{\pi(2n-1)}{2a}$, $\delta_n = \frac{\pi(2n-1)}{2b}$,

$$A(z,h,\xi) = \frac{\xi^2+\chi^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2-\chi^2}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2-\chi^2}z}{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2-\chi^2}h} - \frac{\xi^2-\chi^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\chi^2}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2+\chi^2}z}{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2+\chi^2}h};$$

$$B(z,h,\xi) = \frac{\xi^2+\chi^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2-\chi^2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2-\chi^2}z}{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2-\chi^2}h} - \frac{\xi^2-\chi^2-(2-\nu)\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\chi^2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2+\chi^2}z}{\operatorname{ch}\sqrt{\xi^2+\chi^2}h}.$$

Здесь не дано слагаемое W_{AS} так как, в силу симметрии задачи собственные значения и формы в случае AS, заменой x на y и a на b строяться по решению SA:

$$\chi_{SA}(a/b) = \chi_{AS}(b/a), W_{SA}(x,y,a,b) = W_{AS}(y,x,b,a).$$

Поэтому в дальнейшем ограничимся анализом только симметрии SA. Заметим, что по этой причине в случае квадрата собственные числа случаев AS и SA совпадают (двойные тона у Ритца [2]). Подстановка (4) в граничные условия (2), (3)

с последующим разложением входящих функций в тригонометрические ряды позволяет из равенства при базисных функциях получить однородные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Случай симметрии S:

$$2\nu\, x_0^s + a\chi(\cot a\chi + \operatorname{cth} a\chi)y_0^s = 2\nu\chi^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^s}{p_{1n}^2 p_{2n}^2};$$

$$b\chi(\cot b\chi + \operatorname{cth} b\chi)x_0^s + 2\nu y_0^s = 2\nu\chi^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^s}{q_{1n}^2 q_{2n}^2}; \tag{8}$$

$$y_m^s \Delta_s(\beta_m, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\chi^2((1-\nu)^2\alpha_n^2\beta_m^2 + \nu\chi^4)}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} x_n^s + \frac{4\nu\chi^4 x_0^s}{q_{1m}^2 q_{2m}^2};$$

$$x_m^s \Delta_s(\alpha_m, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\chi^2((1-\nu)^2\alpha_m^2\beta_n^2 + \nu\chi^4)}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} y_n^s + \frac{4\nu\chi^4 y_0^s}{p_{1m}^2 p_{2m}^2}.$$

Случай симметрии SA:

$$x_0^{sa} = \frac{2\nu\chi^6}{b(\tan b\chi - \operatorname{th} b\chi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{sa}}{q_{3n}^2 q_{4n}^2}; \tag{9}$$

$$y_m^{sa} \Delta_s(\delta_m, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\chi^2((1-\nu)^2\alpha_n^2\delta_m^2 + \nu\chi^4)}{(\alpha_n^2 + q_{3m}^2)(\alpha_n^2 + q_{4m}^2)} x_n^{sa} + + \frac{4\nu\chi^3 x_0^{sa}}{q_{3m}^2 q_{4m}^2};$$

$$x_m^{sa} \Delta_a(\alpha_m, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\chi^2((1-\nu)^2\alpha_m^2\delta_n^2 + \nu\chi^4)}{(\delta_n^2 + p_{1m}^2)(\delta_n^2 + p_{2m}^2)} y_n^{sa};$$

Случай симметрии A:

$$x_m^a \Delta_a(\gamma_m, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\chi^2((1-\nu)^2\gamma_m^2\delta_n^2 + \nu\chi^4)}{(\delta_n^2 + p_{3m}^2)(\delta_n^2 + p_{4m}^2)} y_n^a; \tag{10}$$

$$y_m^a \Delta_a(\delta_m, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\chi^2((1-\nu)^2\gamma_n^2\delta_m^2 + \nu\chi^4)}{(\gamma_n^2 + q_{3m}^2)(\gamma_n^2 + q_{4m}^2)} x_n^a;$$

где $p_{1n}^2 = \alpha_n^2 - \chi^2$;$p_{2n}^2 = \alpha_n^2 + \chi^2$; $p_{3n}^2 = \gamma_n^2 - \chi^2$; $\quad p_{4n}^2 = \gamma_n^2 + \chi^2$; $q_{1n}^2 = \beta_n^2 - \chi^2$; $q_{2n}^2 = \beta_n^2 + \chi^2$; $\quad q_{3n}^2 = \delta_n^2 - \chi^2$; $q_{4n}^2 = \delta_n^2 + \chi^2$;

$$\Delta_s(z,h) = h\Big(\frac{((1-\nu)z^2 + \chi^2)^2}{\sqrt{z^2+\chi^2}} \operatorname{cth}\sqrt{z^2+\chi^2}h - \frac{((1-\nu)z^2 - \chi^2)^2}{\sqrt{z^2-\chi^2}} \operatorname{cth}\sqrt{z^2-\chi^2}h\Big);$$

$$\Delta_a(z,h) = h\Big(\frac{((1-\nu)z^2 + \chi^2)^2}{\sqrt{z^2+\chi^2}} \operatorname{th}\sqrt{z^2+\chi^2}h - \frac{((1-\nu)z^2 - \chi^2)^2}{\sqrt{z^2-\chi^2}} \operatorname{th}\sqrt{z^2-\chi^2}h\Big).$$

Бесконечные системы (8)–(10) являются квазирегулярными и на собственных частотах обладают нетривиальным решением. Для вычисления данных частот и нетривиального решения использовался подход, изложенный в статье [6].

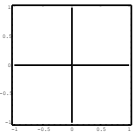
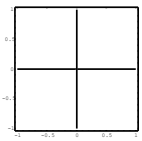
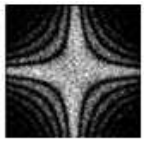
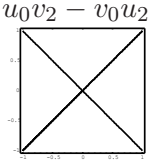
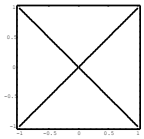
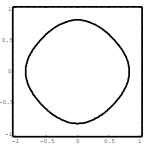
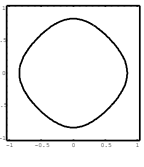
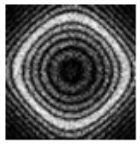
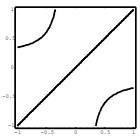
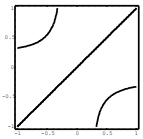
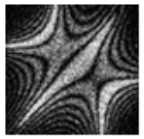
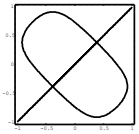
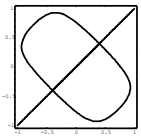
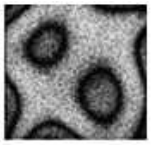
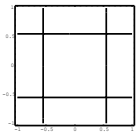
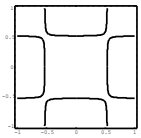
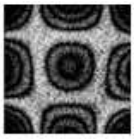
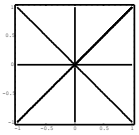
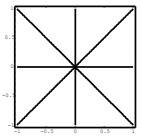
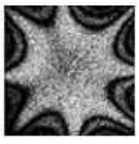
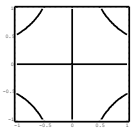
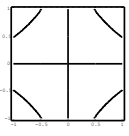
n	χ_n	$\lambda_n = \chi_n^4$	λ_n^{Ritz}	Согласно [2]	Фигура Хладни	Эксперимент [3]
$1A$	$1,878$	$12,454$	$12,43$	u_1v_1 		
$2S$	$2,257$	$25,949$	$26,40$	$u_0v_2 - v_0u_2$ 		
$3S$	$2,443$	$35,620$	$35,73$	$u_0v_2 + v_0u_2$ 		
$4SA$	$2,999$	$80,895$	$80,8$	$u_1v_2 - v_1u_2$ 		
$5SA$	$3,916$	$235,38$	$237,1$	$u_0v_3 - v_0u_3$ 		
$6S$	$4,051$	$269,31$	226	u_2v_2 		
$7A$	$4,231$	$320,67$	$316,1$	$u_1v_3 - v_1u_3$ 		
$8A$	$4,401$	$375,22$	378	$u_1v_3 + v_1u_3$ 		

Таблица 1. Фигуры Хладни для квадратной пластины

3. Численные результаты. Проводились вычисления для квадратной пластинки при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.225$ (стекло) и $\nu = 0.33$ (алюминий). В своей работе C. C. Ma, C. H. Huang [3] на основе оптического метода голографической интерферометрии, экспериментально исследовали собственные частоты и фигуры Хладни алюминиевой пластины со стороной 80 мм. В представленной ниже таблице дано сравнение первых пяти собственных частот, полученных экспериментально (AF-ESPI), согласно описанному выше алгоритму (T) и на основе метода конечных элементов (FEM).

n	1	2	3	4	5
AF-ESPI	494	735	890	1271	2330
FEM (Гц)	510	745	945	1324	2357
χ	1.816	2.194	2.470	2.928	3.903
T (Гц)	505	738	935	1314	2335
$\delta(\%)$	2.1	0.5	4.8	3.3	0.2

Таблица 2. Сравнение собственных частот с экспериментом.

В табл. 1 представлены первые собственные значения и фигуры Хладни для стеклянной квадратной пластинки, найденные по описанному в статье алгоритму в сравнении с результатами Ритца и экспериментальными данными [3].

4. Заключение. Предложен подход к вычислению собственных частот и форм колебаний упругих прямоугольных пластин со свободными краями, основанный на построении нетривиального решения соответствующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Сравнение найденных собственных частот и фигур Хладни с экспериментом и приближенным решением позволяет сделать вывод об эффективности данного метода.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Chladni E. F.* Trait d'acoustique. Paris: Courcier, 1809, 375.

[2] *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rondern // Ann. Physik. 1909,**4** Folge, Bd. 28, 737–786.

[3] *Ma C.-C., Huang C.-H.* Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates // J. Sound Vibr.2004, V. 271, 493–506.

[4] *Iguchi S.* Die Eigenschwingungen mit Klangfiguren der freien recteckigen Platte // Ing.Arch.1953, Bd. 21. 304–322.

[5] *Gorman D. J.* Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition // J. Sound Vibr.1978., V.57. 437–447.

[6] *Мелешко В. В., Папков С. О.* Изгибные колебания прямоугольной пластины со свободными краями // Теоретическая и прикладная механика. 2009, Вып. 46., С.104–111.

Meleshko V. V., Papkov S. O. *Eigenforms of the elasticity rectangular plate with free edges*. The classical problem of plate oscillations with loose edges is considered. The analysis of homogeniuos infinite system of linear algebraic equations yields eigenfrequencies and eigenforms of plate oscillatios. The comparison with experimental results is made.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Морозов Н. Ф.[*], **Альтенбах Х.**[**], **Еремеев В. А.**[**,***]

[*] *Санкт-Петербургский государственный университет*

[**] *Университет Мартина Лютера Халле-Виттенберг, Германия*

[***] *Южный научный центр РАН и Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Получены двумерные уравнения равновесия пластин и оболочек с учетом поверхностных напряжений. Представлены соотношения для тензоров усилий и моментов и найдены выражения для эффективных жесткостей оболочки. В частности, показано, что при толщинах нанодиапазона при учете поверхностных напряжений существенно изменяются жесткости пластинки, что согласуется с результатами теоретического анализа и экспериментальными данными, известными в литературе, см., например, обзор [1].

Также проведен анализ влияния поверхностных эффектов на эффективный продольный модуль Юнга пористого стержня с порами, расположенными параллельно оси стержня. Предложена комбинированная формула, которая учитывает несколько факторов — наличие поверхностных напряжений и поверхностного слоя на границах пор. Это позволяет более точно учесть наличие поверхностных эффектов, в том числе для нанопористых материалов. Показано, что в зависимости от параметров задачи возможно как уменьшение жесткости стержня с увеличением числа пор с последующим возрастанием, так и ее монотонное возрастание.

1. Введение. Многие наноматериалы обладают аномальными физическими свойствами, существенно отличающимися от свойств обычных материалов. Одно из объяснений этих отличий состоит в наличии поверхностных эффектов, роль которых для наноразмерных структур может быть чрезвычайно велика по сравнению с классической механикой [1]. Одним из направлений учета свойств поверхности служит теория упругости с поверхностными напряжениями. В ее рамках наряду с тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, определенном в объеме тела V и на его поверхности Ω, на границе тела или ее части действуют поверхностные напряжения $\boldsymbol{\tau}$. Тензор $\boldsymbol{\tau}$ обобщает известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твердых тел. Введение поверхностных напряжений позволяет, в частности, описать характерный для наноматериалов размерный эффект.

Математические исследования поверхностных напряжений в твердых телах и жидкостях восходят к работам Лапласа, Юнга, Гиббса и др., см., например, обзоры в [2, 3]. Уравнения равновесия и краевые условия для линейно упругого тела с поверхностными напряжениями имеют вид [1–3]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}\quad\text{в } V,\qquad \boldsymbol{u}\big|_{\Omega_d}=\boldsymbol{u}_0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\big|_{\Omega_f}=\boldsymbol{\phi},\quad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}-\nabla_S\cdot\boldsymbol{\tau})\big|_{\Omega_s}=\boldsymbol{\phi}. \quad (1)$$

В (1) $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, ∇ – трехмерный оператор набла, ρ — плотность, $\boldsymbol{f}$ — массовые силы, $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к поверхности тела $\Omega\equiv\partial V=\Omega_d\cup\Omega_s\cup\Omega_f$, на Ω_d заданы перемещения $\boldsymbol{u}_0$, на Ω_f действуют силы $\boldsymbol{\phi}$, а на Ω_s также действуют

поверхностные напряжения $\boldsymbol{\tau}$, ∇_S — поверхностный оператор градиента, связанный с ∇ формулой $\nabla_S = \nabla - \boldsymbol{n}\partial/\partial z$, z — координата, отсчитываемая по нормали к Ω. Тензоры напряжений и поверхностных напряжений в (1) даются формулами

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \mathbf{I} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \tau_0 \boldsymbol{A} + \lambda^S \mathbf{A} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu^S \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \frac{1}{2}\lambda \mathrm{tr}^{\,2} \boldsymbol{\varepsilon} + \mu \boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \equiv \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T\right),$$

$$U = U(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \tau_0 \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\lambda^S \mathrm{tr}^{\,2} \boldsymbol{\varepsilon} + \mu^S \boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \equiv \frac{1}{2}\left((\nabla_S \boldsymbol{u}_S) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla_S \boldsymbol{u}_S)^T\right).$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — поверхностный тензор деформаций, $\boldsymbol{u}_S = \boldsymbol{u}|_{\Omega_s}$ — вектор перемещений на Ω_s, $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$, $\mathbf{I}$ — трехмерный единичный тензор, λ и μ — постоянные Ламе, λ^S и μ^S — поверхностные упругие модули (аналоги поверхностных постоянных Ламе), τ_0 — остаточное поверхностное напряжение.

2. Эффективная изгибная жесткость оболочки с поверхностными напряжениями. В случае тела, один размеров которого (толщина h) мал, называемым далее телом-оболочкой, краевую задачу с поверхностными напряжениями (1) можно привести к уравнениям равновесия теории пластин и оболочек при учете поперечного сдвига [2, 4, 5]

$$\nabla_S \cdot \mathbf{T}^* + \boldsymbol{q} = \mathbf{0}, \quad \nabla_S \cdot \mathbf{M}^* + \mathbf{T}^*_{\times} + \boldsymbol{m} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}^* = \mathbf{T} + \mathbf{T}_S, \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \mathbf{M}_S, \quad (2)$$

$$\mathbf{T} = \langle (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \mathbf{M} = -\langle (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot z\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{n} \rangle, \quad \langle (\ldots) \rangle = \int\limits_{-h/2}^{h/2} (\ldots) G\, dz,$$

$$\mathbf{T}_S = \boldsymbol{\tau}_+ + \boldsymbol{\tau}_-, \quad \mathbf{M}_S = -\frac{h}{2}(\boldsymbol{\tau}_+ - \boldsymbol{\tau}_-) \times \boldsymbol{n}.$$

В (2) введены эффективные тензоры усилий и моментов $\mathbf{T}^*$ и $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ — тензоры усилий и моментов, используемые в линейной теории оболочек при учете поперечного сдвига, а $\mathbf{T}_S$ и $\mathbf{M}_S$ — тензоры усилий и моментов, порожденные наличием поверхностных напряжений $\boldsymbol{\tau}_+$ и $\boldsymbol{\tau}_-$, действующих на лицевых поверхностях оболочки, $\mathbf{B} = -\nabla_S \boldsymbol{n}$, $G = \det(\mathbf{A} - z\mathbf{B})$, индексами $\pm$ обозначены значения соответствующих величин при $z = \pm h/2$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{m}$ — распределенные по поверхности нагрузки и моменты.

Тензоры $\mathbf{T}_S$ и $\mathbf{M}_S$ оказываются равными [4, 5]

$$\begin{gathered} \mathbf{T}_S = 2\tau_0 \mathbf{A} + C_1^S \boldsymbol{\varepsilon} + C_2^S \mathbf{A} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{M}_S = -\left[D_1^S \boldsymbol{\chi} + D_2^S \mathbf{A} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\chi}\right] \times \boldsymbol{n}, \\ C_1^S = 4\mu^S, \quad C_2^S = 2\lambda^S, \quad D_1^S = h^2 \mu^S, \quad D_2^S = D\nu + h^2 \lambda^S/2, \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla_S \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla_S \boldsymbol{w})^T\right), \quad \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2}\left(\nabla_S \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla_S \boldsymbol{\vartheta})^T\right), \end{gathered} \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\chi}$ — двумерные тензоры деформации растяжения–сдвига и изгиба–кручения, $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{\vartheta}$ — векторы перемещения и поворота базовой поверхности оболочки.

Тензоры усилий и моментов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ имеют достаточно громоздкий вид для оболочек и здесь не приводятся, см., например, [2, 5, 7]. Более просто выглядят уравнения состояния в случае пластин, где $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_3$. Здесь $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{M}^*$ равны [4]

$$\mathbf{T}^* = C_1\boldsymbol{\varepsilon} + C_2\mathbf{A}\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} + \Gamma\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{i}_3, \quad \mathbf{M}^* = -\left[D_1\boldsymbol{\chi} + D_2\mathbf{A}\operatorname{tr}\boldsymbol{\chi}\right]\times\boldsymbol{i}_3, \tag{4}$$

$$C_1 = C(1-\nu) + 4\mu^S,\ C_2 = C\nu + 2\lambda^S,\ D_1 = D(1-\nu) + h^2\mu^S,\ D_2 = D\nu + h^2\lambda^S/2.$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор поперечного сдвига: $\boldsymbol{\gamma} = \nabla_S(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{\vartheta}$. В (3) и (4) C_1, C_2, C_1^S, C_2^S — тангенциальные жесткости, D_1, D_2, D_1^S, D_2^S — жесткости пластинки на изгиб, а Γ — жесткость на поперечный сдвиг. Эффективные тангенциальная и изгибная жесткости пластинки даются соотношениями

$$C^* \equiv C_1 + C_2 = C + 4\mu^S + 2\lambda^S, \quad D^* \equiv D_1 + D_2 = D + h^2\mu^S + h^2\lambda^S/2.$$

На рис. 1 показана зависимость изгибной жесткости D^* от толщины h для наноразмерной пластинки из алюминия. Значения упругих постоянных взяты из [1].

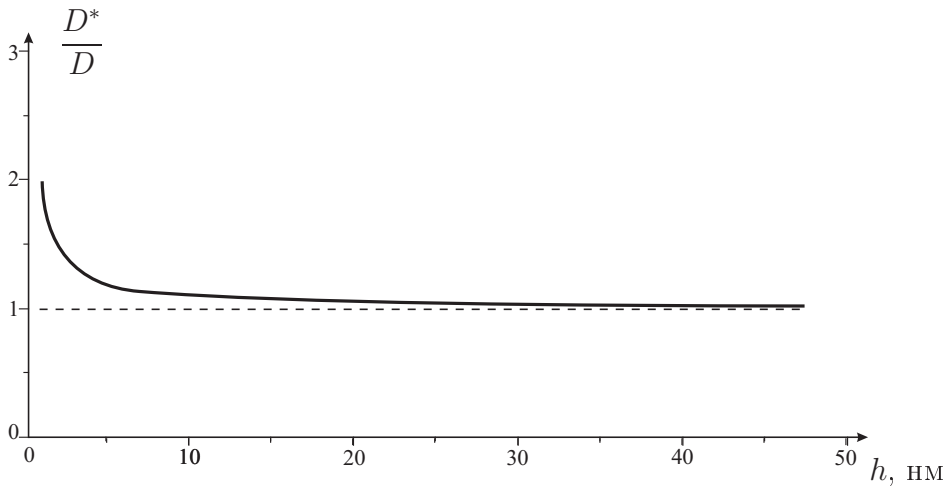


Рис. 1. Зависимость изгибной жесткости D^* от толщины h.

4. Эффективный модуль Юнга для нанопористого стержня. Полученные выше результаты о влиянии поверхностных напряжений показывают их существенное влияние для достаточно тонких оболочек и пластин. Большего влияния можно ожидать в случае тел с развитой поверхностью. Здесь в качестве примера рассмотрим задачу о растяжении–сжатии пористого стержня, имеющего n пор, суммарной площадью S, проходящих параллельно его оси. Далее будем считать площадь S фиксированной, но число пор n может меняться. В [6] проведен анализ зависимости эффективного модуля Юнга от n, учитывающий как поверхностные напряжения, действующие на границах пор, так и наличие тонкого поверхностного слоя, окружающего поры, со свойствами, отличными от основного материала. Пусть E — модуль Юнга материала, E_S — поверхностный аналог модуля Юнга,

а E_f — модуль Юнга тонкого слоя материала, окружающего поры. В рамках различных подходов к описанию поверхностных эффектов эффективный продольный модуль Юнга дается одной из формул

$$E_\circ^* = E\,(1-\varphi)\,, \quad E_S^* = E_\circ^* + E_S\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}F}\sqrt{n}, \quad E_f^* = E_\circ^* + (E_f - E)\frac{S_\delta}{F}, \tag{5}$$

где $\varphi = S/F$ — пористость, F — полная площадь сечения стержня, включая площадь пор, $S_\delta(n)$ — суммарная площадь сечения поверхностных слоев, окружающих поры. Величины $E_\circ^*$, E_S^*, E_f^* представляют собой соответственно формулы для стержня без поверхностных эффектов, для стержня с поверхностными напряжениями согласно [1], и в рамках теории композитов [8].

В общем случае эффективный модуль Юнга стержня E^* равен

$$E^* = E_\circ^* + E_S\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}F}\sqrt{n} + (E_f - E)\frac{S_\delta(n)}{F}, \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что E^* возрастает с ростом n, если выполняется неравенство

$$E_S\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}F} + (E_f - E)\frac{2\delta\sqrt{\pi S}}{F} > 0.$$

Если же оно нарушается, что возможно, если поверхностный слой более мягкий по сравнению с матрицей, то зависимость E^* является немонотонной, вначале E^* убывает, но начиная с некоторого n опять возрастает. Качественные зависимости E^* от $\sqrt{n}$ показаны на рис. 2 (сплошные линии). Пунктиром на рис. 2 также показаны зависимости для $E_\circ^*$, E_S^* и E_f^*.

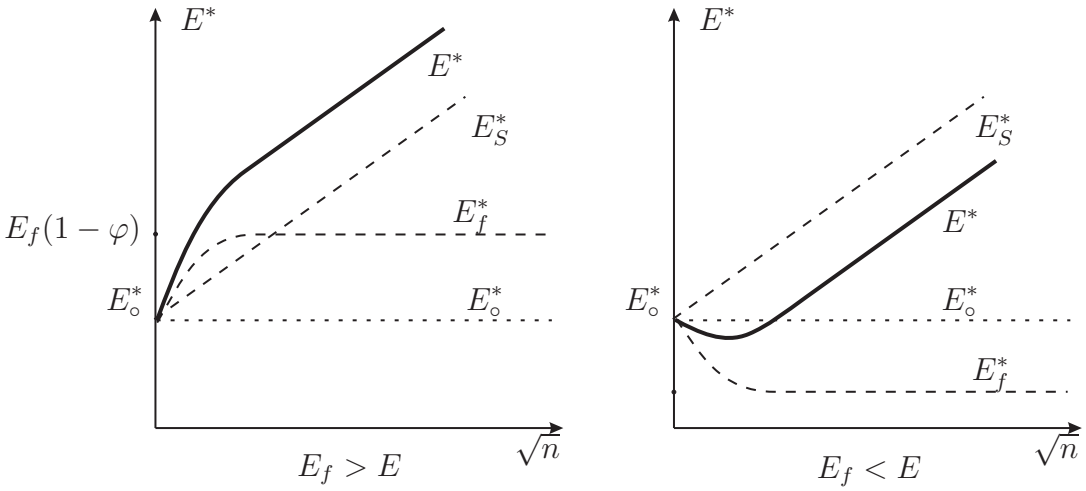


Рис. 2. Зависимости эффективных модулей Юнга E^*, $E_\circ^*$, E_S^* и E_f^*, полученных на основе разных теорий, от квадратного корня из числа пор $\sqrt{n}$ при фиксированной площади пор S для $E_f > E$ (слева) и для $E_f < E$ (справа).

Заключение. В работе проведен анализ влияния поверхностных эффектов на свойства упругих материалов на примере эффективной изгибной жесткости пластины и эффективного продольного модуля Юнга для пористого стержня с порами, расположенными параллельно его оси.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (09-01-00459), DFG (AL 341/33-1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Duan H. L., Wang J., Karihaloo B. L.* Theory of elasticity at the nanoscale // Adv. in Appl. Mech. 2008. V. 42, pp. 1–68.

[2] *Альтенбах Х., Еремеев В. А., Морозов Н. Ф.* Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений // Изв. РАН. МТТ. 2010. №3.

[3] *Altenbach H., Eremeyev V. A., Lebedev L. P.* On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses // Z.Angew. Math. Mech. (ZAMM). 2010. Vol. 90. № 3, pp. 231–240.

[4] *Еремеев В. А., Альтенбах Х., Морозов Н. Ф.* О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // Доклады РАН. 2009. Т. 424. № 5. С. 618–620.

[5] *Альтенбах Х., Еремеев В. А., Морозов Н. Ф.* Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // Доклады РАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 472–476.

[6] *Еремеев В. А., Морозов Н. Ф.* Об эффективной жесткости нанопористого стержня // Доклады РАН. 2010. Т. 432. № 4. С. 1–4.

[7] *Altenbach H., Eremeyev V. A.* Thin-walled structures made of foams // Cellular and Porous Materials: Modeling – Testing – Application. CISM Courses and Lecture Notes №521. H. Altenbach and A. Öchsner (eds), Springer-Verlag, Wien, 2010, pp. 167–242.

[8] *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Morozov N. F., Altenbach H., Eremeyev V. A. *Mechanics of Solids with Surface Effects*. We discuss the influence of a surface effects on the effective properties of materials such as effective bending stiffness of plates and shells or stiffness of rods. The interest to the investigation of the surface effects is recently grown with respect to nanomechanics. The surface effects play important role for such nanosized materials as films, nanoporous materials, etc. We consider two models of surface effects. The first one is based on the concept of surface stresses which are the generalisation of surface tension for the case od solids. The second model used more classical approach based on the consideration of the thin surface layer which mechanical properties differ from the bulk material. Within the framework of these models we present the effective stiffness properties of plates and shells and the nanoporous rods.

The surface stresses have an influence on the effective stiffness properties of the elastic plates and shells. In the linear case this modification reduces to the addition of new terms to the elastic stiffness parameters. We show that the surface elasticity makes a shell more stiffer in comparison with the shell without surface stresses. The second model shows that the effective stiffness of plate with surface layers depends on the ratio of elastic moduli of bulk and surface materials. On the basis of these two models we propose model which take into account not only surface stresses but also the surface layer. This model predicts more complicated behaviour of the nanosized material. In particular, the nanoporous rod may be stiffer or softer then solid rod and the effective stiffness may be non-monotonous function of the pores size.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРОУПРУГОГО НЕЛИНЕЙНОГО МНОГОСЛОЙНОГО ПЛАСТА С ТРЕЩИНОЙ ПРИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Наседкина А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается связанная пороупругая задача для цилиндрического слоя с кольцевой внутренней трещиной. Нелинейная нестационарная осесимметричная задача решается по методу конечных элементов с использованием аналогии между задачами поро- и термоупругости. Результаты расчетов позволяют проанализировать распределение порового давления и концентрацию напряжений вокруг трещины.

В работе представлена математическая и численная модель процесса разрушения многослойного угольного пласта с кольцевой внутренней трещиной при гидродинамическом воздействии на него с целью извлечения метана. Гидродинамическое воздействие осуществляется путем нагнетания в пласт воды под давлением через скважину, пробуренную с земной поверхности. Закачиваемая жидкость перемещается вглубь пласта, оттесняя и сжимая метан, находящийся первоначально в порах в связанном сорбированном состоянии. При достижении давлением величины гидроразрыва в пласте появляются трещины, и метан высвобождается из пор. Нарушение структуры угольного пласта приводит к газоотдаче в зоне дегазации.

Математическая модель формулируется с позиции теории пороупругости в осесимметричной постановке. Угольный пласт рассматривается как двухфазная пористая среда, состоящая из твердой фазы скелета и жидкой фазы фильтрующегося в порах флюида. Проводится связанный нестационарный анализ для твердой и жидкой фаз, то есть совместное решение уравнений деформации пористого тела и фильтрации жидкости по закону Дарси в пористой среде. Пласт состоит из трех слоев (угольный слой, глинистый и песчанистый сланцы), имеющих различные механические и фильтрационные свойства. Угольный слой имеет трещину и характеризуется нелинейной зависимостью коэффициентов фильтрации от порового давления. Данная работа продолжает исследования [1–3].

Рассмотрим однородную насыщенную пористую среду с упругой матрицей. Деформация упругого пористого массива описывается уравнением движения

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \rho\mathbf{f}, \tag{1}$$

где ρ — плотность, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор перемещения, $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор напряжений второго ранга, $\mathbf{f}$ — вектор плотности массовых сил.

Напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и пористость ϕ определяются тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и функцией порового давления p согласно основным уравнениям пороупругости

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{c}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}\,(p - p_0), \tag{2}$$

$$\phi - \phi_0 = \mathbf{b} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{N}(p - p_0), \tag{3}$$

где $\mathbf{c}$ — тензор упругих постоянных четвертого ранга, $\mathbf{b}$ — тензор Био второго ранга, N^{-1} — обратный модуль Био, который связывает изменение пористости с изменением давления при постоянной деформации, $\boldsymbol{\sigma}_0$, ϕ_0, p_0 — начальные напряжения, пористость и поровое давление соответственно.

Закон Дарси фильтрации жидкости в пористой среде записывается соотношением

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{K}}{\rho_f g} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}), \tag{4}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости фильтрации, $\mathbf{K}$ — тензор коэффициентов фильтрации второго ранга, ρ_f — плотность жидкости, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения.

Используется также уравнение неразрывности в форме

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) = 0 \tag{5}$$

и уравнение состояния жидкости

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \frac{dp}{K_f} \tag{6}$$

где K_f — объемный модуль сжатия жидкости.

Подставляя (2) в (1), (4), (6), (3) в (5) и положив тензор Био для насыщенной пористой среды единичным, получаем систему уравнений:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{I}\, p) = \rho \mathbf{f}, \tag{7}$$

$$\mathbf{I} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{M}\dot{p} - \nabla \cdot (\frac{\mathbf{K}}{\rho_f g} \cdot \nabla p) = 0, \tag{8}$$

где $\dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{K_f}\phi$, $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Система уравнений насыщенной пороупругой среды (7), (8) для изотропного осесимметричного тела в цилиндрической системе координат примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{K(p)}{\rho_{f_0} g}\frac{\partial p}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K(p)}{\rho_{f_0} g}\frac{\partial p}{\partial z}\right), \tag{11}$$

где $\varepsilon = \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$; r, z — цилиндрические координаты.

Введем граничные условия для системы (9)–(11). На границе скважины $r = r_0$ будем задавать поровое давление:

$$p(r, z, t) = p^*(t), \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0, \quad r = r_0, \tag{12}$$

где $p^*(t)$ — линейная зависимость давления от времени, где давление линейно возрастает от исходного пластового давления p_s до некоторого максимального значения p_2, достигнутого в момент прекращения закачки жидкости в скважину $t = t_2$:

$$p^*(t) = (p_s(t_2 - t) + p_2 t)/t_2, \quad t \in [0, t_2].$$

На большом удалении от скважины $r = R$ примем однородное условие отсутствия потока и следующие механические граничные условия:

$$v_{fr}(r, z, t) = 0, \quad u_r(r, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz} = 0; \quad r = R. \tag{13}$$

Предположим также, что отсутствует утечка рабочей жидкости в кровлю $z = H$ и подошву $z = 0$ пласта, и пласт находится в условиях сжатия массивом горных пород общей толщины h со средней плотностью ρ_h:

$$v_{fz}(r, z, t) = 0, \quad \sigma_{zz} = \rho_h g h, \quad \sigma_{rz} = 0; \quad z = H, \tag{14}$$

$$v_{fz}(r, z, t) = 0, \quad u_z(r, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz} = 0; \quad z = 0. \tag{15}$$

Введем дополнительное граничное условие на берегах трещины:

$$p(r, z, t) = p^*(t), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zz} = 0, \quad z = z_l, \quad r_0 \leqslant r \leqslant r_l, . \tag{16}$$

Начальные условия задачи для перемещений и порового давления будем вычислять из предварительного решения статической задачи, а начальные скорости v_r, v_z считаем нулевыми.

Численное решение нелинейной нестационарной задачи пороупругости (9)–(16) осуществляется с помощью техники метода конечных элементов, реализованной в пакете ANSYS версии 11.0. Замечено, что при соответствующей замене переменных и обозначений задачу пороупругости можно рассматривать как задачу термоупругости, что позволяет использовать стандартные модули решения задач термоупругости в пакете ANSYS. Так как порядок входных данных задачи сильно различается, то для сходимости численного решения расчеты проводятся в безразмерных переменных.

В качестве входных данных были взяты параметры трехслойного угольного пласта вблизи одной из скважин Краснодонецкого месторождения Донбасского бассейна с трещиной в угольном слое. Пласт состоит из слоя угля (h_1) и двух слоев сопутствующих пород — глинистого (h_2) и песчанистого (h_3) сланцев (рис. 1).

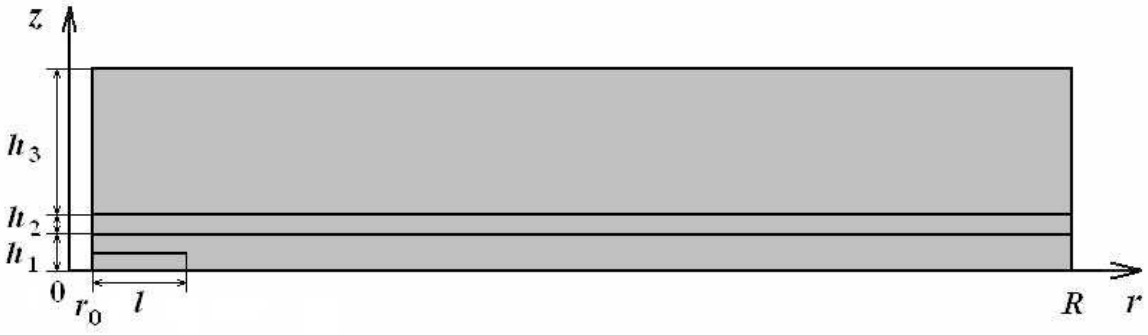


Рис. 1. Схема трехслойного угольного пласта с трещиной в угольном слое

В угольном пласте еще до начала процесса гидродинамического воздействия имеется некоторая трещина длины l, расположенная в середине угольного слоя пласта на высоте $z = h_1/2$. Компоненты диагольнального тензора фильтрации $K_{ii} = K$ являются существенной характеристикой угольного пласта. Для угольного слоя была принята нелинейная зависимость коэффициента фильтрации K от порового давления p.

Для моделирования сингулярности напряжений в окрестности вершины трещины при построении конечно-элементной сетки создается слой квадратичных конечных элементов со сдвигом срединных узлов на четверть длины стороны для элементов, окружающих вершину трещины.

Для расчета коэффициентов интенсивности напряжений использовался метод аппроксимации перемещений берегов трещины. Аппроксимирующий контур состоял из пяти узлов сингулярных элементов на берегах трещины. В результате были получены следующие значения коэффициентов интенсивности напряжений: K_I=0.0592, K_{II}=0.00287, K_{III}=0.

Результаты расчетов позволяют получить картины распределения порового давления, перемещений, деформаций и напряжений, определить значения функции порового давления в различные моменты времени и в различных точках расчетной области, а также провести анализ концентрации напряжений в вершине трещины. На основе анализа распределения давления и концентрации напряжений было определено влияние трещины на величину зоны дегазации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Наседкина А. А., Труфанов В. Н.* Конечно-элементное моделирование процесса гидродинамического расчленения многослойного угольного пласта // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2006. № 1. С. 61–70.

[2] *Nasedkina A. A., Nasedkin A. V., Iovane G.* A model for hydrodynamic influence on a multi-layer deformable coal seam // Computational Mechanics. 2008. № 3, pp. 379–389.

[3] *Наседкина А. А., Наседкин А. В., Иоване Ж.* Моделирование нестационарного воздействия на многослойный пороупругий пласт с нелинейными геомеханическими свойствами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2009. № 4. С. 23–32.

Nasedkina A. A. *Modelling of poroelastic nonlinear multilayer bed with crack under hydrodynamic influence*. The paper considers a coupled poroelastic problem for a cylindric layer with a circular inner crack. Nonlinear transient axisymmetric problem is solved with the help of finite element method using the analogy between poro- and thermoelasticity. The results of the computations allow analysing the distribution of the pore pressure and stress concentration around the crack.

ВИБРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ РЭЛЕЯ–МАРАНГОНИ ПРИ НАГРЕВЕ СВЕРХУ

Новосядлый В. А.[*], **Прозоров О. А.**[**]
[*] *ФГНУ НИИ «Спецвузавтоматика», Ростов-на-Дону*
[**] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрены случаи возникновения вибрационной конвекции в однослойной и двуслойной системах при нагреве сверху. Проводится асимптотический и численный анализ колебательной неустойчивости, результаты сравниваются. В случае больших градиентов температуры в уравнениях конвекции возникает малый параметр при старших производных, что позволяет применить метод Вишика–Люстерника и построить главные члены асимптотики критических значений параметров. Исследуется влияние вибрационного параметра на асимптотическое поведение нейтральных кривых. Основное внимание уделяется однослойной системе. В докладе также будут изложены результы для двуслойной системы.

1. Введение.

Задача о влиянии высокочастотной вибрации на возникновение конвекции впервые рассмотрена в [1]. Был применен метод осреднения для случая, когда жидкость заключена в контейнер с твердыми границами. В случае свободной поверхности применяются обобщенные уравнения Обербека–Буссинеска [2]. В [3] выведены осредненные уравнения конвекции в слое со свободной границей, деформирующейся в целом. В данной работе рассмотрен случай, когда свободная граница недеформируема в среднем, жидкость слабо неизотермическая и нагревается сверху.

2. Постановка задачи.

В работе [3] показано, что поставленная задача об исследовании конвекции сводится к решению спектральной задачи

$$\lambda L v = L^2 v + Ra\alpha^2\theta - \overline{\mu}\alpha^2(D\Phi + \theta), \qquad \lambda Pr\theta = L\theta - v, \tag{1}$$

$$z = 0: \quad v = 0, \quad D^2 v - Ma\alpha^2\theta = 0, \quad D\theta - Bi\theta = 0, \quad \Phi = 0, \tag{2}$$

$$z = 1: \quad v = Dv = 0, \quad B_1 D\theta + B_0\theta = 0, \quad D\Phi + \theta = 0, \tag{3}$$

$$D = \frac{d}{d\,z}, \quad L = D^2 - \alpha^2.$$

$Bi = \dfrac{b_1 h}{k_1}$, $B_0 = \dfrac{b_2 h}{k_2}$ —числа Био, $\overline{\mu} = r^2 Ra^2$, $r = \dfrac{a\sin\varphi}{gh^2}\sqrt{\dfrac{\chi\nu}{2}}$ — безразмерная амплитуда скорости вибрации.

Рассмотрим случай, когда слой нагревается со стороны свободной поверхности, причем число Рэлея Ra отрицательно и велико по модулю $Ra \to -\infty$, а динамическое число Бонда $B = \dfrac{Ra}{Ma}$ конечно, тогда число Марангони также стремится к $-\infty$. Исследуем поведение спектрального параметра λ при $Ra \to -\infty$.

Известно, что при нагреве сверху ($Ra < 0$, $Ma < 0$) в отсутствии вибрации ($\mu = 0$) возможна колебательная неустойчивость [5]. Далее исследуется поведение областей колебательной неустойчивости в зависимости параметра μ, при этом начальные значения параметров выбраны такими же как в [5]. Кроме того, при вычислениях предполагается, что параметры Ra и μ связаны между собой соотношением $\mu = r^2 Ra^2$, где r^2 — безразмерная скорость вибрации.

Сначала приведем численные результаты, основное внимание уделим влиянию вибрационного параметра r. Вычисления показывают, что при фиксированном r с ростом параметра Ra по абсолютному значению области колебательной неустойчивости замкнуты, поднимаются вверх и расширяются, что соответствует увеличению порога устойчивости и свидетельствует о вибрационной стабилизации.

Если же фиксировать $Ra = -1.5 \times 10^6$, то с ростом параметра r области колебательной неустойчивости также поднимаются вверх и расширяются.

Соответствующие нейтральные кривые изображены на рисунках 1–2.

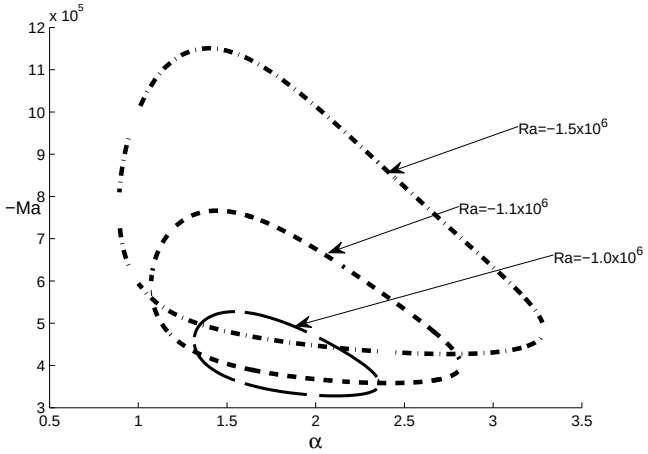


Рис. 1. Нейтральные кривые $Ma(\alpha)$ при $r = 10^{-3}$.

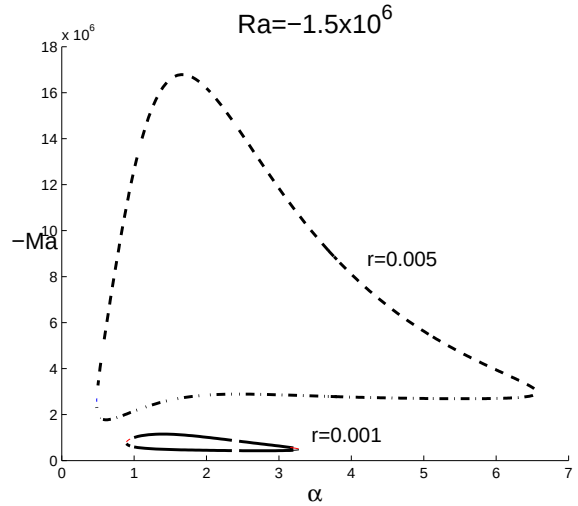


Рис. 2. Нейтральные кривые $Ma(\alpha)$ при $r = 10^{-3}$, $\quad r = 5 \times 10^{-5}$, $\quad Ra = -1.5 \times 10^6$.

3. Асимптотика спектрального параметра при больших отрицательных градиентах температуры

По аналогии с [5] введем малый параметр $\varepsilon = \sqrt[4]{-\dfrac{Pr}{Ra}}$, тогда $\overline{\mu} = r^2\dfrac{Pr^2}{\varepsilon^8}$, $Ra = -\dfrac{Pr}{\varepsilon^4}$, $Ma = -\dfrac{Pr}{\varepsilon^4 B}$. Заметим, что параметр B показывает отношение сил плавучести к силам поверхностного натяжения и определяется только физическими свойствами жидкости и размерами слоя.

В задаче (1)–(3) сделаем замены $\lambda = \dfrac{\overline{\lambda}}{\varepsilon^2}$, $\theta = \dfrac{\varepsilon^2 T}{Pr}$, $\Phi = \dfrac{\varepsilon^2 F}{Pr}$, $\overline{r}^2 = Pr\, r^2\varepsilon^{-4}$. Тогда для неизвестных $\overline{\lambda}$,u,T,F получим систему уравнений и краевых условий

$$\overline{\lambda}Lu = \varepsilon^2 L^2 u - \alpha^2 T - \overline{r}^2\alpha^2(DF + T), \quad \overline{\lambda}T = \frac{\varepsilon^2}{Pr}LT - u, \quad LF = -DT \tag{4}$$

$$z = 0: \quad u = 0, \quad \varepsilon^2 D^2 u + \frac{\alpha^2}{B}T = 0, \quad DT - BiT = 0, \quad F = 0, \tag{5}$$

$$z = 1: \quad u = Du = 0, \quad B_1 DT + B_0 T = 0, \quad DF + T = 0. \tag{6}$$

Будем разыскивать неизвестные в виде

$$v = w(z) + \overline{w}(\overline{z}) + \widetilde{w}(\widetilde{z}), \quad \theta = T(z) + \overline{T}(\overline{z}) + \widetilde{T}(\widetilde{z}), \quad \Phi(z) = F(z) + \overline{F}(\overline{z}) + \widetilde{F}(\widetilde{z}).$$

$w(z)$, $T(z)$, $F(z)$ — решения вырожденной задачи, $\overline{w}(\overline{z})$, $\overline{\theta}(\overline{z})$, $\overline{F}(\overline{z})$ — пограничные решения на твердой стенке, $\widetilde{w}(\widetilde{z})$, $\widetilde{T}(\widetilde{z})$, $\widetilde{F}(\widetilde{z})$ — пограничные решения на свободной границе, где $\overline{z} = \dfrac{1-z}{\varepsilon}$, $\widetilde{z} = \dfrac{z}{\varepsilon}$. Система уравнений для вырожденных решений имеет вид

$$\lambda Lw = -\alpha^2 T - r^2(DF + T), \quad \lambda PrT = -w, \quad LF = -DT. \tag{7}$$

Уравнения для пограничных решений вблизи свободной границе $z = 0$

$$\begin{aligned} &\lambda(D^2 - \alpha^2\varepsilon^2)\widetilde{w} = (D^2 - \alpha^2\varepsilon^2)^2\widetilde{w} - \varepsilon^2\alpha^2\widetilde{T} - r^2(\varepsilon D\widetilde{F} + \varepsilon^2\widetilde{T}), \\ &\lambda\widetilde{T} = \frac{1}{Pr}\left(D^2 - \alpha^2\varepsilon^2\right)\widetilde{T} - \widetilde{w}, \quad (D^2 - \alpha^2\varepsilon^2)\widetilde{F} = -\varepsilon D\widetilde{T}. \end{aligned} \tag{8}$$

Краевые условия при $z = 0$ на свободной поверхности:

$$w(0) + \widetilde{w}(0) = D^2\widetilde{w}(0) + \varepsilon^2 D^2 w(0) + \frac{\alpha^2}{B}\left(T(0) + \widetilde{T}(0)\right) = \tag{9}$$

$$D\widetilde{T}(0) + \varepsilon(DT(0) - Bi(T(0) + \widetilde{T}(0))) = F(0) + \widetilde{F}(0) = 0. \tag{10}$$

Система пограничных уравнений вблизи твердой границы $z = 1$ аналогична (8) с заменой знака перед нечетными производными.

$$\begin{aligned} &\lambda(D^2 - \alpha^2\varepsilon^2)\overline{w} = (D^2 - \alpha^2\varepsilon^2)^2\overline{w} - \varepsilon^2\alpha^2\overline{T} - r^2(-\varepsilon D\overline{F} + \varepsilon^2\overline{T}), \\ &\lambda\overline{T} = \frac{1}{Pr}\left(D^2 - \alpha^2\varepsilon^2\right)\overline{T} - \overline{w}, \quad (D^2 - \alpha^2\varepsilon^2)\overline{F} = \varepsilon D\overline{T}. \end{aligned} \tag{11}$$

Краевые условия примут вид:

$$w(1)+\overline{w}(0)=\varepsilon Dw(1)-D\overline{w}(0)=B_1D\overline{T}(0)-\varepsilon(B_1DT(1)+B_0(T(1)+\overline{T}(0)))=$$
$$=D\overline{F}(0)-\varepsilon(DF(1)+T(1)+\overline{T}(0))=0. \quad (12)$$

Неизвестные разыскиваем по степеням малого параметра ε в виде рядов.

$$\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\dots,$$

$$w=w_0(z)+\varepsilon w_1(z)+\dots,\quad T=T_0(z)+\varepsilon T_1(z)+\dots,\quad F=F_0(z)+\varepsilon F_1(z)+\dots,$$
$$\widetilde{w}=\widetilde{w}_0(\widetilde{z})+\varepsilon\widetilde{w}_1(\widetilde{z})+\dots,\quad \widetilde{T}=\widetilde{T}_0(\widetilde{z})+\varepsilon\widetilde{T}_1(\widetilde{z})+\dots,\quad \widetilde{F}=\varepsilon\widetilde{F}_1(\widetilde{z})+\varepsilon^2\widetilde{F}_2(\widetilde{z})+\dots,$$
$$\overline{w}=\varepsilon\overline{w}_1(\overline{z})+\varepsilon^2\overline{w}_2(\overline{z})\dots,\quad \overline{T}=\varepsilon\overline{T}_1(\overline{z})+\varepsilon^2\overline{T}_2(\overline{z})\dots,\quad \overline{F}=\varepsilon^2\overline{F}_2(\overline{z})+\varepsilon^3\overline{F}_3(\overline{z})+\dots,$$

Подстановка этих разложений в (4)–(12) дает системы для коэффициентов разложений. В нулевом приближении для вырожденной задачи имеем уравнения:

$$\lambda_0Lw_0=-\alpha^2T_0-\alpha^2\overline{r}^2(DF_0+T_0),\quad \lambda_0T_0=-w_0,\quad LF_0=-DT_0. \quad (13)$$

Для погранслойных решений на твердой стенке запишем краевую задачу в виде

$$-\lambda_0\frac{d^2}{d\overline{z}^2}\overline{w}_0(\overline{z})+\frac{d^4}{d\overline{z}^4}\overline{w}_0(\overline{z})=0,\quad \lambda_0\overline{T}_0(\overline{z})\,\mathrm{Pr}=\frac{d^2}{d\overline{z}^2}\overline{T}_0(\overline{z})-\overline{w}_0(\overline{z})\,\mathrm{Pr},$$
$$\frac{d}{d\overline{z}}\overline{F}_0(\overline{z})-\frac{d}{d\overline{z}}\overline{T}_0(\overline{z})=0. \quad (14)$$

Краевые условия: (рассматривается случай $B_0=0$,$B_1\neq0$).

$$w_0(1)+\overline{w}_0(0)=\frac{d\overline{w}_0}{d\overline{z}}\Big|_{\overline{z}=0}=\frac{d\overline{T}_0}{d\overline{z}}\Big|_{\overline{z}=0}=\frac{dF_0}{dz}\Big|_{z=1}-\frac{d\overline{F}_0}{d\overline{z}}\Big|_{\overline{z}=0}+T_0(1)+\overline{T}_0(0)=0. \quad (15)$$

Погранслойное решение (14) имеет вид $\overline{w}_0=0,\quad \overline{T}_0=0,\quad \overline{F}_0=0$. Погранслой на свободной поверхности:

$$-\lambda_0\frac{d^2}{d\widetilde{z}^2}\widetilde{w}_0(\widetilde{z})+\frac{d^4}{d\widetilde{z}^4}\widetilde{w}_0(\widetilde{z})=0,\quad -\lambda_0\widetilde{T}_0(\widetilde{z})\,\mathrm{Pr}+\frac{d^2}{d\widetilde{z}^2}\widetilde{T}_0(\widetilde{z})-\widetilde{w}_0(\widetilde{z})\,\mathrm{Pr}=0,$$
$$\frac{d^2}{d\widetilde{z}^2}\widetilde{F}_0(\widetilde{z})+\frac{d}{d\widetilde{z}}\widetilde{T}_0(\widetilde{z})=0. \quad (16)$$

Краевые условия на свободной поверхности:

$$w_0(0)+\widetilde{w}(0)=T_0(0)+\widetilde{T}_0(0)=\frac{d\widetilde{T}_0}{d\widetilde{z}}\Big|_{\widetilde{z}=0}=F_0(0)+\widetilde{F}_0(0)=0. \quad (17)$$

Подстановка решений краевых задач (13), (14), (16) в краевые условия (15), (17) дает два дисперсионных соотношения. Из первого при $\lambda_0=i\omega$ находим частоту нейтральных колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{\alpha^2}{B(\sqrt{Pr}+1)}}. \quad (18)$$

Второе дисперсионное уравнение имеет вид

$$P_1 X_2 \cosh P_1 \sinh P_2 - P_2 X_1 \cosh P_2 \sinh P_1 = 0.$$

Таким образом, могут быть найдены главные члены асимптотики. Сравнение асимптотических и численных результатов показывает хорошее совпадение уже в случае $\varepsilon = 0.03$,$\alpha = 2$,$Bi = 0$,$Ra = -3 \times 10^6$,$r^2 = 10^{-6}$. Результаты приведены в таблице.

	C_1	C_2	Ma_1	Ma_2
Счет	617.18	834.51	-973964	-0.348×10^7
Асимптотика	599.31	820.15	-973964	-0.34×10^7

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (09-01-00658-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.* О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР, МЖГ 1966. № 5. С. 51–55.

[2] *Lyubimov D. V.* Thermovibrational flows in a fluid with a free surface // Microgravity Quarterly. 1994. V. 4, pp. 117–122.

[3] *Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л.* Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. 2002. Т. 66. вып. 4.

[4] *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5.

[5] *Rednikov A. Ye., Colinet P., Velarde M. G. and Legros J. C.* Rayleigh–Marangoni oscillatory instability in a horizontal liquid layer heated from above: coupling and mode mixing of internal and surface dilational waves // Journal of Fluid Mechanics (2000), 405: pp. 57–77 Cambridge University Press.

Novosiadliy V. A., Prozorov O. A. *Marangoni–Rayleigh vibrational convection in a liquid layer heated from above.* The problem of convection in a fluid layer under high frequency vibrations is investigated. Special attention is paid to a case when liquid is heated from above. It's shown that marginal instability exists when Rayleigh number is large enough. Also the effect of vibrations on the onset of convection is taken into account. Numerical results are compared with the ones obtained via boundary-layer method of Vishik–Lusternik.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ В ВЕРШИНАХ КВАДРАТА ВНУТРИ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Островская И. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследуется устойчивость стационарного вращения системы четырех одинаковых частиц, помещенных в вершины квадрата внутри круговой области. Задача рассмотрена в точной нелинейной постановке. Приведены необходимые и достаточные условия устойчивости.

Рассмотрим движение системы четырех одинаковых частиц на плоскости внутри круга радиуса R, описываемое уравнениями ($k = \overline{1,\,4}$)

$$\dot{\overline{z}}_k = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{4}\frac{\overline{z}_k - \overline{z}_j}{|z_k - z_j|^3} - \frac{1}{4\pi i}\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\overline{z}_k}{|z_k|\,|R^2 - z_k\overline{z}_j|} + \frac{(|z_k| + |z_j|)(R^2 - \overline{z}_k z_j)\overline{z}_j}{|R^2 - z_k\overline{z}_j|^3}\right). \quad (1)$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$; x_k, y_k — декартовы координаты k-й частицы.

Система (1) гамильтонова с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{4}\frac{1}{|z_k - z_j|} - \frac{1}{4\pi}\sum_{j,k=1}^{4}\frac{1}{|z_k - \widehat{z}_j|}, \quad (2)$$

где $\widehat{z}_k = R^2/\overline{z}_k$ — отражение k-й частицы границей круга. Она имеет два интеграла: энергию H и суммарный момент инерции $M = \sum\limits_{k=1}^{4}|z_k|^2$.

Уравнения (1) возникают в случае, когда сила взаимодействия между j-й и k-й частицами потенциальна с потенциалом $1/r_{jk}$, где r_{jk} — расстояние между этими частицами.

Система (1) инвариантна относительно группы G, образующие которой суть зеркальное отражение j: $z \mapsto \overline{z}$ и вращение g^{rot}: $z \mapsto e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Действие $g \mapsto L_g$ группы G на фазовом пространстве Z определяется равенством: $L_g\, z = (gz_1, \ldots, gz_4)$, для $z = (z_1, \ldots, z_4) \in Z$ и $g \in G$.

Напомним [1–3], что стационарным называется движение, которое осуществляется преобразованиями некоторой однопараметрической подгруппы группы симметрии данного уравнения.

Система (1) имеет стационарное решение

$$z_k = e^{i\omega t}u_k, \quad u_k = R_0 e^{\frac{\pi i}{2}(k-1)}, \quad k = \overline{1,\,4}, \qquad p = \frac{R_0^2}{R^2}, \quad 0 < R_0 < R, \quad (3)$$

$$\omega = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{8\pi R_0^2} + \frac{p}{2\pi R_0^2}\Big(\frac{1 - p^2}{\sqrt{(1 + p^2)^3}} + \frac{3p^2 + 1}{(1 - p^2)^2}\Big).$$

Система четырех одинаковых частиц, расположенных равномерно на окружности радиуса R_0, внутри круга радиуса R, вращается с угловой скоростью $\omega = \omega(p)$.

Замена $z_k(t) = e^{i\omega t}v_k(t)$ в системе (1) приводит к уравнению относительного движения:

$$\dot{\overline{v}}_k = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{4}\frac{\overline{v}_k - \overline{v}_j}{|v_k - v_j|^3} - \frac{1}{4\pi i}\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\overline{v}_k|v_k|^{-1}}{|R^2 - v_k\overline{v}_j|} + \frac{(|v_j| + |v_k|)(R^2 - \overline{v}_k v_j)\overline{v}_j}{|R^2 - v_k\overline{v}_j|^3}\right) + i\omega\overline{v}_k \tag{4}$$

с относительным гамильтонианом

$$E(v) = H(v) + \frac{\omega}{2}M(v), \quad M = \sum_{k=1}^{4}|v_k|^2. \tag{5}$$

На каждой плоскости переменных v_k введем новые координаты (r, θ):

$$v_k = \sqrt{2(\frac{R_0^2}{2} + r_k)}e^{i(\frac{2\pi}{n}(k-1)+\theta_k)}, \ k = \overline{1,\,4}. \tag{6}$$

Замена переменных (6) сохраняет гамильтонову структуру системы. В переменных $\rho = (r, \theta)$ уравнение (4) имеет вид

$$\dot{r}_k = \frac{\partial E}{\partial \theta_k}(v(\rho)), \quad \dot{\theta}_k = -\frac{\partial E}{\partial r_k}(v(\rho)), \quad k = \overline{1,\,4}. \tag{7}$$

Стационарному движению (3) отвечает непрерывное семейство равновесий системы (7), расположенное на прямой $\Gamma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^8 : r = 0, \theta_1 = \cdots = \theta_4\}$.

Относительный гамильтониан $E(v(\rho))$ инвариантен относительно замены $\rho \to \rho + \gamma\rho_0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\rho_0 = (0, \theta_0) \in \Gamma$, поэтому разложение функции $E(v(\rho))$ в ряд Тейлора — одно и то же в окрестности любого равновесия семейства Γ:

$$E(v(\rho)) = \frac{1}{4\pi}(E_0 + E_2(v(\rho)) + E_3(v(\rho)) + \dots). \tag{8}$$

Многоточием обозначены слагаемые выше третьей степени. Квадратичная форма E_2 представима в виде

$$E_2 = (S\rho, \rho), \quad S = \begin{pmatrix} F_1 & \frac{1}{2}G_0 \\ -\frac{1}{2}G_0 & F_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица линеаризации системы (4) на нулевом равновесии имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} -G_0 & 2F_2 \\ -2F_1 & -G_0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы F_1, F_2, G_0 являются циркулянтами [4]. Матрицы F_1 и F_2 имеют общий собственный базис

$$F_j h_k = \lambda_{jk}h_k, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, 4,$$

для G_0 справедливы соотношения:

$$G_0 h_m = -\lambda_{0m} h_{n-m}, \quad G_0 h_{n-m} = \lambda_{0m} h_m.$$

Собственные значения матрицы S получаем, собирая корни полиномов

$$\Lambda^2 - (\lambda_{1k} + \lambda_{2k})\Lambda + \lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2, \quad k = 1, \ldots, 4,$$

а у матрицы линеаризации L они вычисляются по формулам:

$$\sigma_k^{\pm} = -i\lambda_{0k} \pm 2\sqrt{-\lambda_{1k}\lambda_{2k}}, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Режим стационарного вращения (3) заведомо неустойчив по Ляпунову. Этой неустойчивости соответствует линейно растущее решение линеаризованной системы и жорданова клетка 2×2 матрицы линеаризации, отвечающей ее нулевому двукратному собственному значению. Такая ситуация обычна для стационарных движений гамильтоновых систем при наличии циклических координат.

Далее проводится обоснование метода линеаризации в этой задаче, причем под устойчивостью здесь понимается *устойчивость по Раусу стационарного решения (3), т. е. устойчивость семейства равновесий* Γ *уравнения относительного движения (4)* [1–3]. Неустойчивость понимается в наиболее сильном смысле — (трансверсально) неустойчиво инвариантное множество стационарных вращений.

Ниже используется величина $p_* = 0,3649165$ — корень уравнения

$$\left(1+p^2\right)^3 \left(3(p^2-1)^3 + 4p(15p^4+18p^2-1)\right)^2 = 16p^2\left(3p^2-1\right)^2\left(1-p^2\right)^6.$$

Теорема 1. *Стационарное вращение (3) системы четырех одинаковых частиц, расположенных в вершинах квадрата внутри круговой области, устойчиво по Раусу в случае* $0 < p < p_*$ *и неустойчиво при* $p_* < p < 1$.

Исследование устойчивости при $p = p_*$ требует учета нелинейных слагаемых системы (рис. 1).

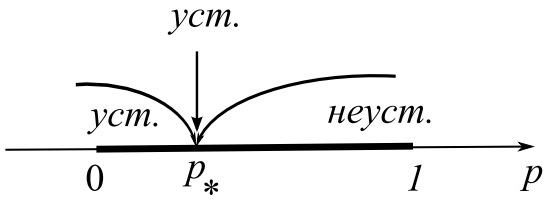


Рис. 1. Критерий устойчивости движения системы четырех одинаковых частиц, $p = \dfrac{R_0^2}{R^2}$.

Теорема 2. *Стационарное вращение (3) системы четырех одинаковых частиц, расположенных в вершинах квадрата внутри круговой области, устойчиво по Раусу при* $p = p_*$.

Автор благодарит Л. Г. Куракина за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» («Динамика распределенных и точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости», грант № 2.1.1/554) и грантов РФФИ (№ 08–01–00895), CRDF-РФФИ (№ RUM1–2943–RO–09, № 09-01-92504-ИК).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // Докл. РАН. 2002. т. 384, № 4. С. 476–482.

[2] *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos. 2002. Vol. 12, pp. 574–595.

[3] *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. Москва; Ижевск, 2003. С. 238–303.

[4] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М., 1984. 384 с.

[5] *Куракин Л. Г.* Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 295–317.

[6] *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978. 316 с.

Ostrovskaya I. V. *On stability of system of particles in tops of the square inside circular domain*. The stability of stationary rotation of system of four particles, placed in the top of the square inside circular domain is investigated. The problem is considered in the exact nonlinear formulation. Necessary and sufficient conditions for stability are obtained.

МЕЗОМЕХАНИКА УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ НАНОДИСПЕРСНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Панин В. Е., Дерюгин Е. Е., Кульков С. Н.
Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

На основе совместных подходов мезомеханики и неравновесной термодинамики показано, что любые нановключения, в том числе с низким модулем упругости и нанопоры, обусловливают упрочнение материала.

Введение. На кривую нагружения материалов с включениями влияет множество факторов. Можно ожидать, что качественные и количественные характеристики кривой «напряжение–деформация» существенно изменяются не только при смене типа частиц, но также и результате перехода размеров частиц в диапазон наноразмеров.

Физика зарождения и движения деформационных дефектов на любом масштабном уровне, прежде всего, связана с локальными структурными превращениями в зонах повышенной концентрации напряжений [1]. По этой причине весьма важно характеризовать любое включение в деформируемом твердом теле характеристиками поля напряжений, создаваемого этим включением.

В данной работе с позиции многоуровневого подхода на основе представлений физической мезомеханики материалов анализируется возможный механизм упрочнения материалов, содержащих частицы выделений наноразмерного диапазона, характеризуемых пониженными модулями упругости по отношению к таковым для окружающей их матрицы. Для данного типа материалов методом элементов релаксации [2] рассчитаны поля внутренних напряжений вокруг нановключений. Рассмотрены термодинамические основы упрочнения материалов с наноразмерными включениями. Дано объяснение эффекту деформационного упрочнения материалов с наноразмерными включениями с пониженными модулями упругости, в том числе и с нанопорами.

1. Поле напряжений в матрице с наноразмерным включением.

Наноразмерные элементы структуры имеют «размытые» границы, ширина которых соизмерима с размерами самой частицы [3]. В связи с этим в расчётах напряжений в матрице с наноразмерной частицей необходимо учитывать градиенты упругих констант при переходе через границу «наночастица–матрица». В данной работе приведены результаты расчётов с учётом плавного изменения (в пределах ширины границы) упругих модулей от значений в матрице до их значений в наночастице. При нулевых константах упругости в наночастице получается случай материала с нанопорами.

Рис. 1 иллюстрирует качественное распределение модуля Юнга для двух случаев: жёсткой наночастицы карбида титана TiC ($E_2 = 484$ ГПа [4]) (a) и мягкой наночастицы сульфида меди CuS (b) в железе ($E_1 = 195$ ГПа [4]).

Расчеты показывают, что концентрация напряжения в окрестности включения уменьшается по мере уменьшения размера включения относительно ширины

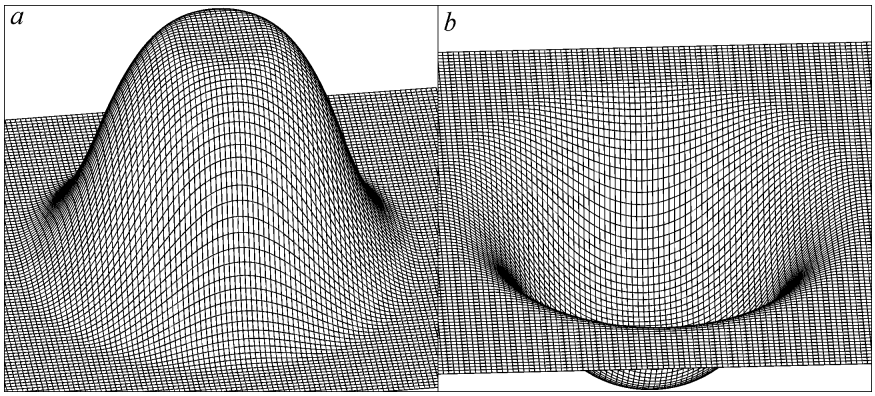


Рис. 1. Изменение модуля Юнга для случаев твёрдой (a) и мягкой (b) наночастиц

приграничной зоны. Рис. 2 иллюстрирует изменения поля максимальных скалывающих напряжений τ по мере уменьшения размера «мягкого» включения. Видно, что крупное включение играет роль сильного концентратора напряжения (a), в то время как у границы нановключения наблюдается незначительная концентрация напряжения (b).

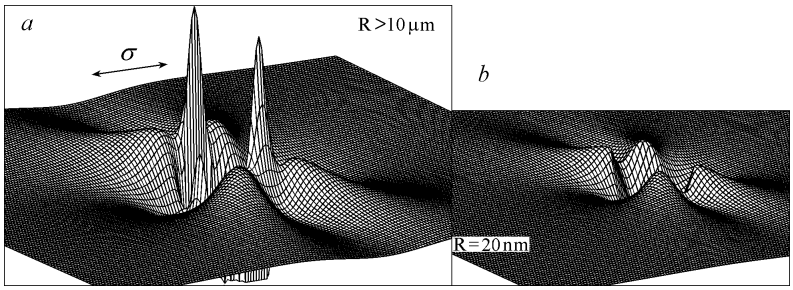


Рис. 2. Изменение поля напряжения сдвига вокруг мягкого включения CuS в матрице железа по мере уменьшения радиуса включения от 10 мкм (a) до 20 нм (b)

На рис. 3 приведена зависимость коэффициента концентрации напряжения сдвига k от радиуса R для жёсткого (a) и мягкого (b) включений. Видно, что в диапазоне крупных размеров включений градиенты концентрации напряжений

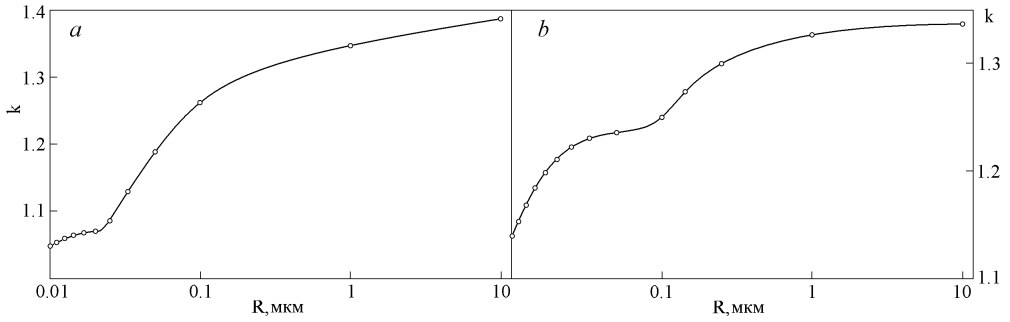


Рис. 3. Зависимость коэффициента концентрации сдвигового напряжения от радиуса мягкого включения CuS (a) и твёрдого включения TiC (b) в матрице железа

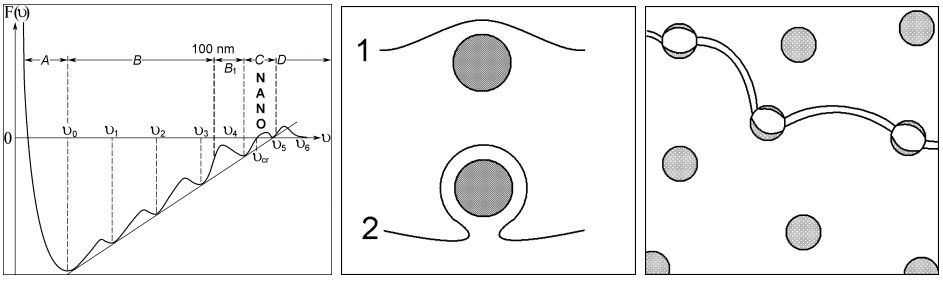
близки для твёрдых и мягких включений. В то же время в области наноразмеров они сильно отличаются: для твёрдого включения $\operatorname{grad} k$ в 2,5 раза выше. Если твёрдое нановключение дислокация должна огибать по модели Орована, то мягкое нановключение дислокация будет перерезать. Покажем, что в случае мягкого нановключения будет происходить не разупрочнение, а упрочнение материала.

2. Неравновесная термодинамика упрочнения материала введением мягких нановключений и нанопор.

Известный эффект дисперсионного упрочнения, описываемый теорией Орована [5, 6], связан с введением в материал дисперсных частиц с повышенными модулями упругости. Однако в рамках физической мезомеханики большое значение придается ядрам дислокаций, где совершаются локальные структурные превращения исходной кристаллической решетки. Учет этого принципиально важного фактора радикально изменяет общепринятое представление о природе дисперсионного упрочнения и предсказывает возможность упрочнения материала путем введения наноразмерных включений с пониженными модулями упругости, в том числе нанопор.

На рис. 4*a* представлена зависимость термодинамического потенциала Гиббса $F(\upsilon)$ от молярного объёма υ. Согласно [1], равновесные кристаллы характеризуются молярным объёмом υ_0, при котором возникает основной минимум $F(\upsilon_0)$. Дислокация в таком кристалле имеет в ядре молекулярный объём $\upsilon_1 > \upsilon_0$ и уменьшенный локальный минимум $F(\upsilon_1)$. Наноструктурные состояния характеризуются близостью $F(\upsilon)$ к нулю (область NANO на рис. 4*a*). Это сильно неравновесное переходное состояние, в котором нанокристаллы с молярным объёмом υ_4 окружены структурно размытой оболочкой с $\upsilon = \upsilon_5$. Наночастица с высоким модулем упругости будет огибаться дислокацией, вызывая упрочнение по модели Орована (рис. 4*b*). Однако упрочнение материала вызывает и перерезание дислокацией мягкой наночастицы. Ядро дислокации при перерезании наночастицы с низким модулем упругости (рис. 4*c*) расщепляется во всём объёме нановключения, сильно снижает свою неравновесность по отношению к материалу мягкой наночастицы и переходит в метастабильное состояние. Такое ядро дислокации оказывается сильно блокированным мягкой наночастицей. Для разрушения этой блокировки требуется дополнительное напряжение

$$\tau = (\gamma_m - \gamma_n)/b + (\tau_{fm} - \tau_{fn})/2 + (\tau_{som} - \tau_{son})/2,$$



a *b* *c*

Рис. 4. Зависимость термодинамического потенциала Гиббса $F(\upsilon)$ от молярного объёма υ (*a*), дислокация огибает (*b*) и перерезает (*c*) наночастицу

где γ_m и γ_n — энергии дефекта упаковки, τ_{fm} и τ_{fn} — силы трения частичных дислокаций, τ_{som} и τ_{son} — напряжение разрушения ближнего порядка в основном металле и нановключении соответственно, b — вектор Бюргерса.

Если дислокация перерезает нанопору, в ней возникает сильно выраженный порог, который будет тормозить движение дислокации [6], обусловливая упрочнение материала. Однако существенный эффект упрочнения можно получить только в наноструктурных материалах. Как видно из рис. 4, нанопористость с $\upsilon \geqslant \upsilon_5$ может термодинамически сосуществовать только с наноструктурными кристаллами с $\upsilon = \upsilon_4$. Такой эффект можно ожидать в наноструктурных материалах, полученных при отжиге металлических стёкол. В настоящей работе он подтверждён в наноструктурной керамике при развитии в ней микротрещин.

3. Упрочнение нанопорами.

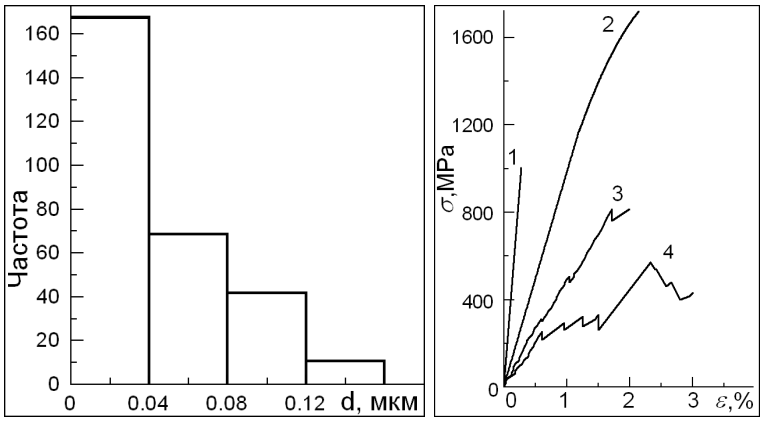
Известно, что на концентрацию напряжений выреза в твёрдом теле влияют лишь два геометрических параметра: протяжённость выреза в направлении, перпендикулярном оси растяжения, и минимальный радиус кривизны на конце выреза вдоль этого направления [7]. Крупная пора в твёрдом теле играет роль сильного концентратора напряжения в связи с тем, что она имеет неправильную геометрическую форму с локальными радиусами кривизны, которые намного меньше, чем размер самой поры. Материалы с большой пористостью содержит достаточно большое количество крупных пор, которые способствуют сильному разупрочнению. Особенно низкие свойства проявляют при этом хрупкие материалы, например, пористые керамики [8].

Нанопора представляет собой включение с радиусом кривизны, соизмеримым с размером самой нанопоры, т. е. близка к сфере. Эффект концентрации напряжений в объёме малопористого материала на деформационное разупрочнение не играет решающей роли. Существенное значение при этом определяется и тем, что в наноразмерном диапазоне граница структурного элемента размыта. Нанопора представляет собой включение с размытыми границами раздела, у которого модуль Юнга равен нулю. В связи с указанными причинами эффект уменьшения концентрации напряжения с уменьшением размера поры должен быть выражен сильнее, чем в случае включения с пониженным модулем Юнга.

С другой стороны, в хрупкой керамике ресурс работы и предел прочности определяется не дислокационными механизмами, а процессом зарождения и распространения микротрещин. Упрочняющая роль нанопор в керамике заключается в том, что нанопоры эффективно задерживают распространение и развитие микротрещин.

Этот вывод подтверждается экспериментами на керамиках из диоксида циркония. Измерения по изображениям РЭМ показали, что средний размер субмикропор уменьшается пропорционально увеличению размера зерна в керамике, но при этом средний размер их находится в интервале от 50 до 80 нм (рис. 5*a*). На рис. 5*b* представлены характерные кривые деформирования, полученные при активной деформации сжатием образцов беспористого материала и керамики с разным объёмом порового пространства.

Беспористая керамика деформируется упруго до величины 1000 МПа и разрушается хрупко при величине деформации, не превышающей 0,2% (кривая 1). Диа-



a *b*

Рис. 5. Распределение субмикропор по размерам (*a*) и диаграммы деформирования при сжатии керамики ZrO_2 (*b*): беспористый материал (1), с пористостью: 2% (2), 15% (3) и 26% (4)

граммы деформирования керамики с нанопорами (пористостью менее 10%, кривая 2) практически линейны. Незначительное отклонение от линейности на вершине диаграммы обусловлено, по-видимому, фазовым тетрагонально-моноклинным переходом под действием напряжений во фронтальной зоне магистральной трещины, характерным для частично стабилизированного диоксида циркония. Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что присутствие нанопор существенно увеличивает предел прочности материала (до величины 1700 МПа) и на порядок увеличивает ресурс деформации до разрушения (до 2%).

С ростом объёмной доли пористости увеличивается дисперсия распределения пор по размерам. Наряду с мелкими формируются крупные поры. Наблюдается резкое уменьшение предела прочности материала. Кривые нагружения становятся более сложными. На диаграммах выделяются участки упругого деформирования и срывы напряжения (рис. 5*b*, кривые 3 и 4). Величина падения напряжения и протяжённость «пилообразных» участков возрастает с увеличением объёма порового пространства в материале. Прерывистый характер кривых «напряжение–деформация» высокопористых керамик связан с локальными процессами разрушения. Каждое падение напряжения является следствием зарождения и распространения микротрещины в локальной области. Последующий рост напряжения свидетельствует о том, что в локальных объёмах развитие микротрещин задерживается в результате проникновения устья трещины в поровое пространство.

Заключение.

На основе совместных подходов мезомеханики и неравновесной термодинамики рассмотрены механизмы влияния наноразмерных включений, в том числе нанопор, на упрочнение твёрдых тел. Рассчитаны поля напряжений около включений и пор различного размера. Показано, что любые нановключения характеризуются низкими концентраторами напряжений и вызывают упрочнение материала. Упрочняющее влияние нанопор наиболее эффективно в наноструктурных материалах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Панин В. Е., Егорушкин В. Е.* Физическая мезомеханика и неравновесная термодинамика как методологическая основа наноматериаловедения // Физическая мезомеханика. 2009. Т.12, № 4. С. 7–26.

[2] *Deryugin Ye. Ye., Lasko G., Schmauder S.* Relaxation Element Method in Mechanics of Deformed Solid // In: Wilhelm U. Oster. Computational Materials. Hauppauge NY: Nova Science Publishers. 2009, pp. 479–545.

[3] *Гуткин М. Ю., Овидько И. А.* Дефекты и механизмы пластичности в наноструктурных и некристаллических материалах. СПб: Янус, 2001. 180 с.

[4] Physical values: Handbook, Moscow: Energoatomizdat, 1991.

[5] *Orowan E.* Dislocation in Metals, AIME: NewYork. 1954. 131 p.

[6] *Фридель Ж.* Дислокации. М: Мир. 1967. 438 с.

[7] *Thompson A.* Substructure strengthening mechanisms // Met. Trans. 1977. 6, pp. 833–842.

[8] *Кульков С. Н., Буякова С. П.* Фазовый состав и особенности формирования структуры в нанокристаллическом ZrO_2 // Российские нанотехнологии. 2007. № 1. С. 119–132.

Panin V. E., Deryugin Ye. Ye., Kulkov S. N. *Mesomechanics of material strengthening by nanosized inclusions*. It is shown on the basis of joint approaches of mesomechanics and non-equilibrium thermodynamics that any nanoinclusions, the low elastic module and nanopores cause the strengthening of materials.

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ КОМПОЗИТОВ

Победря Б. Е.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Механика, как и математика — наука гипотетическая, но её “кирпичики” называют не аксиомами, а постулатами, которые требуют не только теоретических рассуждений, но и проникновения в эксперимент. Хотя материя состоит из атомов, механики успешно пользуются аппаратом сплошной среды. Вычислительная механика композитов и нанокомпозитов представляет собой развивающийся раздел механики неоднородного деформируемого тела. Её цель — получение с заданной точностью решения необходимых задач с использованием возможного класса компьютеров. Важной составляющей такого исследования является вычислительный эксперимент. Условно процедуру решения можно разбить на несколько этапов, тесно взаимодействующих между собой. Необходимо произвести дискретизацию “континуальной” задачи таким образом, чтобы наиболее эффективно осуществить численное решение. Иногда для этого приходится видоизменить исходную постановку задачи.

В последнее время часто говорят о том, что механики как самостоятельной науки не существует. Она, мол, является разделом физики и поэтому её можно исключить из механико-математических факультетов классических университетов и перевести на физические факультеты.

Точного определения механики никто не давал, но, по-видимому, лучше определить так: механикой называется наука, которой занимаются механики. А таких выдающихся механиков, как Н. Е. Жуковский, С. П. Королёв, М. В. Келдыш, А. Н. Крылов, А. Ю. Ишлинский, А. А. Ильюшин и другие, вряд ли можно назвать физиками.

Механика, как и математика, — наука гипотетическая[1], но её “кирпичики” называют не аксиомами, а постулатами, которые требуют не только теоретических рассуждений, но и проникновения в эксперимент. Хотя материя состоит из атомов, механики пользуются аппаратом сплошной среды, т. е. средствами дифференциального и интегрального исчисления. Важной составляющей такого исследования является эксперимент. Применение вычислительных методов к задачам механики называется вычислительной механикой, главной целью которой является нахождение решения с требуемой точностью. А классическая математика в основном посвящена исследованию условий существования и свойств решения. Важнейшей составляющей вычислительной механики является вычислительный эксперимент.

Вычислительная механика композитов (и нанокомпозитов) представляет собой бурно развивающийся раздел механики неоднородного деформируемого тела. Её цель — получение с заданной точностью решения необходимых задач с использованием возможного класса компьютеров (для разных классов методы решения различны).

Основой вычислительной механики композитов в последнее время служит метод осреднения [1]. Он позволяет с достаточной строгостью описывать разрывные решения системы дифференциальных уравнений механики деформируемого

[1] Выдающийся физик Р.Фейнман математику не считает наукой, см. “Фейнмановские лекции по физике”. Т. 1. М.: Мир, 1965. С. 55.

твёрдого тела при использовании статических, динамических, термодинамических процессов, описывать микроструктуру (субструктуру) материалов средствами механики сплошной среды путём введения дополнительных феноменологических параметров и постулатов. Для этого используется кинематика многоуровнего континуума, принятая в структурной механике, обобщение постулатов МСС на случай взаимодействующих между собой элементов структуры с учётом возможных фазовых переходов и химических реакций [2].

Первый этап модели состоит из двух частей. Одна из них является общей для любого феноменологического подхода и включает основные уравнения МСС. Для произвольного объёма V с замкнутой поверхностью Σ, ограничивающей этот объём, вводятся постулаты МСС. Это — закон сохранения масс, постулат об изменении количества движения и постулат об изменении момента количества движения [2]. Если рассматриваются неизотермические процессы, то вводятся ещё два постулата: первый и второй законы термодинамики. Согласно закону Фурье вектор теплового потока пропорционален градиенту температуры. Следствием введённых постулатов для квазистатических задач МСС являются уравнения равновесия, причём тензоры напряжений и моментных напряжений являются несимметричными. Для неизотермических процессов вводится уравнение притока тепла [2].

Вторая часть описания модели заключается в задании определяющих соотношений среды. Тензоры-операторы, учитывающие историю деформирования, должны быть описаны принципиальной схемой экспериментов, из которых находятся материальные функции. Эти определяющие соотношения могут быть разрешены относительно деформаций и тензоров искривлений [2]. Для построения модели должна быть задана ещё и функция рассеивания [1], после чего будет конкретизировано уравнение притока тепла.

В зависимости от того, линейные или нелинейные определяющие соотношения, среда называется физически линейной или нелинейной. В зависимости же от того, линейна или нелинейна связь тензоров деформаций и искривлений с вектором перемещений u_i и спин-вектором ω_i ($\omega_{i,j} = \chi_{ij}$), среда называется линейной или нелинейной.

Основная сложность заключается в том, что даже линейные определяющие соотношения экспериментально найти очень трудно, а иногда и невозможно.

Рассмотрим, например, линейный случай

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} + A_{ijkl}\chi_{kl}, \quad \mu_{ij} = B_{ijkl}u_{k,l} + D_{ijkl}\chi_{kl} \tag{1}$$

Здесь тензоры напряжений σ_{ij} и моментных напряжений μ_{ij} связаны с кинематическими тензорами дисторсии $u_{i,j}$ (градиентом вектора перемещений u_i) и искривлений χ_{ij}. Материальные тензоры четвёртого ранга A_{ijkl}, B_{ijkl}, D_{ijkl} должны определяться экспериментально. Однако до сих пор в литературе такие эксперименты не описаны.

Метод осреднения [1] позволяет найти недостающие материальные тензоры теоретически. Для этого вводится некоторый вектор структуры композита $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\varphi_i(\xi) = \alpha\xi_i(1 + \alpha a_j\xi_j + \alpha^2 b_{jk}\xi_j\xi_k + \dots)$$

где $a_j, b_{jk}, \dots$ — известные величины, α — малый параметр, являющийся отношением диаметра структуры композита к диаметру рассматриваемого тела, а ξ_j —

так называемы быстрые координаты, связанные с глобальными координатами x_i формулами

$$\xi_i = \frac{x_i}{\alpha}$$

В работе [3] найдены все материальные тензоры (1) по теории нулевого приближения [1].

Для развития аппарата вычислительной механики нанокомпозитов большое значение имеет постановка задачи в напряжениях. Ведь основная задача механики деформируемого твёрдого тела связана с проблемой разрушения материалов. При решении задач в перемещениях необходимо проводить численное дифференцирование, что, как известно, понижает точность решения на порядок. В работе [4] дана корректная постановка задачи моментной теории упругости, заключающаяся в решении 18 уравнений совместности относительно 18 незавсимых компонент тензоров σ_{ij} и μ_{ij} при удовлетворении классических граничных условий и уравнений равновесия, снесённых на границу тела.

Вычислительная механика нанокомпозитов продолжает развиваться с совершенствованием вычислительной техники и методов математического моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

[2] *Победря Б. Е.* О теории определяющих соотношений в механике деформируемого твёрдого тела // Проблемы механики. Сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 635–657.

[3] *Победря Б. Е., Омаров С. Е.* Определяющие соотношения моментной теории упругости // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 2007. № 3. С. 56–58.

[4] *Победря Б. Е.* Статическая задача несимметрической теории упругости для изотропной среды // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 2005. № 1. С. 54–59.

Pobedria B. E. *On computational mechanics of composites.* Mechanics as well as mathematics is the hypothetical science and one calls its “bricks” not by axioms but postulates which demand not only theoretical discussing but also penetration into experiment. Although the matter consists of atoms, mechanicians successfully use the instrument of the continuum. The computational mechanics of composites and nanocomposites represents a developing section of mechanics of nonhomogeneous solid. An obtaining with the given precision of the solutions of needed problems using a possible computer class represents its purpose. A computational experiment is the important component of such research. The solving procedure may be conditionally separated into several stages which are closely connected each with other. It is necessary to make a digitization of a continual problem so that the numerical investigation should be carried out by most effective way. Sometimes it is necessary to change the initial statement of a problem for this purpose.

КОНТАКТНЫЕ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖУЩЕМСЯ ШТАМПЕ ПРИ УЧЕТЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

Пожарский Д. А.[*], **Чебаков М. И.**[**]

[*]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

[**]*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону*

Рассмотрена плоская контактная задача о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения между штампом и упругой полосой большой толщины. Использована несвязанная квазистационарная постановка задачи термоупругости в подвижной системе координат. Задача сведена к системе интегрального и интегро-дифференциального уравнений относительно контактного давления и контактной температуры. Интегральное уравнение для толстой полосы сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши и решается аналитически. Интегро-дифференциальное уравнение сводится к интегральному уравнению второго рода относительно контактной температуры и решается численно по методу коллокаций или аналитически. Для трения использован закон Кулона, коэффициент трения не зависит от температуры. Сделаны расчеты контактных давлений и температур при разных значениях коэффициента трения, скорости движения штампа, вдавливающей штамп силы, относительной толщины слоя и для разных форм основания штампа (плоское основание, параболическое основание).

В рамках плоской теории упругости рассмотрим линейно-упругую полосу толщины h с параметрами упругости G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона). Граница полосы $y = 0$ находится в условиях скользящей заделки. По границе $y = h$ в положительном направлении оси x движется с постоянной скоростью u абсолютно жесткий штамп. Используем подвижную систему координат $x' = x - ut$, $y' = y$, связанную со штампом (штрихи далее опускаем). Форма основания штампа описывается функцией fx. Область контакта описывается неравенством $-a \leqslant x \leqslant a$. К штампу приложена вдавливающая сила P, эксцентриситет которой относительно оси y равен e. Для трения в области контакта используем закон Кулона $\tau xy = kq$, где k коэффициент трения, $q = q(x) = -\sigma y(x,h)$ – давление в области контакта. Трение между штампом и упругой полосой приводит к выделению в единицу времени на единицу площади количества тепла $Q = u\tau_{xy}$, приводящее к нагреву контактной поверхности и штампа до температуры $T_1(x) = T(x,h)$ $(|x| \leqslant a)$, которая превышает температуру T_0 на границе полосы $y=0$. В качестве начала отсчета температур берем температуру окружающей среды, сохраняющуюся вне области контакта при $y=h$, а также при $y=0$. Ясно, что через полосу возникает поток тепла, который при $y=h$ равен $Q = \lambda_0 \partial T/\partial y$ (λ_0 коэффициент теплопроводности материала полосы). Пусть процесс теплопроводности является квазистационарным относительно подвижной системы координат. Тогда уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$\Delta T + 2\omega \partial T/\partial x = 0, \quad \omega = u/(2a_0). \tag{1}$$

Здесь a_0 коэффициент температуропроводности материала полосы.
Граничные условия для уравнения (1) имеют вид

$$y = 0: \quad T = 0; y = h: \quad T = 0 \ \ (|x| > a), \quad \partial T/\partial y = Q/\lambda_0 \ \ (|x| \leqslant a) \, . \qquad (2)$$

Решение задачи (2) для уравнения (1) ищем в форме интеграла Фурье

$$T(x,y) = \frac{\exp(-\omega x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{\alpha^2+\omega^2}y)}{\mathrm{sh}(\sqrt{\alpha^2+\omega^2}h)} \exp(-i\alpha x) d\alpha, \qquad (3)$$

$$S(\alpha) = \int_{-a}^{a} s(x) \exp(i\alpha x) dx, \quad s(x) = \exp(\omega x) T_1(x). \qquad (4)$$

Относительно контактной температуры $s(x)$ приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\int_{-a}^{a} s'(\xi) k_0(\xi - x) d\xi = -\pi \exp(\omega x) \frac{Q(x)}{\lambda_0} \quad (|x| \leqslant a), \qquad (5)$$

$$k_0(t) = \int_0^{\infty} \frac{l_0(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha t d\alpha, \quad l_0(\alpha) = \sqrt{\alpha^2+\omega^2} \, \mathrm{cth}(\sqrt{\alpha^2+\omega^2} \, h). \qquad (6)$$

В условиях плоской деформации с целью определения напряженно-деформированного состояния упругой полосы используем уравнения линейной несвязанной термоупругости Ламе–Неймана [1] в подвижной системе координат без учета инерционных членов. Пусть скорость u движения штампа меньше скоростей продольных волн c_1, поперечных волн c_2 и волн Релея c_p в упругой полосе, т. е. $u < c_p < c_2 < c_1$. Используя преобразование Фурье и условие контакта $u_y(x,h) = -(\delta - f(x)) \quad (|x| \leqslant a)$, где δ — осадка штампа, придем к интегральному уравнению вида

$$\frac{1}{G} \int_{-a}^{a} q(\xi) k_1(\xi - x) d\xi - \alpha_0 \int_{-a}^{a} s(\xi) \exp(-\omega\xi) k_2(\xi - x) d\xi = \pi(\delta - f(x)) \quad (|x| \leqslant a), \qquad (7)$$

$$k_m(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_m(\alpha)}{\alpha} \exp(i\alpha t) d\alpha \quad (m = 1, \ 2); \varepsilon_1^2 = 1 - \frac{u^2}{c_1^2}, \quad \varepsilon_2^2 = 1 - \frac{u^2}{c_2^2}, \qquad (8)$$

$$l_1(\alpha) = \frac{s_2 \, \mathrm{th}(\varepsilon_1 \alpha h) \, \mathrm{th}(\varepsilon_2 \alpha h)}{\mathrm{th}(\varepsilon_1 \alpha h) - s_1 \, \mathrm{th}(\varepsilon_2 \alpha h)}, l_2(\alpha) = \frac{\beta(1+\varepsilon_2^2) s_2 \, \mathrm{th}(\varepsilon_2 \alpha h)}{\varepsilon_1 (\alpha(1-\varepsilon_1^2) + i2\omega)\alpha_0} \times$$

$$\times \frac{p[\mathrm{cth}(ph) - \mathrm{cosech}(ph) \, \mathrm{sech}(\varepsilon_1 \alpha h)] - \varepsilon_1 \alpha \, \mathrm{th}(\varepsilon_1 \alpha h)}{\mathrm{th}(\varepsilon_1 \alpha h) - s_1 \, \mathrm{th}(\varepsilon_2 \alpha h)}, \qquad (9)$$

$$s_1 = \frac{(1+\varepsilon_2^2)^2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad s_2 = \frac{1-\varepsilon_2^2}{4\varepsilon_2}, \quad p = \sqrt{\alpha(\alpha + 2i\omega)} \, , \ \ \beta = \alpha_0 \frac{1+\nu}{1-\nu}, \qquad (10)$$

где α_0 коэффициент линейного расширения. Уравнение (7) в случае β=0 совпадает с известным уравнением ([2], с.289). Из закона Кулона следует, что $Q(x) = kuq(x)$, $|x| \leqslant a$. Для нахождения функций $q(x)$ и $s(x)$ имеем систему уравнений (5), (7).

В случае штампа с плоским основанием уравнение (7) для толстой полосы сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши и решается аналитически. Уравнение (5) затем сводится к интегральному уравнению второго рода относительно контактной температуры и решается численно по методу коллокаций или аналитически (после аппроксимации контактного давления функцией, соответствующей случаю α_0). Как показывают расчеты, с ростом коэффициента трения растет контактная температура по всей области контакта и повышается давление на краях области контакта. При уменьшении коэффициента температуропроводности материала полосы (что ведет к росту ω), также растет контактная температура по всей области контакта и возрастает давление на краях области контакта. Обнаружен эффект нарушения контакта в середине области контакта.

Рассмотрим штамп с параболическим основанием, когда $f(x) = x^2/(2R)$. Для простоты допустим, что коэффициент линейного расширения материала полосы α_0. Тогда при $\lambda\to\infty$ (для очень толстой полосы) ограниченное решение уравнения (7) имеет вид

$$\frac{q(x)}{\theta_0} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi R}, \quad a^2 = \frac{2PR}{\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{G(1 - s_1)}{s_2}. \tag{11}$$

Здесь θ_0 — контактная жесткость для движущегося штампа (скорость $u\neq 0$). При $u=0$ (неподвижный штамп) имеем известную контактную жесткость

$$\theta = G(1 - \nu).$$

Для неподвижного параболического штампа также выполняются формулы (11) с заменой θ_0 на θ [2]. При $u\to 0$ имеем $\theta_0 \to \theta$. Поскольку $\theta_0 < \theta$, то, как следует из (11), для движущегося параболического штампа контактные давления меньше, а область контакта больше, чем для неподвижного штампа. Уравнение (5) запишем в виде

$$\int_{-a}^{a} s'(\xi) k_0(\xi - x) d\xi = -\pi \exp(\omega x) \frac{kuq(x)}{\lambda_0} \quad (|x| \leqslant a). \tag{12}$$

Введем безразмерные обозначения

$$x' = \frac{x}{a}, \quad \xi' = \frac{\xi}{a}, \quad \lambda = \frac{h}{a}, \quad P' = \frac{P}{\theta R}, \quad R' = \frac{R}{a}, \quad \omega' = \omega h, \tag{13}$$

$$q_0(x') = \frac{q(x)}{\theta}, \quad q_1(x') = \frac{q(x)}{\theta_0} \exp(\omega x), \quad s_0(x) = \frac{s(x)\lambda_0 R\pi}{ku\theta_0 a} \tag{14}$$

и т. д. Штрихи далее опускаем. Тогда имеем уравнение

$$\frac{1}{\lambda} \int_{-1}^{1} \frac{ds_0(\xi)}{d\xi} k_0\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = -\pi q_1(x) \quad (|x| \leqslant 1). \tag{15}$$

При больших λ уравнение (15) можно привести к виду

$$\int_{-1}^{1} \frac{ds_0(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{\xi - x} = -\pi q_1(x) \quad (|x| \leqslant 1). \tag{16}$$

Решение уравнения (16) известно как [2]

$$s_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} F(\xi, x)\exp\left(\frac{\omega\xi}{\lambda}\right)\sqrt{1-\xi^2}\,d\xi \quad (|x| \leqslant 1), \tag{17}$$

$$F(\xi, x) = \ln\frac{1-\xi x+\sqrt{(1-\xi^2)(1-x^2)}}{1-\xi x-\sqrt{(1-\xi^2)(1-x^2)}}\,. \tag{18}$$

Безразмерная контактная температура согласно имеет вид

$$T_0(x) = s_0(x)\exp\left(-\frac{\omega x}{\lambda}\right) = \frac{\exp(-\frac{\omega x}{\lambda})}{2\pi}\int_{-1}^{1} F(\xi, x)\exp\left(\frac{\omega\xi}{\lambda}\right)\sqrt{1-\xi^2}\,d\xi, \quad |x| \leqslant 1. \tag{19}$$

В обозначениях (13), (14) давление и полудлина области контакта имеют вид

$$q_0(x) = \frac{\theta_0}{\theta}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi R}, \quad a_0 = \frac{1}{R} = \sqrt{2P\cdot\frac{\theta}{\theta_0}}, \quad \frac{\theta_0}{\theta} = \frac{(1-\nu)(1-s_1)}{s_2}, \tag{20}$$

где значения $s1$, $s2$ определяются формулами (10).

В таблицах 1, 2 даны значения контактных температур, рассчитанные по формуле (19). Как видно из таблиц, с увеличением параметра ω (что может происходить за счет увеличения скорости штампа) контактные температуры возрастают. На левой стороне области контакта значения температур больше, чем на правой. Как показывают расчеты с возрастанием скорости штампа контактная жесткость и контактное давление в средней точке падают, увеличивается размер области контакта.

x	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4
$T_0(x)$	0	0.3334	0.4866	0.5842	0.6880	0.7745	0.8074
x	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3
$T_0(x)$	0.8417	0.8663	0.8795	0.8807	0.8700	0.8477	0.8146
x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$T_0(x)$	0.7730	0.7341	0.6437	0.5388	0.4437	0.2991	0

Таблица 1. Значения контактных температур при ω=1, λ=10.

x	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4
$T_0(x)$	0	0.3750	0.5381	0.6383	0.7405	0.8223	0.8486
x	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3
$T_0(x)$	0.8748	0.8903	0.8940	0.8855	0.8653	0.8341	0.7929
x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$T_0(x)$	0.7444	0.7002	0.6063	0.5004	0.4077	0.2706	0

Таблица 2. Значения контактных температур при ω=3, λ=10.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-08-00873).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 239 с.

[2] *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.

Pozarskii D. A., Chebakov M. I. *Contact pressure and temperature in the problem of a moving punch when heat transfer is taken into account.* The plane contact problem of a moving punch is considered when the heat transfer between the punch and a thick elastic strip is taken into account. The problem is reduced to a system of integral equations with respect to the contact pressure and the contact temperature. An analytical method and a collocation method are used for solving the system. The punch basement can be flat or parabolic.

МОНОТОННАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ

Ревина С. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт, Владикавказ

Построена длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных стационарных пространственно-периодических течений вязкой несжимаемой жидкости в случае, когда один из пространственных периодов стремится к бесконечности (волновое число α стремится к нулю). В качестве основного рассматривается сдвиговое течения вида $\boldsymbol{v} = (0, V(x))$. К указанному классу принадлежит течение Колмогорова $\boldsymbol{v} = (0, A\sin(x))$. Показано, что в случае, когда $V(x)$ является нечетной функцией, происходит монотонная потеря устойчивости. Получены явные формулы главных членов асимптотики линейной спектральной задачи.

1. Введение. Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в двумерном пространстве $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно. Поле скоростей $\boldsymbol{v}$ и давление p удовлетворяют системе уравнений Навье – Стокса и условию несжимаемости:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость.

В качестве краевых условий задаются условия периодичности поля скорости $\boldsymbol{v}$ по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1, L_2 соответственно. Предполагается, что $L_2 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \to 0$. Пусть $x = x_1$, $z = \alpha x_2$. Тогда поле скоростей периодично по z с периодом 2π.

Всюду в дальнейшем через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по x:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1}\int\limits_0^{L_1} f(x, z)\, dx,$$

а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по прямоугольнику периодов:

$$\langle\langle f \rangle\rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega f(x, z)\, dx\, dz, \quad \Omega = [0, L_1] \times [0, 2\pi].$$

Впервые длинноволновая асимптотика ($\alpha \to 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных течений $\boldsymbol{v} = (0, V(x))$ рассмотрена в [1]. Исследованию автоколебаний, возникающих при потере устойчивости параллельных течений относительно длинноволновых возмущений, посвящена работа [2]. Линейная задача устойчивости трехмерных стационарных течений вида $\boldsymbol{v} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$, $\langle V_3 \rangle \neq 0$

рассмотрена в [3]. В частности, показано, что если среднее продольной компоненты скорости отлично от нуля, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости.

Изучение автоколебаний, возникающих при потере устойчивости двумерных и трехмерных стационарных течений относительно длинноволновых возмущений было продолжено в [4, 5].

Настоящая работа посвящена исследованию задачи устойчивости стационарного течения вида

$$\boldsymbol{v} = (0, V(x)) \tag{1}$$

в случае, когда $V(x)$ является нечетной по x функцией. Данному условию удовлетворяет течение Колмогорова $\boldsymbol{v} = (0, A\sin(x))$. Явно найдены первые члены асимптотики по параметру α собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи. Показано, что происходит монотонная потеря устойчивости.

2. Линейная задача устойчивости. Для нормальных возмущений вида $u = \varphi(x, z)e^{\sigma t}$ получается спектральная задача:

$$\sigma\varphi_1 + \alpha V\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \nu_c\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\sigma\varphi_3 + \alpha V\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \varphi_1\frac{\partial V}{\partial x} - \nu_c\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right) = -\alpha\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \langle\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle\rangle = 0. \tag{4}$$

Неизвестные собственные значения, собственные функции и критическое значение вязкости ν_c будем разыскивать в виде рядов по параметру α:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k\alpha^k, \quad \nu_c = \nu^* + \sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\alpha^k,$$
$$\boldsymbol{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^k\alpha^k, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty}P^k\alpha^k.$$

Приравнивая в системе (2) – (4) выражения при α^0: выводим, что коэффициент $\sigma_0 = 0$, функции φ_1^0 и P^0 зависят только от z: $\varphi_1^0 = \varphi_1^0(z)$ и $P^0 = P^0(z)$, а φ_2^0 имеет вид:

$$\varphi_2^0 = \frac{1}{\nu^*}\varphi_1^0(z)\frac{d\theta}{d\,x},$$

где $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = V$, $\langle\theta\rangle = 0$.

Приравнивая выражения при α^1, из (2) – (4) выводим равенства:

$$\sigma_1\varphi_1^0(z) + V\frac{d\varphi_1^0}{dz} - \nu^*\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial P^1}{\partial x_1}, \tag{5}$$

$$\sigma_1\varphi_2^0 + V\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial z} + \varphi_1^1\frac{\partial V}{\partial x} - \nu^*\frac{\partial^2\varphi_2^1}{\partial x^2} - \nu_1\frac{\partial^2\varphi_2^0}{\partial x^2} = -\frac{dP^0}{dz}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2^0}{\partial z} = 0, \quad \langle\varphi_2^1\rangle = 0. \tag{7}$$

После осреднения уравнения (5) приходим к задаче для нахождения σ_1, φ_1^0:

$$\sigma_1\varphi_1^0(z) = 0, \quad \varphi_1^0(z+2\pi) = \varphi_1^0(z).$$

откуда получаем: $\sigma_1 = 0$, $\varphi_1^0(z)$ — остаются неопределенными.

Из (5), (7) найдем P^1 и φ_1^1:

$$P^1 = -2\frac{d\varphi_1^0}{dz}\frac{d\theta}{dx} + \langle P^1\rangle, \quad \varphi_1^1 = -\frac{1}{\nu^*}\theta\frac{d\varphi_1^0}{dz} + \langle\varphi_j^1\rangle,$$

средние P^1 и φ_1^1 пока не определены.

Из (6) находим

$$\varphi_2^1 = \frac{1}{\nu^{*2}}\frac{d\varphi_1^0}{dz}G(x) + \frac{1}{\nu^*}\langle\varphi_1^1\rangle\frac{d\theta}{dx} - \frac{\nu_1}{\nu^*}\varphi_2^0, \tag{8}$$

где функция $G(x)$ определяется как решение задачи

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \frac{d^2\theta}{dx^2}\frac{d\theta}{dx} - \frac{dV_2}{dx}\theta, \quad \langle G\rangle = 0. \tag{9}$$

Приравнивая выражения при α^2, из (2)–(4) выводим равенства:

$$\sigma_2\varphi_1^0(z) + V\frac{\partial\varphi_1^1}{\partial z} - \nu^*\frac{\partial^2\varphi_1^2}{\partial x^2} - \nu_1\frac{\partial^2\varphi_1^1}{\partial x^2} - \nu^*\frac{d^2\varphi_1^0}{dz^2} = -\frac{\partial P^2}{\partial x_1}, \tag{10}$$

$$\sigma_2\varphi_2^0 + V\frac{\partial\varphi_2^1}{\partial z} + \varphi_1^2\frac{dV}{dx} - \nu^*\Big(\frac{\partial^2\varphi_2^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2^0}{\partial z^2}\Big) -$$
$$-\nu_1\frac{\partial^2\varphi_2^1}{\partial x^2} - \nu_2\frac{\partial^2\varphi_2^2}{\partial x^2} = -\frac{\partial P^1}{\partial z}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_3^1}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Осредним уравнение (10) по переменной x:

$$\frac{1}{\nu^*}\left(\nu^{*2} - \langle(\theta')^2\rangle\right)\frac{d^2\varphi_1^0}{dz^2} - \sigma_2\varphi_1^0(z) = 0. \tag{13}$$

Из условия существования 2π-периодического решения уравнения (13) находим σ_2 и нулевой член разложения критического значения вязкости:

$$\sigma_2 = 0, \quad \nu^{*2} = \langle(\theta')^2\rangle, \tag{14}$$

$\varphi_j^0(z)$ является произвольной 2π-периодической функцией.

Из (10) находим P^2, φ_1^2.

$$P^2 = \frac{2}{\nu^*}\frac{d^2\varphi_1^0}{dz^2}Q(x) - 2\frac{d\langle\varphi_1^1\rangle}{dz}\frac{d\theta}{dx} + \langle P^2\rangle,$$

$$\varphi_1^2 = \frac{1}{\nu^{*2}}R(x)\frac{d^2\varphi_1^0}{dz^2} - \frac{1}{\nu^*}\theta\frac{d\varphi_1^0}{dz} + \langle\varphi_j^1\rangle,$$

где $R(x)$ является решением задачи

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -\frac{dG}{dx}, \quad \langle R\rangle = 0.$$

В осредненном по x уравнении (2) выпишем слагаемые при α^3. После преобразований выражение принимает вид:

$$\sigma_3\varphi_1^0(z) - \frac{3}{\nu^{*2}}\frac{d^3\varphi_1^0}{dz^3}\langle\theta(\theta')^2\rangle - 2\nu_1\frac{d^2\varphi_1^0}{dz^2} = 0. \tag{15}$$

Если $V(x)$ является нечетной по x функцией, то $\theta(x)$ также нечетна, следовательно, $\langle\theta(\theta')^2\rangle = 0$.Тогда уравнение (15) принимает вид:

$$\sigma_3\varphi_1^0(z) - 2\nu_1\frac{d^2\varphi_1^0}{dz^2} = 0. \tag{16}$$

Из условия существования 2π-периодического решения уравнения (16) находим σ_3 и первый член разложения критического значения вязкости:

$$\nu_1 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \tag{17}$$

а функция $\varphi_1^0(z)$ пока остается неопределенной.

Далее находятся P_3 и φ_1^3. В осредненном по x уравнении (2) выпишем слагаемые при α^4. После преобразований выражение принимает вид:

$$\sigma_4\varphi_1^0(z) - 2\nu_2\frac{d^2\varphi_1^0}{dz^2} + \frac{6}{\nu^{*3}}\frac{d^4\varphi_1^0}{dz^4}\langle\theta^2(\theta')^2\rangle = 0. \tag{18}$$

Интересуясь критическим случаем, находим $\sigma_4 = 0$. Тогда

$$\varphi_1^0 = e^{-imz}, \quad \nu_2 = -\frac{3m^2}{\nu^{*3}}\langle\theta^2(\theta')^2\rangle. \tag{19}$$

Таким образом, для двумерного сдвигового основного течения нечетным профилем скорости найдены главные члены асимптотики собственных значений и собственных функций линейной спектральной задачи, показано, что происходит колебательная потеря устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке аналитических ведомственных целевых программ «Развитие научного потенциала высшей школы» («Динамика распределенных и точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости» №2.1.1/554 и «Математическая гидродинамика жидкостей со сложными физико-химическими свойствами» №2.1.1/6095).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Юдович В. И.* О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М., Наука. 1966. С. 242–249.

[2] *Юдович В. И.* Об автоколебаниях,возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.

[3] *Юдович В. И.* Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 31–35.

[4] *Ревина С. В., Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 29–41.

[5] *Мелехов А. П., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 41–56.

Revina S. V. *The monotone loss of stability of 2-D shearing motion streams with zero average*. We consider the stability problem of stationary 2-D spatially-periodic stream $\boldsymbol{v} = (0, V(x))$ with respect to long-wave length disturbances, when one of the periods goes to infinity (the wave number α goes to zero). Function $F(x)$ is odd. The explicit formulas for the main asymptotic terms are obtained. The monotone loss of stability takes place.

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В МАТЕРИАЛАХ С ИЗМЕНЯЕМОЙ СТРУКТУРОЙ

Роговой А. А.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Используя подход, приводящий в рамках конечных деформаций к уравнению теплопроводности, а именно к той его части, которая связана с производством тепла неупругими источниками, рассмотрены вопросы разделения неупругой энергии на тепловую и скрытую, связанную со структурными изменениями в материале. При этом, опираясь на экспериментальные данные, полагалось, что упругие свойства материала не зависят от изменений структуры, связанной с пластическими деформациями. Описана экспериментальная кривая доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло.

1. Введение. Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть идет на изменение энергий дислокаций, дефектов и т. п. и энергий их взаимодействия. На макроуровне это новое состояние структуры материала проявляется в изменении его упругих и пластических характеристик. В последние годы появились систематические экспериментальные исследования, позволяющие разделить затраченную пластическую работу на запасённую и тепловую части энергии. Для правильной интерпретации полученных в этих работах результатов необходим подход, приводящий к уравнению теплопроводности, а именно к той его части, которая связана с производством тепла неупругими источниками, в рамках конечных деформаций.

В работах [1–6] разработан согласованный с принципами термодинамики и объективности формализованный подход к построению уравнений, определяющих поведение сред в термо-упруго-неупругих процессах при конечных деформациях. Для учета изменения в процессе деформирования структуры материала введены скалярные структурные параметры, зависящие от неупругой кинематики и влияющие на упругие и неупругие константы модели. Конкретный вид этой зависимости и этого влияния в указанных выше статьях не прописывался. В настоящей работе рассматривается один из возможных путей установления связи структурного параметра с мерой неупругих деформаций.

2. Пластическая работа, перешедшая в тепло. В термо-упруго-неупругом процессе при низких скоростях деформации скорость деформационного нагрева равна скорости естественного отвода тепла и процесс считается изотермическим. При более высоких скоростях, однако, скорость генерации тепла намного выше, чем скорость его естественного отвода и адиабатический процесс является причиной возрастания температуры (при испытаниях на сжатие). Для оценки доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло, вводится, обычно, отношение

$$\gamma = \frac{\dot{Q}_{IN}}{\dot{W}_P}, \qquad \dot{W}_P = \mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}_{IN}, \tag{1}$$

где $\dot{Q}_{IN}$ — скорость производства тепла неупругими источниками, $\mathbf{T}$ — тензор истинных напряжений, $\mathbf{D}_{IN}$ — деформация скорости неупругих перемещений, и экспериментально определяется зависимость γ от накопленной меры пластической деформации, за которую можно принять величину

$$\Lambda_P = \int_0^t \mathbf{D}_{IN}(\tau) \cdot\cdot \mathbf{D}_{IN}(\tau)\, d\tau.$$

До недавнего времени большинство работ в этой области проводилось в условиях квазистатического эксперимента. В результате чего был сделан вывод, что γ есть постоянная величина, принимающая значения между 0.8 и 1. Динамические же эксперименты показали, что γ не константа, меняется в процессе накопления пластических деформаций и при некотором критическом уровне пластической деформации почти вся энергия превращается в тепло и γ достигает единицы. Типичная зависимость γ от Λ_P имеет вид (см. [7]), представленный на рис. 1.

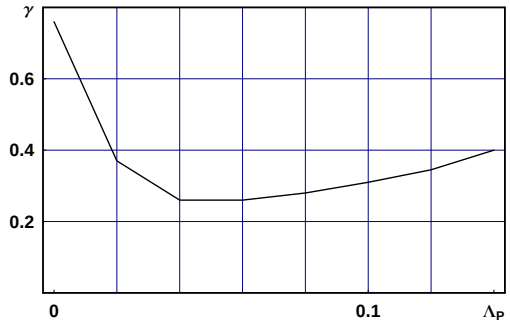


Рис. 1. Типичная зависимость γ от Λ_P

Энергия, затраченная на изменение структуры, должна в упругопластическом процессе повлиять на упругие параметры материала и на его пластическое поведение. Эксперименты М. А. Жукова и В. С. Ленского показали, что упругие параметры материала зависят от пластической деформации и уменьшаются почти на 20%. Авторы других экспериментальных работ (О. А. Шишмарев, Е. Я. Кузьмин, Ю. А. Созонов) согласны с этими выводами в качественной части, но в части количественной получили незначительное (5-7%) уменьшение первоначальных величин и дали разумное объяснение такому несоответствию с экспериментами М. А. Жукова и В. С. Ленского. Поэтому, в соответствии с экспериментами О. А. Шишмарева, Е. Я. Кузьмина и Ю. А. Созонова, будем считать, что упругие свойства материала не зависят от предварительной (не очень глубокой) пластической деформации. Это приводит к тому, что в соотношении для $\dot{Q}_{IN}$ (см. [3, 8]) все производные от напряжений по скалярному структурному параметру μ_i равны нулю (нет зависимости упругих свойств материала от изменения структуры), и оно перепишется в виде

$$\dot{Q}_{IN} = (1 - 2\,\beta\,\Theta)\,\mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1}\,\rho_0\,\frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu_i}\,\dot{\mu}_i.$$

где, в соответствии с термодинамическим неравенством,

$$\mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1}\,\rho_0\,\frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu_i}\,\dot{\mu}_i \geq 0.$$

В этих соотношениях β — коэффициент линейного температурного расширения, Θ — абсолютная температура, ρ_0 и J — плотность материала в начальной конфигурации и его относительное изменение объема, а Ψ_3 — слагаемое, зависящее только от изменения структуры, в выражении $\Psi(\mathbf{C}, \mu_i, \Theta) = \Psi_1(\mathbf{C}, \mu_i, \Theta) + \Psi_2(\Theta) + \Psi_3(\mu_i)$, определяющем свободную энергию ($\mathbf{C}$ — мера деформации Коши–Грина). В результате (1) запишется как

$$\gamma = (1 - 2\,\beta\,\Theta) - \frac{J^{-1}\,\rho_0\,\dfrac{\partial \Psi_3}{\partial \mu_i}\,\dot{\mu}_i}{\mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}_{IN}}. \tag{2}$$

Учтем, что в пластичности $\mathbf{D}_{IN} = \mathbf{D}_P$ и

$$\mathbf{D}_P = \frac{3\,\dot{\sigma}_i}{2\,H\sigma_i}\,\mathbf{S},$$

где σ_i — интенсивность напряжений, H — модуль пластического упрочнения, $\mathbf{S}$ — девиатор тензора напряжений $\mathbf{T}$. Тогда

$$\mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}_P = \mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{D}_P = \frac{2\,H\,\sigma_i}{3\,\dot{\sigma}_i}\,(\mathbf{D}_P \cdot\cdot \mathbf{D}_P) = \frac{2\,H\,\sigma_i}{3\,\dot{\sigma}_i}\,\dot{\Lambda}_P. \tag{3}$$

Ограничимся только одним параметром μ и будем считать, что μ есть функция от λ_P. Тогда $\dot{\mu} = (\partial\mu/\partial\Lambda_P)\,\dot{\Lambda}_P$ и соотношение (2) перепишется, с учетом (3), в виде

$$\gamma = (1 - 2\,\beta\,\Theta) - J^{-1}\,\rho_0\,\frac{3\,\dot{\sigma}_i}{2\,H\sigma_i}\,\frac{\partial \Psi_3}{\partial \mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial \Lambda_P}. \tag{4}$$

Разумно положить, что $\mu(\Lambda_P)$ слабо меняется при малых Λ_P, затем скорость этого изменения значительно возрастает и, наконец, кривая выходит на насыщение. Такое поведение $\mu(\Lambda_P)$ было описано двумя способами. Первый использовал две экспоненты, состыкованные в точке Λ_{P0}, в том числе и по первой производной:

$$\mu = \begin{cases} (1 - A)\,\exp\left[\dfrac{c\,A}{1 - A}\,(\Lambda_P - \Lambda_{P0})\right] & \Lambda_P \leqslant \Lambda_{P0} \\ 1 - A\,\exp\left[-c\,(\Lambda_P - \Lambda_{P0})\right] & \Lambda_P \geq \Lambda_{P0} \end{cases}.$$

График этой функции приведен на рис. 2 в переменных $x \sim y$, соответствующих переменным $\Lambda_P \sim \mu$. Здесь кривая 1 построена для параметров $A = 0.3$, $c = 3$, $\Lambda_{P0} = 3$, кривая 2 — $A = 0.3$, $c = 5$, $\Lambda_{P0} = 3$ и кривая 3 — $A = 0.3$, $c = 7$, $\Lambda_{P0} = 2$.

Недостатки этой аппроксимации связаны с поведением функции $\mu(\Lambda_P)$ при $\Lambda_P \to 0$. Поэтому предполагаемое поведение функции $\mu(\Lambda_P)$ аппроксимировались еще и сплайном

$$\mu = \begin{cases} a_0\,\Lambda_P^2 & 0 \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P1} \\ a_1 + b_1\,\Lambda_P + c_1\,\Lambda_P^2 & \Lambda_{P1} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P2} \\ a_2 + b_2\,\Lambda_P + c_2\,\Lambda_P^2 & \Lambda_{P2} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P3} \\ a_3 + b_3\,\Lambda_P + c_3\,\Lambda_P^2 & \Lambda_{P3} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P4} \end{cases}, \tag{5}$$

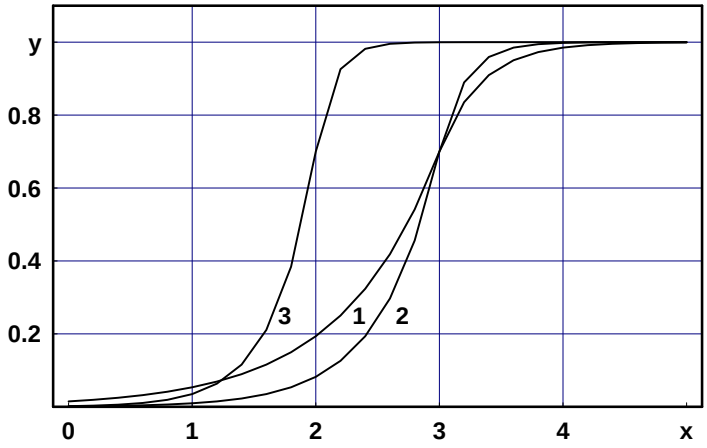


Рис. 2. Зависимости μ (y) от Λ_P (x) при некоторых значениях параметров

где за Λ_{P2} принималась точка перегиба на кривой рисунка 1, а за Λ_{P4} — самая правая точка того же рисунка. На коэффициенты сплайна накладывались условия сопряжения на концах каждого отрезка, в том числе и по производным, и требование определенного их поведения на каждом участке. Полученные связи определили независимые параметры сплайна. Полагая, что $\Psi_3(\mu) = a\,\mu + b\,\mu^2$, и используя зависимость (5), соотношение (4) было преобразовано. Входящие в это преобразованное соотношение коэффициенты находились из условия наилучшего приближения кривой на рисунке 1 методом сканирования по этим параметрам. На рисунке 3 приведена ломаная кривая из рисунка 1, результаты ее сглаживания и приближения сплайном. На верхней горизонтальной шкале указана величина пластической деформации. Наибольшие погрешности в аппроксимации получились на концах области.

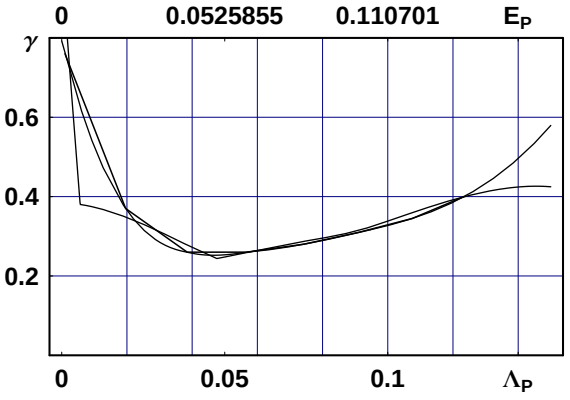


Рис. 3. Результаты описания кривой сплайном

Дальнейшие исследования, как представляется, должны быть направлены на установление связей между неупругой энергией, затраченной на изменение структуры материала, и параметрами в соотношениях, описывающих пластический процесс.

Работа выполнена в ведущей научной школе (гранты Президента Российской Федерации НШ-8055.2006.1, НШ-3717.2008.1 и НШ-7529.2010.1) в рамках программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (№ 09-Т-1-1006), программы совместных фундаментальных исследований УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН (№ 09-С-1-1008) при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 10-01-00055).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Роговой А. А.* Кинематика и термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Электронный журнал «Физико-химическая кинетика в газовой динамике». 2008. Т.7. Электронный адрес: www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-022.pdf

[2] *Роговой А. А.* Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 5. С. 138–149.

[3] *Роговой А. А.* Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 4. С. 144–153.

[4] *Роговой А. А.* Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 165–172.

[5] *Новокшанов Р. С., Роговой А. А.* О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Известия РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 77–95.

[6] *Новокшанов Р. С., Роговой А. А.* Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Известия РАН. МТТ. 2005. № 4. С. 122–140.

[7] *Rosakis P., Rosakis A. J., Ravichandran G., Hodowany J.* A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals // J. Mech. Phys. Solids. 2000. V. 48, pp. 581–607.

[8] *Роговой А. А., Столбова О. С.* Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.

Rogovoy A. A. *Finite deformations in materials with variable structure*. The paper is concerned with the problem of dividing the inelastic energy into heat and latent energy connected with the structural changes in material. Here we use the approach, which in the framework of the finite deformations, leads to the heat conductivity equation, namely, to its part, which defines heat production by inelastic sources. Taking into account the experimental data it has been supposed that the elastic properties of material do not depend on the structural changes, caused by plastic deformations. The experimental curve, describing the fraction of plastic work transformed into heat, has been obtained.

ЗАДАЧА ОБ ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ ДВУХ ПЛАСТИН, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Ротанова Т. А.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В представленной работе рассматривается контакт двух упругих пластин, расположенных под углом друг к другу. При этом одна из пластин содержит жесткое включение и деформируется в своей плоскости, а другая — в вертикальном направлении. В предположении достаточной гладкости решения получена дифференциальная постановка этой задачи, эквивалентная вариационной. Рассмотрены различные случаи расположения жесткого включения. Показано, что задача с жестким включением может быть получена как предельная для семейства задач теории упругости.

Введение. В последние годы произошло значительное продвижение в исследовании задач со свободными границами в связи со становлением и развитием теории вариационных неравенств. Теория вариационных неравенств возникла из практической задачи, известной теперь как задача Синьорини (1933), об одностороннем контакте упругого и недеформируемого тел в отсутствие трения. Обзор и результаты работ, посвященных изучению свойств этой задачи и обобщениям в различных направлениях, можно найти в [5]. Впоследствии проводилось значительное число как зарубежных, так и отечественных исследований широкого класса контактных задач с неизвестной областью контакта.

Большое число физических и инженерных задач со свободной границей могут быть сформулированы как вариационные, в частности, это задачи о контакте упругих и неупругих тел. Поэтому исследования контактных задач крайне актуальны. Одностороннему контакту упругих тел разных размерностей посвящены работы [3, 6, 7].

В данной работе рассматривается вопрос о равновесии двух упругих пластин, расположенных под углом друг к другу, под действием внешних сил (модель Кирхгофа–Лява). Нижняя пластина G содержит жесткое включение. При этом пластина G деформируется в своей области, а верхняя пластина подвергается изгибу. Область контакта заранее неизвестна и подлежит определению (задача со свободной границей).

Контактные задачи для двух упругих пластин, одна из которых содержит жесткое включение, можно найти в [1, 2], однако в этих работах рассматриваются только вертикальные перемещения пластин. Следует отметить, что до настоящего времени исследования пластин, содержащих жесткие включения, систематически не проводились. Из работ, затрагивающих этот вопрос, можно назвать [9]. Исследованию трещины на границе жесткого включения посвящена работа [8]. Задачи о равновесии упругих и неупругих тел, содержащих трещины, с краевыми условиями взаимного непроникания берегов тоже можно отнести к классу контактных задач, однако краевые условия, возникающие при этом, принципиально отличаются от краевых условий в задачах о контакте упругих тел разных размерностей.

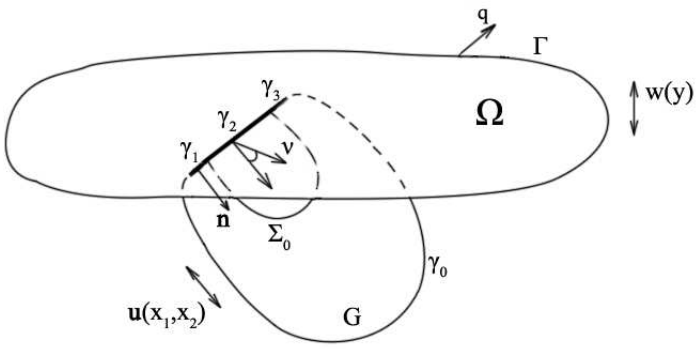


Рис. 1. Контакт пластин.

Постановка задачи. Рассматриваются две упругие пластины, расположенные под углом α друг к другу, где $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, в естественном состоянии контактирующие по прямолинейной незамкнутой кривой ненулевой меры γ, как показано на рисунке 1. Ограниченные области $\Omega, G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкими границами Γ и ∂G соответствуют срединным плоскостям пластин. Пусть $\gamma \subset \partial G$, $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$. Предполагается, что нижняя пластина G деформируется в своей плоскости, а точки верхней (горизонтальной) пластины Ω допускают перемещение только в вертикальном направлении.

При этом нижняя пластина содержит жесткое включение — подобласть $\omega \subset \Omega$ с границей Σ_0 класса $C^{0,1}$, таким образом, $\Omega \backslash \bar{\omega}$ соответствует упругой части пластины.

С целью описать перемещение точек области ω вводится пространство жестких перемещений:

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) | \rho(x) = Cx + D, x \in \omega\},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, D = (d^1, d^2), \quad \text{где } c, d^1, d^2 = const.$$

Также рассматривается билинейная форма:

$$a_\Omega(w, v) = \int\limits_\Omega (w_{,11}v_{,11} + w_{,22}v_{,22} + \chi(w_{,11}v_{,22} + w_{,22}v_{,11}) + 2(1-\chi)w_{,12}v_{,12}),$$

где χ — коэффициент Пуассона верхней пластины Ω. Для описания нижней пластины вводится тензор модулей упругости $B = \{b_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$. При этом коэффициенты $b_{ijkl} \in L^\infty(G)$ являются положительно определенными и симметричными. Через $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к границе области $G \setminus \bar{\omega}$. Также вводятся тензоры деформаций $\varepsilon(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$ и напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$. Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам.

В области $G \setminus \bar{\omega}$ выполняется закон Гука $\sigma = B\varepsilon(\mathbf{u})$. Функции

$$w(\mathbf{y}),\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x})), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G$$

описывают перемещения точек верхней и нижней пластин соответственно.

Рассматривается пространство $H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$, где

$$H^1_{\gamma_0}(G) = \{\mathbf{v} \in [H^1(G)]^2 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ на } \gamma_0\},$$

$$H^2_0(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial q} = 0 \text{ на } \Gamma\};$$

и функционал энергии:

$$E(\mathbf{u}, w) = \frac{1}{2}(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}))_G - (\mathbf{g}, \mathbf{u})_G + \frac{1}{2}a_\Omega(w, w) - -(f, w)_\Omega,$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$, $g_i \in L^2(G)$, $i = 1, 2$; $f \in L^2(\Omega)$ заданные функции.

Допустимыми перемещениями являются элементы следующего множества, задающего условие взаимного непроникания пластин:

$$K_\omega = \{(\mathbf{u}, w) \in H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega) |\ \mathbf{un} \sin\alpha + w \geqslant 0 \text{ на } \gamma; \mathbf{u}|_\omega = \rho, \rho \in R(\omega)\}.$$

Ставится задача минимизации функционала энергии на множестве K_ω:

$$\inf_{(\mathbf{u},w)\in K_\omega} E(\mathbf{u}, w). \tag{1}$$

Задача (1) разрешима в силу теоремы Вейерштрасса [10]. Показано, что решение единственно.

Задача (1) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$(\mathbf{u}, w) \in K_\omega, \tag{2}$$

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}))_{G\setminus\bar{\omega}} - (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_G + a_\Omega(w, \bar{w} - w) - (f, \bar{w} - w)_\Omega \geqslant 0 \ \ \forall(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) \in K_\omega. \tag{3}$$

Дифференциальная постановка задачи. Через $\Omega_\gamma = \Omega\setminus\bar{\gamma}$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ обозначаем вектор внешней нормали к границе Γ, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор нормали к γ, расположенный в плоскости верхней пластины Ω. Кроме того, $w_\nu = \frac{\partial w}{\partial \nu}, w_q = \frac{\partial w}{\partial q}$.

Дифференциальная постановка задачи (2)–(3) получена в предположении достаточной гладкости решения $(\mathbf{u}, w)$. Предполагаем, что кривую γ можно продолжить до замкнутой кривой Σ_1 класса $C^{1,1}$. При этом область Ω разбивается на две подобласти, к каждой из которых можно применить следующую формулу Грина [4, 10], справедливую для произвольной области Ω с границей Γ класса $C^{1,1}$, к которой ν — внешняя нормаль:

$$(\varphi, \triangle^2 w)_\Omega = a_\Omega(w, \varphi) + (t^\nu(w), \varphi)_\Gamma - (m(w), \varphi_\nu)_\Gamma \ \forall\varphi \in H^2(\Omega),$$

где

$$m(w) = \chi\triangle w + (1-\chi)\frac{\partial^2 w}{\partial\nu^2},\ t^\nu(w) = \frac{\partial}{\partial\nu}(\triangle w + (1-\chi)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}),\ s = (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1),$$

изгибающий момент и перерезывающая сила для верхней пластины.

Дифференциальная постановка задачи (2)–(3) выглядит следующим образом. Найти функции $\mathbf{u}$ в G, w в Ω, такие что выполняется:

$$-div(B\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{g} \text{ в } G \setminus \bar{\omega}, \tag{4}$$

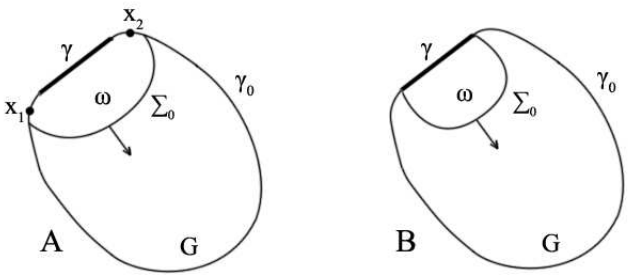


Рис. 2. Случаи расположения жесткого включения.

$$\triangle^2 w = f \text{ в } \Omega_\gamma, \tag{5}$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \gamma_0, \tag{6}$$

$$\mathbf{u}|_\omega = \rho_\mathbf{0}, \text{ где } \rho_0 \in R(\omega), \tag{7}$$

$$\mathbf{u} = \rho_0 \text{ на } \Sigma_0, \tag{8}$$

$$w = w_q = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{9}$$

$$\mathbf{un}\sin\alpha + w \geqslant 0 \text{ на } \gamma, \tag{10}$$

$$[w] = [w_\nu] = 0,\ [m(w)] = 0,\ [t^\nu(w)] \geqslant 0,\ [t^\nu(w)](\mathbf{un}\sin\alpha + w) = 0 \text{ на } \gamma, \tag{11}$$

$$[t^\nu(w)]\mathbf{n}\sin\alpha = -\sigma\mathbf{n} \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_3, \tag{12}$$

$$(\sigma\mathbf{n}, \rho)_{\Sigma_0} + (g, \rho)_\omega + ([t^\nu(w)], \rho\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2} = 0\ \forall\rho \in R(\omega). \tag{13}$$

Показано, что система, состоящая из уравнений равновесия (4)–(5) и краевых условий (6)–(13), является полной.

Другие случаи расположения жесткого включения. В различных случаях расположения жесткого включения ω нижней пластины G условия на области контакта пластин γ существенно отличаются.

В случаях, когда жесткое включение выходит на границу γ_0, как показано на рисунках 2A, 2B, имеем в точности задачу о контакте пластины Ω с неподвижным жестким препятствием. В упругой части пластины G выполнено уравнение равновесия. Функции $\mathbf{u}$ и w находятся независимо.

Предельный переход от упругого включения к жесткому. Установлено, что задача (2)–(3) может быть рассмотрена как предельная для семейства задач с параметром $\lambda > 0$, описывающих односторонний контакт двух упругих пластин, расположенных под углом α друг к другу. В задачах из указанного семейства при каждом $\lambda > 0$ подобласть ω соответствует упругому включению в пластине, а при $\lambda = 0$ точка $x \in \omega$ будет иметь перемещение $\rho_0(x) \in R(\omega)$.

Дальнейшие исследования. Будет рассмотрен случай, когда область контакта выходит на границу Ω. При этом γ может полностью или частично принадлежать границе области Ω. А также случай, когда верхняя пластина как и нижняя содержит жесткое включение.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-222.2010.1).

Автор благодарит А. М. Хлуднева за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Неустроева Н. В.* Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // СибЖИМ. Т.12. 2009. № 4. С. 92–105.

[2] *Неустроева Н. В.* Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестник НГУ. Т.9. 2009. № 4. С. 51–64.

[3] *Стекина Т. А.* Вариационная задача об одностороннем контакте упругой пластины с балкой // Вестник НГУ. Т.9. 2009. № 1. С. 46–56.

[4] *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.

[5] *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

[6] *Хлуднев А. М., Хоффманн К. Х., Боткин Н. Д.* Вариационная задача о контакте упругих объектов разных размерностей // Сиб. мат. журн. Т.43. 2006. № 6. С. 707–719.

[7] *Хлуднев А. М.* Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу // Журнал ПМТФ. Т.49. 2008. № 4. С. 553–567.

[8] *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Препринт ИГиЛ СО РАН. 2009. № 1. С. 1–18.

[9] *Morrassi A., Rosset E.* Detecting rigid inclusions, or cavities, in an elastic body // J.Elasticity. V.73. 2003. pp. 101–126.

[10] *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton-Boston: WIT Press, 2000.

Rotanova T. A. *The unilateral contact problem for two plates one of them containing a rigid inclusion*. This paper deals with the unilateral contact problem for two elastic plates located at an angle to each other. One of the plates contains a rigid inclusion and is deformed in its plane with the other being vertically deformed. Assuming that the solution is smooth, the differential statement being equivalent to the variational formulation is justified. We analyse different configurations of the rigid inclusion. The problem with rigid inclusion is shown to be obtained as the limiting one of the family of elastic problems.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА БОКОВОГО УДАРА КОЛЕСА ЛОКОМОТИВА О ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ РЕЛЬС

Солодовник М. Д., Буряк В. Г., Мушкаев Я. В.
Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля, Луганск

Получена аналитическая оценка зон концентрации контактных напряжений в железнодорожном рельсе при боковом ударном воздействии на него колеса в реальных условиях движения транспортных средств.

Как известно, наибольшие динамические контактные напряжения при действии колеса на железнодорожный рельс имеют место в стыковочной части. Не меньшую опасность представляют также боковые ударные нагрузки, когда колёсная пара входит в кривые участки пути и на крестовинах стрелочных переводов.

Для аналитической оценки бокового удара достаточно реализовать совместную систему дифференциальных уравнений поперечного скольжения колеса с приве́денной массой M по рельсу с приве́денной массой m [1].

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -P(t) - F_{mp} \tag{1}$$

$$EI_z\frac{\partial^2V}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2V}{\partial t^2} = (P(t) + F_{mp})\delta(x - x_0) - q(x,t) \tag{2}$$

где: x, y — продольное и поперечное направления рельса; $P(t)$ — точечное боковое ударное воздействие колеса на рельс; F_{mp} — поперечная составляющая силы трения между колесом и рельсом; E, I_z — модуль упругости и момент инерции рельса; V — боковой изгиб рельса; $\delta\,(x - x_0)$ — функция Дирака; $q\,(x,\ t)$ — боковое воздействие основания на рельсошпальную клеть.

Начальные условия выберем в виде:

$$y\,(0) = 0 \qquad \dot{y}_0 = \nu_{oy} \tag{3}$$

$$V\,(x,\ 0) = 0 \qquad \dot{V}\,(x,\ 0) = 0 \tag{4}$$

Тогда решением уравнения (1) будет функция

$$y\,(t) = \dot{y}_0 \qquad t - \frac{1}{M}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\left(P\,(t_2) + F_{mp}\right)dt_2dt_1 \tag{5}$$

Учитывая в уравнении (2) возможность разделения переменных и полагая $q\,(x,t) = V\,(x,t)$, где c — коэффициент отпора подрельсового основания, представим соответствующее решение в виде:

$$V\,(x,\ t) = \sum f_n\,(t)\,V_n\,(x), \tag{6}$$

где динамическая составляющая $f_n(t)$ в нормированных переменных определится из уравнения

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \varpi_n^2 f_n = \frac{V_n(x_0) \int\limits_0^1 [P(t) + F_{mp}]\, \delta(x - x_0)\, dx}{m \int\limits_0^1 V_n^2(x)\, dx} \tag{7}$$

здесь $\varpi_n^2 = \frac{l}{m}\left(\frac{n^4\pi^4}{l^4} EI_z + c\right)$ — одновременно характеризует упругие свойства рельса и основания.

При начальных условиях (4) решение уравнения (7) представляется в виде интеграла Дюамеля [2].

$$f_n(t) = \frac{V_n(x_0)}{\varpi_n m \int\limits_0^1 V_n^2(x)\, dx} \int\limits_0^1 [P(\tau) + F_{mp}] \sin \varpi_n (t - \tau)\, d\tau. \tag{8}$$

В качестве фундаментальных функций в (6) можно взять тригонометрические функции

$$V_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{9}$$

поскольку они удовлетворяют начальным условиям (4).

В виду того, что нами рассматривается задача о столкновении упругих тел, то к решению (6) необходимо присоединить деформационное сближение, которое, следуя многим литературным источникам, выражается формулой

$$\Delta V = k(P - F_{mp})^{2/3}, \tag{10}$$

где k — экспериментальный коэффициент восстановления при ударе.

Сравнивая (5) и (6) с учётом (8), (9), (10) и приближённым значением боковой силы трения колеса о рельс $F_{mp} \approx Mgf$, где f — коэффициент трения скольжения [3], g — ускорение свободного падения, придём к окончательному интегральному уравнению для определения ударного воздействия $P(t)$, которое из-за очевидности не приводится. После вычисления $P(t)$ определяются соответствующие напряжения.

В качестве примера был исследован поперечный удар колёсной пары о середину рельса Р65 длиной $l = 5$ м при скорости удара $v_{oy} = 3$ м/сек. При соответствующих значениях других параметров период основной формы колебаний системы оказался равным 0.0038 сек. В случае отсутствия бокового отпора — период составил 0.1127 сек. Из физических соображений время максимального сближения рельса и колеса составляет четверть периода, т. е. 0.0009 сек. При этом поперечный динамический изгиб рельса составил $V_{max} = 0.00543$ м, причём $V_{max} > y_{max}$. Последнее означает, что рельс после отскока гребня колеса от его головки, в силу приобретённой энергии, «продолжает» увеличивать свой прогиб до максимального значения и, возвращаясь, повторно ударяется о колесо.

Очевидно, что экстремальные боковые воздействия, складываясь с номинальными воздействиями на верхней площадке рельса, вызывают высокие скалывающие напряжения внутри рельса, что, в конечном счёте, инициирует их разрушение [4]. На рис. 1 показан характер разрушения рельса от совместного вертикального и поперечного воздействий колеса на рельс.

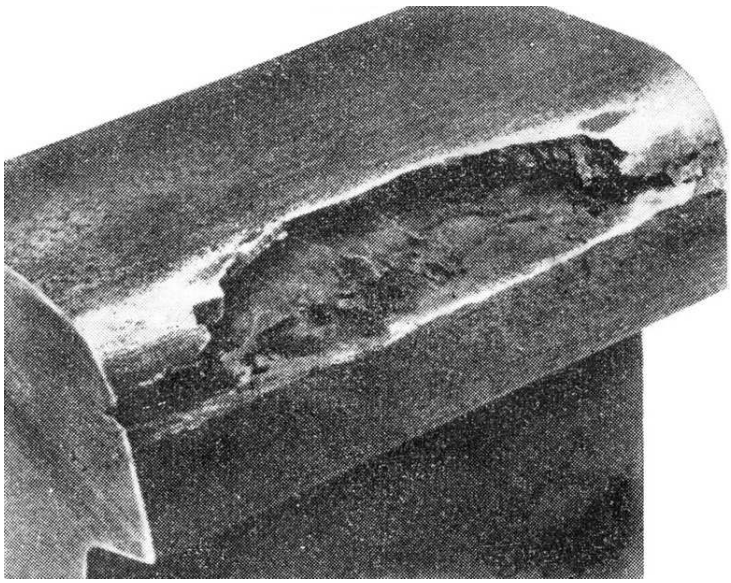


Рис. 1. Характер поверхностно-бокового разрушения рельса.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Александров В. М., Чебаков М. И.* Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-н/Д: Изд-во РГУ, 2007. 114 с.

[2] *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твёрдых тел. Удар. К.: Наукова думка. 1976. 319 с.

[3] *Голубенко А. Л.* Сцепление колеса с рельсом. К.: 1993. 445 с

[4] Механика разрушения. Том 4. К.: Наукова думка. 1990. 679 с.

Solodovnik M., Buryak W., Mushkaev Y. *Analytical estimation of lateral blow of wheel of locomotive at a ferrous-travelling rail.* The analytical estimation of zones of density of contact voltages in a railway rail is received at side shock effect on it sprockets in actual practice movements of vehicles.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В МАТЕРИАЛЕ СО СТЕПЕННЫМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ ЗАКОНОМ

Степанова Л. В.

Самарский государственный университет

Приводится решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины нормального отрыва в материале со степенной зависимостью между деформациями и напряжениями. Для нахождения собственных значений используется метод возмущений, основанный на разложении собственного значения, соответствующей собственной функции и показателя нелинейности материала в ряд по степеням малого параметра, представляющего собой разность между собственными значениями, отвечающими линейной и нелинейной задачам. Дано сравнение полученных собственных значений с точным численным решением рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения.

1. Введение. Анализ напряженно-деформированного состояния вблизи кончика трещины является одной из основных проблем современной механики трещин. Особый интерес вызывало и вызывает исследование полей напряжений и деформаций у вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими уравнениями. Наибольшее распространение получил степенной закон связи между напряжениями и деформациями (или напряжениями и скоростями деформаций, если речь идет о степенном законе теории установившейся ползучести). Определение напряженно-деформированного состояния в материале со степенным законом является предметом многочисленных исследований, начиная с классических работ Дж. Хатчинсона, Дж. Райса и Дж. Розенгрена (ХРР) [1–3], в которых установлена асимптотика напряжений вблизи устья трещины и показано, что компоненты тензора напряжений определяются в соответствии с равенством

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \left(\frac{J}{BI_n r}\right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n),$$

где J — инвариантный интеграл механики разрушения, r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины, B, n — материальные константы степенного закона упрочнения, $I_n = I_n(n)$ — безразмерный J-интеграл, $\tilde{\sigma}_{ij}$ — универсальное угловое распределение напряжений, определяемое из решения краевой задачи.

В течение многих лет построение высших приближений в задаче ХРР являлось предметом многочисленных исследований [4–6]. Во всех упомянутых работах главный член асимптотических разложений напряжений — решение ХРР [1–3].

В настоящее время сложилось понимание о необходимости определения всего спектра собственных значений в задаче ХРР [7, 8]. В [8] отмечается, что в большинстве работ пренебрегают слагаемыми более высоких порядков вида $r^{3/2}$, r, $r^{1/2}$, $r^{-3/2}$, $r^{-5/2}, \ldots$ в полном решении Уильямса при исследовании упругопластических задач. Если существует область пластического течения, охватывающая вершину трещины, то полное решение вне области пластического течения

должно содержать слагаемые более высоких порядков. В [8] обсуждается справедливость ряда традиционных гипотез, принимаемых при изучении задач о трещинах в упругопластических материалах, а именно, предположение о маломасштабном пластическом течении.

Дискуссия, развернутая в [8], ведет к следующим вопросам общего характера. 1) Сколько сингулярных слагаемых для выбранного неупругого материала может математически существовать вблизи вершины трещины и как они могут быть определены? 2) При каких условиях то или иное слагаемое в асимптотическом разложении можно трактовать как физически обоснованное и играющее доминирующую роль? А именно, если классическое решение ХРР с теоретически известным собственным значением $s = -1/(n+1)$ не является доминирующим слагаемым в окрестности вершины трещины, то как можно найти общую функциональную зависимость $s = s(n)$?

Для определения всего спектра собственных значений можно воспользоваться методом возмущений, развитым в асимптотической теории. Целью настоящего исследования будет анализ собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, которая получается при рассмотрении трещины нормального отрыва, с помощью метода возмущений.

2. Постановка задачи. Исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины нормального отрыва в материале со степенными определяющими уравнениями $\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$, где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ — интенсивность напряжений; B, n — материальные константы, приводит к необходимости исследования уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

и условия совместности деформаций

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r} + r\frac{\partial^2\left(r\varepsilon_{\theta\theta}\right)}{\partial r^2}.$$

Для трещины нормального отрыва в предположении реализации плоского деформированного состояния определяющие соотношения принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)/4, \qquad \varepsilon_{r\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}/2,$$

где интенсивность напряжений определяется формулой $\sigma_e^2 = 3\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)^2/4 + 3\sigma_{r\theta}^2$. Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют форму

$$\sigma_{r\theta}(r,\theta=\pm\pi) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r,\theta=\pm\pi) = 0.$$

Степенной характер определяющих уравнений задачи позволяет обратиться к представлению функции напряжений Эри $F(r,\theta)$ в полярных координатах с полюсом в вершине трещины в виде разложения по собственным функциям: $F(r,\theta) = r^{\lambda+1}f(\theta)$. Тогда компоненты тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1}\left[(\lambda+1)f + f''\right], \quad \sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)f, \quad \sigma_{r\theta} = -r^{\lambda-1}\lambda f',$$

а условие совместности приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$:

$$
\begin{aligned}
&f_e^2 f^{IV}\left\{(n-1)\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]^2+f_e^2\right\}+(n-1)(n-3)\times\\
&\times\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}^2\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+\\
&+(n-1)f_e^2\left\{\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]^2+\left[(1-\lambda^2)f+f''\right](1-\lambda^2)f''+\right.\\
&\left.+4\lambda^2\left(f''^2+f'f'''\right)\right\}\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+C_1 f_e^4 f''-C_2 f_e^4\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+\\
&+2(n-1)f_e^2\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+\\
&+C_1(n-1)f_e^2\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}f'+f_e^4(1-\lambda^2)f''=0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где приняты обозначения $f_e^2=\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]^2+4\lambda^2 f'^2$, $C_1=4\lambda\left[(\lambda-1)n+1\right]$, $C_2=(\lambda-1)n\left[(\lambda-1)n+2\right]$. Вместе с граничными условиями отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$
f(\theta=\pm\pi)=0,\quad f'(\theta=\pm\pi)=0 \tag{2}
$$

уравнение (1) постулирует нелинейную задачу на собственные значения: необходимо подобрать собственное число λ, отвечающее нетривиальному решению уравнения (1) — собственной функции $f(\theta)$, удовлетворяющей краевым условиям (2).

3. Нелинейная задача на собственные значения. Аналитическое выражение для собственного значения λ как функции от показателя нелинейности материала n и от λ_0 — собственного числа, отвечающего невозмущенной линейной задаче ($n=1$), может быть найдено с помощью представления

$$
\lambda=\lambda_0+\varepsilon, \tag{3}
$$

где ε — отклонение собственного числа λ от собственного числа линейной задачи λ_0 при изменении n. Показатель нелинейности материала n и искомая функция $f(\theta)$ разыскиваются в виде

$$
n=1+\varepsilon n_1+\varepsilon^2 n_2+\ldots,\ f(\theta)=f_0(\theta)+\varepsilon f_1(\theta)+\varepsilon^2 f_2(\theta)+\ldots, \tag{4}
$$

где $f_0(\theta)$ — решение «невозмущенной» линейной задачи ($n=1$). С помощью асимптотических представлений (3) и (4) из (1) и (2) получается бесконечная последовательность краевых задач относительно функций $f_i(\theta)$. Решение ОДУ $f_0^{IV}+2(\lambda_0^2+1)f_0''+(\lambda_0^2-1)^2 f_0=0$ относительно функции $f_0(\theta)$, подчиняющееся граничным условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины $f_0(\theta=\pm\pi)=0$, $f_0'(\theta=\pm\pi)=0$, для трещины отрыва имеет вид $f_0(\theta)=\beta\cos(\alpha\theta)-\alpha\cos(\beta\theta)$, $\alpha=\lambda_0-1$, $\beta=\lambda_0+1$. Характеристическое уравнение для определения собственного значения λ_0 следует из граничных условий на берегах трещины и имеет вид $\sin 2\pi\lambda_0=0$, $\lambda_0=m/2$, где m — целое число. Неоднородное линейное ОДУ относительно $f_1(\theta)$ имеет вид

$$
f_1^{IV}+2(\lambda_0^2+1)f_1''+(\lambda_0^2-1)^2 f_1=-n_1 v_0+2\lambda_0 f_0''-C_1^1 f_0''+C_2^1 x_0+2\lambda_0 a_0 f_0, \tag{5}
$$

где для краткости приняты обозначения $a_0=1-\lambda_0^2$, $v_0=x_0\left(f_0^{IV}x_0+\omega_0\right)/g_0$, $x_0=a_0 f_0+f_0''$, $g_0=x_0^2+4\lambda_0^2(f_0')^2$, $\omega_0=(x_0')^2+a_0 x_0 f_0''+4\lambda_0^2(f_0'')^2+4\lambda_0^2 f_0' f_0'''$,

$C_1^1 = 4\lambda_0\left[2 + n_1(\lambda_0 - 1)\right]$, $C_2^1 = 2\lambda_0\left[1 + n_1(\lambda_0 - 1)\right]$. Граничные условия для функции $f_1(\theta)$ формулируются как $f_1(\theta = \pm\pi) = 0$, $f_1'(\theta = \pm\pi) = 0$.

Таким образом, для определения функции $f_1(\theta)$ получена краевая задача для неоднородного ОДУ четвертого порядка. Нетривиальное решение данной краевой задачи будет существовать, если выполнено некоторое условие разрешимости, для формулировки которого обычно обращаются к сопряженной краевой задаче. Для рассматриваемой задачи искомое условие разрешимости формулируется как

$$\int_{-\pi}^{\pi} ugd\theta = 0, \qquad u = f_0(\theta) = \beta\cos(\alpha\theta) - \alpha\cos(\beta\theta),$$

где u — решение сопряженной задачи, $g(\theta)$ — правая часть неоднородного ОДУ (5) относительно функции $f_1(\theta)$. Проводя необходимые преобразования, можно установить, что условие разрешимости краевой задачи для функции $f_1(\theta)$ выполняется, если $n_1 = -2/(\lambda_0 - 1)$, и, следовательно, двучленное асимптотическое разложения показателя нелинейности определяется равенством

$$n = 1 - 2\varepsilon/(\lambda_0 - 1) + O(\varepsilon^2).$$

Для функции $f_2(\theta)$ неоднородное ОДУ имеет существенно более громоздкий вид:

$$\begin{aligned}
&g_0^2\left[f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2+1)f_2'' + (\lambda_0^2-1)^2 f_2\right] + g_0^2\left(-x_0 + C_1^2 f_0'' - C_2^2 x_0 + 2\lambda_0 C_2^1 f_0\right) + \\
&+n_1\left\{-x_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right)\left[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2\right] - 2h_0^2 x_1 + 4\lambda_0^2 h_0 g_0 f_1' + \right. \\
&+g_0 x_0\left[-4\lambda x_0' f_0' - 2\lambda_0 a_0 f_0 f_0'' - 2\lambda_0 x_0 f_0'' + 8\lambda_0 (f_0'')^2 + 8\lambda_0 f_0' f_0'''\right] + \\
&+2h_0 x_0'\left[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2\right] - 2h_0 x_0\left[-2\lambda_0 x_0 f_0' - 2\lambda_0 f_0 x_0' + 8\lambda_0 f_0' f_0''\right] + \\
&+4\lambda_0^2 h_0 f_0'\left[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2\right] - 2\lambda_0 g_0 f_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right) - 2\lambda_0 g_0 f_0 f_0^{IV} x_0 + \\
&+n_1 h_0^2 x_0 + 4\lambda_0 h_0^2 f_0 - 4\lambda_0 g_0 h_0 f_0' - x_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right)\left[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'\right] + g_0 x_0^2 f_1^{IV} + \\
&+g_0 x_0\left[2x_0' x_1' + a_0 f_0'' x_1 + a_0 x_0 f_1'' + 8\lambda_0^2 f_0'' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0''' f_1' + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'''\right] + \\
&+2h_0 x_0'\left[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'\right] - 2h_0 x_0\left[x_0 x_1' + x_0' x_1 + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0'' f_1'\right] + \\
&\left.+4\lambda_0^2 h_0 f_0'\left[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'\right] + g_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right)x_1 + 2h_0 g_0 x_1' + f_0^{IV} g_0 x_0 x_1\right\} = 0,
\end{aligned}$$

где $C_1^2 = 4\left\{\lambda_0\left[n_2(\lambda_0 - 1) + n_1\right] + n_1(\lambda_0 - 1) + 1\right\}$, $C_2^2 = 2\lambda_0\left[n_2(\lambda_0 - 1) + n_1\right] + \left[n_1(\lambda_0 - 1) + 1\right]^2$, $h_0 = x_0 x_0' + 4\lambda_0^2 f_0' f_0''$, $x_1 = f_1'' + a_0 f_1$.

Условие разрешимости краевой задачи относительно функции $f_2(\theta)$ позволяет найти следующий коэффициент асимптотического разложения показателя нелинейности материала n_2 и построить трехчленные асимптотические разложения

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 = -\frac{5}{2},\ n = 1 + \frac{4}{7}\varepsilon - \frac{79}{2401}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3);\ \lambda_0 = -\frac{3}{2},\ n = 1 + \frac{4}{5}\varepsilon + \frac{669}{625}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\
&\lambda_0 = -\frac{1}{2},\ n = 1 + \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{92}{81}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3); \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad n = 1 + 4\varepsilon + 8\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \qquad (6) \\
&\lambda_0 = \frac{3}{2}, \quad n = 1 - 4\varepsilon + \frac{53}{5}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3); \quad \lambda_0 = \frac{5}{2}, \quad n = 1 - \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{683}{567}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Для $\lambda_0 = 1/2$, соответствующего классической задаче ХРР, можно найти, что

$$n_k = -\frac{(-1)^k}{(\lambda_0 - 1)^{k+1}}, \quad n = 1 - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_0 - 1}\right)^k = -\frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \lambda = \frac{n}{n+1}.$$

Таким образом, получена хорошо известная формула, связывающая собственное число λ и показатель нелинейности материала n.

Обобщая выражения (6), можно представить их в виде единой зависимости

$$n_2(\lambda_0) = -\frac{\lambda_0^5 - 2\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 + 11\lambda_0^2 + 4\lambda_0 - 5 - (\lambda_0^2 - 1)\, sgn(\lambda_0)}{(\lambda_0 + 1)\,(\lambda_0 - 1)^4}\ .$$

4. Выводы. Приближенное решение нелинейной задачи на собственные значения можно сравнить с имеющимся точным численным решением. Для значения $n = 3\,(\lambda_0 = -1/2)$ трехчленное асимптотическое разложение показателя нелинейности материала приводит к следующему собственному значению $\lambda_{asymp} = 0.2284$; точное численное решение позволяет найти, что $\lambda_{num} = 0.2286$. Относительная погрешность составляет 0.087%. Поэтому можно заключить, что полученная методом возмущений приближенная оценка собственного значения дает возможность отыскать собственное значение с хорошей точностью.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hutchinson J. W.* Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. №1, pp. 13–31.

[2] *Hutchinson J. W.* Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. №5, pp. 337–347.

[3] *Rice J.R.* Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. №1, pp. 1–12.

[4] *Nguyen B. N., Onck P. R., Van Der Giessen E.* On Higher-Order Crack-Tip Fields in Creeping Solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2000. V. 67. №2, pp. 372–382.

[5] *Nikishkov G. P.* An algorithm and a computer program for the three-term asymptotic expansion of elastic-plastic crack tip stress and displacement fields // Engng. Fracture Mechanics. 1995. V. 50. №1, pp. 65–83.

[6] *Yuan F. G., Yang S.* Analytical solutions of fully plastic crack-tip higher order fields under antiplane shear // Intern. J. of Fracture. 1995. V. 69, pp. 1–26.

[7] *Lu M., Lee S. B.* Eigenspectra and orders of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium // Intern. J. of Fracture. 1998. V. 92, pp. 55–70.

[8] *Hui C. Y., Ruina A.* Why K? High order singularities and small scale yielding // Intern. J. of Fracture. 1995. V. 72, pp. 97–120.

Stepanova L. V. *Analysis of crack-tip fields for a power-law medium*. In this note eigenspectra and orders of singularity of the stress field near a mode I crack tip in a power-law material are discussed. The perturbation theory technique is employed to pose the required asymptotic solution. The whole set of eigenvalues is obtained. It is shown that the eigenvalues of the nonlinear problem are fully determined by the corresponding eigenvalues of the linear problem and by the hardening exponent.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОГО СЛОЯ

Суворова Г. Ю.[*], **Богомолов А. С.**[**]
[*]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*
[**]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается динамическая смешанная связанная задача о возбуждении акустических волн на поверхности трансверсально-изотропного термоупругого слоя, под действием распределенной в некоторой области на поверхности среды тепловой нагрузки. Предполагается, что вне этой области поверхность слоя теплоизолирована. Колебания предполагаются установившимися, поверхность слоя — свободной от механических напряжений, нижняя грань — теплоизолированной и защемленной. Методами операционного исчисления краевая задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно образов Фурье вектора механических перемещений и температуры. Построено интегральное представление перемещения произвольной точки слоя, а также распределения температуры. На основе этого представления построено интегральное уравнение относительно перемещений. Исследованы свойства ядра интегрального оператора. Предложен метод и построено решение интегрального уравнения, описывающее распределение теплового потока в зоне контакта.

Рассматривается динамическая смешанная связанная задача о возбуждении акустических волн на поверхности трансверсально-изотропного термоупругого слоя, занимающего область $0 \leqslant x_3 \leqslant h,\ |x_1|, |x_2| \leqslant \infty$, под действием заданной в области $|x_1| \leqslant 1,\ |x_2| \leqslant \infty$ на поверхности среды температуры, осциллирующей по гармоническому закону $\tau = \tau_0(x_1)e^{-i\omega t}$. Вне этой области поверхность слоя теплоизолирована. Колебания предполагаются установившимися, поверхность слоя — свободной от механических напряжений, нижняя грань — теплоизолированной и защемленной.

Краевая задача описывается [1, 2] уравнениями движения термоупругой среды:

$$\theta_{ij,i} = \rho\ddot{u}_j \tag{1}$$

уравнением теплопроводности:

$$\tau_{,jj} - \frac{\rho}{K_T}\dot{\tau} = \eta\dot{u}_{k,k} \tag{2}$$

и граничными условиями:

$$x_3 = h: \begin{cases} \tau = qe^{-i\omega t}, & |x_1| \leqslant 1 \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial x_3} = 0, & |x_1| > 1,\ |x_2| < \infty \\ \theta_{31} = 0,\ \theta_{32} = 0,\ \theta_{33} = 0, & |x_1|,\ |x_2| \leqslant \infty \end{cases} \tag{3}$$

$$x_3 = 0: \quad \frac{\partial\tau}{\partial x_3} = 0, \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0, \qquad |x_1|,\ |x_2| \leqslant \infty \tag{4}$$

Здесь

$$\theta_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\tau)\,\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$\theta_{ij},\ \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений и деформации, τ — температура, K_τ — коэффициент теплопроводности, γ — коэффициент линейного теплового расширения.

Для построения решения исходной задачи рассмотрим вспомогательную задачу, полагая, что в области контакта задана функция распределения потока тепла

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_3} = q_4 e^{-i\omega t}, \qquad |x_1| \leqslant 1 \tag{5}$$

Методами операционного исчисления краевая задача (1)–(4) с условием (5) сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно образов Фурье вектора механических перемещений и температуры, решение которой имеет вид:

$$U_1 = -i\alpha\left(\sum_{k=1}^{2}\left(C_k f_{1k} ch(\sigma_k x_3) + C_{k+2} f_{1k} sh(\sigma_k x_3)\right) + C_5 f_{13} ch(\sigma_3 x_3) + C_6 f_{13} sh(\sigma_3 x_3)\right)$$

$$U_3 = \sum_{k=1}^{2}\left(C_k f_{3k} sh(\sigma_k x_3) + C_{k+2} f_{3k} ch(\sigma_k x_3)\right) + C_5 f_{33} sh(\sigma_3 x_3) + C_6 f_{33} ch(\sigma_3 x_3) \tag{6}$$

$$U_4 = T = \sum_{k=1}^{2}\left(C_k f_{4k} ch(\sigma_k x_3) + C_{k+2} f_{4k} sh(\sigma_k x_3)\right) + C_5 f_{43} ch(\sigma_3 x_3) + C_6 f_{43} sh(\sigma_3 x_3)$$

Здесь

$$f_{31} = f_{32} = 1, \quad f_{11} = \frac{f_{31}}{\sigma_1}, \quad f_{12} = \frac{\sigma_2}{\alpha^2} f_{32}, \quad f_{13} = \frac{\gamma}{(\lambda + 2\mu)\,(\sigma_3^2 - \sigma_1^{*2})} f_{43}$$

$$f_{33} = \frac{\gamma\sigma_3}{(\lambda + 2\mu)\,(\sigma_3^2 - \sigma_1^{*2})} f_{43}, \quad f_{41} = \frac{(\lambda + 2\mu)\,(\sigma_1^2 - \sigma_1^{*2})}{\gamma\sigma_1} f_{31}, \quad f_{42} = 0, \quad f_{43} = 1$$

$$\sigma_1^{*2} = \alpha^2 - \rho\omega^2\,(\lambda + 2\mu)^{-1}, \qquad \sigma_2^2 = \alpha^2 - \rho\omega^2\mu^{-1}$$

σ_1, σ_3 удовлетворяют уравнению

$$(\lambda + 2\mu)\left(\sigma^2 - \sigma_1^{*2}\right)\left[-i\left(\sigma^2 - \alpha^2\right) + \frac{\omega}{K_T}\right] + \left(\sigma^2 - \alpha^2\right)\gamma\eta\omega = 0$$

Участвующие в представлении (6) коэффициенты $c_k,\ k = 1, 2, ...6$ определяются из системы (здесь и ниже $U_4,\ Q_4$ — преобразование Фурье функций, описывающих температуру и вертикальную компоненту потока тепла)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \\
\hline
l_{11}\sigma_1 sh_1^0 & l_{12}\sigma_2 sh_2^0 & l_{13}\sigma_3 sh_3^0 & l_{11} ch_1 & l_{12} ch_2 & l_{13} ch_3 & 0 \\
l_{21} ch_1 & l_{22} ch_2 & l_{23} ch_3 & l_{21}\sigma_1 sh_1^0 & l_{22}\sigma_2 sh_2^0 & l_{23}\sigma_3 sh_3^0 & 0 \\
l_{31}\sigma_1 sh_1^0 & l_{32}\sigma_2 sh_2^0 & l_{33}\sigma_3 sh_3^0 & l_{31} ch_1 & l_{32} ch_2 & l_{33} ch_3 & Q_4 \\
f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 \\
f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{7}$$

Здесь

$$sh_k^0 = sh(\sigma_k h)/\sigma_k, \quad ch_k = ch\,(\sigma_k h), \quad k = 1, 2, 3$$

коэффициенты l_{mn} определяются формулами

$$l_{11} = 1, \quad l_{12} = \frac{\theta}{\alpha^2}, \quad l_{13} = \frac{\gamma\sigma_3}{(\lambda + 2\mu)\,(\sigma_3^2 - \sigma_1^{*2})}$$

$$l_{21} = \frac{-\alpha^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\,\sigma_1^{*2}}{\sigma_1}\gamma, \quad l_{22} = 2\mu\sigma_2, \quad l_{23} = \frac{-\alpha^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\,\sigma_1^{*2}}{(\lambda + 2\mu)\,(\sigma_3^2 - \sigma_1^{*2})}\gamma$$

$$l_{31} = \frac{(\lambda + 2\mu)\,(\sigma_1^2 - \sigma_1^{*2})}{\gamma}, \quad l_{32} = 0, \quad l_{33} = \sigma_3$$

Решение задачи (1)–(5) имеет вид

$$u_4(x_1, x_3, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} K_{44}(\alpha, x_3, \omega) Q_4(\alpha)\, e^{-i\alpha x_1} d\alpha \tag{8}$$

$$K_{44}(\alpha, x_3, \omega) = \tfrac{1}{\Delta_0}\sum_{k=1}^{2} (\sigma_k f_{4k} ch(\sigma_k x_3)\Delta_{3k} + f_{4k} sh(\sigma_k x_3)\Delta_{3,k+2}) +$$

$$+ f_{43} ch(\sigma_3 x_3)\Delta_{35} + f_{43} sh(\sigma_3 x_3)\Delta_{36}$$

Здесь Δ_{mn} — алгебраическое дополнение элемента матрицы с номером mn в системе (7). Выражение (8) представляет собой распределение температурного поля в слое, вызванного заданным потоком тепла через поверхность среды. В случае, когда в области контакта задано распределение температуры $u_4(x_1, h, \omega) = f(x_1)$, в выражении (8) необходимо положить $x_3 = h$. Получаем

$$\int\limits_{\Gamma} K_{44}(\alpha, \omega) Q_4(\alpha)\, e^{-i\alpha x_1} d\alpha = 2\pi f(x_1) \tag{9}$$

$$K_{44}(\alpha, \omega) = \tfrac{1}{\Delta_0}\sum_{k=1}^{2} (\sigma_k f_{4k} ch(\sigma_k h)\Delta_{3k} + f_{4k} sh(\sigma_k h)\Delta_{3,k+2}) +$$

$$+ f_{43} ch(\sigma_3 h)\Delta_{35} + f_{43} sh(\sigma_3 h)\Delta_{36}$$

Выражение (9) представляет собой интегральное уравнение относительно вертикальной компоненты потока тепла через поверхность среды, для решения которого можно использовать широкий набор методов [3–6]. В данной работе используется обобщенный метод фиктивного поглощения [6], позволяющий с высокой точностью учитывать динамические свойства среды.

В качестве примера рассмотрена задача о возбуждении термоупругого слоя под действием заданной в области $[-1; 1]$ температуры. На рисунке представлен график распределения потока тепла (реальная составляющая — сплошная линия, мнимая составляющая — штриховая линия), рассчитанный для стали при значении частоты $\omega = 2$.

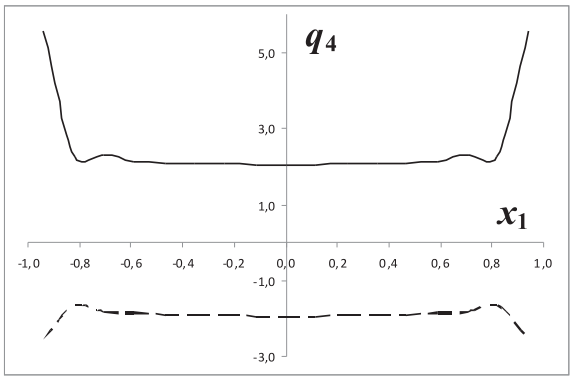


Рис. 1. Распределение теплового потока при фиксированном размере зоны контакта.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (09-08-01065, 09-01-00695, 09-08-96527-р_юг_а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 307 с.

[2] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

[3] *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

[4] *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.

[5] *Бабешко В. А., Белянкова Т. И., Калинчук В. В.* О решении одного класса смешанных задач для слоистого полупространства // Доклады РАН. 2001. Т. 380. № 5. С. 619–622.

[6] *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.

Suvorova G. Yu., Bogomolov A. S. *Dynamic mixed problem for thermoelastic layer*. A dynamic mixed coupled problem is considered about acoustic waves excitations on the surface of transversely isotropic thermoelastic layer subject to thermal load. An integral representation is obtained both for the displacement and temperature distribution. Based on this representation an integral equation with respect to displacements is derived. The kernel properties of integral operator are analyzed. The method is proposed and solution is obtained for integral equation, which describe a heat flow distribution in the contact zone.

ДЛИННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ВОДЕ, ВЫЗВАННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИМИ КОЛЕБАНИЯМИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ

Трепачев В. В.

Институт энергетики и машиностроения при ДГТУ, Ростов-на-Дону

Исследуется краевая задача для нелинейной системы уравнений теории длинных волн на поверхности тяжелой несжимаемой жидкости, вызванных гармоническими колебаниями вертикальной жесткой стенки. Из полученного решения вытекают составляющие известных решений в виде частных случаев. Имеется подтверждение теории данными лабораторных наблюдений.

Рассматривается нелинейная система уравнений теории длинных волн, состоящая из уравнения движения в проекции на горизонтальную ось x и уравнения неразрывности движения, преобразованного с помощью кинематического условия

$$\partial u/\partial t + u(\partial u/\partial x) = -g(\partial \eta/\partial x), \quad x \geqslant 0;$$

$$\partial \eta/\partial t + u(\partial \eta/\partial x) = -(h+\eta)(\partial u/\partial x), \quad x \geqslant 0, \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$ — горизонтальная скорость жидкости, h – глубина слоя в невозмущенном состоянии, $\eta = \eta(x,t)$ – возвышение поверхности над невозмущенным уровнем, g — ускорение свободного падения. Изучим волны, вызванные гармоническими колебаниями плоской жесткой вертикальной стенки в тяжелой несжимаемой жидкости, согласно соотношению для горизонтальной скорости частицы жидкости

$$u(x,t) = (ag/c)\cos(\sigma t) = d\xi/dt, \quad x = \xi(t);$$

$$\xi = \frac{ga}{c\sigma}\sin(\sigma t), \tag{2}$$

где σ — частота колебаний, $c = \sqrt{gh}$ — фазовая скорость длинных волн в рамках линейной теории, $\xi(t)$ — закон колебания стенки в горизонтальном направлении. Величина a — амплитуда поверхностной волны η в рамках линейной теории. Граничное условие (2) выполняется на подвижной границе. Разложим левую часть условия (2) в ряд по степеням переменной x. В результате имеем граничное условие на неподвижной границе $x = 0$ в виде

$$u(0,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\xi(t) + \ldots = \frac{d\xi}{dt}. \tag{3}$$

Отбросим в уравнениях (1), (3) только нелинейные слагаемые, получим постановку краевой задачи в линейном приближении теории длинных волн

$$\partial u/\partial t = -g(\partial \eta/\partial x), \quad x \geqslant 0;$$

$$\partial \eta/\partial t = -h\partial u/\partial x, \quad x \geqslant 0;$$

$$u(0,t) = (ag/c)\cos(\sigma t). \tag{4}$$

Решение задачи первого приближения (4) удовлетворяет: однородной системе дифференциальных уравнений и неоднородному краевому условию, которое выполняется на неподвижной границе $x = 0$. Оно имеет вид бегущих волн в положительном направлении оси x с постоянными скоростью c и амплитудой

$$\eta(x,t) = a\cos\sigma(t - x/c),$$

$$u(x,t) = (ag/c)\cos\sigma(t - x/c), \quad x \geqslant 0. \tag{5}$$

Применим метод итераций в краевой задаче (1), (3). Подставим решение линейной задачи (1) в нелинейные слагаемые уравнений (1). Получим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [1] для расчета второго приближения

$$\partial u/\partial t + g(\partial\eta/\partial x) = -(g^2a^2\sigma/2c^3)\sin(2\sigma(t - x/c)),$$

$$\partial\eta/\partial t + h(\partial u/\partial x) = -(ga^2\sigma/c^2)\sin(2\sigma(t - x/c)). \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений (6) должна удовлетворять линейному граничному условию второго приближения на неподвижной границе для горизонтальной скорости

$$u(0,t) + \frac{g^2a^2}{c^3}\sin^2(\sigma t) = 0. \tag{7}$$

Решение краевой задачи (6),(7) отыскиваем в виде суммы двух неизвестных функций

$$u(x,t) = u_e(x,t) + u_i(x,t), \quad x \geqslant 0. \tag{8}$$

Первое слагаемое (8) удовлетворяет однородной системе дифференциальных уравнений, полученной из (6), и неоднородному граничному условию (7) и имеет вид

$$\eta_e(x,t) = A_e\cos 2\sigma(t - \frac{x}{c}), \quad A_e = \frac{ga^2}{2c^2},$$

$$u_e(x,t) = u_0 + \frac{g}{c}A_e\cos 2\sigma(t - \frac{x}{c}), \quad u_0 = -\frac{g^2a^2}{2c^3}. \tag{9}$$

Так как неоднородное условие (7) удовлетворено решением (9), то систему неоднородных уравнений второго приближения (6) для второго слагаемого суммы $u_i(x,t)$ следует дополнить однородным краевым условием

$$u_i(0,t) = 0 \tag{10}$$

Частное решение (6), (10) отыскиваем с помощью метода неопределенных коэффициентов

$$\eta_i = A_1x\sin\Psi + C_1\cos\Psi + D_1\sin\Psi,$$

$$u_i = B_1x\sin\Psi, \quad \Psi = 2\sigma(t - x/c). \tag{11}$$

Решение (6) содержит четыре неизвестных постоянных. Неизвестные постоянные находятся подстановкой решения (11) непосредственно в систему уравнений

второго приближения. Показано, что $D_1 = 0$. Объединяем первое и второе приближение, имеем приближенное решение системы (1), удовлетворяющее краевому условию (2)

$$\eta = a\cos\sigma(t - x/c) + (A_e + ga^2/8c^2)\cos 2\sigma(t - x/c) -$$

$$-(3/4)(ga^2\sigma x/c^3)\sin 2\sigma(t - x/c), \quad x \geqslant 0; \tag{12}$$

$$u = (ga/c)\cos\sigma(t - x/c) + u_0 + (g/c)A_e\cos 2\sigma(t - x/c) -$$

$$-(3/4)(g^2a^2\sigma x/c^4)\sin 2\sigma(t - x/c), \quad x \geqslant 0. \tag{13}$$

Второе слагаемое в (12) собственная волна частоты 2σ. Последние слагаемые (12), (13) вынужденные волны второй гармоники. Постоянное слагаемое u_0 в (13) обусловлено течением типа течения Стокса, вызванного волнопродуктором в виде колеблющейся стенки. Стенка вызывает понижение среднего давления вблизи неё. Это вызывает движение жидкости, которая покоится на бесконечности. Воспользуемся соотношением $\sigma/c = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны. Введем два безразмерных параметра

$$\alpha = a/h, \quad \gamma = \alpha 2\pi x/\lambda.$$

Решение (7), (8) справедливо, если оба параметра α и γ малы. Первый параметр имеет смысл параметра нелинейности. Второй параметр учитывает изменение фазы волны $2\pi x/\lambda$, прошедшей расстояние x от места своего зарождения. Параметр γ мал, если параметр α мал, а изменение фазы волны любое конечное число. Таким образом, параметр γ учитывает влияние нелинейности и изменение фазы на амплитуду вынужденной второй гармоники нелинейной волны. Увеличение параметра γ приводит к увеличению крутизны переднего склона волны (7). Расчет проводился при значениях $\gamma < 1/2$. Решение для профиля волны (7) качественно отличается от решения, приведенного в [1]. В монографии [1] отсутствует собственная волна частоты 2σ в формуле профиля свободной поверхности жидкости (7).

Поясним причину различия. В данной работе и в [1] рассмотрены разные краевые задачи. В [1] движение жидкости в области $x \geqslant 0$ возбуждается приливной поверхностной волной, совершающей монохроматические гармонические колебания своей свободной поверхностью. Условие непрерывности выполняется для формы свободной поверхности жидкости на неподвижной границе [1]. В предлагаемой работе движение жидкости в области $x \geqslant 0$ возбуждается подвижной стенкой. Краевое условие непрерывности скорости жидкости в нормальном направлении для вертикальной стенки, которое выполняется на подвижной границе. Экспериментальное подтверждение теории, но в случае более коротких волн провел Madsen [2]. Измерение амплитуды собственной волны частоты 2σ удобнее проводить путем применения датчиков поверхностных волн, а не с помощью анемометров скорости. Решение предназначено для моделирования нелинейных амплитудных и фазовых эффектов без учета влияния дисперсии волн. В этом проявляется практическая значимость предлагаемого решения.

Расчет проведен при следующих значениях параметров рассматриваемой задачи: $t = 0$; $a = 6\,\text{м}$ — амплитуда волны в линейном приближении, $h = 50\,\text{м}$ —

глубина водоема, $\lambda = 750$ м. На рис. 1 цифрой 1 обозначена собственная вторая гармоника. Цифрой 2 обозначен график вынужденной второй гармоники. Цифра 3 обозначает результат расчета всей формы свободной поверхности жидкости. Волновое движение распространяется в направлении возрастания переменной x, обозначающей расстояние в метрах. Передний склон волны занимает почти вертикальное положение, а на заднем склоне волны начинает только формироваться ступенька, что отличает от данных расчетов других авторов. Работа представляет интерес при изучении причин возникновения асимметрии бегущих волн на мелкой воде в натурных условиях.

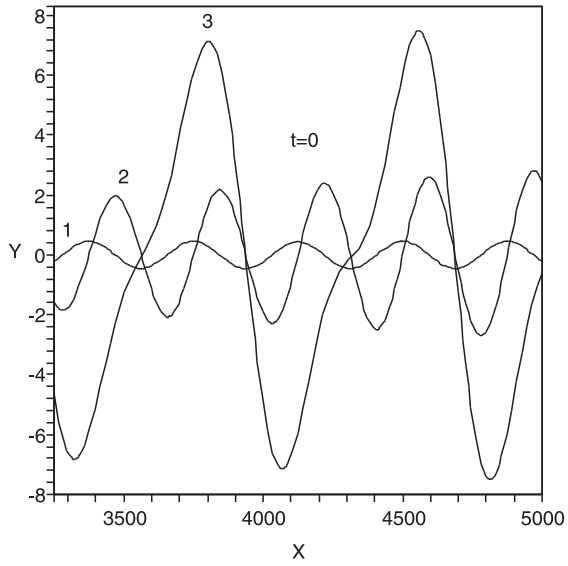


Рис. 1. Волновые возмущения поверхности жидкости, вызванные колебаниями вертикальной стенки, как функция расстояния от волнопродуктора

На рис. 2 сравниваются решения двух разных нелинейных задач. Первое решение представляет собой задачу о волнах, вызванных волнопродуктором в виде вертикальной стенки. Форма поверхности жидкости рассчитывается с помощью формулы (12). Решение второй задачи описывает возбуждение нелинейной волны в области $x > 0$, вызванное приливной волной [1]. Форма свободной поверхности в этом случае рассчитывается по формуле

$$\eta = a\cos\sigma(t - x/c) -$$

$$-(3/4)(ga^2\sigma x/c^3)\sin 2\sigma(t - x/c), \quad x \geqslant 0. \tag{14}$$

Сравнивая формулы (12) и (13), видим, что в случае нелинейных волн, вызванных приливной волной отсутствует собственная волна частоты 2σ. На рис. 2 нелинейная волна, вызванная вертикальным волнопродуктором, имеет большую высоту, чем нелинейная волна, вызванная приливом. Подробные расчеты показали, что высота гребня в случае колебаний вертикального волнопродуктора на 7,5% выше, чем в случае нелинейной волны, вызванной приливом. Глубина впадины

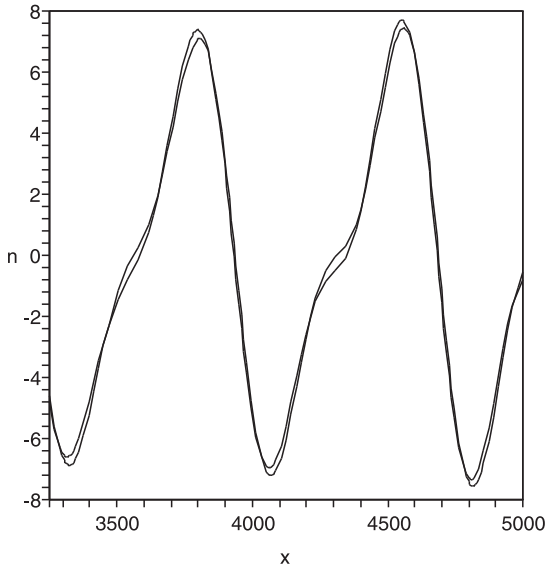


Рис. 2. Сравнение формы свободной поверхности жидкости, вызванной вертикальным волнопродуктором и приливной волной

на 4% больше. Работа представляет интерес при изучении причин возникновения асимметрии бегущих волн на мелкой воде в натурных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.

[2] *Madsen O. L.* On the generation of long waves // Journal of geophysical research. 1971. V. 76, № 36(20), pp. 8672–8683.

Trepachev V. V. *Long nonlinear waves on water, which are forced harmonic oscillations of the vertical wall*. Investigated boundary problem for nonlinear system equations of the theory for long waves on surface in heavy incompressible fluid, which are forced harmonic oscillations of the vertical solid wall. Obtained solution contains some parts of very good known decision, as a particular case prepared theory. There is the good coincidence with this theory and materials laboratory data.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА–ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ, ТЕКУЩИХ ПОД УГЛОМ ДРУГ К ДРУГУ НАД РОВНЫМ ДНОМ

Трепачев В. В.[*], **Трепачева Г. Н.**[**]

[*]*Институт энергетики и машиностроения при ДГТУ, Ростов-на-Дону*

[**]*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону*

Исследуется неустойчивость Кельвина-Гельмгольца потоков тяжелой несжимаемой жидкости, текущих под углом друг к другу над ровным дном. Неустойчивость обусловлена относительным скольжением слоев. Изучено влияние направления волновых возмущений в пространстве на величину инкремента неустойчивого течения. Используется новое условие фильтрации влияния поверхностных волн на внутренние волны, учитывается конечность глубин слоев.

Потоки жидкости, текущие под углом друг к другу наблюдаются в океане и атмосфере. Потоки неоднородных жидкостей часто используются в практических задачах сепарации и очистки, технологических процессах. В [1,2] изучались установившиеся волны на потоках двухслойной жидкости, текущих под углом друг к другу. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца плоских течений анализировалась авторами [3,4] с привлечением данных наблюдений ветрового течения над спокойной водой. Неустойчивость течения по Кельвину-Гельмгольцу приводит к бурному разрушению границы раздела [5]. Амплитуда волнового возмущения растет со временем. Рост амплитуды волны является экспоненциальным во времени до тех пор, пока она мала по сравнению с длиной волны [6]. Сила поверхностного натяжения и сила тяжести (при наличии устойчивой стратификации) стабилизируют движение волн [3–8]. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца провоцирует относительное скольжение слоев. В публикациях [3–7] это явление исследовалось только в случае плоского волнового движения. которое наблюдается в чистом виде только в лабораторных условиях. Пространственные эффекты неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на глубокой воде изучались в работе [8]. В данной публикации результаты [8] обобщаются на случай возникновения неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в двухслойной жидкости конечной глубины.

Рассмотрим движение двухслойной несжимаемой жидкости. Начало декартовой системы координат выберем на границе раздела, ось z направим вверх. Пусть верхний слой имеет плотность ρ_1, толщину h_1, вектор скорости потока $\{u_1, v_1, 0\}$. Соответственно нижний слой обладает плотностью ρ_2, толщиной h_2, вектором скорости потока $\{u_2, v_2, 0\}$. Исследуем неустойчивость движения идеальной жидкости по Кельвину-Гельмгольцу, учитывая влияние ровного дна, свободной поверхности и движение потоков жидкости под углом друг к другу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_n + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi_n + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_n = 0, \quad n = 1, 2; \tag{1}$$

$$\Phi_1(x,y,z,t)=0, \quad z=h_1; \tag{2}$$

$$\rho_1\left(g\xi_2+u_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)=-\alpha\left(\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi_2}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\rho_2\left(g\xi_2+u_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right), \quad z=0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial z}=\frac{\partial\xi_2}{\partial t}+u_n\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+v_n\frac{\partial\xi_2}{\partial y}, \quad z=0, \quad n=1,2; \tag{4}$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial\xi_1}{\partial y}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}, \quad z=h_1; \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0, \quad z=-h_2, \tag{6}$$

где Φ_n, $n=1,2$ — потенциалы скоростей; g – ускорение свободного падения, t — время, $\xi_1(x,y,t)$ – возвышение свободной поверхности; $\xi_2(x,y,t)$ — возвышение границы раздела жидкостей; α — коэффициент поверхностного натяжения. Потенциалы скорости удовлетворяют уравнениям Лапласа (1). На свободной поверхности (2) выполняется краевое условие $\Phi_1=0$. Условие (3) имеет смысл динамического условия на границе раздела. Поверхностное натяжение вызывает на ней скачок давления. Условия (4) представляют собой кинематические условия для верхнего слоя ($n=1$) и нижнего слоя ($n=2$). Из условия (5) находится возвышение свободной поверхности. Условие (6) означает, что дно бассейна не проницаемо.

Решение краевой задачи отыскиваем в виде волн, бегущих на плоскости x,y под некоторым углом к оси x

$$\Phi_1=\frac{sh\,k(z-h_1)}{ch\,kh_1}\,A_1\,\eta(x,y,t);$$

$$\Phi_2=\frac{ch\,k(z+h_2)}{ch\,kh_2}\,A_2\,\eta(x,y,t); \quad k=\sqrt{k_1^2+k_2^2};$$

$$\xi_2=D\eta(x,y,t), \quad \eta(x,y,t)=\exp[i(\omega t-k_1x-k_2y)], \tag{7}$$

где ω — круговая частота волнового возмущения, A_1, A_2, D — неизвестные постоянные.

Подставим решение (7) в постановку однородной краевой задачи. Исключим неизвестные постоянные A_1, A_2 и D. Выводим дисперсионное соотношение для фазовой скорости распространения внутренних волн $c=\omega/k$ в следующем виде

$$\rho_1(c-w_1\cos\gamma_1)^2 th\,kh_1+\frac{\rho_2(c-w_2\cos\gamma_2)^2}{th\,kh_2}=\alpha k+\frac{(\rho_2-\rho_1)g}{k}, \tag{8}$$

где $w_1=\sqrt{u_1^2+v_1^2}$, $w_2=\sqrt{u_2^2+v_2^2}$. Величина $w_n\cos\gamma_n$, $(n=1,2)$ равна проекции скорости потока слоя жидкости на волновой вектор $\{k_1,k_2,0\}$.

Слагаемое, содержащее h_1, учитывает влияние свободной поверхности. Слагаемое, содержащее h_2, учитывает влияние дна.

Решим дисперсионное уравнение (7), находим фазовую скорость c, в результате имеем

$$c = \frac{(\rho_1 \, th\, kh_1 \, th\, kh_2 w_1 \cos\gamma_1 + \rho_2 w_2 \cos\gamma_2)}{(\rho_1 \, th\, kh_1 \, th\, kh_2 + \rho_2)} \pm \sqrt{Di}, \tag{9}$$

где Di — дискриминант уравнения (8)

$$Di = \left[\alpha_2 k + \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{k}\right] \frac{th\, kh_2}{\rho_1 th\, kh_1 \, th\, kh_2 + \rho_2} - \tag{10}$$

$$- \frac{\rho_2 \, \rho_1 \, th\, kh_1 \, th\, kh_2}{\rho_1 \, th\, kh_1 \, th\, kh_2 + \rho_2)^2} \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_2 - v_1)^2} \cos^2\varphi.$$

В формулах (8)–(10) $\rho_1 \, th\, kh_1 \, th\, kh_2 = \rho_1$ — фиктивная плотность верхнего слоя. Увеличение толщины как верхнего, так и нижнего слоев приводит к увеличению влияния плотности верхнего слоя. Влияние плотности верхнего слоя при конечности глубин слоев меньше, чем в случае глубокой жидкости.

На рис. 1 волновые числа таковы, что дискриминант отрицателен.

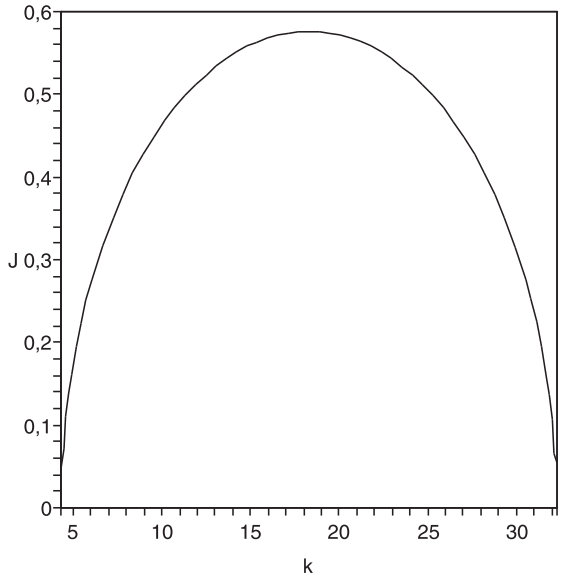


Рис. 1. Расчет инкремента и диапазона волновых чисел для потоков текущих под углом $\pi/3$

Величина φ в (10) равна углу между волновым вектором $\{k_1, k_2, 0\}$ и вектором скорости скольжения слоев жидкости относительно друг друга $\{u_2 - u_1,\ v_2 - v_1, 0\}$.

Неустойчивость движения жидкости по Кельвину–Гельмгольцу наступает при отрицательном значении дискриминанта. В этом случае частота колебаний становится комплексной величиной.

Положительной мнимой части (9) соответствует решение, которое нарастает во времени по экспоненциальному закону. Наибольшее абсолютное значение инкремента нарастания решения соответствует случаю, когда волновой вектор

$\{k_1, k_2, 0\}$ коллинеарен вектору скольжения слоев жидкости относительно друг друга $\{u_2 - u_1,\ v_2 - v_1, 0\}$, что соответствует значению $\varphi = 0$ (либо $\varphi = \pi$) в формуле (10).

Проведем расчет при $\rho_1 = 1000$ кг/м ^{3}, $\rho_2 = 1050$ кг/м ^{3}, $h_1 = 100$ м, $h_2 = 500$ м, $w_1 = w_2 = 0,5$ м/с. Угол между потоками равен $\pi/3$. Поверхностное натяжение на границе раздела пропорционально величине относительного скачка плотности [7]. Приведенные значения инкремента наибольшие из возможных при изменении направления движения возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.

[2] *Самусева Р. П.* О волнах на поверхности раздела двух потоков, текущих под углом друг к другу // Тр. Морского гидрофиз. ин-та. Вып. 24. Севастополь, 1961. С. 126–134.

[3] *Лакомб Э.* Физическая океанография. М.: Мир, 1974. С. 350–353.

[4] *Скот Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложениях к электронике. С.: Сов. радио, 1970. С. 64–67.

[5] *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. С. 108–113.

[6] *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. С. 449–452.

[7] *Трепачев В. В.* Асимптотический анализ движения жидкости, вызванного возмущениями на ее границах // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону, 1984. С. 84–94.

[8] *Трепачев В. В.* Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца потоков глубоких жидкостей, текущих под углом друг к другу // Безопасность жизнедеятельности. Охрана труда и окружающей среды. Межвуз. сборник науч. тр./ РГАСХМ. Ростов-на-Дону, 2003. Вып. 7. С. 79–82.

Trepachev V. V., Trepacheva G. N. *Kelvin–Helmholtz unsteady for streams of fluid, which run under angle to each other above flat bottom.* Researching the problem Kelvin–Helmholtz unsteady for streams of heavy incompressible fluid, which run under angle to each other above flat bottom. Cause of unsteady is the relative sliding of fluid layers. Investigated influence of direction for wave perturbation in the space on value increment of unsteady stream. Using new condition for filtration influence surface waves on internal waves, take into consideration limited value depth of layers.

ОБОБЩЕННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕРА ДЛЯ БЕЗМОМЕНТНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ

Тюриков Е. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Найден геометрический критерий безусловной разрешимости обобщенной граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек.

В рамках мембранной теории выпуклых оболочек [1] (см. также [2, гл. 17]) изучается граничная задача Т безмоментного напряженного состояния тонкой упругой оболочки T, серединная поверхность S которой есть строго внутренняя часть выпуклой поверхности S_0 класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, с кусочно-гладким краем $L = \bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$, состоящим из конечного числа дуг L_j класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Предполагается, что в каждой точке дуги L_j $(j = 1, \ldots, n)$ задана проекция $\sigma(s)$ *вектора усилий* на направление вектора $\boldsymbol{r}(s) = \{\alpha(s), \beta(s)\}$ с касательной и нормальной составляющими α, β соответственно, где s — натуральный параметр, $\alpha^2(s)+\beta^2(s) = 1$, $\beta(s) > 0$ на L_j. Рассматривается случай, когда граница L содержит угловые точки c_j с внутренними углами ν_j $(0 < \nu_j < 2\pi)$, векторное поле $\boldsymbol{r}$ как вектор-функция $\boldsymbol{r}(c)$ точки c контура L имеет разрывы 1-го рода в этих точках, а функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\sigma(s)$ — гельдеровы на каждой из дуг L_j.

1. Сведение задачи Т к задаче Римана–Гильберта. Всюду ниже поверхность S предполагается односвязной. Введем следующие обозначения: $\mathfrak{J}$ — отображение поверхности S на комплексную плоскость $\zeta = u^1 + iu^2$, заданное выбором сопряженно изометрической параметризации (u^1, u^2) на S, $D = \mathfrak{J}(S)$ — ограниченная в плоскости ζ область с границей $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{J}(L_j)$, содержащей угловые точки $\zeta_j = \mathfrak{J}(c_j)$. Согласно [3], задача Т сводится к отысканию в области D комплекснозначного решения $w(\zeta)$ уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} + B(\zeta)\overline{w}(\zeta) = F(\zeta), \tag{1}$$

где $i^2 = -1$, $\partial_{\bar{\zeta}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u^1} + i\dfrac{\partial}{\partial u^2}\right)$ — оператор комплексного дифференцирования, $w(\zeta)$ — *комплексная* функция напряжений, выражаемая (см. [3, гл. 3]) через компоненты контравариантного *тензора усилий* и коэффициенты метрической формы поверхности, $B(\zeta)$ — заданная поверхностью S функция класса $L_p(\overline{D})$, $p > 2$, $F(\zeta)$ — *комплексная функция внешней нагрузки оболочки*, по заданному граничному условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{d\zeta}{ds}\left(\beta\frac{d\zeta}{d\ell} - \alpha\frac{d\zeta}{ds}\right)w(\zeta)\right\} = \gamma(\sigma, K, k_s, \tau_g, X^3), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{2}$$

в котором $d\zeta/ds = s^1 + is^2$, s^i $(i = 1, 2)$ — координаты касательного к Γ орта, $d\zeta/d\ell = \ell^1 + i\ell^2$, ℓ^i $(i = 1, 2)$ — координаты орта направления на плоскости ζ, являющегося $\mathfrak{J}$-образом направления тангенциальной нормали, γ — вполне определенная функция своих аргументов, K, k_s, τ_g — соответственно гауссова кривизна поверхности, нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности в направлении края в точке $c = \mathfrak{J}^{-1}(\zeta)$, X^3 — *нормальная компонента вектора поверхностных и объемных сил на единицу площади*. Отметим, что правая часть равенства (2) как функция $\tilde{\gamma}(\zeta)$ аргумента ζ гельдерова на каждой из дуг $\Gamma_j = \mathfrak{J}(L_j)$ и терпит разрывы 1-го рода в точках ζ_j. Задачу (1), (2) назовем задачей R.

Возможность сведения задачи T для сферической серединной поверхности $(B(\zeta) \equiv 0)$ при условии $\alpha \equiv 0$ либо $\beta \equiv 0$ на L к задаче R обсуждалась в работе Л. А. Гольденвейзера [4]. Задача вида (1), (2) для выпуклых поверхностей с гладким краем L и гельдеровых на L векторных полей $\bar{r}(s)$ была поставлена И. Н. Векуа в работе [1]. Исключительные случаи граничного условия (2) (на каждой дуге L_j выполняется одно из условий $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 0$) для обобщенных аналитических функций $(F(\zeta) \equiv 0$ в $D)$ изучены автором в работе [5].

2. Классификация точек разрыва граничного условия (2). Всюду ниже будем полагать, что поверхность S и ее граница L ориентированы так, что при обходе по L поверхность остается слева, а направление касательного к L в точке c вектора $\boldsymbol{\sigma}(c)$ совпадает с положительным направлением обхода кривой L. Введем обозначения: $\boldsymbol{\sigma}_j^{(1)}$ и $\boldsymbol{\sigma}_j^{(2)}$ ($\boldsymbol{r}_j^{(1)}$ и $\boldsymbol{r}_j^{(2)}$) — предельные значения векторного поля $\boldsymbol{\sigma}(c)$, $(\boldsymbol{r}(c))$ в точке c_j слева и справа соответственно при обходе кривой L в положительном направлении. Для удобства изложения угловую точку $\zeta_j = \mathfrak{J}(c_j)$ границы и пару векторов $(\boldsymbol{r}_j^{(1)}, \boldsymbol{r}_j^{(2)})$ назовем *угловой точкой* $c_j(\mathrm{R})$ задачи R.

Угловую точку c_j назовем точкой k-типа $(k = 1, \ldots, 4)$, если

$$\frac{k-1}{2}\pi < \nu_j < \frac{k}{2}\pi.$$

Точку c_j, для которой $\nu_j = \pi/2$ $(\nu_j = 3\pi/2)$ будем относить к 1-типу (3-типу) соответственно. Точка c_j k-типа и множество допустимых пар векторов $\boldsymbol{r}_j^{(1)}$, $\boldsymbol{r}_j^{(2)}$ $(\alpha^2+\beta^2 = 1, \beta > 0)$ задают множество угловых точек $c_j(\mathrm{R})$, которое можно разбить на три класса $T_k^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3$ для каждого $k = 1, \ldots, 4)$. Для этого достаточно для каждого k $(1 \leqslant k \leqslant 4)$ указать знак величины θ угла $(|\theta| < 2\pi)$ между векторами $\boldsymbol{r}_j^{(1)}$, $\boldsymbol{r}_j^{(2)}$, заданного вращением первого в выбранном направлении до совмещения со вторым. При этом выбор направления вращения (для каждого $k = 1, \ldots, 4$) определяется взаимным расположением векторов $\boldsymbol{r}_j^{(k)}$, $\boldsymbol{\sigma}_j^{(k)}$ $(k = 1, 2)$. Окончательно, для каждого k $(1 \leqslant k \leqslant 4)$ *угловая точка* $c_j(\mathrm{R})$ принадлежит классу $T_k^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$, если

$$\pi(3 - k - j) < \theta_j - \nu_j \leqslant \pi(4 - k - j).$$

Следуя [6], угловую точку $\zeta_j = \mathfrak{J}(c_j)$ назовем *узлом* класса $T_k^{(j)}$ граничного условия (2). *Особенными* точками $c_j(\mathrm{R})$ задачи R (соответственно *особенными узлами* ζ_j условия (2)) назовем точки, для которых $\theta_j - \nu_j = m\pi$, где m — одно из чисел -3, -2, -1, 0, 1.

Пусть $c_{i_1},\dots,\ c_{i_n}$ — произвольно отмеченные неособенные *угловые точки* задачи R. Согласно [7], будем отыскивать решение класса $h(\zeta_{i_1},\dots,\zeta_{i_m})$, т. е. решение, ограниченное в точках $\zeta_{i_1},\ \dots,\ \zeta_{i_m}$ и допускающее в некоторой окрестности остальных точек ζ_j $(j\neq i_k,\ k=1,\dots,m)$ оценку $|w(\zeta)|\leqslant A|\zeta-\zeta_j|^{-\alpha}$, $0<\alpha_j<1$, $A=\mathrm{const}$. Если все точки $c_j(\mathrm{R})$ — неособенные, то решение, неограниченное в каждом узле $\zeta_j=\mathfrak{J}(c_j)$, назовем решением класса h_0.

Обозначим через $N_k^{(j)}$ число *угловых точек задачи* R, принадлежащих классу $T_k^{(j)}$ $(1\leqslant k\leqslant 4,\ 1\leqslant j\leqslant 3,\ \sum\limits_{k=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{3}N_k^{(j)}=n)$. Справедлива

Теорема. Пусть S — заданная выше односвязная поверхность класса регулярности $W^{3,p}$, $p>p_0$, где $p_0=\max\{1,\nu_1/\pi,\dots,\nu_n/\pi\}$, а $c_{i_1},\dots,\ c_{i_m}$ — произвольно отмеченные *неособенные точки* из числа угловых точек $c_j(\mathrm{R})$. Если

$$N\equiv\sum_{j=1}^{3}\left[\sum_{k=1}^{4}(4-(j+k))N_k^{(j)}\right]\geqslant 3+m-n,$$

то задача R безусловно разрешима в классе

$$h(c_{i_1},\dots,c_{i_m})\cap W^{1,q},\ 2<q<2p/(2+p(1-1/p_0)).$$

Если же $N<3+m-n$, то задача R однозначно разрешима в указанном классе тогда и только тогда, когда для функции $\sigma(s)$ выполняется конечное число условий разрешимости интегрального типа.

Схема доказательства. Решение уравнения (1) имеет вид

$$w=w_0+v,$$

где w_0 — некоторое частное решение уравнения (1), а v — общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial\bar\zeta}+B(\zeta)\bar v(\zeta)=0. \tag{3}$$

Таким образом, любое решение уравнения (3), удовлетворяющее граничному условию Римана–Гильберта (Р.–Г.)

$$\mathrm{Re}\{\mu(\zeta)v(\zeta)\}=\tilde\gamma_0(\zeta), \tag{4}$$

где $\mu(\zeta)=\dfrac{d\zeta}{ds}\left(\beta\dfrac{d\zeta}{d\ell}-\alpha\dfrac{d\zeta}{ds}\right)$, $\tilde\gamma_0(\zeta)=\tilde\gamma(\zeta)-\mathrm{Re}\{\mu(\zeta)w_0(\zeta)\}$, задает решение задачи R. Далее, используя для вычисления индекса граничного условия (4) в классе $h(\zeta_1,\dots,\zeta_m)$ технику, развитую в [7, 8], а также результаты о разрешимости «разрывной» задачи Р.–Г. для обобщенных аналитических функций (см. [7, § 1, теорема 1]), получаем доказательство теоремы.

В заключение рассмотрим задачу R для поля $\boldsymbol{r}(s)$, задающего направление *обобщенной тангенциальной* нормали. Последнее означает, что направление вектора $\boldsymbol{r}(s)$ есть образ направления тангенциальной нормали при некотором гладком

гомеоморфизме поверхности S на себя. Рассмотрим обобщенный сферический купол Гольденвейзера S^* (см. [2, гл. 17]), для которого $0 < \nu_j < \pi$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пусть $0 < \nu_j \leqslant \pi/2$ $(j = 1, \ldots, m)$ и $\pi/2 < \nu_j < \pi$ $(j = m+1, \ldots, n)$. Нетрудно установить, что угловой точке c_j k-типа $(k = 1, 2)$ и векторному полю $\boldsymbol{r}$ обобщенной тангенциальной нормали $(\boldsymbol{r} \in B)$ соответствует *угловая точка* $c_j(\mathrm{R})$ задачи R, принадлежащая одному из типов $T_k^{(j)}$ $(j = 1, 2)$. Таким образом, из теоремы следует

Утверждение. Если $\boldsymbol{r} \in B$, причем все угловые точки $c_j(\mathrm{R})$ для купола S^* — неособенные, то при $m \geqslant 3$ задача R безусловно разрешима в классе ограниченных в $\overline{D}$ решений, а при $m + n \geqslant 3$ — в классе h_0.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Векуа И. Н.* Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Матем. сб. 1952. Т. 31, № 2. С. 217–314.

[2] *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, Москва, 1976. 512 с.

[3] *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.

[4] *Гольденвейзер А. Л.* О применении решений задачи Римана–Гильберта к расчету безмоментных оболочек // ПММ. 1951. Т. XV, № 2. С. 149–166.

[5] *Тюриков Е. В.* Геометрический аналог задачи Векуа–Гольденвейзера // ДАН. 2009. Т. 424, № 4. С. 455–458.

[6] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

[7] *Тюриков Е. В.* Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Матем. сб. 1977. Т. 7, № 3. С. 445–462.

[8] *Тюриков Е. В.* Об одной граничной задаче теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Владикавк. мат. журнал. 2007. Т. 9, № 1. С. 62–68.

Tyurikov E. V. *Generelized boundary value problem of Goldenveizer for the momentless spherical shells*. The geometrical criterion of unconditional resolvability of the generalized boundary problem the theory of thin elastic shells is found.

О КОЛЕБАНИЯХ ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ

Углич П. С.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях упругого изотропного слоя, в котором упругие константы, а также плотность являются функциями поперечной координаты. После применения преобразования Фурье задача об определении амплитуды колебаний сведена к решению системы дифференциальных уравнений. Построены дисперсионные кривые и волновые поля на поверхности. Построено интегральное уравнение для решения обратной задачи об определении механических констант.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях упругого слоя, материальные параметры которого являются функциями поперечной координаты:

$$\lambda = \lambda(x_2),\ \mu = \mu(x_2),\ \rho = \rho(x_2),$$

где λ, μ — коэффициенты Ляме, ρ — плотность слоя. Определяющие соотношения и уравнения движения имеют обычный вид [1]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda(x_2)(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu(x_2)u_{1,1} = [\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)]\, u_{1,1} + \lambda(x_2)u_{2,2} \\ \sigma_{22} = \lambda(x_2)(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu(x_2)u_{2,2} = \lambda(x_2)u_{1,1} + [\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)]\, u_{2,2} \\ \sigma_{12} = \mu(x_2)(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \rho(x_2)\omega^2 u_1 = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \rho(x_2)\omega^2 u_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем, не нарушая общности, считаем толщину слоя равной единице. На границах слоя выполняются следующие краевые условия:

Нижняя граница жестко защемлена:

$$u_1|_{x_2=0} = u_2|_{x_2=0} = 0 \tag{3}$$

На верхней границе задается нормальное напряжение:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=1} = 0 \\ \sigma_{22}|_{x_2=1} = q(x_1) \end{cases} \tag{4}$$

Замыкают постановку задачи условия излучения, которые формулируются на основе принципа предельного поглощения [3].

2. Решение прямой задачи.

Для решения задачи будем использовать преобразование Фурье:

$$\tilde{u_i}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_i(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

Из уравнений движения Коши (1) и определяющих соотношений (2) для трансформант $\tilde{u}_1$ $\tilde{u}_2$ $\tilde{\sigma}_{12}$, $\tilde{\sigma}_{22}$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида [3]:

$$\begin{cases} U_1' = i\alpha U_2 + U_3 \\ U_2' = \dfrac{i\alpha\lambda U_1 + \mu U_4'}{\lambda + 2\mu} \\ U_3' = \left[4\alpha^2 \dfrac{\mu\,(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} - \rho\omega^2\right] U_1 + \dfrac{\mu U_4}{\lambda+2\mu} \\ U_4' = -\rho(x_2)\omega^2 U_2 + i\alpha\mu U_3, \end{cases} \tag{5}$$

в которой введены следующие обозначения:

$$U_1 = \tilde{u}_1,\ U_2 = \tilde{u}_2,\ U_3 = \frac{\tilde{\sigma}_{12}}{\mu},\ U_4 = \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{\mu}$$

Краевые условия для системы (5) следующие:

$$U_1|_{x_2=0} = U_2|_{x_2=0} = U_3|_{x_2=1} = 0,\ U_4|_{x_2=1} = \frac{\tilde{q}(\alpha)}{\mu},\ \tilde{q}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1 \tag{6}$$

Полученная система может быть решена методом пристрелки. Рассматривая эту систему при однородных краевых условиях, можно изучать дисперсию волн в неоднородных волноводах. На рисунке 1 представлены дисперсионные кривые для случая, когда материальные характеристики задаются следующими функциями [2]:

$$\lambda(x_2) = \lambda_0 \frac{1+\beta}{x_2+\beta}, \quad \mu(x_2) = \mu_0 \frac{1+\alpha}{x_2+\alpha}, \quad \rho = \rho_0 e^{\gamma x_2}$$

$$\lambda_0 = 10^6, \quad \mu_0 = 5 * 10^5, \quad \rho = 2 * 10^4, \quad \alpha = \beta = 1, \quad \gamma = 0.5$$

По оси абсцисс откладывается параметр $\chi_2 = \omega\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\mu_0}}$.

Волновое поле может быть получено после обратного преобразования Фурье. На рисунке 1 представлен график амплитуды перемещения u_1 для, состоящего из двух материалов: нижняя половина ($\{(x_1, x_2)| -\infty < x_1 < \infty,\ 0 \leqslant x_2 < 0.5\}$) — сталь, верхняя ($\{(x_1, x_2)| -\infty < x_1 < \infty,\ 0.5 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$) — медь, нагрузка — сосредоточенная сила, приложенная в начале координат $q(x_1) = \mu\delta(x_1)$.

3. Постановка обратной задачи.

Рассмотрим обратную задачу. Предположим, что известно поле перемещений на какой-то части верхней границы слоя. Требуется определить неизвестные упругие модули и плотность как функции координаты x_2.

Рассмотрим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \{[\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)]\, u_{1,1} + \lambda(x_2) u_{2,2}\}_{,1} + [\mu(x_2)\,(u_{1,2} + u_{2,1})]_{,2} + \rho(x_2)\omega^2 u_1 = 0 \\ [\mu(x_2)\,(u_{1,2} + u_{2,1})]_{,1} + \{\lambda(x_2) u_{1,1} + [\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)]\, u_{2,2}\}_{,2} + \rho(x_2)\omega^2 u_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Пусть ε — малый параметр. Предположим, что упругие характеристики и плотность представимы в виде:

$$\begin{aligned} &\lambda(x_2) = \lambda^{(0)}(x_2) + \varepsilon\lambda^{(1)}(x_2),\ \mu(x_2) = \mu^{(0)}(x_2) + \varepsilon\mu^{(1)}(x_2), \\ &\rho(x_2) = \rho^{(0)}(x_2) + \varepsilon\rho^{(1)}(x_2) \end{aligned} \tag{8}$$

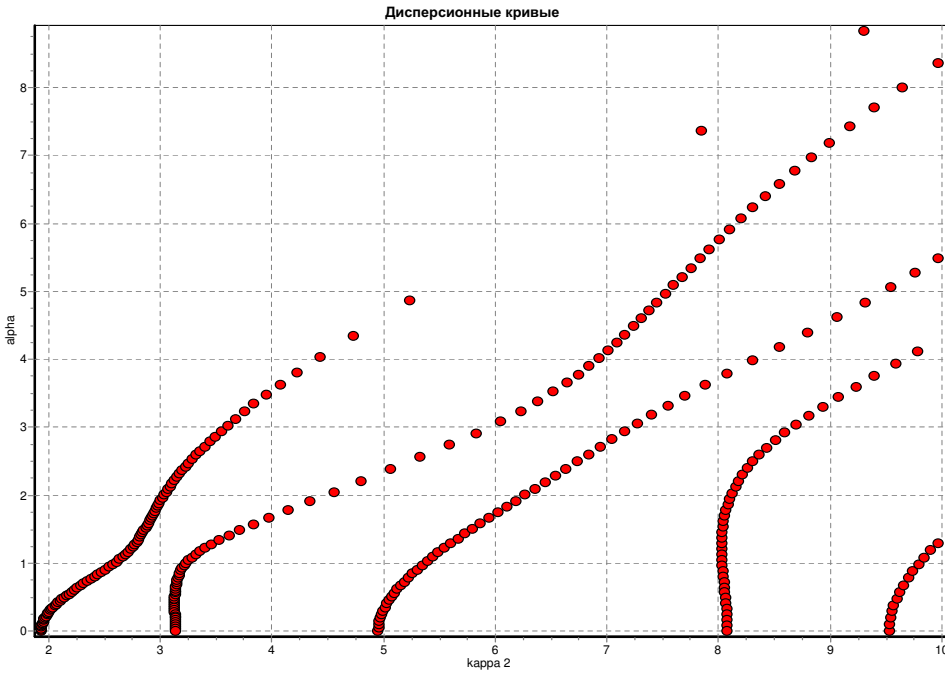


Рис. 1. Дисперсионные кривые для неоднородного слоя

Разложим перемещение в ряд по малому параметру:

$$u_i = u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + ... \tag{9}$$

Подставляя разложения (8)–(9) в уравнение (7) и собирая слагаемые при одинаковых степенях параметра ε, получаем:

при ε^0 — уравнение вида:

$$\begin{cases} \left[\left(\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}\right) u_{1,1}^{(0)} + \lambda^{(0)} u_{2,2}^{(0)}\right]_{,1} + \left[\mu^{(0)}\left(u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}\right)\right]_{,2} + \rho^{(0)}\omega^2 u_1^{(0)} = 0 \\ \left[\mu^{(0)}\left(u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}\right)\right]_{,1} + \left[\lambda^{(0)} u_{1,1}^{(0)} + \left(\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}\right) u_{2,2}^{(0)}\right]_{,2} + \rho^{(0)}\omega^2 u_2^{(0)} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

с краевыми условиями (3)–(4).

при ε^1 имеем:

$$\begin{cases} \left[\left(\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}\right) u_{1,1}^{(1)} + \lambda^{(0)} u_{2,2}^{(1)}\right]_{,1} + \left[\mu^{(0)}\left(u_{1,2}^{(1)} + u_{2,1}^{(1)}\right)\right]_{,2} + \rho^{(0)}\omega^2 u_1^{(1)} = -F_1 \\ \left[\mu^{(0)}\left(u_{1,2}^{(1)} + u_{2,1}^{(1)}\right)\right]_{,1} + \left[\lambda^{(0)} u_{1,1}^{(1)} + \left(\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}\right) u_{2,2}^{(1)}\right]_{,2} + \rho^{(0)}\omega^2 u_2^{(1)} = -F_2 \end{cases} \tag{11}$$

$$F_1 = \left[\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right) u_{1,1}^{(0)} + \lambda^{(1)} u_{2,2}^{(0)}\right]_{,1} + \left[\mu^{(1)}\left(u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}\right)\right]_{,2} + \rho^{(1)}\omega^2 u_1^{(0)}$$

$$F_2 = \left[\mu^{(1)}\left(u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}\right)\right]_{,1} + \left[\lambda^{(1)} u_{1,1}^{(0)} + \left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}\right) u_{2,2}^{(0)}\right]_{,2} + \rho^{(1)}\omega^2 u_2^{(0)}$$

Краевые условия для (11) имеют вид:

$$u_1^{(1)}|_{x_2=0} = u_2^{(1)}|_{x_2=0} = 0 \tag{12}$$

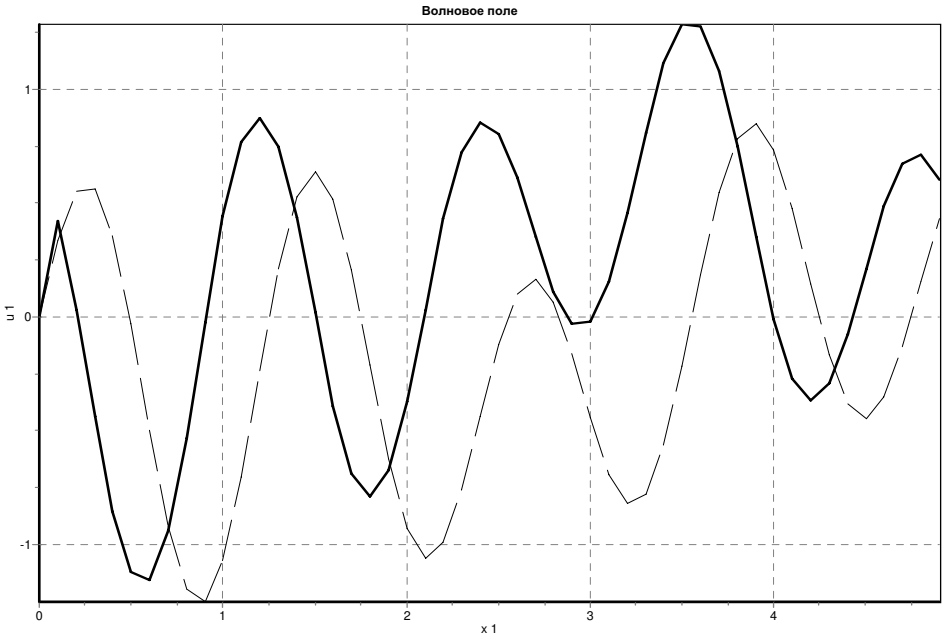


Рис. 2. Волновое поле для слоя, состоящего из двух материалов.

$$\begin{cases} \mu^{(0)}(u^{(1)}_{1,2}+u^{(1)}_{2,1})|_{x_2=1} = -\mu^{(1)}(u^{(0)}_{1,2}+u^{(0)}_{2,1})|_{x_2=1} = f_1(x_1) \\ \left[\lambda^{(0)}u^{(1)}_{1,1} + (\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)})u^{(1)}_{2,2}\right]\Big|_{x_2=1} = \\ = -\left[\lambda^{(1)}u^{(0)}_{1,1} + (\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)})u^{(0)}_{2,2}\right]\Big|_{x_2=1} = f_2(x_1) \end{cases} \tag{13}$$

Решение (11) при краевых условиях (12)–(13) может быть построено в виде:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}\left[F_1(x)U^{(1)}_i(x,\xi) + F_2(x)U^{(2)}_i(x,\xi)\right]dx_1dx_2 + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f_1(x)U^{(1)}_i(x_1,1;\xi) + f_2(x)U^{(2)}_i(x_1,1;\xi)\right]dx_1, \end{aligned} \tag{14}$$

где $U^{(m)}_i(x,\xi)$ — фундаментальное решение, которое удовлетворяет уравнениям вида:

$$\begin{cases} \left[\left(\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}\right)U^{(m)}_{1,1} + \lambda^{(0)}U^{(m)}_{2,2}\right]_{,1} + \left[\mu^{(0)}\left(U^{(m)}_{1,2}+U^{(m)}_{2,1}\right)\right]_{,2} + \\ \qquad + \rho^{(0)}\omega^2U^{(m)}_1 + \delta_{1m}\delta(x-\xi) = 0 \\ \left[\mu^{(0)}\left(U^{(m)}_{1,2}+U^{(m)}_{2,1}\right)\right]_{,1} + \left[\lambda^{(0)}U^{(m)}_{1,1} + \left(\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}\right)U^{(m)}_{2,2}\right]_{,2} + \\ \qquad + \rho^{(0)}\omega^2U^{(m)}_2 + \delta_{2m}\delta(x-\xi) = 0 \end{cases}$$

при однородных краевых условиях:

$$\begin{cases} U_1^{(m)}|_{x_2=0} = U_2^{(m)}|_{x_2=0} = 0 \\ \mu^{(0)}(U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)})|_{x_2=1} = 0 \\ \left[\lambda^{(0)}U_{1,1}^{(m)} + (\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)})U_{2,2}^{(m)}\right]\Big|_{x_2=1} = 0 \end{cases}$$

Фундаментальное решение также может быть построено с помощью преобразования Фурье.

Рассматривая выражение (14) на поверхности слоя при $\xi_2 = 1$, можно построить интегральное уравнение для решения обратной задачи. В частности, если подлежит определению только плотность ρ, а упругие характеристики известны, то уравнение приобретает вид:

$$u_i(\xi_1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{1} \rho^{(1)}(x_2)\omega^2 \left[u_1^{(0)}(x)U_i^{(1)}(x;\xi_1,1) + u_2^{(0)}(x)U_i^{(2)}(x;\xi_1,1)\right] dx_1 dx_2 \quad (15)$$

4. Заключение.

Таким образом, задачу о колебаниях поперечно-неоднородного слоя удалось после преобразования Фурье свести к численному решению системы дифференциальных уравнений, что позволяет построить волновое поле для любой (не обязательно непрерывной) зависимости констант от поперечной координаты; сформулировано интегральное уравнение 1-го рода для решения обратной задачи.

Работы выполнены при поддержке гранта РФФИ №10-01-00194, а также в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1980. 872 с.

[2] *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

[3] *Ватульян А. О., Сатуновский П. С.* Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Доклады РАН 2007. т. 414. № 1. С. 36–38.

Uglich P. S. *On inhomogeneous layer vibrations.* The problem of enforced vibrations of an elastic layer is concidered. Elastic constants and density of layer depend of transverse coordinate. Using Fourier transform, the problem is redused to an ordinary differential equations system. Dispersion curves and displasement field on layer surface are obtained. Integral equation for solving the inverce coeffitient problem is constructed.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСКЛИНАЦИЯМИ

Фам Т. Х.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследована нелинейная задача о сильном изгибе кольцевой пластинки, нагруженной поперечным давлением. Пластинка содержит изолированную дисклинацию, а также распределенные с заданной плотностью клиновые дисклинации. На основе численного метода решения модифицированных уравнений Кармана изучено влияние дисклинаций на функцию прогиба пластинки при осесимметричной деформации.

1. Исходные соотношения. Рассмотрим кольцевую пластинку с радиусами внешнего контура a и внутреннего контура b, содержащей в плоском состоянии непрерывно распределенные дислокации и дисклинации. Уравнения равновесия имеют вид [1]

$$\Delta\Delta F + \frac{1}{2}Eh\left[(\Delta W)^2 - \mathrm{tr}(\nabla\nabla W \cdot \nabla\nabla W)\right] = Eh\beta \tag{1}$$

$$D\Delta\Delta W + \mathrm{tr}(\nabla\nabla F \cdot \nabla\nabla W) - \Delta F \Delta W = p \tag{2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\ \mu = \nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{e} = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}$$

Здесь W — нормальный прогиб, F — функция напряжений Эри, E — модуль Юнга, h — постоянная толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона, D — цилиндрическая жесткость, ∇ — двумерный набла-оператор, Δ — двумерный оператор Лапласа, p — распределенное нормальное давление, μ — скалярная мера несовместности, $\boldsymbol{\alpha}$ — плоский вектор плотности краевых дислокаций, β — скалярная плотность клиновых дисклинаций, $\mathbf{e}$ — дискриминантный тензор, $\mathbf{E}$ — трехмерный единичный тензор, $\mathbf{i}_3$ — единичный вектор.

Будем отыскивать осесимметричное решение уравнений (1), (2), т. е. предполагаем, что $W = W(r)$, $F = F(r)$.

2. Граничные условия. Рассмотрим два случая закрепления внешнего и внутреннего контура пластинки

а. Внешний контур шарнирно оперт, а внутренний свободен

$$W(a) = 0,\ \left(W'' + \frac{\nu}{r}W'\right)\Big|_{r=a} = 0 \tag{3}$$

б. Внешний контур защемлен, а внутренний свободен

$$W(a) = 0,\ W'(a) = 0 \tag{4}$$

Граничные условия на внутреннем контуре в обоих случаях имеют вид

$$\left(W'' + \frac{\nu}{r}W'\right)\Big|_{r=b} = 0,\ \left(W''' + \frac{W''}{r} - \frac{W'}{r^2}\right)\Big|_{r=b} = 0 \tag{5}$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной r.

Для функции напряжений Эри граничные условии принимают вид

$$F(a) = 0,\ F'(a) = 0 \tag{6}$$

В пластинке содержатся не только распределенные дисклинации, но и изолированная дисклинация. В работе [1] дана постановка задачи для многосвязной гибкой пластинки, содержащей дислокации Вольтерры. Рассмотрим двухсвязную пластинку, у которой внешний контур Γ_0 и внутренний контур Γ_1. Предположим, что внутренний контур Γ_1 свободен от нагрузки, действующей в плоскости пластинки. Тогда выполняются следующие условия на контуре Γ_1 [1]

$$F\Big|_{\Gamma_1} = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{A} + C,\ F'\Big|_{\Gamma_1} = -\mathbf{t}\cdot\mathbf{A} \tag{7}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{t} = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}$ — единичный вектор касательной к контуру, $\mathbf{n}$ — нормаль к контуру, $\mathbf{A}$ — постоянный плоский вектор, C — скалярныая постоянная.

Постоянные $\mathbf{A}$ и C заранее неизвестны, дополнительными уравнениями для их определения служат интегральные соотношения

$$\mathbf{b}_1 = \oint\limits_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e}\cdot\mathbf{r}\otimes\boldsymbol{\gamma})\cdot d\mathbf{r},\ \psi_1 = \oint\limits_{\Gamma_1} \boldsymbol{\gamma}\cdot d\mathbf{r} \tag{8}$$

При этом

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla\cdot\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H} - \frac{1}{2}\nabla W\otimes\nabla W$$
$$\mathbf{H} = (Eh)^{-1}\left[(1+\nu)\,\mathbf{T} - \nu\mathbf{g}\mathrm{tr}\mathbf{T}\right],\ \mathbf{T} = -\mathbf{e}\cdot\nabla\nabla F\cdot\mathbf{e} \tag{9}$$

где $\mathbf{b}_1$ — вектор Бюргерса, ψ_1 — угол Франка дислокации Вольтерры, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — линейный двумерный тензор деформаций, $\mathbf{H}$ — тензор деформаций, $\mathbf{T}$ — тензор мембранных усилий, $\mathbf{g}$ — двумерный единичный тензор.

Рассмотрим случай, когда изолированный дефект является клиновой дисклинацией с заданным углом Франка ψ_1. Тогда $\mathbf{b}_1 = 0$.

Соотношение (7) в случае кольцевой пластинки принимает вид

$$F\Big|_{\Gamma_1} = -r\mathbf{A}\cdot(\mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi) + C = -rA_1\cos\varphi - rA_2\sin\varphi + C \tag{10}$$

Наша задача осесимметричная, поэтому функция напряжений Эри зависит только от r. Следовательно, A_1 и A_2 равны нулю, откуда имеем

$$F\Big|_{\Gamma_1} = C,\ F'\Big|_{\Gamma_1} = 0 \tag{11}$$

Подставим выражения (9) в интегральные соотношения (8), получим

$$\mathbf{b}_1 = \oint\limits_{\Gamma_1} \left[K_1 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - \left(rK_2^{'} - K_1\right) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi\right] \cdot d\mathbf{r},\ \psi_1 = \oint\limits_{\Gamma_1} \left(K_2^{'} + \frac{K_2}{r} - \frac{K_1}{r}\right) \mathbf{e}_\varphi \cdot d\mathbf{r}$$

где

$$K_1 = (Eh)^{-1} \left(\frac{F^{'}}{r} - \nu F^{''}\right) - \frac{W^{'2}}{2},\ K_2 = (Eh)^{-1} \left(F^{''} - \nu \frac{F^{'}}{r}\right)\ .$$

Тогда

$$\mathbf{b}_1 = \int\limits_0^{2\pi} \left(bK_2^{'}(b) - K_1(b)\right) b\mathbf{e}_\varphi d\varphi = 0,\ \psi_1 = \int\limits_0^{2\pi} \left(K_2^{'}(b) + \frac{K_2(b)}{b} - \frac{K_1(b)}{b}\right) bd\varphi$$

Видно, что первое уравнение удовлетворяется тождественно равно нулю. Интегрируя правую часть второго уравнения, получим

$$bF^{'''}(b) + F^{''}(b) + \frac{Eh}{2} W^{'2}(b) = \frac{Eh\psi_1}{2\pi} \tag{12}$$

3. Влияние дисклинаций на прогиб кольцевой пластинки, нагруженной равномерным давлением. Исследуем равновесие круглой кольцевой пластинки, нагруженной равномерным давлением p. Плотность дисклокаций $\boldsymbol{\alpha}$ предполагается равной нулю, а плотность клиновых дисклинаций β считается постоянной. Кроме того, будем считать, что на границе $r = a$ отсутствуют внешние нагрузки, действующие в плоскости пластинки.

Система дифференциальных уравнений (1) и (2) в полярной системе координат имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)\right)\right) + \frac{Eh}{r}\frac{d^2W}{dr^2}\frac{dW}{dr} = Eh\beta \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dW}{dr}\right)\right)\right) - \frac{1}{Dr}\left(\frac{d^2F}{dr^2}\frac{dW}{dr} + \frac{dF}{dr}\frac{d^2W}{dr^2}\right) = \frac{p}{D} \end{gathered} \tag{13}$$

Интегрируя (13), получим

$$\begin{gathered} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)\right) + \frac{Eh}{2r}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 = \frac{Eh\beta r}{2} + \frac{C_1}{r} \\ \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dW}{dr}\right)\right) - \frac{1}{Dr}\frac{dF}{dr}\frac{dW}{dr} = \frac{pr}{2D} + \frac{C_2}{r} \end{gathered} \tag{14}$$

Поставляя (5), (11), (12) в (14), имеем

$$C_1 = \frac{Eh\psi_1}{2\pi} - \frac{Eh\beta b^2}{2},\ C_2 = -\frac{pb^2}{2D}$$

Для решений системы дифференциальных уравнений (14) с граничными условиями (4), (5), (6), (11), используем численный метод пристрелки [2].

Рассмотрена кольцевая пластинка со следующими параметрами: $b = 0.1$, $a = 1$, $h = 0.1$, $E = 1$, $\nu = 0.3$.

Функция прогиба кольцевой пластинки представлена на рис. 1 (сверху — опертая пластинка, а снизу — защемленная). По оси ординат отложены значения прогиба W при различных плотностях распределенных и изолированных дисклинаций. Угол Франка дислокаций Вольтерры $\psi_1 = 0.01\pi$.

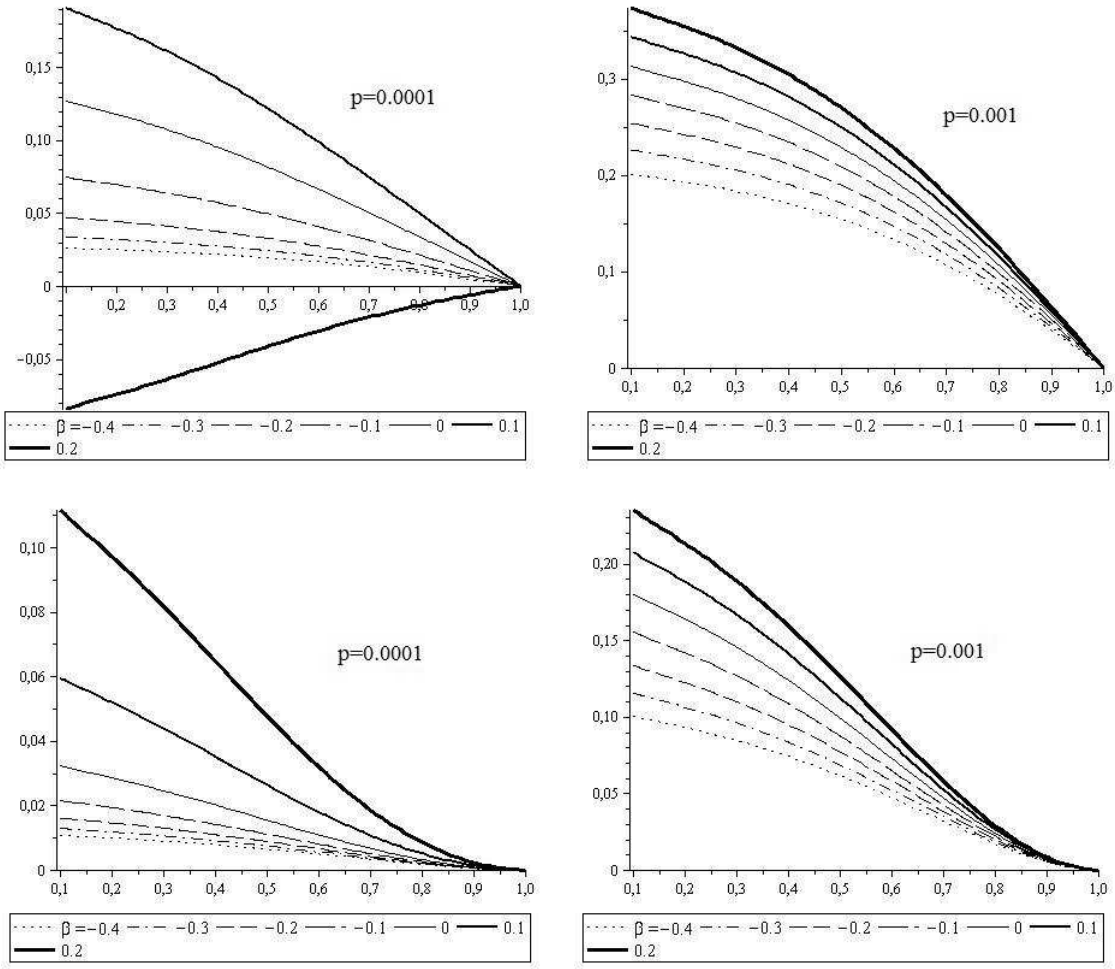


Рис. 1. Прогиб кольцевой пластинки с распределенными и изолированной дисклинациями.

Рассмотрим пластинку, содержащую только распределенные дисклинации ($\psi_1 = 0$). Прогиб пластинки приведен на рис. 2.

На рис. 1, 2 видно, что прогиб кольцевой пластинки увеличивается с увеличением плотности распределенных дисклинаций β независимо от знака дисклинаций. Изолированная дисклинация тоже увеличивает прогиб пластинки.

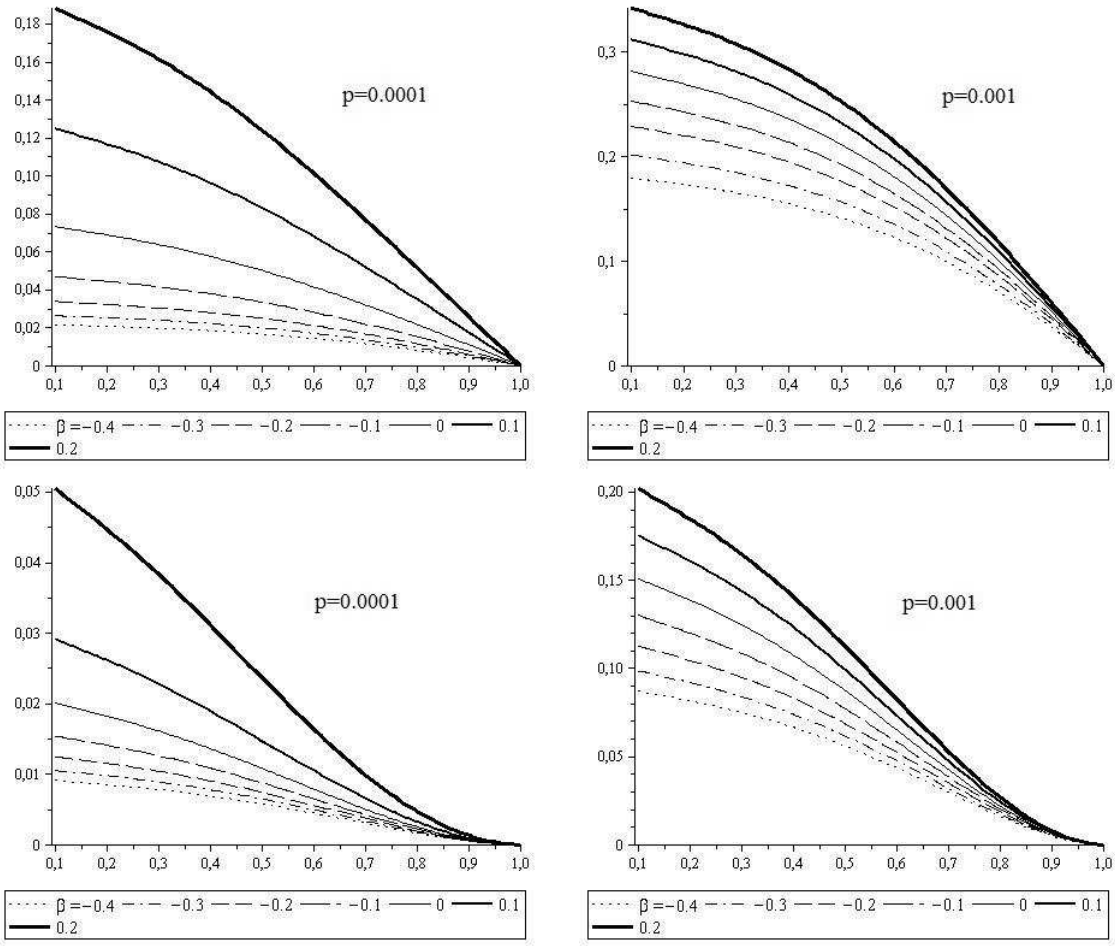


Рис. 2. Прогиб кольцевой пластинки с распределенными дисклинациями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ(09-01-00459).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зубов Л. М.* Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями // Доклады РАН. 2007. Т. 412. № 3. С. 343–346.

[2] *Фам Т. Х.* Большие прогибы круглой пластинки с распределенными дисклинациями // Современ. пробл. мех. спл. среды: Тр. XIII. Междунар. конф. Ростов. н/Д, 2009. С. 209–212.

Pham T. H. *Nonlinear axisymmetric bending of an elastic annular plate with distributed disclinations*. The nonlinear problem about a strong bend of the annular plate loaded by transverse pressure is investigated. The plate contains isolated disclination, and also distributed wedge disclinations with a given density. On the basis of a numerical method of the decision of the modified Karman's equations, influence disclination on function of a deflection of a plate at axisymmetric deformations is explored.

О ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ МАТЕРИАЛА ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Швед О. Л.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларусии, Минск

Вследствие пластической деформации развивается анизотропия материала. Изменяются его упругие и пластические свойства, которые описываются обобщенным упругим законом и поверхностью текучести. Девиаторное сечение поверхности, содержащее точку процесса в пространстве напряжений, трансформируется в соответствии с развивающейся анизотропией, и может утратить необходимое свойство замкнутости (вырождаться). Этот момент формально означает исчерпание ресурса пластичности и макроразрушение материала. Критерий разрушения вытекает из общей концепции поверхности текучести и полученного ранее определения ее девиаторного сечения. На его основе моделируется численно явление увеличения пластичности металла при растяжении в условиях равномерного всестороннего сжатия. Критерий применяется в данной работе для определения момента хрупкого разрушения при растяжении несжимаемого в пластическом состоянии материала.

Целью работы является численное моделирование одноосного растяжения образца из хрупкого материала, несжимаемого в пластическом состоянии, проведенного до момента его разрушения. В качестве материала, который первоначально предполагается изотропным, используем молибден, вольфрам и стекло. Считаем, что предел текучести у них совпадает с пределом прочности.

Назовем условно обобщенным «градиентом» упругой деформации неособенный тензор $\mathbf{F}_e$. Для изотропного материала он совпадает с деформационным градиентом. В упругом состоянии материальные производные этих тензоров совпадают, а при течении $\mathbf{F}_e$ находится из полярного разложения $\mathbf{F}_e = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{O}$ — собственно ортогональный тензор, $\mathbf{V}, \mathbf{U}$ — меры упругих искажений, с использованием определяющих уравнений. Обозначим $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ — неподвижный ортонормированный триэдр. При одноосном растяжении (например, по оси $\mathbf{c}_2$) имеем $\mathbf{O} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ — единичный тензор. Пусть I_i, L_i — i-тые главные инварианты мер $\mathbf{G} = \mathbf{U}^2$ и $\mathbf{F} = \mathbf{V}^2$, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$.

Учитывая анизотропные структуры до третьей степени, и переходя затем к мере $\mathbf{G}$, находим потенциал упругих напряжений в форме Мурнагана [1, 2]:

$$\begin{gathered}
э = э_I + 2^{-1}\mathbf{b}\cdot\cdot\mathbf{G} + 4^{-1}(\delta_1\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-2)+\delta_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-2)+\\
+\delta_3\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-2)+\delta_8(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2)+\\
+\delta_9(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)+\delta_{10}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)+\\
+\delta_7(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2)^2+\delta_{11}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2+\delta_{15}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2)+8^{-1}(\delta_{22}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^3+1)+\\
+\delta_{23}((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^3+1)+\delta_{24}((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^3+1)+\delta_{25}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)+1)+\\
+\delta_{26}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)+1)+\delta_{27}((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)+1)+\\
+\delta_{28}((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)+1)+\delta_{29}((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)+1)+\\
+\delta_{30}((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)+1)+
\end{gathered}$$

$$+\delta_{31}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)+1)+\delta_{32}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2+$$
$$+\delta_{33}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2+\delta_{34}(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2)-э_0$$
$$(э_I=4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda-8\mu+9\nu_1+18\nu_2+8\nu_3)I_1+4^{-1}(2\lambda+4\mu-3\nu_1-10\nu_2-8\nu_3)I_1^2+$$
$$+(-2\mu+3\nu_2+4\nu_3)I_2-(\nu_2+2\nu_3)I_1I_2+12^{-1}(\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)I_1^3+2\nu_3I_3)), \qquad (1)$$

где λ,μ — постоянные Ляме второго, ν_1,ν_2,ν_3 — третьего порядка. Начальные значения параметров анизотропии $\delta_j=0$, тензора остаточных напряжений («back stress») $\mathbf{b}=0$, и тогда э с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал $э_I$; $э_0$ — минимальная постоянная, обеспечивающая условие $э\geqslant 0$. При одноосном растяжения образца материал становится трансверсально-изотропным. Поэтому получается, что в (1) ненулевыми могут быть параметры δ_j, где $j\in\{1-3,\,7-11,\,15,\,22-34\}$, и справедливы равенства

$$\delta_1=\delta_3,\,\delta_9=\delta_8,\,\delta_{11}=2\delta_1-\delta_{10},\,\delta_7=\delta_{15};$$
$$\delta_{22}=\delta_{24}=\delta_{26}=\delta_{29},\,\delta_{25}=\delta_{30}=\delta_{31},\,\delta_{27}=\delta_{28},\,\delta_{32}=2\delta_{22},\,\delta_{33}=\delta_{25},\,\delta_{34}=2\delta_{22}. \qquad (2)$$

Из (1) получаем определяющее уравнение для тензора упругих напряжений Коши

$$\mathbf{T}=2L_3^{-1}\mathbf{F}_e\cdot\frac{\partial э}{\partial\mathbf{G}}\cdot\mathbf{F}_e^{\mathrm{T}}=2L_3^{-1}(\psi_0\mathbf{E}+\psi_1\mathbf{V}+\psi_2\mathbf{V}^2)+L_3^{-1}\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}+\sum_{j=1}^{34}\delta_j\mathbf{T}_j, \quad (3)$$

где $\mathbf{B}=\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{O}$. Запишем для данной задачи определяющие уравнения в скоростях для напряжений, потенциала напряжений, остаточных напряжений и параметров анизотропии

$$\dot{\mathbf{T}}=0,\,(L_3^{-1}э)^{\cdot}=(1\text{–}\alpha)\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D},\,\dot{\mathbf{B}}=\sqrt{3}(\sqrt{2})^{-1}\beta\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2,\,\dot{\delta}_j=k_jK\dot{\mathrm{dev}}\mathbf{B}\cdot\cdot\mathbf{T}_j(\sqrt{\mathbf{T}_j\cdot\cdot\mathbf{T}_j})^{-1}. \quad (4)$$

В (4) $\mathbf{D}$ — тензор деформации скорости, и должно выполняться $\beta\geqslant 0$, $\mathbf{T}_j\neq 0$. Функцию $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ и постоянную $K(K>0)$ требуется задать в данном эксперименте, α имеет смысл величины относительной части рассеиваемой работы деформации на малом временном шаге. Скаляр β вычисляется с использованием соотношений (1), (3), (4). Коэффициенты k_j, как правило, полагаем $k_j=1$. Однако возможна ситуация, когда не выполняется необходимое условие $\beta\geqslant 0$. В такой ситуации следует изменить знак величин k_j в (4) у минимального числа параметров. В случае $\mathbf{T}_j=0$ надо привлекать соотношение (2). Из (4) находим $\delta_{10}=\delta_1$, а из (2) тогда имеем

$$\delta_{11}=\delta_{10}=\delta_1. \qquad (5)$$

Кроме того, для описания явления увеличения пластичности материала при растяжении в условиях равномерного всестороннего сжатия, как показывают вычислительные эксперименты [3], следует оптимально положить

$$\delta_7=\delta_{15}=2^{-1}\delta_1. \qquad (6)$$

Из (2), (4)–(6) следует, что независимых параметров анизотропии будет семь: $\delta_1,\delta_2,\delta_8,\delta_{22},\delta_{23},\delta_{25},\delta_{27}$.

Из условий стационарности функционала вариационного принципа находим тензор $\mathbf{D}$. Дифференцируя (1), (3) по времени, с учетом (4) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения величин $\dot{\mathbf{V}}, \beta$. Так в квазистатическом режиме расчитывается процесс при течении. Установлено, что для несжимаемых в пластическом состоянии материалов с достоверно заданными упругими постоянными, пределом текучести при растяжении и величиной эффекта Баушингера первоначально всегда существует замкнутое девиаторное сечение поверхности текучести, содержащее кривую текучести (пластичности), на которой находится точка процесса в пространстве напряжений. В результате пластической деформации возникает анизотропия, при которой рассматриваемое девиаторное сечение может утратить свойство замкнутости. *Критерий разрушения материала заключается в том, что содержащее точку процесса девиаторное сечение поверхности текучести на расчетном шаге при течении мгновенно вырождается и утрачивает необходимое свойство замкнутости.*

Выполнено численное моделирование одноосного растяжения образцов из хрупких при обычных условиях металлов (молибден, вольфрам), а также стекла. Величина эффекта Баушингера задана 1, за исключением стекла. Для стекла предел прочности при растяжении выбран в 15 раз меньший, чем при сжатии. Данные о постоянных Ляме взяты из [1]. Значения коэффициентов k_j в (4) выбирались так: при обычном растяжении $k_2 = k_{23} = -1$, а остальные $k_j = 1$, при растяжении в условиях всестороннего сжатия все $k_j = 1$, кроме величин $k_1 = k_2 = -1$. Постоянную K в (4) определим ее минимальным значением при допустимом росте остаточного напряжения: $K = 10^9$. Функцию α задаем до момента разрушения постоянной для молибдена, вольфрама и стекла 0.99999, 0.99998 и 0.9995, пределы текучести при растяжении взяты соответственно 400, 500, 30(МПа).

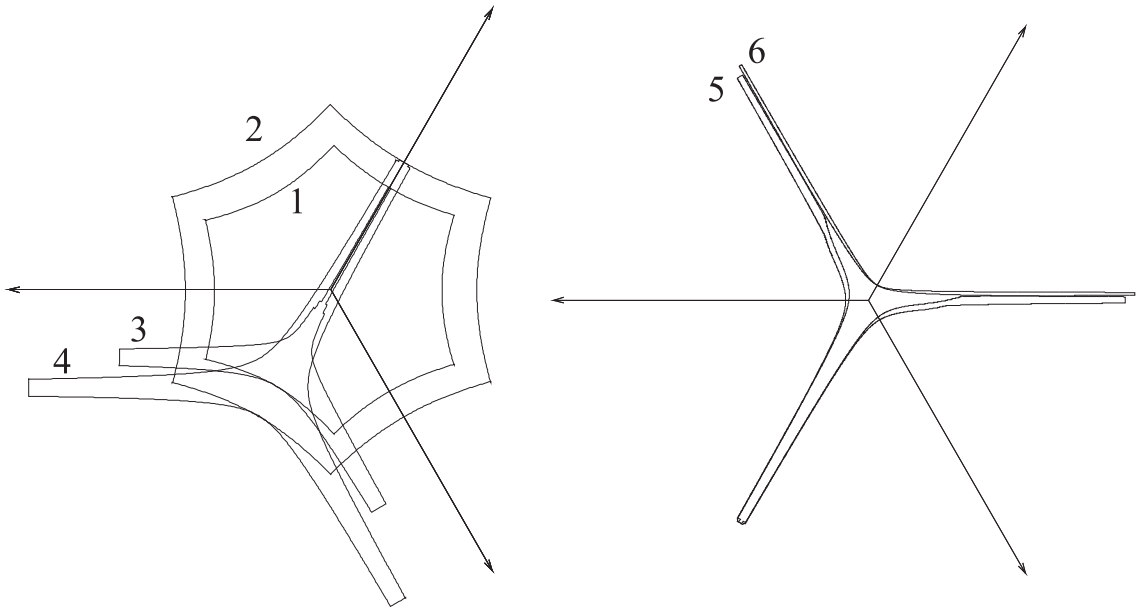


Рис. 1. Кривые пластичности для молибдена (1, 3), вольфрама (2, 4) и стекла (5, 6)

На рис. 1 изображены для краткости только расчетные кривые пластичности в плоскости $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$, где $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$. Стрелками отмечены проекции базисных диад $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i$, проекция $\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$ направлена вверх. Обозначены 1, 2, 5 — начальные кривые пластичности, а 3, 4, 6 — кривые пластичности перед разрушением материала. Максимальное относительное удлинение образцов составляло для молибдена, вольфрама, стекла соответственно 1.4%, 0.48%, 0.05%. Выбором величины постоянной α эти значения могут быть уточнены. Для стекла вычисляемое относительное удлинение может быть получено сколь угодно малым. Согласно [4] для стекла должна иметь место «бесконечно малая» пластическая деформация, которую можно найти при повышении чувствительности измерений.

Для молибдена выполнены дополнительно вычислительные эксперименты по растяжению в условиях равномерного всестороннего сжатия. Функцию α выбираем за моментом разрушения при обычном растяжении монотонно возрастающей и стремящейся к единице. Установлен свойственный малопластичным материалам факт наличия порогового среднего напряжения, до которого увеличение пластичности материала не наблюдается. Количественные значения порогового напряжения и относительного удлинения в условиях всестороннего сжатия для численных экспериментов расходятся с физическими данными [5], вероятно потому, что численное моделирование происходит без образования шейки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

[2] *Murnagan F. D.* Finite deformation of an elastic solid. NY.: Dover Publications, 1967. 140 p.

[3] *Швед О. Л.* Об условии разрушения металла при пластической деформации // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: Тр. Второй Межд. конф. Казань, 2009. С. 417–420.

[4] *Бриджмен П. В.* Исследование больших пластических деформаций и разрыва. М.: Ин. лит., 1955. 444 с.

[5] Пластичность и прочность твердых тел при высоких давлениях / *Б. И. Береснев, Е. Д. Мартынов, К. П. Родионов и др.* М.: Наука, 1969. 161 с.

Shved O. L. *On brittle fracture of a material in uneasily stretching*. As a result of plastic strain the material anisotropy develops. Its elastic and plastic properties change which the generalized elastic law and the yield surface describe. The surface deviator section, containing the process point in the stress space, transforms in correspondence with the developing anisotropy and can lose the necessary property of closure (degenerate). This moment formally means the plasticity resource exhaustion and material macro-destruction. The destruction criterion comes from the general yield surface concept and its deviator section definition obtained earlier. On its base well modeled is the digitally important phenomenon of metal plasticity increase when stretching in conditions of even overall compression. The criterion was user for definition of the moment of brittle fracture in stretching the incompressible in plastic sate material.

О ПОВЕРХНОСТНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ТОНКИХ ПЛЁНКАХ ЖИДКОСТИ

Шелистов В. С., Демёхин Е. А.
Кубанский государственный университет, Краснодар

В докладе рассматривается волновое течение тонкой плёнки вязкой жидкости по гладкой вертикальной поверхности. На основе математической модели Капицы–Шкадова составляется алгоритм компьютерного моделирования такого течения, позволяющий адекватно описывать всю цепочку возникающих волновых режимов и переходов между ними. В частности, проводимое моделирование позволяет получить режим поверхностной турбулентности и найти его числовые характеристики. Результаты численного моделирования сравниваются с экспериментальными данными и подтверждаются ими.

Введение. Плёнки жидкости являются одной из типичных фаз во многих технологических процессах, а характеристики волновых режимов их течения часто оказывают существенное влияние на протекание этих процессов. Известны 4 основных режима течения плёнки [1]: безволновое течение (I), периодические волны (IV), уединённые двумерные волны (VI) и так называемая поверхностная турбулентность (VIII), когда поверхность плёнки покрыта стохастически расположенными трёхмерными подковообразными структурами (рис. 1).

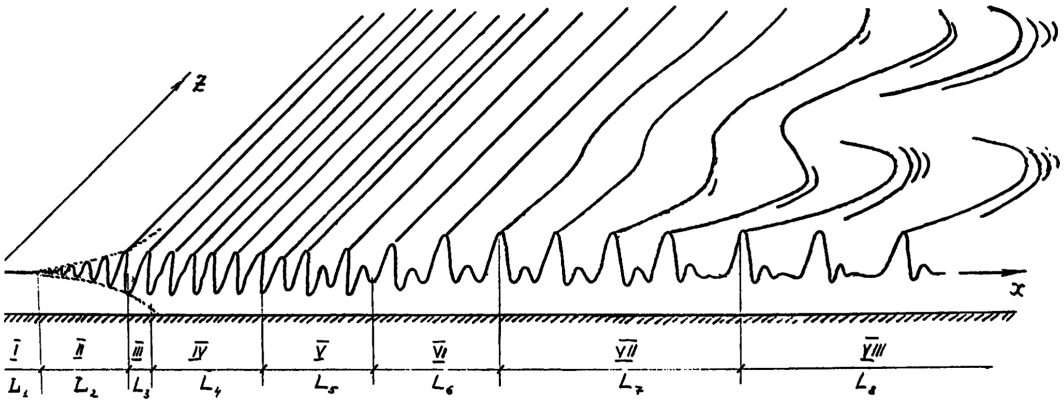


Рис. 1. Эволюция режимов течения плёнки жидкости

Целью настоящей работы является разработка численного алгоритма, позволяющего осуществлять моделирование течения плёнки на любых этапах эволюции за приемлемое время. В качестве опорной математической модели выбрана система Капицы–Шкадова, хорошо зарекомендовавшая себя в моделировании отдельных волновых режимов. Для её решения используется композиция метода компактных разностных схем [2] и квазиспектрального метода, ранее применённого авторами для численного исследования устойчивости режимов течения плёнки.

1. Математическая постановка задачи. Система Навье–Стокса, описывающая гидродинамические процессы, допускает упрощение, сохраняющее все основные качественные и количественные свойства потока [1]. Результирующая безразмерная система, называемая системой Капицы–Шкадова, а также интегральным уравнением пограничного слоя (IBL), имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t} - c\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{6}{5}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{h}\right) + \dfrac{6}{5}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{qp}{h}\right) = \dfrac{1}{5\delta}\left[h\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 h\right) + h - \dfrac{q}{h^2}\right]; \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} - c\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{6}{5}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{pq}{h}\right) + \dfrac{6}{5}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p^2}{h}\right) = \dfrac{1}{5\delta}\left[h\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2 h\right) - \dfrac{p}{h^2}\right]; \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} - c\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Переменные t, x и z означают соответственно время, расстояние вдоль потока и расстояние поперёк потока. Функция $h(t,x,z)$ описывает профиль поверхности плёнки, функции $q(t,x,z)$ и $p(t,x,z)$ — расход жидкости по x и по z соответственно. Система имеет единственный физический параметр — модифицированное число Рейнольдса δ, описывающее характеристики потока — что существенно упрощает её исследование. Физические свойства жидкости описываются числом Капицы γ, которое используется только при обезразмеривании (см. [1]). Второй параметр задачи, скорость смещения системы координат c, подбирается в ходе моделирования и математически не влияет на результат в силу трансляционной симметрии системы.

Начальные условия задачи выбираются несколькими способами. В начале численного эксперимента полагается $h = 1 + \hat{h}$, $q \equiv 1$, $p \equiv 0$, что соответствует возмущению $\hat{h}$ безволнового потока; функция $\hat{h}$ выбирается достаточно малой для естественных возмущений и в форме некоторого сигнала — для вынужденных. При продолжении же расчётов (ресурсы компьютеров общего назначения не всегда позволяют провести весь расчёт за один прогон алгоритма) значения h, q и p берутся из предыдущего вывода алгоритма. Граничные условия по x выбираются "мягкими", чтобы минимизировать влияние границ численного канала на решение, условия по z обусловлены выбором численного алгоритма.

2. Численный алгоритм. Для численного моделирования функции задачи дискретизируются на равномерной сетке. Для упрощения алгоритма используется допущение, что в направлении z течение имеет некоторый достаточно большой период L и является осесимметричным. Это позволяет применить к функциям задачи дискретное косинусное преобразование (ДКП), легко поддающееся дифференцированию, но затрудняющее расчёт нелинейных членов. Для преодоления указанного затруднения используется квазиспектральный метод, использующий обратное ДКП для расчёта нелинейности. Кроме того, такой приём позволяет избавиться от граничных условий по z, которые заменяются условиями периодичности.

В областях I–VI на рис. 1 выбор значения L практически не влияет на точность вычислений, однако в области поверхностной турбулентности VIII занижение L может существенно исказить характер численного поведения структур этого режима.

Как следствие вышеописанных операций, задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система решается методом конечных разностей. Применение компактных схем [2] позволяет достичь третьего порядка аппроксимации без существенного усложнения расчётных формул, однако требует для вычисления каждой производной решения системы линейных алгебраических уравнений. Это решение осуществляется методом прогонки: двухточечной для первых производных и трёхточечной — для вторых. Производные высших порядков сводятся к суперпозиции этих двух, что, кроме того, сокращает количество операций дифференцирования и, как следствие, ускоряет счёт.

Для дальнейшего увеличения скорости расчётов алгоритм подвергается распараллеливанию. Структура уравнения позволяет параллельно вычислять отдельные его члены (например, q/h^2 и p/h^2). Кроме того, при увеличении размеров сетки неплохим кандидатом на распараллеливание становится метод прогонки. К сожалению, часть вычислений должна иметь строго определённый порядок, поэтому на небольших сетках выигрыш от параллелизма нейтрализуется алгоритмами синхронизации.

Результаты расчётов. В ходе численного моделирования значение c подбиралось таким образом, чтобы видимый передний край начальных возмущений не вышел за пределы области расчётов. В качестве начального значения для c была взята характерная безразмерная скорость линейных возмущений, равная 3 [1]. Наиболее быстрыми оказываются двумерные уединённые волны — их скорость достигает 7–9 (для выбранных значений δ), скорость трёхмерных структур несколько ниже.

Типичная картина поверхностной турбулентности представлена на рис. 2. Наблюдается хорошее соответствие.

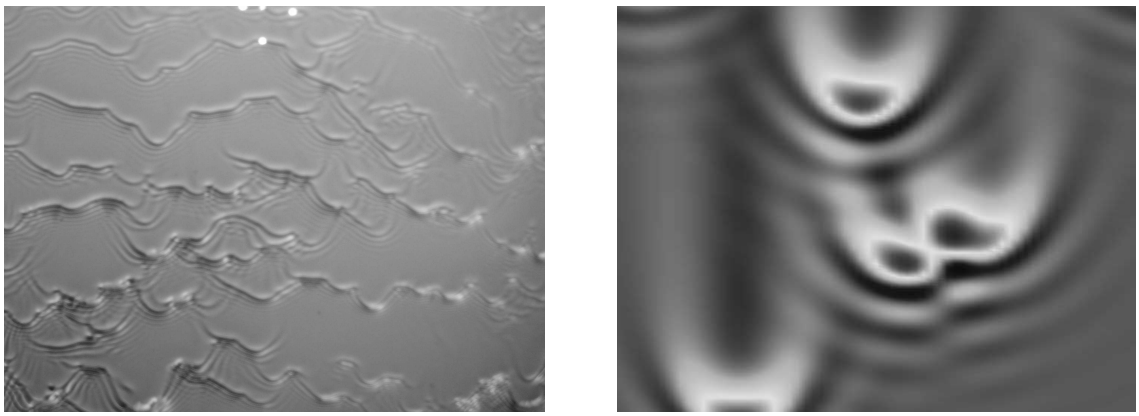


Рис. 2. Сравнение эксперимента с расчётом

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет довольно эффективно моделировать разнообразные волновые режимы течения плёнок жидкости и может быть использован для предварительного анализа эффективности процессов, использующих эти плёнки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Chang H.-C. and Demekhin E. A.* Complex wave dynamics on thin films. Elsevier, 2002. 402 p.

[2] *Толстых А. И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.

Shelistov V. S., Demekhin E. A. *On surface turbulence in thin liquid films*. Wavy flow of a thin viscous liquid film on a flat vertical surface is considered in the report. Basing on Kapitsa–Shkadov model, an algorithm of computer simulation of such a flow is created that is able to describe adequately all the sequence of produced wave regimes and transitions between them. In particular, the simulation allows one to obtain the regime of surface turbulence and to find its numeric properties. The results of the simulation are compared to experimental data and are proven to be in a good agreement.

COMPUTATIONAL METHODS FOR CALCULATING THE SCATTERED ELASTIC WAVES FROM BURIED OBJECT IN TWO LAYERS: ANTI-PLANE PROBLEM

EL-Morabie K. M.
Southern Federal University, Rostov-on-Don
Tanta University, Tanta

We developed fast iteration methods for computing the scattered elastic waves by an object in layered media. These techniques are considered in an anti-plane (SH) deformation which based upon a specifically constructed Green's function in two layers, by applying the Fourier transform to solve the inhomogeneous Helmholtz wave equation. The Krichhoff–Helmholtz integral formula is utilized to obtain a Fredholm integral equation of the second kind regarding to the displacement field. With the aid of collocation method, the problem is reduced to a linear algebraic system. This system is resolved by using two techniques, the Gauss elimination method and iterative steepest descent method (SDM). The solutions for displacement field are obtained in discrete form and the numerical results are compared.

1. Green's Function for Acoustic Layer. We study the structure of the wave field in a model comprising two homogenous elastic layers of finite thickness h_1, h_2. Physically, an object is embedded in the first layer (1), and the second lower layer has different elastic parameters. To describe the model, we introduce the Cartesian coordinates (y_1, y_2), so that the horizontal axis coincides with the lower boundary $y_2 = 0$, and the upper boundary surface is $y_2 = (h_1 + h_2)$. Then the interface surface between the two layers is located at $y_2 = h_1$, as illustrated in Fig.1. In the anti-plane (SH) deformation, the displacement field $U(y_1, y_2, t) = (0, 0, w(y_1, y_2, t))$, hence the displacement field has its own value for each of two layers:

$$w(y_1, y_2) = \begin{cases} w_1(y_1, y_2), \ h_2 \leqslant y_2 \leqslant h_1 + h_2 \\ w_2(y_1, y_2), \ 0 \leqslant y_2 \leqslant h_2 \end{cases}$$

and both the functions satisfy the Helmholtz wave equation:

$$\triangle_y \, w_{1,2}(y_1, y_2) + k_{1,2}^2 w_{1,2}(y_1, y_2) = 0, \tag{1}$$

where, $k_{1,2} = \omega/c_{1,2}$, are the wave numbers, $c_{1,2} = \mu_{1,2}/\rho_{1,2}$ — the wave speeds in the first and second layer respectively. Also, ω — the angular frequency of the oscillations, and harmonic dependence upon time has been taken already in account. The shear elastic moduli are $\mu_{1,2}$ and ρ_1, ρ_2 are the mass densities of the layers(1), (2) respectively. The boundary condition on the upper face of the first layer is homogeneous of Neumann type. It is assumed that on the upper face there is a point force which generates harmonic oscillations. Then, at $y_2 = 0$ we have the boundary conditions of Dirichlet type. Besides, on the internal interface $y_2 = h_2$ the boundary conditions are the conditions of continuity for displacement and shear stress.

In order to solve efficiently our problem, let us first construct Green's function $G(y_1, y_2)$ in the considered elastic two-layered medium. For this aim let us put a point source represented by Dirac's delta function at point (x_1, x_2):

$$\triangle_y \, G_{1,2}(y_1, y_2) + k_{1,2}^2 G_{1,2}(y_1, y_2) = \begin{cases} -\delta(y_1 - x_1)\delta(y_1 - x_1), \ h_2 \leqslant y_2 \leqslant h_1 + h_2 \\ 0 \ , \ 0 \leqslant y_2 \leqslant h_2 \end{cases} \tag{2}$$

where,

$$G(y_1, y_2) = \begin{cases} G_1(y_1, y_2), \ h_2 \leqslant y_2 \leqslant h_1 + h_2 \\ G_2(y_1, y_2), \ 0 \leqslant y_2 \leqslant h_2 \end{cases}$$

Now, let us apply the Fourier transform with respect to horizontal variable y_1, then we arrive at the ordinary differential equations. Their solutions can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_1(s, y_2) &= A_1(s)e^{\gamma_1 y_2} + B_1(s)e^{-\gamma_1 y_2} + \widetilde{G}_{part}(s, y_2) \ , \\ \widetilde{G}_2(s, y_2) &= A_2(s)e^{\gamma_2 y_2} + B_2(s)e^{-\gamma_2 y_2}, \qquad \gamma_{1,2} = \gamma_{1,2}(s) = \sqrt{s^2 - k_{1,2}^2} \end{aligned} \tag{3}$$

where s is a parameter of the Fourier transform, and $A_{1,2}(s)$ and $B_{1,2}(s)$ — four unknown quantities. To find $\widetilde{G}_{part}(s, y_2)$, we may apply the Fourier transform again, this time — along vertical variable (since the particular solution may not satisfy the boundary conditions). Then we obtain

$$G^*_{part}(s, \alpha) = \frac{e^{i(sx_1 + \alpha x_2)}}{\alpha^2 + \gamma_1^2} \, , \tag{4}$$

where the superscript $*$ denotes the Fourier image taken with respect to variable y_2. Now, the application of the inverse transform applied over variable α leads to the following expression

$$\widetilde{G}_1(s, y_2) = A_1(s)e^{\gamma_1 y_2} + B_1(s)e^{-\gamma_1 y_2} + \frac{e^{isx_1} \ e^{-\gamma_1 |x_2 - y_2|}}{2\gamma_1} \, . \tag{5}$$

Now, the constants $A_{1,2}(s)$ and $B_{1,2}(s)$ should be determined from the boundary conditions on the faces of each layer as illustrated in figure 1. The solutions are given by the inverse Fourier transform in the following form:

$$G_{1,2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L_{1,2}(s, y_2) \ e^{-is(y_1 - x_1)} \, ds \tag{6}$$

By satisfying the boundary conditions on each face of our model, so after some routine transformations, one can obtain the functions $L_{1,2}(s, y_2)$ in the following form:

$$\begin{aligned} L_1(s, y_2) &= \frac{\cosh[\gamma_1(x_2 - (h_1 + h_2))] \Big\{ (\rho_1/\rho_2)\gamma_2 \cosh(\gamma_2 h_2) \sinh[\gamma_1(y_2 - h_2)] + \gamma_1 \sinh(\gamma_2 h_2) \cosh[\gamma_1(y_2 - h_2)] \Big\}}{\gamma_1 \Big\{ (\rho_1/\rho_2)\gamma_2 \cosh(\gamma_2 h_2) \cosh(\gamma_1 h_1) + \gamma_1 \sinh(\gamma_1 h_1) \sinh(\gamma_2 h_2) \Big\}}, \\ L_2(s, y_2) &= \frac{\cosh[\gamma_1(x_2 - (h_1 + h_2))] \sinh(\gamma_2 y_2)}{\Big\{ (\rho_1/\rho_2)\gamma_2 \cosh(\gamma_2 h_2) \cosh(\gamma_1 h_1) + \gamma_1 \sinh(\gamma_1 h_1) \sinh(\gamma_2 h_2) \Big\}} \end{aligned} \tag{7}$$

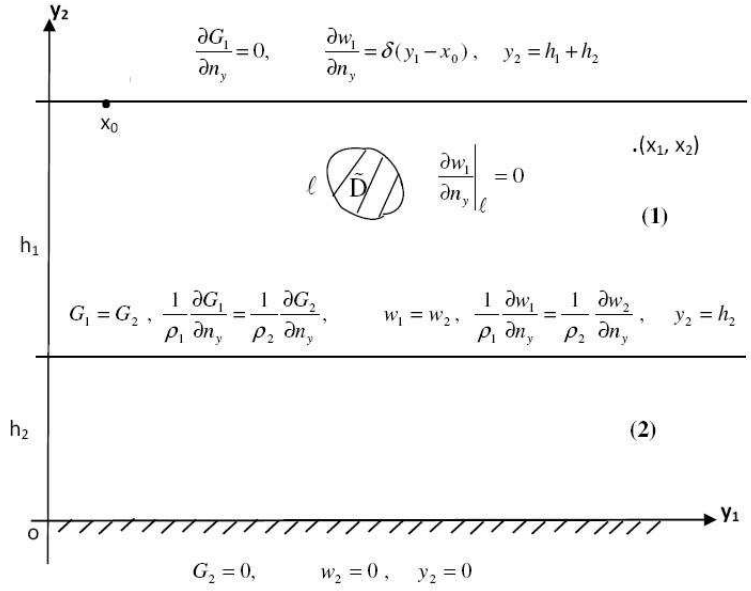


Fig. 1. Buried object in the elastic medium consisting of two layers of constant thickness.

As an additional control of the correctness of last representations, one may put $h_2 = 0, h_1 = h, \rho_1 = \rho_2$ and $\gamma_1 = \gamma$ to obtain the result well known for the case of single elastic layer:

$$L_1(s, y_2) = \frac{\cosh[\gamma(x_2 - h)]\sinh(\gamma y_2)}{\gamma\cosh(\gamma h)}$$

Also, the formulas of the functions $L_{1,2}(s, y_2)$ in Eq.(7) are meromorphic with respect to s. However, it is difficult to evaluate the zeros of the denominator of the both functions $L_{1,2}(s, y_2)$ analytically. Then, the integral (6) may be solved numerically, first approximated and followed by applying Simpson's rule as follows:

$$G_{1,2}(y_1, y_2) \approx \frac{1}{\pi}\int_0^M F_{1,2}(s)\,ds \approx$$

$$\approx \frac{h^*}{3\pi}\Big[F_{1,2}(s_0) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} F_{1,2}(s_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} F_{1,2}(s_{2j-1}) + F_{1,2}(s_n)\Big] \qquad (8)$$

where $F_{1,2}(s) = L_{1,2}(s, y_2)\cos[s(y_1 - x_1)]$, M is big positive quantity and $h^* = M/n$. The discrete points are $s_j = jh^*, j = 0, 1, 2, ..., n-1$. In particular $s_0 = 0$ and $s_n = M$. The error of such a discrete approximation is $\frac{(h^*)^4}{180}(b-a)max_{\xi\in[a,b]}|F^{(4)}(\xi)|$.

2. Formulation of diffraction problem. By the standard BIE technique, Eqs. (1) and (2) involve the following Kirchhoff-Helmholtz integral formulas:

$$-w_1(x) = \int_{\partial D_1}\left[w_1(y)\frac{\partial G_1(y,x)}{\partial n_y} - G_1(y,x)\frac{\partial w_1(y)}{\partial n_y}\right]d\ell_y, \qquad (9)$$

$$0 = \int\limits_{\partial D_2} \left[w_2(y) \frac{\partial G_2(y,x)}{\partial n_y} - G_2(y,x) \frac{\partial w_2(y)}{\partial n_y} \right] d\ell_y \tag{10}$$

where $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{D}$ with $\tilde{D}$ representing the region occupied by the object in layer (1) and ∂D_2 represents the boundary of the second layer (2). In order to calculate this integral, we must divide contours $\partial D_{1,2}$ to the following paths, namely: $\partial D_1 = \{y_2 = h_2\} \cup \{y_2 = h_1 + h_2\} \cup \ell$ and $\partial D_2 = \{y_2 = 0\} \cup \{y_2 = h_2\}$.

On the boundaries of the region D_1: the value of integral (9) on the path $y_2 = h_2$ is equal to zero:

$$\int \left[w_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_y} - G_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_y} \right] d\ell_y = [\frac{\rho_1}{\rho_2}] \int \left[w_2 \frac{\partial G_2}{\partial n_y} - G_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_y} \right] d\ell_y = 0;$$

– on the path $y_2 = h_2 + h_2$, and by using the properties of Dirac's function. Then the value of integral (9) here is:

$$f(x_1, x_2) = -G_1(x_0, h_1 + h_2, x_1, x_2);$$

– on the boundary contour of the buried object ℓ: where the value of integral (9) is

$$\int \left[w_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_y} - G_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_y} \right] d\ell_y = \int\limits_{\ell} w_1(y) \frac{\partial G_1(y,x)}{\partial n_y} d\ell_y.$$

Therefore,

$$-w_1(x) = \int\limits_{\ell} w_1(y) \frac{\partial G_1(y,x)}{\partial n_y} d\ell_y + f(x). \tag{11}$$

Let us move point x to the boundary: $x \to x \in \ell$, from outside. Then, according to the properties of the potential of single and double layers, we obtain

$$\frac{-3\ w_1(x)}{2} - \int\limits_{\ell} w_1(y) \frac{\partial G_1(y,x)}{\partial n_y} d\ell_y = f(x), \qquad x \in \ell. \tag{12}$$

This equation is a boundary integral equation (BIE) to find the unknown function $w_1(x)$.

3. Solution to the basic integral equation. The obtained BIE requires application of a numerical method to be solved. In the present work we used a direct collocation technique, which reduces BIE (12) in its discrete form to a system of linear algebraic equations of the following form:

$$\frac{-3w_n}{2} - \sum_{j=1}^{N} w_j G_{nj} \ \triangle \ \ell_j = f_n, \qquad n = 1, 2, 3, ..., N \tag{13}$$

where

$$G_{nj} = n_j^1 \ \frac{\partial G_1}{\partial y_j^1} + n_j^2 \ \frac{\partial G_1}{\partial y_j^2}, \qquad n_j = (n_j^1, n_j^2) = \ \left(\frac{y_2^{j+1} - y_2^{j-1}}{d_j}, \ \frac{y_1^{j-1} - y_1^{j+1}}{d_j} \right),$$

$$d_j = \sqrt{(y_1^{j-1} - y_1^{j+1})^2 + (y_2^{j-1} - y_2^{j+1})^2}, \qquad \triangle \ \ell_j = h_\varphi \sqrt{(\acute{y}_1^j)^2 + (\acute{y}_2^j)^2}, \qquad h_\varphi = 2\pi/N.$$

However,

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_{1,2}} \approx \frac{1}{\pi} \int\limits_0^M \frac{\partial}{\partial y_{1,2}} F_1(s)\, ds = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^M \frac{\partial}{\partial y_{1,2}} L_1(s, y_2)\ cos[s(y_1 - x_1)]\, ds \tag{14}$$

Also, the above integral can be calculated after differentiation by using Simpson's rule. Then the system of the collocation method can be represented as the following linear algebraic system of N equations (with complex coefficients)

$$\sum_{j=1}^{N} C_{nj} w_j = f_n, \qquad C_{nj} = \frac{-3\delta_{nj}}{2} - G_{nj} \triangle \ell_j, \qquad n = 1, 2, 3, ..., N \tag{15}$$

To overcome the complicity of the algebraic system coefficients, we should separate real and imaginary parts in the system. Then we obtain

$$\sum_{j=1}^{N} (a_{nj} p_{nj}^{Re} - b_{nj} p_{nj}^{Im}) = f_n^{Re}, \quad \sum_{j=1}^{N} (a_{nj} p_{nj}^{Im} + b_{nj} p_{nj}^{Re}) = f_n^{Im}, \quad n = 1, 2, 3, ..., N \tag{16}$$

The system (16) has been solved by using two techniques, the Gauss elimination method and iterative steepest descent method (SDM). The solutions for displacement field are obtained in discrete form and the numerical results are compared.

Эль-Мораби Х. М. *Численные методы в рассеянии упругих волн на заглубленных объектах в двухслойной среде: Антиплоская задача*. Разработаны быстрые итерационные методы для вычисления рассеянных волн на объекте в слоистой среде. Эти методы рассматриваются для антиплоского (сдвиговая волна) случая и основываются на специально построенной функции Грина для двух слоев, с применением преобразования Фурье к неоднородному волновому уравнению Гельмгольца. Используется интегральная формула Кирхгофа–Гельмгольца, которая приводит к интегрлаьному уравнению Фредгольма второго рода для поля перемещения. С помощью метода коллокации задача сводится к линейной алгебраической системе. Данная система решается двумя методами — методом Гаусса и итерационным методом наискорейшего спуска. Решение для поля перемещений получается в дискретном виде и сравниваются числовые результаты.

НДС ЗАМКНУТОЙ ТОРОПЛАСТИНЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Юдин С. А., Юдин А. С.
НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону

Анализируется напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки вращения, составленной из элементов кругового тора и круглых пластин. Меридиан тора имеет составную геометрию и образуется дугами гладких кривых со сменой знака гауссовой кривизны.

Оболочки вращения, составленные из элементов кругового тора и круглых пластин, моделируют класс конструкций, называемых плоскими домкратами. Они изготавливаются из стали, имеют большую опорную площадь пластин, высокую грузоподъемность и небольшую массу. Меридиан тора составлен из дуг с кривизнами противоположных знаков. Работа оболочки в распор обеспечивается подачей масла под давлением в её замкнутый герметичный объём. Для оболочки характерен диапазон больших перемещений и деформаций, а также цикличность нагружения и разгрузки. Однако первое нагружение начинается от упругих деформаций. Поэтому актуален анализ стартового напряженно-деформированного состояния для сравнения с последующей эволюцией.

Для решения краевых задач применим уравнения осесимметричного НДС тонких упругих оболочек вращения в рамках квадратично-нелинейного приближения по углам поворота и гипотез Кирхгофа [1, 2]. При радиальном деформировании все функции зависят только от меридиональной координаты α_1. В общей теории оболочек в качестве специальной системы отсчета используется триедр срединной поверхности. Связи компонент деформаций с перемещениями в этой системе имеют вид:

$$\varepsilon_{11}(\alpha_1, z) = E_{11}(\alpha_1) + zK_{11}(\alpha_1), \quad \varepsilon_{22}(\alpha_1, z) = E_{22}(\alpha_1) + zK_{22}(\alpha_1);$$

$$E_{11} = u' + k_1 w + \theta_1^2/2, \quad E_{22} = \psi u + k_2 w + \theta_2^2/2, \quad \theta_1 = -w' + k_1 u,$$

$$K_{11} = -\theta_1', \ K_{22} = \psi\theta_1; \ (\ldots)' = (\ldots)_{,1}/A_1 = d(\ldots)/(A_1 d\alpha_1). \tag{1}$$

Здесь: A_1, A_2, – коэффициенты Лямэ; k_1, k_2 — главные кривизны:

$$(\ldots)' = d(\ldots)/(A_1 d\alpha_1) = (\ldots)_{,1}/A_1, \quad \psi = A_2'/A_2.$$

Положительное направление нормали внешнее к оболочке.

Уравнения равновесия в усилиях и моментах следуют из принципа Лагранжа на основе кинематики (1):

$$T_{11}' + \psi(T_{11} - T_{22}) + k_1 Q_{11} + q_1 = 0, \ Q_{11}' + \psi Q_{11} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + q_3 = 0,$$

$$M_{11}' + \psi(M_{11} - M_{22}) - Q_{11} - T_{11}\theta_{11} = 0.$$

Для изотропного линейно-упругого материала выполняется закон Гука:

$$\sigma_{11} = [E/(1-\nu^2)](\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = [E/(1-\nu^2)](\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}).$$

С учетом гипотез теории оболочек Кирхгофа интенсивность напряжений определяется по формуле:

$$\sigma = [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}]^{1/2}. \tag{2}$$

Соотношения упругости для изотропных оболочек имеют вид:

$$T_{11} = B(E_{11} + \nu E_{22}),\ T_{22} = B(E_{22} + \nu E_{11}),\ M_{11} = D(K_{11} + \nu K_{22}),$$

$$M_{22} = D(K_{22} + \nu K_{11});\ B = Eh/(1-\nu^2),\ D = Eh^3/[12(1-\nu^2)],$$

где B и D — эффективные жесткости оболочки на растяжение и изгиб, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Краевые условия следуют из требования обращения в нуль контурных интегралов функционала Лагранжа. В случае однородных краевых условий в концевых точках интервала определения задачи приравниваются нулю или обобщенные перемещения, или обобщенные усилия:

$$u(1-\gamma_1) + \gamma_1 T_{11} = 0,\ w(1-\gamma_2) + \gamma_2 Q_{11} = 0,\ \theta_1(1-\gamma_3) + \gamma_3 M_{11} = 0,\ \alpha_1 = \alpha_{1s};$$

$$u(1-\gamma_4) + \gamma_4 T_{11} = 0,\ w(1-\gamma_5) + \gamma_5 Q_{11} = 0,\ \theta_1(1-\gamma_6) + \gamma_6 M_{11} = 0,\ \alpha_1 = \alpha_{1f}.$$

Заданием значений 0 или 1 переключателям γ_j можно получать варианты однородных краевых условий. Выбор в качестве основных тех функций, которые входят в естественные краевые условия, позволяет легко удовлетворять краевым условиям. Вводя унифицированные обозначения $y_1 = T_{11},\ y_2 = Q_{11},\ y_3 = M_{11},\ y_4 = u,\ y_5 = w,\ y_6 = \theta_1$, получим систему однородных обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка в канонической форме:

$$\overline{y}' = \overline{f}(\alpha_1, \overline{y}) + \overline{p}(\alpha_1), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_6),\ f = (f_1, \ldots, f_6),\ \overline{p} = (-q_1, -q_3, 0, 0, 0, 0).$$

Здесь правые части f_j даются формулами:

$$f_1 = \psi(T_{22} - y_1) - k_1 y_2,\ f_2 = -\psi y_2 + k_1 y_1 + k_2 T_{22},\ f_3 = \psi(M_{22} - y_3) + y_2 + y_1 y_6,$$

$$f_4 = E_{11} - y_1 - k_1 y_5 - 0.5 y_6^2,\ f_5 = k_1 y_4 - y_6,\ f_6 = K_{11};$$

$$E_{22} = \psi y_4 + k_2 y_5,\ K_{22} = \psi y_6,\ K_{11} = y_3/D - \nu K_{22},$$

$$E_{11} = y_1/B - \nu E_{22},\ T_{22} = B(E_{22} + \nu E_{11}),\ M_{22} = D(K_{22} + \nu K_{11}).$$

При реализации алгоритма уравнения целесообразно привести к безразмерному виду по формулам:

$$\{U, W, u, w, h, z\}_U = \{\ldots\}_D/h_*,\ \{A_1, A_2, L_i\}_U = \{\ldots\}_D/R_*,$$

$$\{k_1, k_2, K_{11}, K_{22}, K_{12}\}_U = R_*\{\ldots\}_D,\ \{\vartheta_1, \vartheta_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, E_{11}, E_{22}\}_U = \{\ldots\}_D/\varepsilon_*,$$

$$\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma, \sigma_{\text{Д}}, \sigma_{\text{Т}}\}_U = \{\ldots\}_D/(E\varepsilon_*),\ \{T_{11}, T_{22}, Q_{11}, Q_{22}, T_z, Q_r\}_U = \{\ldots\}_D R_*/A_*,$$

$$\{M_{11}, M_{22}\}_U = \{\ldots\}_D R_*/D_*,\ \{q_1, q_3\}_U = \{\ldots\}_D R_*^2/A_*,\ \{B\}_U = \{\ldots\}_D/B_*,$$

$$\{D\}_U = \{\ldots\}_D/D_*,\ \{E\}_U = \{\ldots\}_D/E_*,\ \{q_\text{К}, t_\text{К}\}_U = \{\ldots\}_D R_*/A_*, \tag{3}$$

где: $\varepsilon_* = h_*/R_*$, $B_* = E_* h_*/(1-\nu_*^2)$, $A_* = B_* h_*$, $D_* = B_* h_*^2$. Здесь коэффициенты подобия составлены из основных нормирующих величин E_*, ν_*, R_*, h_*, которые имеют смысл и размерность характерных, соответственно, модуля Юнга, коэффициента Пуассона, радиуса кривизны или линейного размера, толщины. Безразмерные величины объединены в группы фигурными скобками с индексом «U» в левых частях равенств. Их размерные аналоги подразумеваются в скобках с индексом «D» в правых частях формул (3). После обезразмеривания система разрешающих уравнений принимает вид:

$$dy_i/d\alpha_1 = A_1(f_i + b_i + f_i^*),\ i = 1, \ldots, 6; \tag{4}$$

$$f_1 = \psi(T_{22} - y_1) - k_1 y_2,\ f_2 = -\psi y_2 + k_1 y_1 + k_2 T_{22},\ f_3 = \psi(M_{22} - y_3) + y_2/\varepsilon_*,$$

$$f_4 = E_{11} - y_1 - k_1 y_5,\ f_5 = k_1 y_4 - y_6,\ f_6 = K_{11}/\varepsilon_*;\ b_1 = -q_1,\ b_2 = -q_3;$$

$$f_1^* = 0,\ f_2^* = 0,\ f_3^* = y_1 y_6,\ f_4^* = -0.5\varepsilon_* y_6^2,\ f_5^* = 0,\ f_6^* = 0; \tag{5}$$

$$E_{22} = \psi y_4 + k_2 y_5,\ K_{22} = \varepsilon_* \psi y_6,\ K_{11} = y_3/D - \nu K_{22},$$

$$E_{11} = y_1/B - \nu E_{22},\ T_{22} = B(E_{22} + \nu E_{11}),\ M_{22} = D(K_{22} + \nu K_{11}).$$

Здесь правые части уравнений разбиты на линейные и нелинейные слагаемые. Для упрощения записи индекс «U» опущен, при этом вид условий сопряжения, компонент тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij}, интенсивности напряжений и краевых условий сохраняется таким же, как и в размерной форме. В замкнутой форме правые части (5) системы (4), выраженные полностью через независимые функции y_j, для изотропной оболочки имеют вид:

$$f_1 = \psi\ [(\nu - 1)y_1 + B(1-\nu^2)(\psi y_4 + k_2 y_5)] - k_1 y_2 - q_1,$$

$$f_2 = -\psi y_2 + (k_1 + \nu k_2) y_1 + k_2 B(1-\nu^2)(\psi y_4 + k_2 y_5) - q_3,$$

$$f_3 = \psi\ [(\nu - 1)y_3 + D(1-\nu^2)\varepsilon_* \psi y_6] + y_2/\varepsilon_* + y_1 y_6,$$

$$f_4 = y_1/B - \psi\nu y_4 - (k_1 + \nu k_2) y_5 - 0.5\varepsilon_* y_6^2,$$

$$f_5 = k_1 y_4 - y_6,\ f_6 = y_3/(\varepsilon_* D) - \nu\psi y_6.$$

Рассмотрим конструкцию, представленную в [3], с параметрами (рис. 1): $h_p = h_1$ — толщина пластины; r_3 — внешний радиус срединной поверхности тора; 2δ и $2\delta_1 = 2\delta + h_1$ — расстояния между пластинами и их срединными поверхностями; $r_p = r_1$ — радиус пластины; R_2 — радиус дуги, образующей выпуклую часть тора (участок 2); $r_{O1} = r_1$ и $r_{O2} = r_3 - R_2$ — координаты центров окружностей, дуги которых образуют торовую часть; ξ_1 и ξ_2 — углы охвата дуг окружностей; $r_2 = r_{O2} - R_2 \sin(\xi_2 - \pi/2)$ и $z_2 = R_2 \cos(\xi_2 - \pi/2)$ — координаты точки сопряжения дуг; радиус дуги 1, образующей вогнутую часть тора (участок 1) и сопрягающей пластину с частью 2 тора вычисляется по формуле $R_1 = 0.5[(z_2 - \delta_1)^2 + (r_2 - r_1)^2]/(z_2 - \delta_1)$. Толщина оболочки тора меняется от h_1 в точке $r = r_p$ до $k_h h_1,\ k_h < 1$, в точке $r = r_3$.

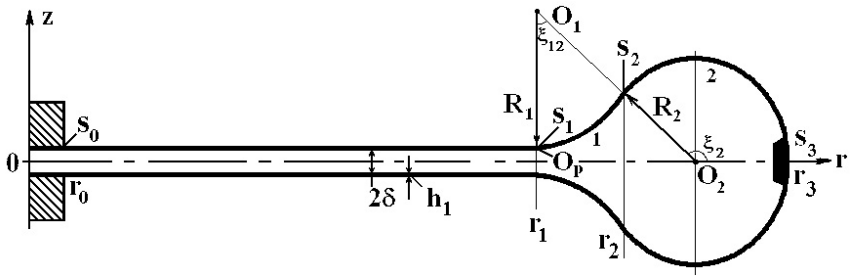


Рис. 1.

В силу симметрии относительно горизонтальной плоскости, рассматривается половина (верхняя часть) конструкции. Уравнения участков срединной поверхности составной оболочки будут следующими: пластина $Z_p(r) = \delta_1$, тор на участке 1 – $Z_1(r) = R_1 + \delta_1 - [R_1^2 - (r - r_1)^2]^{1/2}$, тор на участке 2 – $Z_2(r) = [R_2^2 - (r - r_{O2})^2]^{1/2}$. Единая поверхность $Z_o(r)$ образуется суперпозицией кусочно-определённых функций, задаваемых соответствующими уравнениями на своём интервале и обращающимися в нуль вне него.

В качестве независимой координаты удобно взять длину дуги меридиана s. Определим полярный радиус на срединной поверхности как функцию от s. На каждом из участков полярный радиус определяется формулами:

$$r_{o1}(s) = s,\ s \in [0, s_1],\ r_{o2}(s) = s_1 + R_1 \sin[(s - s_1)/R_1],\ s \in [s_1, s_2],$$

$$r_{o3}(s) = s_2 + R_2\{k_r - \cos[\xi_d + (s - s_2)/R_2]\},\ s \in [s_2, s_3],$$

где $s_1,\ s_2$ — координаты точек сопряжения участков, отсчитываемые от нуля, s_3 — координата крайней точки; $k_r = (r_3 - r_2)/R_2 - 1,\ \xi_d = \pi/2 - \xi_1$. На всём интервале $s \in [0, s_3]$ полярный радиус $r_o(s)$ задаётся суперпозицией кусочно определённых функций. Вертикальные координаты точек срединной поверхности от s определяются функцией $Z_{os}(s) = Z_o(r_o(s))$. В силу того, что меридиан составлен из участков прямой и дуг окружностей, углы наклона нормали к оси вращения и главные кривизны легко задаются.

В центре оболочке на пластинах имеются цилиндрические штифты для центровки вкладышей. Поэтому при $s = s_0$ ставятся условия подвижного защемления с разрешённым смещением по вертикали. На внешнем контуре оболочка подкреплена жёстким кольцом, на котором оболочку считаем жёстко защемлённой при $s = s_3$.

Полагаем, что оболочка изготовлена из однородного материала (сталь) с модулями E и ν. При переходе к безразмерным величинам принимаем: $E_* = E,\ \nu_* = \nu,\ R_* = r_1,\ h_* = h_1$. Безразмерная независимая координата $\alpha_1 = s/r_1$. Краевая задача решалась алгоритмом метода погружения в задачи Коши (пристрелкой).

При использовании оболочки по целевому назначению она помещается в пакет между вкладышами, представляющими собой круглые плиты из толстой фанеры. При значительном внутреннем давлении и большой нагрузке сопротивления поднимаемой конструкции вкладыши препятствуют выпучиванию металлической пластины, оставляя её плоской в штатном режиме подъёма. Однако на начальном этапе подачи давления происходит выборка люфтов. Поэтому вначале рассмотрим

вариант некоторого небольшого уровня внутреннего давления, соответствующего безразмерному значению $q_3 = 0.002$. Это соответствует примерно одной атмосфере для оболочки с внешним диаметром 520 мм и диаметром пластины 420 мм. Распределение безразмерной интенсивности напряжений (2) на лицевых поверхностях в зависимости от α_1 показано на рис. 2.

Другой рассмотренный вариант нагрузки сочетает внутреннее давление $q_3 = 0.012$ с противодавлением на пластине $q_p = 0.95q_3 = 0.114$. Распределение интенсивности напряжений для этого варианта представлено на рис. 3.

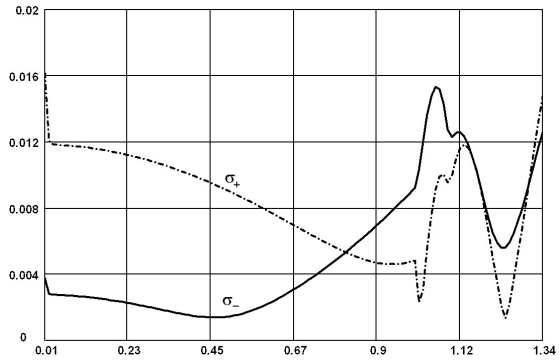


Рис. 2.

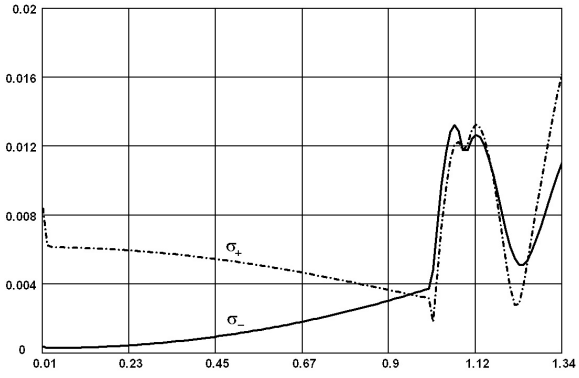


Рис. 3.

Во втором случае внутреннее давление в шесть раз больше, однако при наличии противодавления максимальные уровни напряженности те же, что и в первом варианте. При этом напряжённость пластины снижается. Пики интенсивности наблюдаются в краевых точках защемления и в точке стыка дуг тора противоположной по знаку кривизны. Свойство таких переходных линий как концентратора напряжений является характерным. Оно и наблюдалось также в [2] для оболочек, составленных из элементов сферы, тора и пластины, моделирующих днище ёмкости при нагружении весом жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Юдин А. С.* Эффективные модели для составных оболочек вращения // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки, 2000, № 3. С. 184–188.

[2] *Юдин А. С., Щитов Д. В.* Анализ оболочек вращения с разрывными параметрами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. Приложение. 2004. № 3. С. 22–29.

[3] *Юдин А. С., Юдин С. А., Кутасов И. А.* Оболочка вращения типа «тор-пластина» при больших перемещениях // Соврем. пробл. мех. сплошн. среды. Тр. XIII м/нар. конф. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. Т. 2. С. 201–205.

Yudin S. A, Yudin A. S. *Stress-strain state of closed torus-plate shell of revolution.* The stress-strain state of shell of revolution made of elements circular torus and plates is analyzed. Torus meridian has compound geometry and formed by arches of smooth curves with change of Gauss curvature sign.

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ГУЛЯЕВА–БЛЮШТЕЙНА И ЛЯВА В СЛАБО НЕОДНОРОДНЫХ СЛОИСТЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Юрченко А. И.[*], **Леви М. О.**[**]

[*] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

[**] *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

На примере краевой задачи о колебании пьезоактивной неоднородной среды изучается влияние изменения структуры среды ее свойств и геометрических параметров на особенности распространения поверхностных волн, структуру поверхностного волнового поля, поля смещений и напряжений в пьезоактивной неоднородной среде. В качестве неоднородной среды рассмотрен пьезоактивный однородный или неоднородный слой (пакет слоев) на поверхности пьезоактивного однородного полупространства.

Рассматривается задача о распространении сдвиговых горизонтально поляризованных волн, движущихся в направлении x_1 по поверхности слоистой пьезоактивной среды. Среда представляет собой либо пакет пьезоактивных слоев $|x_1|\,,\,|x_3| \leqslant \infty,\;\; h_{\,k+1} \leqslant x_2 \leqslant h_k, k = 1, 2, .., M-1$, жестко сцепленных с пьезоактивным полупространством $x_2 \leqslant 0$, либо пьезоактивный слой $0 \leqslant x_2 \leqslant h,\; |x_1, x_3| \leqslant \infty$ с изменяющимися по глубине свойствами, сцепленный с однородным пьезоактивным полупространством $x_2 \leqslant 0$. Все величины в структуре, относящиеся к m–слою обозначим индексом $n = m$, к полупространству — индексом $n = M$, к вакууму — индексом $n = 0$. В качестве материала слоя или пакета слоев и полупространства используем пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной сингонии, ось симметрии которого совпадает с осью x_3, векторы поляризации слоев и полупространства либо сонаправлены, либо противоположны по направлению.

Полагаем, что колебания среды носят гармонический характер и удовлетворяет условиям $(k = 3, 4,\; n = 0, 1, 2)$:

$$u_1^{(n)} = u_2^{(n)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}(\ldots) = 0, \quad u_k^{(n)} = u_k^{(n)}(x_1, x_2), \quad u_3^{(0)} = 0 \tag{1}$$

Тогда задача о распространении волн по поверхности слоистой пьезоактивной среды сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений относительно расширенного вектора смещения $\mathbf{u}^{e(n)} = \left\{u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}\right\}$ [1–3, 5]

$$\nabla \cdot \mathbf{\Theta}^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{e(n)}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0, \quad \Delta \mathbf{u}^{e(0)} = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями:

на поверхности среды:

— отсутствие механических воздействий:

$$x_2 = h_1 : \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Theta}^{(1)} = 0 \tag{3}$$

— электрически свободная поверхность:

$$x_2 = h_1 : \quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(0)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} \tag{4}$$

— металлизированная поверхность:

$$x_2 = h_1 : \quad \varphi^{(1)} = 0 \tag{5}$$

на границе раздела сред $(m = 1, 2, ..., M-1)$

$$x_2 = h_m : \quad \mathbf{u}^{e(m)} = \mathbf{u}^{e(m+1)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{\Theta}^{(m)} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{\Theta}^{(m+1)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(m)} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(m+1)} \tag{6}$$

Задачу замыкают условия убывания перемещений и потенциала электрического поля на бесконечности:

$$\mathbf{u}^{e(M)} \to 0 \quad \text{при} \quad x_2 \to -\infty, \quad \mathbf{u}^{e(0)} \to 0 \quad \text{при} \quad x_2 \to \infty \tag{7}$$

В случае пакета однородных пьезоэлектрических слоев на однородном электроупругом полупространстве с учетом вакуума краевая задача (2) в компонентной форме принимает вид [1, 3, 5]:

$$\begin{gathered} c_{44}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_2^2}\right) + e_{15}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 u_4^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_4^{(n)}}{\partial x_2^2}\right) = \rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2} \\ e_{15}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_2^2}\right) - \varepsilon_{11}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 u_4^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_4^{(n)}}{\partial x_2^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_4^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_4^{(0)}}{\partial x_2^2} = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Для пьезоактивного слоя с изменяющимися по глубине свойствами краевая задача (2) представляется в виде:

$$\begin{gathered} c_{44}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_2^2}\right) + e_{15}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 u_4^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_4^{(n)}}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial c_{44}^{(n)}}{\partial x_2}\frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{15}^{(n)}}{\partial x_2}\frac{\partial u_4^{(n)}}{\partial x_2} = \rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2} \\ e_{15}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial x_2^2}\right) - \varepsilon_{11}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 u_4^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_4^{(n)}}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial e_{15}^{(n)}}{\partial x_2}\frac{\partial u_4^{(n)}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{11}^{(n)}}{\partial x_2}\frac{\partial u_4^{(n)}}{\partial x_2} = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Граничные условия (3)–(6) имеют вид:

$$x_2 = h_1 : \quad \theta_{23}^{(1)} = 0 \tag{10}$$

$$x_2 = h_1 : \quad D_2^{(1)} = D_2^{(0)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} \tag{11}$$

$$x_2 = h_1 : \quad \varphi^{(1)} = 0 \tag{12}$$

$$x_2 = h_m : \quad \mathbf{u}^{e(m)} = \mathbf{u}^{e(m+1)}, \quad \theta_{23}^{(m)} = \theta_{23}^{(m+1)}, \quad D_2^{(m)} = D_2^{(m+1)} \tag{13}$$

$$x_2 \to -\infty \quad \mathbf{u}^{e(M)} \downarrow 0, \quad x_2 \to \infty \quad \varphi^{(0)} \downarrow 0 \tag{14}$$

Следуя [1, 3, 5], рассмотрим две краевых задачи:

задача I — со свободной поверхностью, описывается уравнениями движения (12) с граничными условиями (10), (11), (13), (14);

задача II — с металлизированной поверхностью, описывается уравнениями движения (12) с граничными условиями (10), (12)–(14).

В сделанных предположениях, как в случае ***задачи I***, так и в случае ***задачи II***, по поверхности слоистого пьезоактивного полупространства распространяются сдвиговые горизонтально поляризованные волны. Причем для двухслойного полупространства, если $V_{Se}^{(1)} < V_{Se}^{(2)}$, то по поверхности среды распространяются волны Лява, а в случае $V_{Se}^{(1)} > V_{Se}^{(2)}$ поверхностных волн нет. Если свойства материала слоя и полупространства близки $V_{Se}^{(1)} \approx V_{Se}^{(2)}$, то по поверхности слабо неоднородной среды распространяется волна Гуляева–Блюштейна [1, 3, 5].

Следуя [2, 3], применяем к краевым ***задачам I*** и ***II*** одномерное преобразование Фурье по координате x_1. Решение задач в трансформантах Фурье ищем в виде ($p = 3, 4,\ n = 1, 2, ..., M-1$):

$$U_p^{(n)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^{2} f_{pk}^{(n)}\ [c_k^{(n)} ch\sigma_k^{(n)} x_2 + c_{k+2}^{(n)} sh\sigma_k^{(n)} x_2] \tag{15}$$

$$U_p^{(M)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^{2} f_{pk}^{(M)} c_k^{(M)} e^{\sigma_k^{(M)} x_2}, \quad U_4^{(0)}(\alpha, x_2) = c_1^{(0)} e^{-\alpha x_2} \tag{16}$$

здесь $\sigma_k^{(n)}$ и $f_{pk}^{(n)}$ определяются формулами

$$\begin{array}{l} \left(\sigma_1^{(n)}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{\chi_2^2}{1+\eta^{(n)}}, \quad \left(\sigma_2^{(n)}\right)^2 = \alpha^2, \quad \eta^{(n)} = \frac{\left(e_{15}^{(n)}\right)^2}{\varepsilon_{11}^{(n)} c_{44}^{(n)}} \\ f_{41}^{(n)} = \frac{e_{15}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}, \quad f_{42}^{(n)} = f_{31}^{(n)} = 1, \quad f_{32}^{(n)} = 0 \end{array} \tag{17}$$

Неизвестные коэффициенты $c_k^{(n)}$ определяются из граничных условий, которые можно представить как систему алгебраических уравнений с нулевой правой частью ($\mathbf{C} = \uparrow \{c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, c_3^{(n)*}, c_4^{(n)*}, ..., c_1^{(M)}, c_2^{(M)}, c_1^{(0)}\}$, $c_k^{n*} = \left(\sigma_{k-2}^{(n)}\right)^{-1} c_k^{(n)}$, $k = 3, 4$, $n = 1, 2, ..., M-1$):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0 \tag{18}$$

матрица $\mathbf{A}$ в случае ***задачи II*** представима в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B^{(1)}}(h_1) & 0 \\ \mathbf{A^{(1)}}(h_{2,...,M}) & \mathbf{B}^{(M)}(h_M) \end{pmatrix} \tag{19}$$

причем $\mathbf{B^{(1)}}(h_1)$ и $\mathbf{B}^{(M)}(h_M)$ — матрицы размера 2×4 и 4×2, вид которых полностью определяется свойствами верхнего слоя и подстилающего полупространства соответственно, и не зависит от свойств и количества возможных промежуточных слоев [2, 3]. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,...,M})$ — квадратные, размер определяется геометрией задачи и равен соответственно $4(M-1)+2$ и $4(M-1)$.

В случае неоднородного слоя решение ищем в виде:

$$U_p^{(n)} = Y_p = \sum_{m=1}^{4} c_m^{(n)}(\alpha)\, y_{pm}(\alpha, x_2) \tag{20}$$

здесь использованы новые неизвестные $Y = \uparrow \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ ($x = \frac{\partial}{\partial x_2}$)

$$\begin{array}{l} Y_1 = \theta_{23}^{(n)} = c_{44}^{(n)} x U_3^{(n)} + e_{15}^{(n)} x U_4^{(n)}, \quad Y_2 = D_2^{(n)} = e_{15}^{(n)} x U_3^{(n)} - \varepsilon_{11}^{(n)} x U_4^{(n)} \\ Y_3 = U_3^{(n)}, \quad Y_4 = U_4^{(n)} \end{array} \tag{21}$$

определяемые из решения системы (9), которая в новых обозначениях имеет вид:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{M}(\alpha, x_2)\,\mathbf{Y} \tag{22}$$

здесь $\mathbf{M}(\alpha, x_2) = ||m_{jk}||_{j,k=1}^{4} \left(g_0 = \varepsilon_{11}^{(1)} c_{44}^{(1)} + \left(e_{15}^{(1)}\right)^2\right)$,

$$\begin{array}{lll} m_{13} = c_{44}^{(n)} R^2, & m_{14} = m_{23} = e_{15}^{(n)} \alpha^2, & m_{24} = -\varepsilon_{11}^{(n)} \alpha^2 \\ m_{31} = \frac{\varepsilon_{11}^{(n)}}{g_0}, & m_{32} = m_{41} = \frac{e_{15}^{(n)}}{g_0}, & m_{42} = -\frac{c_{44}^{(n)}}{g_0} \end{array}, \quad R = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho^{(1)}\omega^2}{c_{44}^{(1)}}}$$

Как и в случае пакета слоев, неизвестные коэффициенты $c_k^{(n)}$, участвующие в представлении (20), определяются из граничных условий, т. е. из решения системы алгебраических уравнений (18). Матрица $\mathbf{A}$ для ***задачи II*** с неоднородным слоем имеет вид (19) с той лишь разницей, что матрицы $\mathbf{B^{(1)}}(h_1)$ и $\mathbf{A}^{(1)}(h_2)$ для двухслойного полупространства ($M = 2$, $h_1 = h$, $h_2 = 0$) полностью определяется свойствами неоднородного слоя и типом задачи.

Таким образом, дисперсионное уравнение задачи, как в случае пакета пьезоактивных слоев, так и в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя сцепленных с однородным пьезоэлектрическим полупространством имеет вид (18) с матрицей (19). Исследование свойств корней уравнения (18) дает представление о структуре поверхностного волнового поля неоднородной среды.

В качестве слоистого электроупругого полупространства рассмотрим:
— *двухслойное электроупругое полупространство*: пьезоактивный слой $0 \leqslant x_2 \leqslant h$, $|x_1, x_3| \leqslant \infty$ на пьезоактивном полупространстве $x_2 < 0$, векторы поляризации слоя и полупространства противоположны по направлению $mp:\ e_{15}^{(2)} = -e_{15}^{(1)}$;
— *трехслойное электроупругое полупространство*: два пьезоактивных слоя $h_2 \leqslant x_2 \leqslant h_1$, $|x_1, x_3| \leqslant \infty$ (внешний слой) и $0 \leqslant x_2 \leqslant h_2$, $|x_1, x_3| \leqslant \infty$ (внутренний слой) на пьезоактивном полупространстве $x_2 < 0$. Направленность векторов поляризации слоев и полупространства обозначим следующим образом:

$$mpp:\ e_{15}^{(3)} = e_{15}^{(2)} = -e_{15}^{(1)}, mmp:\ e_{15}^{(3)} = -e_{15}^{(2)} = -e_{15}^{(1)}, pmp:\ e_{15}^{(3)} = -e_{15}^{(2)} = e_{15}^{(1)} \tag{23}$$

Полагаем, что все составляющие полупространства выполнены из одного материала — пьезоэлектрика класса 6mm, ось симметрии которого совпадает с осью x_3, начальные напряжения отсутствуют, на границах раздела выполняются условия жесткого сцепления. В качестве пьезоактивного материала использованы ZnO и PZT5 [4].

На рис. 1 приведены зависимости фазовых скоростей от частоты для ***задачи I*** (кривые 1, 2) и ***задачи II*** (кривая $1'$, $2'$) в структурах PZT5/ PZT5 (рис. а), PZT5/ PZT5/ PZT5 (рис. б) и ZnO/ ZnO/ ZnO (рис. в). Штриховыми линиями отмечены скорости сдвиговой волны в полупространстве со свободной поверхностью V_S и скорость поверхностной волны в полупространстве с металлизацией V_F^m.

Кривые с цифрами 1, 2 отвечают в случае структуры PZT5/ PZT5 (рис. а) толщинам слоя $h = 0.3$ и $h = 1$, а в случае структур PZT5/ PZT5/ PZT5 (рис. б) и ZnO/ ZnO/ ZnO (рис. в) толщинам внутреннего слоя $h_2 = 0.3$ и $h_2 = 0.9$, соответственно, при этом толщина внешнего слоя фиксирована $h_1 = 1$.

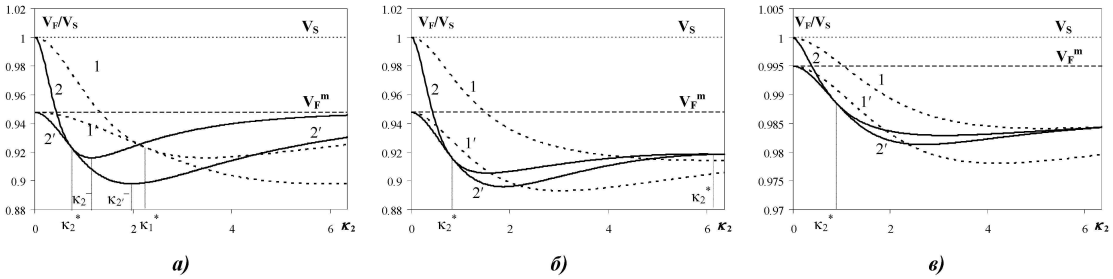


Рис. 1. Зависимости относительных фазовых скоростей от частоты в случае свободной и металлизированной поверхности для различных материалов: а) PZT5/ PZT5, б) PZT5/ PZT5/ PZT5, в) ZnO/ ZnO/ ZnO.

Из графиков следует, что случай слоистого полупространства, неоднородность которого вызвана только изменением направленности вектора поляризации (mp, рис. а), приводит к частотной зависимости скорости распространения поверхностной волны (в отличие от полупространства, в котором фазовая скорость постоянна). Для фазовой скорости как в ***задаче I***, так и в ***задаче II***, характерно наличие частот χ_n^- (n — номер кривой) минимумов скорости, причем $\chi_1^- < \chi_2^-$, и частоты χ_n^*, на которой скорости поверхностной волны для среды со свободной (***задача I***) и металлизированной (***задача II***) поверхностью становятся одинаковыми [5]. Следует отметить, что значение частоты χ_n^* в большей степени определяется геометрией задачи, т.е. толщиной слоя. Введение в структуру дополнительного внутреннего слоя с поляризацией противоположной внешнему слою и полупространству (mpm, рис. б, в) приводит к тому, что частота χ_n^* присутствует не всегда.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (09-01-00695, 09-08-01065, 09-08-96527-юг), Президиума РАН (направление № 12 программы № 4П РАН, программы № 11П РАН).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 416 с.

[2] *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.

[3] *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.

[4] Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М. П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.

[5] *Feng Jin, Zikun Wang, Tiejun Wang* The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in a piezoelectric layered half-space // Int. J. Eng Sci. 2001. V. 39, pp. 1271–1285.

Yurchenko A. I., Levi M. O. *Features of Bleustein–Gulyaev and Love waves propagation in weakly inhomogeneous layered and functionally graded piezoelectric structures*. The influence of medium structure variation on the features of surface waves propagation and structure of the surface wave field is investigated for the inhomogeneous piezo-active medium.

КОРРОЗИОННЫЙ ИЗНОС НА ДЕФОРМИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Якупов Н. М., Гиниятуллин Р. Р., Якупов С. Н.
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Из электрохимической теории коррозионного износа известно, что на поверхности металла, находящегося в агрессивной среде, образуется тонкая пленка, разрушение которой приводит к коррозионному износу. Среди факторов, способствующих разрушению защитной пленки, можно отметить деформацию поверхности. Проведены исследования для ответа на вопрос: «какие деформации и как влияют на состояние защитной пленки?». Для анализа используется экспериментально-теоретический метод.

Защита от коррозионного разрушения элементов конструкций и сооружений, работающих при интенсивных механических воздействиях, является одной из важнейших задач современности. Коррозионный износ существенно снижает ресурс оборудований и сооружений, приводя их к техногенным и экологическим авариям и катастрофам. Особую опасность для конструкций представляют случаи, когда имеют место два и более источника разрушения [1–3], например, существенные механические напряжения плюс коррозия. При этом получается не простое сложение источников разрушения, а порой многократное ухудшение ситуации. Например, концентраторы напряжений активизируют и существенно ускоряют коррозионный процесс. Из электрохимической теории коррозионного износа известно, что на поверхности металла, находящегося в агрессивной среде, образуется тонкая защитная пленка, разрушение которой приводит к интенсивному коррозионному износу. Возникают вопросы: какие деформации и как влияют на состояние пассивирующего слоя? Очевидно, что при воздействии нагрузки элементы конструкции деформируются. Деформацию при этом испытывает и пассивирующий слой. Этот фактор в электрохимической теории коррозионного износа не учитывают. Деформация поверхности металла при статических и, особенно, при волновых и ударных нагрузках из-за локальных утончений и разрывов сплошности пассивирующего слоя существенно влияет на энергетическую неоднородность поверхности. В работе [1] предложена модель коррозионного износа элементов конструкций под нагрузкой, в которой учитывается влияние деформации на изменение толщины пассивирующего слоя:

$$\delta_e(\varphi) = \delta(\varphi) \cdot \left(1 \mp \nu \cdot e_i \mp k_e \cdot e_i^2\right) \cdot (1 - k_y), \tag{1}$$

где $\delta(\varphi)$ — толщины пассивирующего слоя без учета механических деформаций, e_i — интенсивность деформации, ν — коэффициент Пуассона, k_e, k_y — коэффициенты, учитывающие динамичность процесса и степень упругости пассивирующего слоя, соответственно.

Реакция (сопротивление) пассивирующего слоя на деформацию элемента конструкции определяется характером нагрузки, а также физико-механическими свойствами пассивирующего слоя, которые, в свою очередь, зависят от конкретного рассматриваемого металла и коррозионной среды.

Для проверки предложенной модели (1) были разработаны способ испытаний образцов металлических мембран под растягивающим напряжением и устройство для его осуществления [4]. Некоторые результаты исследований, посвященные изучению влияния деформации растяжения на процесс коррозионного износа, приведены, в частности, в работах [5–8]. При этом для оценки степени коррозионного износа и определения механических характеристик образцов, выдержанных заданное время в агрессивной среде, использовался экспериментально-теоретический подход [7].

На экспериментальном этапе из исследуемого тонкостенного элемента вырезались круглые образцы, которые закреплялись по контуру на установке. Образцы нагружались равномерным давлением. В процессе увеличения давления производится мониторинг за формой образуемого образцом купола, в частности, снимаются данные для графика «давление p — прогиб H».

На теоретическом этапе обработки экспериментальных результатов [7] для определения модуля упругости (при упругих деформациях) или условного модуля упругости (при пластических деформациях) использовались соотношения, полученные из нелинейной теории оболочек.

Результаты этих исследований показали, что, действительно, при растягивающих механических деформациях коррозионный процесс ускоряется. Очевидно, происходит утонение пассивирующего слоя и коррозионный износ начинается при меньших потенциалах, т. е. модель коррозионного износа (1) выполняется.

Согласно (1), толщина пассивирующего слоя при растягивающих деформациях уменьшается, а при сжимающих увеличивается. Тем самым коррозионный износ на растянутых поверхностях начинается раньше, чем при сжимающих нагрузках.

Для сравнительного анализа влияния растягивающих и сжимающих деформаций выполнена серия исследований. Растягивающие или сжимающие деформации на поверхностях создавались путем механического изгибания исследуемых металлических образцов толщиной t_0=0.6 *мм* — стягиванием через уголки противоположных кромок. Стягивание производилось в пределах упругих деформаций. Относительный прогиб f/L деформированных образцов составил около 0.043. При этом верхние (выпуклые) поверхности 1-ой группы образцов и нижние (вогнутые) поверхности 2-ой группы образцов были покрашены краской, не растворяющейся в агрессивной среде. То есть коррозии подвергались нижние (упруго сжатые) поверхности 1-ой группы образцов и верхние (упруго растянутые) поверхности 2-ой группы образцов. Образцы выдерживались определенное время в емкости с агрессивной средой. В качестве агрессивной среды использовался раствор гипохлорита натрия (отбеливатель). Далее, с использованием экспериментально-теоретического подхода, были проведены исследования образцов, выдержанных в коррозионной среде.

Толщины двух образцов из первой группы — коррозии подвержены сжатые поверхности — после воздействия агрессивной жидкости составили, соответственно: t_{1-1}=0.51*мм*, t_{1-2}= 0.496 *мм*. Толщины двух образцов из второй группы (коррозии подвержены растянутые поверхности) после воздействия агрессивной жидкости составили, соответственно, t_{2-1}=0.425*мм*, t_{2-2}=0.477*мм*.

Экспериментальные данные «давление p — прогиб H» приведены в табл. 1.

p, атм.	Коррозия сжатых поверхностей		Коррозия растянутых поверхностей	
	H_{1-1},*мм*	H_{1-2},*мм*	H_{2-1},*мм*	H_{2-2},*мм*
1.6	1.14	1.17	1.24	1.14
1.8	1.20	1.22	1.32	1.21
2.2	1.34	1.36	1.50	1.38
2.6	1.51	1.52	1.74	1.65
3.0	1.70	1.75	2.03	1.98
3.4	1.92	2.00	2.40	2.33
3.8	2.17	2.26	2.75	2.66
4.2	2.57	2.60	3.16	3.06
4.6	2.91	2.91	3.64	3.44
5.0	3.23	3.25	4.04	3.83
5.4	3.61	3.62	4.43	4.22

Таблица 1. Давление p — прогиб H.

Анализ данных, приведенных в табл. 1, показывает, что, как и в первом цикле исследований, прогибы деформированных образцов (коррозия на растянутых поверхностях) больше, чем недеформированных образцов. Об этом говорят также изменения толщин образцов. То есть, коррозионный износ на растянутых поверхностях идет быстрее, чем на недеформированных образцах, и соотношения (1) выполняются. В статье [9] отмечается, что для кристаллической пластинки размером 10x5x1 *мм* из KCl, находящейся в потоке раствора «слабонедосыщенном раствором KCl», с относительным прогибом f/L чуть больше 0.06 (f — стрела подъема, L — характерный размер пластинки) «скорость растворения вогнутой стороны на протяжении всего опыта больше, чем выпуклой». Здесь следует отметить, что процесс коррозионного износа отличается от растворения, рассмотренного в статье [9]. При коррозии, в отличие от простого растворения, появляется пассивирующий слой, и на толщину пассивирующего слоя влияет деформация поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Сидоренко С. Н., Якупов Н. М.* Коррозия – союзник аварий и катастроф. Монография. М.: Изд-во РУДН, 2002. 93 с.

[2] *Низамов Х. Н., Сидоренко С. Н., Якупов Н. М.* Прогнозирование и предупреждение коррозионного разрушения конструкций. М.: Изд-во РУДН, 2006. 355 с.

[3] *Якупов Н. М.* Лаборатория нелинейной механики оболочек: история и разработки последних лет. Казань.: Изд-во ИММ КазНЦ РАН, 2006. 98 с.

[4] *Якупов Н. М., Нуруллин Р. Г., Нургалиев А. Р.* Способ испытаний образцов металлических мембран под напряжением и устройство для его осуществления: Патент №2296976. 2007.

[5] *Якупов Н. М., Галявиев Ш. Ш., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н.* Состояние конструкций градирен и предотвращение их разрушения // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2006. № 7-8. С. 36–42.

[6] *Якупов Н. М., Нургалиев А. Р.* О влиянии дефектов на механические характеристики мембран, работающих в агрессивной среде // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного ун-та. 2007. № 1(7). С. 56–59.

[7] *Якупов Н. М., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н.* Методика испытания пленок и мембран в условиях равномерного распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. № 11. С. 54–56.

[8] *Якупов Н. М., Нургалиев А. Р.* Влияние механических дефектов на свойства нагруженных тонкостенных элементов конструкций в агрессивной среде // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. Казань, 2008. № 3. С. 14–18.

[9] *Бернштейн Г. В., Дьяченко А. М., Русанов А. И.* Механохимический эффект растворения // Доклады АН СССР. 1988. № 6. С. 1402–1404.

Yakupov N. M., Giniyatullin R. R., Yakupov S. N. *Corrosion deterioration on the deformed surface*. From the electrochemical theory of corrosion deterioration it is known that on a surface of the metal which is in an excited environment, the thin film which destruction leads to corrosion deterioration is formed. Among the factors promoting destruction of a protective film, it is possible to note surface deformation. Researches for the answer to a question are conducted: «what deformations as influence a condition of a protective film?». For the analysis the experimentally-theoretical method is used.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАНОПОКРЫТИЙ

Якупов С. Н.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Предлагается подход к определению механических характеристик покрытий в системе «покрытие–подложка». Используя экспериментально-теоретический метод, раздельно исследуются свойства подложки и пакета «подложка–покрытие» и определяются механические характеристики покрытий. Рассмотрен пример.

В настоящее время создаются различные пленки и покрытия, в том числе многослойные с различными эксплуатационными свойствами. Один из эффективных способов получения тонких пленок и покрытий [1–6] — способ напыления на подложку. Инструментарии для определения механических характеристик тонких пленок и покрытий разработаны недостаточно. Как отмечается в работах [1,3,11], стандартный подход одноосного растяжения неприменим для пленок со сложной структурой и с дефектами. Для пленок и покрытий со сложной структурой при наличии нано- и микродефектов трудно описать сложную структуру, не всегда применимы и физические методы, в частности, метод «индентора» [13].

Для исследования свойств тонких пленок и покрытий со сложной структурой в системе «подложка-покрытие» необходимо экспериментально-теоретическим методом определять интегральные характеристики, базирующиеся на двумерном подходе. При этом необходимо как-то разъединить покрытие от подложки, что представляет достаточно сложную задачу. Важной составляющей при создании новых покрытий (наноструктур) в системе «покрытие-подложка» является разработка методов и оборудования (установок), позволяющих исследовать свойства этих систем. Возникает задача определения механических характеристик покрытий, включая нанопокрытий, полученных в системе «покрытие-подложка».

Раздельно исследуются свойства подложки и пакета «подложка-покрытие» [10, 12]. При этом используется экспериментальная установка «ДМ-1», разработанная автором, и эффективный экспериментально-теоретический метод [1, 7, 13, 14].

Способ осуществляется в следующей последовательности. Подготавливают установку «ДМ-1», образцы из испытуемого материала и рабочую среду. Закрепляют исследуемый образец на фланцах нагрузочного резервуара. Создают поверхностную нагрузку на исследуемый образец из источника давления. Образец при этом прогибается и образуется купол. Производят мониторинг за формой деформирования образца, в частности, определяют зависимость «прогиб H–давление p». Далее на базе экспериментальных данных, используя соотношения, полученные из нелинейной теории оболочек, в зависимости от характера деформирования, определяют механические характеристики материала образца: модуль E_c или условный модуль упругости ${E^{usl}}_c$, картину деформирования и т. д.

Первый цикл работы: на экспериментальном этапе вырезают из системы «покрытие–подложка» (пленка с покрытием) круглый образец. Определяют зависимость «прогиб H – давление p» и механические характеристики материала образца: модуль E_c или условный модуль упругости $E^{usl}{}_c$ и т. д.

Второй цикл работы: Все работы, выполненные на первом цикле, повторяют отдельно только для подложки (пленки без покрытия) и определяют, в частности, модуль упругости E_{podl} или условный модуль упругости $E^{usl}{}_{podl}$.

Третий цикл работы: Используя одну из формул, в зависимости от характера деформирования: упругое или пластическое, вычисляют модуль упругости E_{pokr} или условный модуль упругости $E^{usl}{}_{pokr}$ (в формулах h_{pokr} , h_{podl} — толщины покрытия и подложки, соответственно):

$$E_{pokr} = \frac{E_c\,(h_{pokr} + h_{podl}) - E_{podl} h_{podl}}{h_{pokr}}, \quad E^{usl}_{pokr} = \frac{E^{usl}_c\,(h_{pokr} + h_{podl}) - E^{usl}_{podl} h_{podl}}{h_{pokr}}. \quad (1)$$

В качестве примера, иллюстрирующего предложенный способ, была рассмотрена полимерная пленка толщиной t = 0,1 мм, на которую были нанесены ионно-плазменным методом покрытия из оксида титана TiO_2 (образцы подготовлены специалистами КГТехнолУ). Были построены раздельно для «подложки с покрытием» и для «подложки» кривые деформирования: «прогиб H – давление p» (рис. 1) и «интенсивность напряжений σ_i – интенсивность деформаций e_i». Далее были определены модули упругости покрытия E_{upr} при упругой деформации образца и условные модули упругости покрытия $E_{plastika}$ в зависимости от интенсивности деформаций (рис. 2).

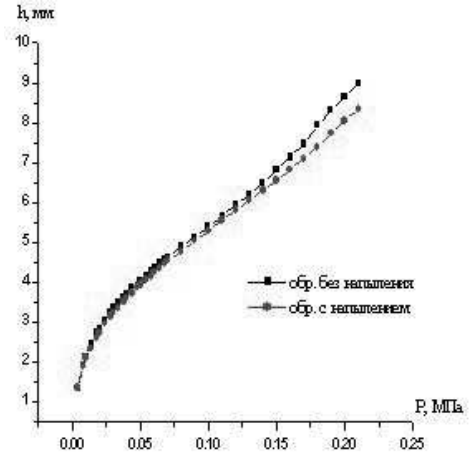


Рис. 1. График зависимости «H – P».

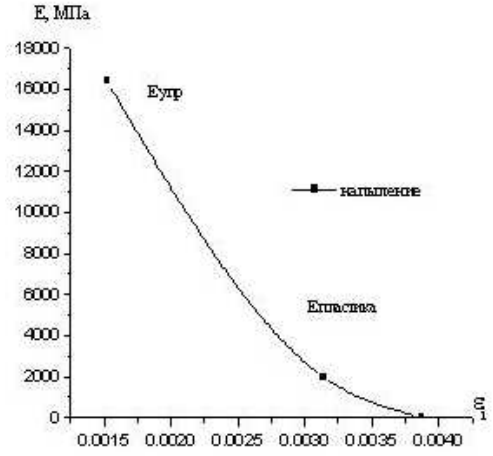


Рис. 2. График зависимости «E – e_i».

Разработанный подход наглядный и простой. Нет необходимости работать непосредственно с тонким нанопокрытием, не требуется дорогостоящее оборудование. Используемые соотношения на теоретическом этапе обработки результатов с высокой точностью описывают механику деформирования рассматриваемых систем «покрытие–подложка» (пленка с покрытием). Разработанный экспериментально-теоретический подход позволяет получать достоверные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Якупов Н. М. Якупов С. Н.* Методы расчета пленочных элементов конструкций: Учебное пособие. Казань, КГАСУ, 2007. 117 с.

[2] Международный форум по нанотехнологиям // Сборник тезисов докладов научно-технологических секций. Т.1. М., 2008. 848 с.

[3] *Якупов Н. М. Якупов С. Н.* Пленки неоднородной структуры // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. №1. 2009. С. 60–70.

[4] Пленки и покрытия – 2009: Тр. 9-й Межд. конф. / Под ред. д.т. н. В.Кузнецова. СПб: Издательство Политехнического университета, 2009. 346 с.

[5] Сборник тезисов докл. 2 Междун. форума по нанотехнологиям. М.: РОСНАНО, 2009. 724 с.

[6] Сборник тезисов докладов участников Второго Международного конкурса научных работ молодых ученых в области нанотехнологий. М.: РОСНАНО, 2009. 989 с.

[7] *Якупов Н. М. Куприянов В. Н. Нуруллин Р. Г. Якупов С. Н.* К исследованию механических характеристик тонких пленок и нанопленок // Межд. форум по нанотехнологиям. Сб. докл. н.-технол. секций. Т.1. М.: Роснано. 2008. С. 543–545.

[8] *Якупов Н. М. Якупов С. Н.* Определение механических характеристик пленок с порами, нановключениями и нанопокрытиями // Сборник тез. докладов участников Второго Международног форума по нанотехнологиям. М.: РОСНАНО, 2009. С. 427–429.

[9] *Якупов С. Н.* Способ определения механических характеристик тонких покрытий в системе «покрытие–подложка» // Сб. тез. докладов 2 Межд. конкурса научных работ молодых ученых в области нанотехнологий. М.: РОСНАНО, 2009. С. 488–489.

[10] *Oliver W. Pharr G. J.* Mater. Res. Soc. Symp. Proc. 473, 57 (1997).

[11] *Якупов Н. М. Галимов Н. К. Леонтьев А. А.* Экспериментально-теоретический метод исследования прочности полимерных пленок // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т.6, № 2. С. 238–243.

[12] *Якупов Н. М. Нургалиев А. Р. Якупов С. Н.* Методика испытаний пленок и мембран в условиях равномерно распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74, № 11. С. 54–56.

[13] *Якупов Н. М. Нуруллин Р. Г. Якупов С. Н.* Методология исследования механических характеристик тонких пленок и нанопленок // Вест. Машиностр. 2009. № 6. С. 44–47.

[14] *Якупов Н. М. Галимов Н. К. Якупов С. Н.* Экспериментально-теоретический подход определения механических характеристик плоских и неплоских пленок и мембран со сложной структурой // Пленки и покрытия – 2009: Тр. 9 Межд. конф. СПб: Изд-во Политех. ун-та, 2009. С. 97–99.

[15] *Галимов Н. К. Якупов С. Н.* К определению модуля упругости тонкостенных сферических оболочек из пластичных материалов // Тр. Междун. науч.-практ. конф. «Инженерные системы – 2009». М.: РУДН, 2009. Т. II. С. 362–366.

Yakupov S. N. *To definition of mechanical characteristics nanocoverings*. The approach of definition of mechanical characteristics of coverings in system «covering-substrate» is offered. Using an experimentally-theoretical method, properties of a substrate and a package «substrate–covering» are separately investigated and mechanical characteristics of coverings are defined. The example is considered.

Сдано в набор 04.08.10. Подписано в печать 04.08.10.
Формат 60x84 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 40,9. Уч.-изд. л. 29,6.
Тираж 110 экз. Заказ № 1231.

Издательство Южного федерального университета

Отпечатано в типографии ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1.