

Министерство образования и науки РФ
Федеральное агентство научных организаций
Российский национальный комитет по теоретической
и прикладной механике
Научный совет РАН по комплексной проблеме «Механика»
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
Южный федеральный университет
Южный научный центр РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
XVIII МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 года

УДК [531/534+539.3/.5](063)
ББК 22.25я43
С568

*XVIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.)
поддержана Российским фондом фундаментальных исследований,
грант № 16-01-20860.*

Редакторы: А. О. Ватульян, А. В. Наседкин, А. В. Попов

С568 **Современные проблемы механики сплошной среды** : тезисы докладов XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г. – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2016. – 168 с.

Сборник содержит тезисы докладов XVIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.). Конференция посвящена 80-й годовщине со дня рождения советского и российского учёного-механика, известного специалиста в области смешанных задач теории упругости, заслуженного деятеля науки РФ, лауреата Государственной премии РФ, профессора В. М. Александрова.

В сборнике представлены результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, по устойчивости движений вязкой жидкости, аэрогидродинамике, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности в механике контактных взаимодействий и теории оболочек, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и при их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

УДК [531/534+539.3/.5](063)
ББК 22.25я43

© Южный федеральный университет, 2016
© Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 2016

Численное моделирование анизотропной фильтрационной конвекции и сохранение косимметрии

Абделхафиз М. А.^{1,2}, Цибулин В. Г.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Сухагский университет

mostafa.abdallah@yahoo.com, vtsybulin04@gmail.com

Целью данной работы является анализ возникновения конвекции в анизотропной среде с учетом косимметричных эффектов. Для описания конвективных течений используется модель Дарси. В случае изотропной среды для этих уравнений Д. В. Любимов (ПМТФ, 1975) обнаружил нетривиальный эффект ответвления семейства стационарных состояний от потерявшего устойчивость механического равновесия. Это явление было объяснено при помощи теории косимметрии В. И. Юдовичем (Мат. заметки. 1991).

Рассматривается задача для пористого прямоугольника с учетом анизотропии и уравнений Дарси — Буссинеска.

$$\begin{aligned} \nabla p + M \cdot V + \lambda \theta \vec{\gamma} &= 0, \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= L_D \theta - \vec{V} \cdot \vec{\gamma} - (\vec{V} \cdot \nabla) \theta, \quad L_D = \partial_x (d_{11} \partial_x + d_{12} \partial_y) + \partial_y (d_{21} \partial_x + d_{22} \partial_y). \end{aligned}$$

Здесь \vec{V} — скорость, p — давление, θ — девиация температуры от линейного по высоте профиля, M обозначает тензор безразмерных коэффициентов обратной проницаемости μ_{ij} , D — тензор безразмерных коэффициентов теплопроводности d_{ij} , $\vec{\gamma} = (0, -1)$ — единичный вектор, отвечающий направлению силы тяжести, и λ — фильтрационное число Рэлея. На границе ставятся условия непротекания и однородности девиации температуры.

Показано, что имеются комбинации управляющих параметров, когда система обладает нетривиальной косимметрией, и от состояния механического равновесия ответвляется однопараметрическое семейство стационарных конвективных режимов, тепловых характеристик и проницаемости. Получены явные формулы для критических чисел Рэлея, отвечающих потере устойчивости механического равновесия. Показано, что использование косимметричного подхода позволяет затем анализировать ситуации, отвечающие разрушению косимметрии.

Для вычисления конвективных режимов развиты конечно-разностные аппроксимации для уравнений в естественных переменных и для задачи относительно функции тока и температуры. Построены сохраняющие косимметрию аппроксимации на смещенных сетках, совпадающие с разработанными (см. Karasozen B., Nemtsev A. D., Tsybulin V. G., Computers and Mathematics with Applications, 2012) для изотропного случая. Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие формирование семейства режимов и разрушение семейства при некорректной аппроксимации.

Работа поддержана грантом РФФИ №14-01-00470 и правительством Египта.

Итерационный алгоритм решения дифракционных задач в низкочастотном ультразвуковом диапазоне

Абрамов В. В.¹, Алексиев А. Р.², Гетманский М. С.¹, Мирчев Й.²,
Миховски М. М.², Попужин В. В.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Институт механики Болгарской Академии Наук, София
popuz@ya.ru

В работе рассматривается двумерная дифракция продольной низкочастотной ультразвуковой волны на дефекте произвольной формы. Задача решается при гармонических колебаниях в скалярных уравнениях акустики, что сводит линейаризованное волновое уравнение к уравнению Гельмгольца. Препятствие описывается с помощью граничного условия непроницаемости на поверхности дефекта (граничное условие типа Неймана). Применение метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) сводит задачу к решению интегрального уравнения Фредхольма второго рода по контуру дефекта.

На базе метода граничных элементов (МГЭ), интегральное уравнение преобразуется к дискретному представлению в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Далее, на основе матрицы данной СЛАУ, производится искусственное построение специальной структурированной матрицы. Рассматриваются два типа осреднения: Теплицева матрица и циркулянтная матрица. После чего, исходная СЛАУ преобразуется к эквивалентному виду, где в левой части остается только искусственно-построенная матрица. На основе этой формы строится итерационный алгоритм последовательного приближения решения, где на каждом шаге итерации решается система со структурированной матрицей. Используются быстрые численные алгоритмы решения систем с матрицами такого типа, которые позволяют сократить число необходимых арифметических операций с кубического числа к квази-линейному числу операций. В случае циркулянтной матрицы используется алгоритм дискретной свертки, выполняемый за счет трех быстрых преобразований Фурье (БПФ). Для Теплицевой матрицы используется метод сопряженных градиентов с предобуславливателями Стрэнга и Т. Чэна. Быстрое матрично-векторное умножение внутри метода сопряженных градиентов выполняется за счет расширения Теплицевой матрицы к циркулянтному виду и далее также используется дискретная свертка.

Падающее поле представляет собой поле излучения ультразвукового преобразователя. Явное интегральное представление волны давления, возбуждаемой датчиком, получено на основе сведения известного трехмерного представления к двумерному виду. Приведены графики ближнего и дальнего поля УЗ преобразователя внутри исследуемого образца.

В работе представлены результаты проведенных численных экспериментов для разных моделей дефектов. Показано, что алгоритм устойчиво ведет себя в низкочастотном ультразвуковом диапазоне. Проведено сравнение обоих типов осреднения к структурированной матрице.

Численный анализ нелинейного деформирования и прогрессирующего разрушения металлопластиковых цилиндрических оболочек при неосесимметричных импульсных воздействиях

Абросимов Н. А., Елесин А. В., Новосельцева Н. А.

НИИ механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

abrosimov@mech.unn.ru, knadya2004@mail.ru

Широкое применение композитных материалов при создании конструкций современной техники обуславливает значительный интерес к исследованию характерных особенностей их динамического поведения и прочности. В частности композитные материалы весьма перспективны для защитных силовых оболочек энергетических установок, рассчитанных на сохранение своей работоспособности как в номинальных режимах работы, так и при аварийных ситуациях, сопровождающихся резким увеличением нагрузок на несущие элементы. Основным несущим элементом подобных защитных конструкций являются, как правило, композитные цилиндрические оболочки.

Одной из основных задач, возникающих при разработке защитных металлокомпозитных конструкций, является определение рациональной схемы армирования в зависимости от реализуемого нагружения. Для двухслойных конструкций, изготовленных намоткой однонаправленного композитного материала на металлическую оправку, важно знать насколько полно реализуется прочность силовых волокон на уровне композитного слоя и какие предельные характеристики компонентов определяют прочность конструкции.

В докладе рассматривается методика численного анализа динамической прочности двухслойных металлопластиковых цилиндрических оболочек при осесимметричных и неосесимметричных импульсных воздействиях. Кинематическая модель деформирования слоистого пакета основана на неклассической и прикладной теориях оболочек. Геометрические зависимости построены на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости. Связь между тензорами напряжений и деформаций в композитном макрослое установлена на основе закона Гука для ортотропного тела с учетом деградации жесткостных характеристик многослойного пакета вследствие локального разрушения некоторых элементарных слоев композита. Физические соотношения в металлическом слое сформулированы в рамках дифференциальной теории пластичности. Энергетически согласованная разрешающая система уравнений динамики металлопластиковых цилиндрических оболочек получена в результате минимизации функционала полной энергии оболочки как трехмерного тела. Численный метод решения сформулированной начально-краевой задачи основан на явной вариационно-разностной схеме. Для различных структур армирования приведены результаты достоверности рассматриваемой методики и анализа динамической прочности как однородных базальто- и стеклопластиковых, так и металлопластиковых цилиндрических оболочек.

Бесконечная пластина, подкреплённая полубесконечным стрингером

Агаян К. Л.¹, Григорян Э. Х.¹, Джилавян С. А.²

¹Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

²Ереванский государственный университет

karo.aghayan@gmail.com

В работе вновь рассматривается известная контактная задача для бесконечной упругой однородной пластины, усиленной полубесконечным стрингером, и предлагается подход, позволяющий определить коэффициенты асимптотического разложения контактных напряжений практически любого порядка в характерных участках контактного взаимодействия.

Упругий лист, в виде тонкой бесконечной пластины толщиной h , приведенной к правосторонней декартовой системе координат Oxy , подкреплён ребром жесткости (стрингером) полубесконечной длины. Стрингер малой толщины h_s и малой ширины d_s присоединен к бесконечной пластине вдоль оси Ox на полубесконечном интервале $0 < x < \infty$. Полученная упругая система пластина–стрингер деформируется сосредоточенной растягивающей силой P , приложенной к концу стрингера в точке $x = 0$. Как и в подобных задачах, относительно стрингера принимается модель контакта по линии, т. е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния.

При этих предположениях, решение задачи, т. е. определение контактных напряжений, возникающих под стрингером, при помощи комплексного преобразования Фурье сведено к однородному разностному уравнению относительно образа Фурье контактного напряжения $\tau(\alpha)$

$$\alpha \operatorname{cth} \pi \alpha \cdot \bar{\tau}(\alpha) + \lambda \bar{\tau}(\alpha - i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -0.5 \quad (1)$$

и построено ее замкнутое решение.

Здесь $\lambda = 4Eh/(E_s F_s (3 - \nu)(1 + \nu))$, где $F_s = h_s d_s$, E_s — модуль упругости стрингера, E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона пластины соответственно.

Рассматривая аналитическое продолжение функционального уравнения (1) вне полосы регулярности, можно убедиться, что аналитическое продолжение $\bar{\tau}(\alpha)$ в точках $\alpha = (n - 1/2)i$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) области $\operatorname{Im} \alpha > -1$ и в точках $\alpha = -(n + 1/2)i$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) области $\operatorname{Im} \alpha < -0.5$ могут иметь полюсы кратности $(n + 1)$ и n соответственно. Используя аналитическое продолжение функционального уравнения (1) во всю комплексную плоскость и учитывая аналитические свойства функции $\bar{\tau}(\alpha)$, предлагается алгоритм, позволяющий вычислить вычеты этой функции в вышеуказанных полюсах и, тем самым, в конечном виде вычислить коэффициенты асимптотического разложения контактных напряжений любого конечного порядка, описывающего поведение контактных напряжений при $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow \infty$.

Плоская контактная задача для тонкой двухслойной упругой полосы при неполном сцеплении слоев с учетом тепловыделения в зоне контакта

Азоян А. И., Иваночкин П. Г.

Ростовский государственный университет путей сообщения

azojan.anaid@mail.ru

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости о действии твердого штампа шириной $2a$ на упругий шероховатый двойной слой толщины $h_1 + h_2$, лежащий без трения на жестком основании. Штмп прижимается вертикальной силой \vec{P} и движется вдоль своей образующей со скоростью \vec{V}_0 . Силы трения $\tau_{zy}(x)$ связаны с контактным давлением $\sigma_y(x)$ законом трения Кулона. Часть работы этих сил $A_1 = n_1 A$ идет на образование тепловых потоков $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, направленных, соответственно, вглубь слоя и штампа. Под штампом тепловой поток пропорционален работе сил трения. При переходе через границу слоев температура и тепловой поток непрерывны. На верхней поверхности вне штампа и на нижней поверхности задан теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

На границе раздела двухслойной упругой полосы рассматривается условие неполного сцепления. Граничные условия следующие:

$$U_1 = U_2; V_1 = V_2; \sigma_y^1 = \sigma_y^2; \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = \frac{1}{k}(U_1 - U_2),$$

где σ_y^i, τ_{xy}^i — нормальные и касательные напряжения;

U_i, V_i — горизонтальные и вертикальные перемещения.

Последнее граничное условие для касательных напряжений учитывает возможность относительного проскальзывания (k — коэффициент проскальзывания) на границе раздела верхнего и нижнего слоев. Предельные значения коэффициента проскальзывания позволяют получить частные случаи граничных условий:

$k = 0$ — условие полного сцепления на границе раздела:

$$U_1 = U_2; V_1 = V_2; \sigma_y^1 = \sigma_y^2; \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2,$$

$k \rightarrow \infty$ — условие соответствует случаю, когда верхний слой лежит без трения на нижнем:

$$U_1 = U_2 = 0; V_1 = V_2; \sigma_y^1 = \sigma_y^2; \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = 0,$$

Изменение параметра k позволяет учитывать степень сцепления слоев упругой полосы.

Требуется определить: изменение контактного давления и распределение температуры в полосе, состоящей из двух разнородных материалов. Целью исследования является изучение влияния относительного проскальзывания на распределении контактных давлений.

Задача рассматривается в рамках несвязанной термоупругости. Рассматриваемая задача сводится к совместному решению термоупругих уравнений Дюгамеля — Неймана и уравнения теплопроводности. В силу предположения о малости толщины полосы построено вырожденное асимптотическое решение задачи.

Контактная задача о взаимодействии двух упругих тел с функционально-градиентными покрытиями

Айзикович С. М.¹, Васильев А. С.^{1,2}, Волков С. С.^{1,2}

¹*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

²*НИИ механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород*

fenix_rsu@mail.ru

Рассматривается осесимметричная контактная задача о нормальном взаимодействии двух гладких упругих тел сферической формы с функционально градиентными покрытиями. Предполагается, что радиусы кривизны обоих тел велики по сравнению с размером площадки контакта, поэтому каждое из тел заменяется упругим полупространством. Упругие модули в покрытии каждого тела изменяются с глубиной по произвольным независимым друг от друга законам, причём, в зоне сопряжения покрытия и подложки может быть задан скачок упругих свойств, что позволяет моделировать существенно жесткие и мягкие покрытия. Под действием нормально приложенной силы тела взаимодействуют между собой. Необходимо определить распределение контактных нормальных напряжений возникающих в области контакта этих упругих тел.

Поставленная контактная задача сводится к решению парного интегрального уравнения относительно неизвестной функции контактных нормальных напряжений, возникающих в области контакта двух тел. Трансформанта ядра интегрального уравнения представляет собой линейную комбинацию функций податливости первого и второго тела. Функции податливости для первого и второго тела строятся численно, для достаточно произвольных изменений упругих модулей в покрытии, путем решения краевой двухточечной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для решения полученного парного интегрального уравнения применяется двусторонне-асимптотический метод, основанный на идее аппроксимации трансформанты ядра произведением дробно-квадратичных функций. Используя построенную аппроксимацию трансформанты ядра, получено замкнутое аналитическое решение приближенного парного интегрального уравнения. Доказано, что полученное решение является асимптотически точным для больших и малых значений характерного геометрического параметра задачи.

Получена серия численных результатов, иллюстрирующих влияние различных параметров задачи, таких как отношение толщин покрытий, отношение толщины первого покрытия к радиусу зоны контакта, отношение эффективных упругих модулей в зоне сопряжения покрытия с подложкой и т. д., на её решение. Проанализирована связь между трансформантами ядер интегрального уравнения, распределением контактных напряжений и размерами зоны контакта. Исследовано влияние характера изменения упругих модулей в покрытиях на характеристики упругого контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда — грант №15-19-10056.

Неизотермическое индентирование непрерывно-неоднородного полупространства

Айзикович С. М., Кренев Л. И.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

lkrenev@yandex.ru

В работе рассмотрена осесимметричная статическая задача о тепловом и механическом воздействии гладкого сферического штампа на неоднородный слой сцепленный с термоупругим полупространством. Предполагается, что температура штампа постоянна и отличается от температуры покрытия. Коэффициент теплопроводности, коэффициент линейного расширения, модуль Юнга и коэффициент Пуассона слоя изменяются по его глубине по произвольным заданным законам.

Для решения граничной задачи используется аппарат интегральных преобразований Ханкеля. Решение системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами строится с помощью метода модулирующих функций.

В рассматриваемой нами задаче упругие характеристики не зависят от температуры, поэтому решение системы парных интегральных уравнений разбивается на два этапа. С помощью асимптотического метода строится численно-аналитическое приближенное решение задачи о действии постоянной температуры в пределах круга заданного радиуса, определяется величина соответствующего теплового потока и смещения поверхности полупространства. Затем из условия равенства нулю контактных напряжений на границе зоны контакта и заданной формы штампа находится распределение значений контактных напряжений, величина смещения штампа и действующая сила.

Приведены численные результаты, отражающие термонапряженное состояние непрерывно-неоднородного по глубине полупространства в окрестности контактной зоны для различных случаев изменения свойств в приповерхностном слое. В частности рассматриваются случаи изменения термоупругих свойств, когда значение характеристики покрытия не отличается от значения соответствующей характеристики подложки, либо отличается в 2 раза (в большую или в меньшую сторону) на поверхности и линейно убывает (растет) по глубине до значения в подложке.

При индентировании материалов с покрытием можно определить модуль упругости, актуальный для некоторой зоны контакта. Эту характеристику будем называть эффективным модулем или функцией жесткости неоднородного основания. При внедрении сферического штампа ее вид следующий:

$$S(a) = \frac{3P}{4a\chi} \frac{1}{1 - \nu^2}, \quad (1)$$

где a радиус зоны контакта, χ перемещение индентора.

В работе проанализирована зависимость функции жесткости от разности температур штампа и основания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №15-07-05208, 16-07-00929 А, 15-38-20790, 15-07-05820, 14-08-92003, 14-07-00705, 14-07-00343).

Осесимметричное напряженное состояние кусочно-однородного слоистого пространства с параллельными монетообразными трещинами

Акопян В. Н.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

vhakobyan@sci.am

Рассмотрено осесимметричное напряженное состояние кусочно-однородного слоистого пространства, полученного при помощи поочередного соединения двух разнородных слоев одинаковой высоты, на плоскостях стыка которых имеются одинаковые монетообразные трещины. Считается, что пространство деформируется под воздействием таких самоуравновешенных нагрузок, действующих на берегах трещин, при которых средние плоскости всех разнородных слоев являются плоскостями симметрии.

Сначала определяется базовая ячейка в виде двухкомпонентного бесконечного слоя, на внешних поверхностях которого имеют место условия симметрии, а на плоскости стыка двух разнородных слоев имеется монетообразная трещина. Вводятся функции скачков смещений на берегах трещины и при помощи преобразования Ханкеля строятся разрывные решения уравнений осесимметричной теории упругости для двухкомпонентного слоя, тем самым напряжения на плоскости стыка, необходимые для удовлетворения условиям на берегах трещины, выражаются через функции скачков. Затем, удовлетворив, при помощи этих решений, указанным условиям, записываются определяющие уравнения рассмотренной задачи в виде системы двух интегральных уравнений второго рода с ядрами типа интегралов Вебера-Сонины при условиях непрерывности смещений в точках граничной окружности монетообразной трещины. Далее, используя известные операторы вращения, определяющая система сводится к системе из двух сингулярных интегральных уравнений второго рода относительно производных от приведенных скачков смещений, которая, далее, записывается в виде одного сингулярного интегрального уравнения второго рода относительно комплексной комбинации указанных производных. С учетом поведения сингулярного интеграла у концов интервала интегрирования и свойств операторов вращения, определены показатели особенности искомой комплекснозначной функции в концевых точках интервала интегрирования и построено ее решение численно-аналитическим методом механических квадратур. Получены простые расчетные формулы для определения важных механических характеристик задачи, каковыми являются раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений. Проведен численный анализ задачи и определены закономерности изменения раскрытия трещин и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в точках граничной окружности монетообразной трещины в зависимости от геометрических и физико-механических характеристик составляющих пространство слоев.

Приложения метода блочного элемента в некоторых областях

Бабешко В. А.^{1,2}, Бабешко О. М.^{1,2}, Евдокимова О. В.²¹*Кубанский государственный университет, Краснодар*²*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

babeshko41@mail.ru, evdokimova.olga@mail.ru

Теория блочных структур, разработанная в Южном научном центре Российской академии наук, имеет ряд различных достоинств, обсуждаемых ниже. Она позволяет строить представления решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных в произвольных областях в аналитическом виде. В основе этой теории лежит дифференциальный метод факторизации. Этот метод долгое время не был замечен учеными, занимавшимися разработкой факторизационных подходов. Причина, возможно, состоит в том, что он потребовал привлечения современных методов математики. В частности, внешнего анализа, теории функций многих комплексных переменных, форм-вычетов Лере, факторизации матриц-функций нескольких комплексных переменных, теории представления групп. В его основе лежат некоторые свойства топологической алгебры, связанные с автоморфизмом топологических многообразий, разделом математики, не часто используемым в приложениях.

Будучи высокоточным, хотя пока и сложным в применении, метод нашел многочисленные применения в различных областях. В докладе приводятся примеры приложений метода в теории интегральных уравнений, материаловедении, дефектоскопии тел с покрытиями, сейсмологии.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2016 г. проект (0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404), (15-01-01379), (15-08-01377), (16-41-230214), (16-41-230218), (16-48-230216).

Сравнительный анализ оптимальных форм осесимметричных тел при проникании в пластические грунтовые среды

Баженов В. Г., Котов В. Л., Линник Е. Ю.

НИИ механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

bazhenov@mech.unn.ru, vkotov@inbox.ru, ElenkaLinnik@gmail.com

Исследование процессов взаимодействия жестких тел с потоком сопротивляющейся среды представляет сложную проблему, для эффективного решения которой совместно применяются экспериментальные и теоретические методы. Большинство численно-аналитических методов определения контактных сил и глубин проникания ударников в грунтовые среды базируются на гипотезе локального взаимодействия. Ранее на базе точных решений для описания волнового сопротивления и результатов аэродинамических испытаний построены оптимальные формы тел вращения и пространственной конфигурации со звездобразным миделем, соответствующего абсолютно оптимальному телу. Известно, что при длине, меньшей длины абсолютно оптимального конуса, оптимальные тела вращения могут содержать передний торец. С увеличением радиуса торца растет ошибка модели локального взаимодействия, что оказывает влияние на силовые характеристики и форму оптимальных тел. Таким образом, в отличие от газовой динамики, построение осесимметричных форм минимального сопротивления внедрению и максимальной глубины проникания в пластические грунтовые среды требует дополнительной проработки.

В работе осуществлялся поиск оптимальных форм тел вращения заданной длины и радиуса поперечного сечения с кусочно-линейным представлением образующей в рамках одной из модификаций метода локальных вариаций. Для описания силы сопротивления внедрению применена двучленная квадратичная модель локального взаимодействия, включающая инерционное и прочностное слагаемые с постоянным и кулоновским трением. Предложено использовать методику численного исследования на основе модели локального взаимодействия для предварительных расчетов оптимальных форм, что существенно уменьшает количество вычислений в осесимметричной постановке. С ростом радиуса притупления расчеты необходимо проводить в постановке механики сплошных сред на основе известных моделей грунтовых сред.

Установлено, что при высоких скоростях движения форма оптимального тела минимального сопротивления внедрению в мягкий грунт содержит отличный от нуля передний торец. С ростом скорости наблюдается сближение образующих и существенное различие форм лишь при значениях скоростей, близких к критическим, когда тело заданной длины и миделя поперечного сечения совпадает с абсолютно оптимальным конусом. Показано, что задачи определения форм тел минимального сопротивления внедрению и максимальной глубины проникания можно считать приближенно эквивалентными при учете нелинейных свойств среды и процессов обтекания в достаточно широком диапазоне скоростей удара.

Работа выполнена при финансировании научных школ РФ (НШ-6944.2016.8) и РФФИ (грант №16-38-60035-мол_a_дк, 16-08-00825-а, 16-38-00102-мол-а).

Разрывные бифуркации как предвестники кризиса в сильно нелинейных виброударных системах

Баженов В. А., Погорелова (Малкина) О. С., Постникова Т. Г.

Киевский национальный университет строительства и архитектуры
posttan@ukr.net

В сильно нелинейных негладких разрывных виброударных системах (правые части дифференциальных уравнений, описывающих их движение, разрывны) при изменении параметров системы или параметров нагружения наблюдаются уникальные явления, которых не бывает в гладких системах. К таким явлениям относятся, в частности, и разрывные бифуркации. В точках разрывных бифуркаций мультипликаторы Флоке становятся многозначными (set-valued) и покидают единичный круг в комплексной плоскости прыжком, иногда огромным прыжком, принимая при этом очень большие значения. Разрывные бифуркации — это опасные бифуркации. Их возникновение может привести систему к кризису. Кризис — это внезапное качественное изменение хаотической динамики при изменении системного параметра. После кризиса состояние системы совершенно отлично от состояния перед кризисом. Если состояние нелинейной динамической системы перед кризисом не вызывает опасений, то состояние после кризиса может быть нежелательным или деструктивным. Почти все внезапные изменения в размерах хаотических аттракторов, почти все внезапные разрушения или возникновения хаотических аттракторов и их бассейнов «обязаны» кризисам. Так что кризис можно рассматривать как катастрофу, которую надо стремиться избежать любой ценой. Поэтому предсказание катастроф до их возможного наступления — это вопрос чрезвычайной важности. Численный бифуркационный анализ позволяет найти точки бифуркаций и различать точки безопасных и опасных бифуркаций. Мы выполняем такой анализ численным методом продолжения решения по параметру, рассматривая двухмассовую виброударную систему с двумя степенями свободы. Удар моделируем нелинейной силой контактного взаимодействия, базирясь на квазистатическом законе Герца. Такой способ решения проблемы дает возможность найти закон движения тел системы на всей временной оси, построить характеристики их движения — фазовые портреты, спектральные плотности, ударные силы, вычислить длительность удара, найти точки бифуркации и определить их характер. Мы строим кривые нагружения и амплитудно-частотные характеристики и находим опасные разрывные бифуркации при изменении как амплитуды периодической возбуждающей силы, так и ее частоты. Мы анализируем, как изменяется бифуркационная картина при изменении параметров самой виброударной системы таким образом, что удар становится мягким, то есть его длительность возрастает в сотни раз, и его уже нельзя считать мгновенным. Обнаруживается, что смягчение удара устраняет опасные разрывные бифуркации, делая его с этой точки зрения более безопасным.

Численное моделирование упругопластического выпучивания полусферических оболочек при квазистатических контактных нагрузениях

Баженов В. Г., Демарева А. В., Кибец А. И., Шушкина Ю. А.

НИИ механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

bazhenov@mech.unn.ru, kibec@mech.unn.ru

Приводятся результаты конечно-элементного решения задач упругопластического выпучивания полусферических оболочек при контактном взаимодействии с жесткими телами. Для описания движения оболочки применяется динамическая постановка задачи при малых скоростях нагружения. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей. В качестве уравнений состояния используются соотношения теории течения с изотропным упрочнением. Контактное взаимодействие жесткого тела и оболочки моделируется исходя из условия непроникания. В расчете и эксперименте реализуется кинематическое нагружение — заданное перемещение индентора.

Решение задачи основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест», реализованных в рамках вычислительной системы (ВС) «Динамика-3». Для дискретизации определяющей системы уравнений по пространственным переменным применяется 8-узловой изопараметрический конечный элемент с полилинейными функциями формы.

Выполнен расчет упругопластического деформирования и выпучивания полусферической стальной оболочки, расположенной на неподвижной плите при квазистатическом вдавливании недеформируемого индентора. В расчетах варьировались геометрические параметры оболочки и форма инденторов, в качестве которых использовались круглая пластина, пластина с отверстием, цилиндрическая оболочка и цилиндрическая оболочка с продольными вырезами в зоне контакта. Проведен анализ влияния форм индентора на зависимость контактной силы от его смещения, величину критической нагрузки и закритическое поведение оболочки при немалых формоизменениях.

Результаты расчетов в динамической постановке сопоставлялись с данными экспериментов и результатами расчетов (ABAQUS) в квазистатической постановке.

Полусферическая оболочка в процессе нагружения претерпевает значительные локальные формоизменения, характеризующиеся большими смещениями и углами поворота конечных элементов как жесткого целого. Деформации поперечного сдвига не превышают 3%. В этих условиях ВС «Динамика-3» с удовлетворительной для инженерной практики точностью описывает исследуемые процессы. Остаточные формы оболочки в расчете и эксперименте хорошо согласуются друг с другом. По величинам предельных нагрузок и смещений индентора, при которых оболочка теряет устойчивость, вычислительная система «Динамика-3» и эксперимент дают близкие результаты.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-19-10113).

Экспериментально-расчётное исследование динамического сопротивления сдвигу водонасыщенного песка

Баландин В. В., Баландин В. В., Брагов А. М., Котов В. Л.

НИИ механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

vbalandin99@gmail.com, vkotov@inbox.ru

Изучение физико-механических характеристик грунтовых сред при динамическом нагружении ведется достаточно давно. Разработанные методики плосковолнового эксперимента позволяют определять ударную адиабату сухого и влажного песка в диапазоне нагрузок до нескольких гигапаскалей, сдвиговые свойства экспериментально определяются с применением модифицированной методики Кольского при существенно меньших давлениях. Известно, что уплотнение песка ведет к изменению его прочностных характеристик, что приводит, например, к существенному изменению глубин проникания ударников. Методика обращенного эксперимента позволяет определять как ударные адиабаты сухого песка повышенной плотности на основе максимальных значений силы сопротивления, так и квазистационарные значения силы сопротивления. Ранее показано, что сдвиговые характеристики грунтовых сред коррелируют со значениями силы сопротивления на квазистационарной стадии внедрения. В данной работе представлены результаты исследования сопротивления сдвигу уплотненного сухого и водонасыщенного песка на основе экспериментально-расчетного анализа значений силы сопротивления на квазистационарной стадии внедрения цилиндрического мерного стержня-ударника с плоским торцом в рамках методики обращенного эксперимента. Известно, что скорость распространения плоской волны в грунте растет с увеличением водонасыщения, растет также и скорость волны разгрузки. Следствием этого является меньшая длительность импульса сжатия в мерном стержне по сравнению с сухим грунтом. Таким образом, в случае водонасыщенных грунтов определение усилия, действующего на ударник по значениям импульса деформации на поверхности мерного стержня, наталкивается на известную проблему, связанную с искажением формы импульса за счет дисперсии при распространении его в мерном стержне, отмеченную еще Г. Кольским, Р. Дейвисом и другими авторами. Нами экспериментально-расчетным образом показано, что известная процедура коррекции формы импульса, основанная на точном решении Похгаммера-Кри и применении преобразования Фурье, не позволяет определить максимум столь короткого импульса, однако значение силы сопротивления на квазистационарной стадии внедрения, устанавливающейся после резкого спада, определяется достаточно точно. Таким образом, при практически полном водонасыщении песка его сдвиговые свойства снижаются, но остаются существенными в практически важном диапазоне скоростей внедрения и их необходимо учитывать при решении задач проникания твердых тел в водосодержащие грунты.

Работа выполнена при финансировании в рамках РНФ (№16-19-10113).

Эволюция картин локализации пластической деформации в биметалле при электролитическом насыщении водородом

Баранникова С. А.¹, Бочкарева А. В.¹, Громов В. Е.², Зуев Л. Б.¹,
Ли Ю. В.¹

¹*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск*

²*Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк*

bsa@ispms.tsc.ru, avb@ispms.ru, jul2207@mail.ru

Известно, что наводороживание сталей приводит к хрупкому разрушению. Это обстоятельство является серьезной практической проблемой, от решения которой зависит безопасность работы конструкций. В связи с этим, в настоящем исследовании предпринята попытка, выяснить влияние водорода на макроскопическую локализацию пластического течения и разрушение биметалла на основе соединения ОЦК и ГЦК материалов. В качестве материала исследования был выбран биметаллический коррозионно-стойкий материал 12Х18Н9Т+Ст.3 в исходном состоянии (1) и в состоянии после электролитического насыщения водородом (2). Рассматриваемый биметалл был получен методом заливки с последующей прокаткой на необходимую толщину 8 мм. Толщина плакирующего слоя 12Х18Н9Т составила 0,6 мм. Насыщение водородом исследуемого металла проводилось электролитическим методом в 1N растворе серной кислоты в течение 6 ч в трехэлектродной электрохимической ячейке. Механические испытания на одноосное растяжение проводились при температуре 300 К со скоростью $6,67 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$.

Использование метода корреляции цифровых спекл-изображений позволило всех стадиях деформационного упрочнения для состояния (1) и (2) рассмотреть эволюцию картин локализации пластической деформации в плакирующем слое нержавеющей стали 12Х18Н9Т, основном слое низкоуглеродистой стали Ст.3 и переходном слое материала. На площадке текучести в области плакирующего и переходного слоя материала формируется система подвижных очагов локализации пластической деформации. Далее в процессе деформирования от них, в области интерфейсного соединительного слоя на глубине 0,7 мм, отделяются одиночные фронты, которые продолжают согласованное движение вдоль оси растяжения материала, но уже с другими скоростями, в отличие от очагов локализации деформации плакирующего слоя нержавеющей стали. На стадии линейного деформационного упрочнения для состояния (1) и (2) помимо описанной выше картины, в области основного материала Ст.3 формируются четыре эквидистантно расположенных подвижных очага локализации пластической деформации. Однако подвижные очаги в нержавеющей аустенитной стали 12Х18Н9Т и очаги пластической деформации в переходной области материала препятствуют их распространению с постоянной скоростью по длине образца. Проведенные исследования позволили выявить основные закономерности деформирования пластичных коррозионно-стойких биметаллов с учетом их строения и влияния легирования водородом течения 6 часов.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ №16-38-50234 мол_нр.

Возникновение вращения в термогравитационном пограничном слое вблизи свободной границы

Батищев В. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

batishev-v@mail.ru

Температурные пограничные слои вблизи свободной поверхности несжимаемой жидкости активно изучались во второй половине прошлого века в связи с экспериментальными исследованиями в космосе. В условиях невесомости большую роль играют капиллярные силы, которые вызывают термокапиллярное течение жидкости под действием касательных напряжений (эффект Марангони). Однако, в поле тяжести эффектом Марангони можно пренебречь. В этом случае вблизи свободной поверхности возникает термогравитационный пограничный слой при отсутствии поверхностных касательных напряжений. При локальном охлаждении свободной границы в результате бифуркации может возникнуть вращение жидкости в тонком пограничном слое. Этот эффект может объяснить одну из причин возникновения торнадо в атмосфере.

В докладе приводятся результаты расчетов осесимметричного стационарного течения несжимаемой жидкости в горизонтальном слое конечной толщины, ограниченным снизу твердой стенкой, а сверху недеформируемой свободной границей, на которой задано неравномерное распределение температуры. Решение задачи строится на основе уравнений движения неоднородной жидкости в приближении Обербека — Буссинеска в условиях малости эффекта Марангони. Показано, что при малых диффузионных коэффициентах вязкости и теплопроводности вблизи свободной границы в термогравитационном пограничном слое локализована основная часть теплового потока. Находится точное решение уравнений движения в случае квадратичной зависимости поверхностной температуры от радиальной координаты. Неизвестные функции, входящие в это решение, определяются из краевой задачи, решение которой строится асимптотически. Применение численных методов приводит к следующему результату. При локальном охлаждении свободной границы и при наличии внешнего потока жидкости в результате бифуркации возникает вращение жидкости в тонком пограничном слое вблизи свободной поверхности. В этом случае потоки тепла движутся в охлажденную область. При локальном нагреве границы вращение не возникает.

Численные расчеты выделяют два типа решений — основные и вторичные режимы. Основным режимам соответствует течение жидкости без вращения. Вторичные режимы возникают в результате бифуркации основных решений и описывают течение жидкости с вращением в тонком пограничном слое вблизи свободной границы, причем вне пограничного слоя вращение отсутствует. Бифуркационная кривая описывается степенной зависимостью от радиальной координаты. Построена асимптотика вращательных режимов вблизи точки бифуркации. Получено уравнение разветвления, коэффициенты которого найдены численно. Показано, что в результате ветвления возникают два вращательных режима, которые отличаются между собой только направлением вращения.

Моделирование эластотонометрии глаза

Бауэр С. М., Боденкова Е. О.

Санкт-Петербургский государственный университет

s_bauer@mail.ru

Известно, что до сих пор самым точным тонометром, измеряющим внутриглазное давление (ВГД) остается апланационный тонометр Маклакова.

При измерении ВГД этим тонометром используются грузики с плоским основанием, которые опускают на роговицу глаза. Чем больше площадь соприкосновения грузика и роговицы глаза, тем меньше давление внутри глазного яблока. Для эластотонометрии применяют набор тонометров Маклакова весом 5; 7,5; 10 и 15 г. С помощью этих тонометров в порядке возрастания их веса производят измерения ВГД. На основе этих данных строят кривую, которая называется эластокривой. При анализе кривой учитывают её начало, размах, форму и эластоподъем (разность показаний тонометров большего и меньшего веса). В нормальных глазах ее начало не превышает 21 мм рт. ст., размах её равняется в среднем 9,9 мм рт. ст. Форма нормальной кривой близка к прямой линии. Однако в некоторых случаях эластокривая имеет излом, что свидетельствует о патологии глаза. Особое внимание уделяется анализу причин, по которым данные эластотонометрии могут иметь патологию.

В работе рассматриваются математические модели измерения тонометрического давления тонометром Маклакова. В первой аналитической модели корнеосклеральная оболочка глаза представляется как сопряженные сферические сегменты роговицы и склеры. Предполагается, что до нагружения глаз заполнен несжимаемой жидкостью с давлением p_0 . При этом роговица глаза рассматривается как мягкая однородная сферическая оболочка. Т.е. неоднородность материала и жесткость роговицы на изгиб не учитываются, а известно, что роговица реального глаза неоднородна и обладает небольшой жесткостью на изгиб. В связи с этим измерение ВГД тонометром Маклакова моделируется контактными задачами в программном пакете Ansys. Корнеосклеральная оболочка глаза также моделируется сопряженными сферическими сегментами с разными упругими свойствами. Материалы задаются как трансверсально-изотропные, но роговица рассматривается как неоднородная оболочка. Проводится анализ влияния различных параметров роговицы и склеры на тонометрическое давление и поведение эластокривой.

Полученные результаты показывают, что на тонометрическое давление влияют не только параметры роговицы, но и склеры, особенно при грузах тонометра больше 5 г. Изломы эластокривой могут быть связаны с ужесточением склеры, которое может происходить при глаукоме. Также это может происходить из-за патологий роговицы: в случае, когда роговица становится особенно слабой около склеры, например, при краевой эктатической дистрофии роговицы.

Развитие конструкций мембранных предохранительных устройств и методов эксперимента

Беликов Н. В., Какурин А. М., Юдин А. С.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
bel@math.sfedu.ru, yudin@math.sfedu.ru

Предохранительные мембраны предназначены для защиты объектов технологического оборудования (сосудов и трубопроводов) от опасных перегрузок избыточным и (или) вакуумметрическим давлением, создаваемых рабочими средами. Они устанавливаются, в частности, в системах защиты парогенераторов атомных электростанций. Мембраны используются в системах предохранительной трубопроводной арматуры в качестве разрушаемых элементов для сброса массы парогазовой смеси при определенном давлении срабатывания.

Мембранное предохранительное устройство (МПУ) состоит из разрывной предохранительной мембраны и узла её крепления по краевому кольцевому участку в сборе с другими элементами. При разрушении мембрана освобождает необходимое проходное сечение для сообщения защищаемого сосуда (трубопровода) со сбросной системой. МПУ с разрывными мембранами, плоской или куполообразной применяются на жидких и газообразных средах и работают на разрыв под давлением, действующим на ее поверхность. МПУ с хлопающей куполообразной мембраной срабатывают на потерю устойчивости (хлопок) под давлением, действующим на выпуклую поверхность. Теряя устойчивость, мембрана либо разрезается на ножевых лезвиях, либо разрывается по предварительно ослабленному сечению.

Одним из ужесточающих требований для современных конструкций МПУ является обеспечение разрушения без образования осколков. В Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича совместно с Научно-исследовательской и производственно-внедренческой фирмой «Тензор» такая конструкция разработана и запатентована. Безосколочность срабатывания обеспечивается повышением прочности сцепления разрезанных лепестков хлопающей мембраны по линии зажима кольцевой части. Разрезание хлопающей мембраны при её прощелкивании, по крайней мере, на шесть лепестков приводит к уменьшению кривизны участков сцепления лепестков по линии зажима кольцевой части мембраны и, как следствие, к уменьшению напряжений и повышению прочности сцепления. Выполнение режущей кромки ножей пилообразной формы увеличивает давление разрезания хлопающей мембраны на лепестки при её срабатывании.

Дополнительным техническим результатом является также возможность многократного использования зажимных фланцев при замене ножей за счет разборного крепления. Это обеспечивает сохранность и возможность дальнейшего использования части мембранного узла после срабатывания мембраны.

Соответствующие технологии изготовления, прогнозирования давления срабатывания, циклических, температурных и контрольных разрушающих испытаний разработаны на основе применения специальных оснасток и автоматизированного управления компьютерной системой диагностики.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке темы №1879 базовой части №213.01-11/2014-29 госзадания №2014/174.

Интерфейсные изгибные колебания в тонких составных свободно опертых пластинах

Белубекян М. В., Саноян Ю. Г.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван
yuriisanoyan@mail.ru

В работе изучены условия существования и формы интерфейсных колебаний на границе идеального контакта двух тонких свободно опертых на краях изотропных пластин. К настоящему времени изучение локализованных колебаний ограничивалось исследованиями условий их существования в бесконечных, полубесконечных либо неограниченно протяженных в одном направлении пластин.

Поставленная задача была выполнена в рамках теории Кирхгоффа — Лява с помощью решения системы волновых уравнений для каждой части пластины и удовлетворения условиям на краях и на стыке пластин. Решение было получено в таком виде, что позволило с достаточно высокой точностью проводить вычисления дисперсионного уравнения и форм волны в широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров пластины.

Показано, что для описания волновых свойств интерфейсной волны достаточно знания следующих величин: коэффициентов Пуассона для каждой части пластины, отношения изгибных жесткостей частей пластины и отношения плотностей частей пластины. Одно из этих двух отношений можно заменить отношением отношения плотностей к отношению изгибных жесткостей одной части пластины к другой части. Эта безразмерная величина характеризует фактически относительную скорость распространения волны в одной части пластины к скорости распространения в другой части. Форма изгибной волны, в направлении перпендикулярном к ее распространению, состоит из экспоненциально затухающих участков разной амплитуды по каждую сторону от стыка пластин. На стыке пластин амплитуда резко (но не скачком) возрастает или убывает в пределах 10 процентов до амплитуды на соседнем участке.

Исследовано влияние размера удаления кромок от границы раздела пластины на появление интерфейсной волны. В зависимости от отношения изгибных жесткостей, величины относительной скорости распространения волны и независимо от коэффициентов Пуассона можно выделить два вида волн. Если относительные скорости волн в частях одинаковы, то экспоненциально затухающие участки, несмотря на их разные амплитуды, примерно одинаковы. Если относительные скорости волн в частях неодинаковы и отношение изгибных жесткостей не равно единице и их значения лежат в области существования интерфейсных волн то затухание на стороне пластины с большим значением изгибной жесткости больше и, при определенных сочетаниях параметров пластины, может оказаться почти полностью на одной части пластины.

Распространение ПАВ в преднапряженных пьезоэлектрических структурах с неоднородным покрытием

Белянкова Т. И.^{1,2}, Ворович Е. И.³, Тукодова О. М.³

¹*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

²*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

³*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

tbelen415@mail.ru

Рассмотрена модель преднапряженной пьезоэлектрической структуры с неоднородным покрытием. Предполагается, что покрытие представляет собой неоднородный преднапряженный пьезоэлектрический слой из функционально-градиентного материала, физические свойства которого меняются кусочно-непрерывным образом с различной областью локализации неоднородности по глубине. Предполагается, что неоднородная пьезоэлектрическая структура подвержена действию начальных механических напряжений, наводящих в структуре однородное начально деформированное состояние, причем состояние подложки и покрытия могут различаться. Исследования проводятся в лагранжевой (материальной) системе координат. В рамках линеаризованной теории электроупругости рассмотрена задача о распространении поверхностных волн от удаленного источника. Методами операционного исчисления краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Система обыкновенных дифференциальных уравнений 2 порядка с переменными коэффициентами, в свою очередь, сведена к системе начально-краевых задач Коши с матрицей, элементы которой не содержат производных от функций, описывающих свойства материала среды. Для решения начально-краевой задачи использована модификация метода Рунге — Кутты. Предложенная модель позволяет учитывать различную интенсивность и характер изменения упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических свойств материала, сочетать участки с однородным, монотонным и немонотонным изменением свойств, а также воздействие начальных механических напряжений. В качестве основного материала структуры использован пьезоэлектрик гексагональной сингонии с классом симметрии $6mm$.

Исследовано влияние геометрических параметров и физических свойств покрытия, характер, интенсивность и область локализации неоднородности на особенности распространения ПАВ. Рассмотрены случаи «акустически» однородных, в которых скорости объемных волн не изменяются по толщине, и «акустически» неоднородных покрытий. Установлено сочетание геометрических и физических параметров структуры пьезоэлектрического покрытия, приводящее к увеличению скорости ПАВ исходного материала. Показано влияние интенсивности изменения плотности покрытия при различных типах его неоднородности на структуру поверхностного волнового поля. Определены условия, приводящие к появлению вторых и последующих мод поверхностных волн. Детально исследовано влияние интенсивности изменения диэлектрических характеристик покрытия на скорости распространения ПАВ. Исследованы особенности формирования поверхностного волнового поля в среде с учетом различных типов начальных механических воздействий, характера и интенсивности изменения свойств и структуры покрытия.

Роль размерных параметров при решении контактных задач в электромагнитоупругих средах

Белянкова Т. И.¹, Леви М. О.^{1,2}, Лыжов В. А.^{1,2}

¹Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

mlevi@mindonline.ru

Изучается двумерная задача о колебаниях электромагнитоупругой полосы $|x_1| \leq \infty$; $x_3 \leq h_2$ представляющей собой два слоя $0 < x_3 \leq h_1, h_1 < x_3 \leq h_2$ ($n=1,2$) с толщиной $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ соответственно, лежащих на подстилающем полупространстве $x_3 \leq 0$ ($n=3$). Материалы могут иметь класс осевой симметрии 6mm или 2mm. Предполагаем, что выполняются условия распространения плоских волн: $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$, $u_2 = 0$, $u_n = u_n(x_1, x_3)$, $n = 1, 3, 4, 5$. Колебания в полупространстве инициируются осциллирующей нагрузкой $q(x_1, t) = q_0(x_1)e^{-i\omega t}$ распределенной в области $|x_1| \leq a$. ($q = \{q_1, q_3, q_4, q_5\}$, здесь q_1 и q_3 — компоненты механической нагрузки вдоль осей x_1 и x_3 соответственно, q_4 — электрическая нагрузка, q_5 — магнитная нагрузка). Вне области $|x_1| \leq a$ поверхность свободна от механических напряжений. Колебания n — слоя электромагнитоупругой среды в безобменном приближении описывается уравнениями движения и квазистатическими уравнениями Максвелла: $\nabla \cdot T^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}$, $\nabla \cdot D^{(n)} = 0$, $\nabla \cdot B^{(n)} = 0$. Эти уравнения дополняются материальными соотношениями:

$$\begin{bmatrix} T^{(n)} \\ D^{(n)} \\ B^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(n)} & -e^{(n)} & -f^{(n)} \\ e^{T^{(n)}} & \varepsilon^{(n)} & g^{(n)} \\ f^{T^{(n)}} & g^{(n)} & \mu^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S^{(n)} \\ E^{(n)} \\ H^{(n)} \end{bmatrix}$$

где $T^{(n)}$ и $S^{(n)}$ — компоненты тензоров напряжения и деформации второго порядка в упрощенном виде при использовании обозначений Фойгта, $D^{(n)}$ и $B^{(n)}$ — векторы электрической и магнитной индукции, $E^{(n)}$ и $H^{(n)}$ — векторы напряжения электрического и магнитного полей, $c^{(n)}$, $e^{(n)}$, $f^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $g^{(n)}$ — упругие, пьезоэлектрические, пьезомагнитные, диэлектрические, магнитной проницаемости и магнитоэлектрические коэффициенты соответственно.

Построена функция Грина электромагнитоупругой среды. Методами операционного исчисления задача сведена к интегральному уравнению первого рода. Решение интегрального уравнения строится обобщенным методом фиктивного поглощения. Все численные расчеты приведены в безразмерном виде для удобства масштабирования. В качестве исследуемых сред были выбраны слоистые полупространства ВаТiО₃/СоFe₂О₄/MgO и ВаТiО₃/СоFe₂О₄/ВаТiО₃. Потенциал под электродом задан как $\varphi = 1$. Построены графики зависимость динамической емкости от пропорций размеров верхнего слоя ВаТiО₃ ($n = 1$) и среднего слоя СоFe₂О₄ ($n = 2$) для выбранных материалов. Найдено распределение зарядов электрической нагрузки на поверхности электромагнитоупругой среды.

Идентификация механических характеристик неоднородной вязкоупругой пластины

Богачев И. В.¹, Дударев В. В.^{1,2}, Лапина П. А.¹, Недин Р. Д.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ

bogachev89@yandex.ru

Современные материалы, обладающие сильно неоднородными свойствами, такие как функционально-градиентные полимеры, находят применение во многих областях современной науки и производства. При изготовлении таких материалов возникает необходимость в эффективных методах идентификации их свойств, так как при изготовлении таких материалов получившиеся свойства могут значительно отличаться от спроектированных. Также, при моделировании функционально-градиентных полимеров необходимо учитывать эффект затухания и наличие мгновенной и длительной реакций на приложенную нагрузку.

В настоящей работе представлена модель существенно неоднородной вязкоупругой круговой пластины, защемленной по контуру с использованием гипотез Кирхгофа — Лява. Рассмотрены установившиеся колебания пластины, вызванные нагрузкой, сосредоточенной для некоторого значения радиуса. С применением вариационного принципа Гамильтона — Остроградского выведены уравнения колебаний и граничные условия для пластины. Эффект затухания в вязкоупругом материале учитывается с применением модели стандартного вязкоупругого тела на основе теории комплексных модулей. В сформулированной постановке задачи с использованием принципа соответствия функция эффективной жесткости заменена комплексным модулем. Обратная задача заключается в идентификации функций мгновенного и длительного модулей пластины с использованием дополнительной информации о значениях функции прогиба на фиксированном радиусе в некотором частотном диапазоне. Для решения обратной задачи, которая является существенно нелинейной и некорректной, разработан специальный итерационный метод на основе метода линеаризации. Для решения прямых задач, возникающих на каждой итерации применяется метод Галеркина. Для регуляризации при решении систем интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно поправок к восстанавливаемым функциям применялся метод Тихонова.

Проведен набор вычислительных экспериментов по восстановлению монотонных и немонотонных функций мгновенного и длительного модулей, погрешность идентификации в которых не превосходит 6%. Полученные результаты позволяют заключить, что разработанные методы решения обратных задач в обеих постановках достаточно эффективны и могут быть использованы при исследовании обратных задач идентификации неоднородных свойств вязкоупругих пластин.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-31-00144 мол-а, 16-38-60157 мол-а-дк и 16-01-00354 А).

О моделях процессов взаимодействия течения в пограничном слое с трансзвуковым потоком

Богданов А. Н.¹, Диесперов В. Н.²

¹*Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

²*Московский физико-технический институт (государственный университет)*
bogdanov@imec.msu.ru

Исследование течений с большими градиентами параметров (например, вязких отрывных течений) привело к созданию нового класса математических моделей свободного вязко-невязкого взаимодействия — неклассических пограничных слоев, отличительной чертой которых является самоиндуцированность градиента давления. Применительно к конкретным условиям такого рода течений были разработаны аналитические многоярусные (многопалубные) модели. Наибольшее развитие получила трехпалубная модель вязко-невязкого взаимодействия, основные достижения при аналитическом исследовании самоиндуцированных трансзвуковых пограничных слоев получены с использованием этой модели, распространенной на трансзвуковой режим О. С. Рыжовым.

Свободное вязко-невязкое взаимодействие на околосзвуковых скоростях может происходить в различных режимах в зависимости от конкретных значений параметров задачи, а знание границ применимости имеющихся моделей может оказать помощь в выборе адекватной модели для исследования течения.

Специфика трансзвуковых режимов такова, что приводит к известной сингулярности решений линеаризованных уравнений стационарного течения газа при попытке их использования для анализа трансзвуковых течений.

Ранее при исследовании режимов взаимодействия в околосзвуковом диапазоне скоростей, проведенном на трехпалубной модели, при разграничении моделей течения в вязком подслое в качестве условия на его внешней границе использовалась формула Аккерета. Эта зависимость имеет особенность при достижении течением скорости звука, что делает ее неприменимой для моделирования течений со звуковой скоростью и существенно ограничивает ее применимость при анализе околосзвуковых течений. В этой связи было предложено использовать вместо указанной формулы линейную связь возмущения давления от скорости звука, экстраполированную по экспериментальным данным. Заметим, что экспериментальные данные при достижении течением звуковой скорости (и скоростях, достаточно близких к ней) отсутствуют.

В настоящей работе был рассмотрен случай равного влияния в пограничном слое сил вязкости, инерции и индуцирующего возмущения. Определена граница линейных и нелинейных моделей исследуемых процессов. Показаны различия результатов, полученных при использовании для моделирования течения формулы Аккерета и линейной связи возмущения давления и отклонения скорости набегающего потока от скорости звука в качестве граничного условия на внешней границе области вязкого течения. Обсуждается справедливость гипотезы о линейности использованной зависимости и показания к ее возможной модификации. Указаны границы полученных аналитических моделей в ряду известных моделей такого рода течений.

Прохождение продольной волны через тройкопериодическую систему
твердых шаровых включений с возможными отслоениями их
от упругой матрицы

Боев Н. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
bojev@math.rsu.ru

В рамках геометрической теории дифракции (ГТД) разработан алгоритм решения задачи о прохождении плоской упругой продольной волны через тройкопериодическую систему твердых шаровых включений, находящихся в кубе, изготовленном из упругого материала. По частям поверхностей включений задана детерминированная система отслоений от упругой матрицы. С одной из этих граней в куб вводится импульс с тональным заполнением 5–10 периодами плоской высокочастотной, монохроматической продольной упругой волны, а на противоположной грани принимается прошедшая продольная волна. При этом первая грань разбивается на $N \times N$ малых квадратов и плоская продольная упругая волна заменяется набором точечных источников сферических продольных волн, расположенных в центрах малых квадратов. Телесный угол с вершиной в источнике, направленный в сторону препятствий и стягивающийся полусферой делим на $M \times M$ малых телесных углов, в каждом из которых выбирается соответствующий луч распространения продольной волны. Таким образом, проблема сводится к исследованию задачи коротковолновой дифракции упругих волн в локальной постановке. Суммарное поле на грани приема распространяющихся упругих волн складывается из лучей, прошедших через систему шаров, которые могут быть трех типов: 1) лучи, прошедшие через систему препятствий без дифракции; 2) лучи, отразившиеся от системы только один раз; 3) лучи многократно отраженные от системы твердых препятствий. Наиболее сложным является расчет перемещений в многократно отраженных упругих волнах от неплоских препятствий. Многократная дифракция высокочастотной продольной волны исследована в рамках модификации интегрального представления перемещений физической теории дифракции Кирхгофа. Возникающие при этом дифракционные интегралы оцениваются методом многомерной стационарной фазы. Получено аналитическое выражение главного члена асимптотики перемещений в точке приема многократно отраженной продольной волны, которое соответствует ГТД. При этом траектория луча представляет собой пространственную ломаную линию с вершинами в точках зеркального отражения от шаровых препятствий. Таким образом, в локальной постановке задачи для каждого луча расчет перемещений в прошедшей упругой продольной волне на грани приема проходит в два этапа. На первом этапе решается геометрическая задача. Рассчитываются траектории каждого однократно или многократно отраженного луча. На втором этапе на основе полученных явных выражений вычисляются радиальные перемещения в точках приема однократно и многократно отраженных лучей от участков твердой поверхности или поверхностей отслоений. Далее вычисляется суммарное поле перемещений в прошедшей продольной волне.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант №15-19-10008.

Сдвиговые волны в звене волновода меандровой структуры с изломом дугообразной формы

Болнокин В. Е.¹, Пачева М. Н.², Сторожев В. И.²

¹*Институт машиноведения им. А. А. Благоднарова РАН, Москва*

²*Донецкий национальный университет*
stvi@i.ua

Развитие численно-аналитических методологий расчета линий задержки сигналов в акустоэлектронных устройствах связано, в частности, с анализом круга моделей, описывающих распространение упругих волн сдвигового типа по однородному либо составному кусочно-однородному волноводу меандровой (змеевидной) геометрической структуры с различными вариантами геометрической формы участков излома. В этой связи, представляемое исследование посвящено открытым проблемам трансформации волновых сигналов при прохождении участков излома, образуемых двумя параллельно либо ортогонально ориентированными полуслоями, соответственно сопрягаемыми с помощью фрагментов кольцевого цилиндрического слоя с полукруглыми либо четвертькруговыми дугообразными сечениями. Рассматривается численно-аналитическое решение граничной задачи о движении стационарных упругих волн сдвига по геометрически неоднородному слою с участком излома, переориентирующим направление распространения на 180 либо на 90 градусов за счет наличия искривленных фрагментов волновода с сечениями в виде кольцевых секторов полукруглой либо четвертькруговой угловой меры. Решение строится на базе концепции численно-аналитического метода частичных областей и предполагает выделение в продольном сечении волновода подобластей в виде двух полуполос, а также стыкующейся с ними подобласти в форме кольцевого сектора соответствующей угловой меры. Радиальная толщина кольцевого сектора и толщины полуслоев полагаются равными, а радиус кольцевого сектора является произвольной варьируемой величиной. Для характеристик напряженности волновых полей в полубесконечных составляющих продольного сечения вводятся представления рядами с неопределенными коэффициентами по базисным множествам симметричных и антисимметричных нормальных волн сдвига для упругого слоя со свободными либо жестко закрепленными гранями в зависимости от задаваемого типа краевых условий на внешних границах рассматриваемого волновода. Для составляющей в виде фрагмента кольцевого цилиндрического слоя исходные представления волновых полей имеют форму разложений в ряды с неопределенными коэффициентами по базисным множествам нормальных волн сдвига, распространяющихся вдоль окружного направления в сечении протяженного полого цилиндра со свободными либо жестко закрепленными граничными поверхностями. Структура данных представлений предполагает их последующее использование в функциональных краевых условиях на участках идеального механического контакта стыкующихся подобластей и после алгебраизации приводит к системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов введенных разложений. Получены и проанализированы результаты численной реализации предложенной методики при комплексном варьировании параметров волноводных структур рассматриваемого типа и характеристик распространяющихся волн.

Вариационная формулировка обратных задач многоточечного формообразования панелей в режиме ползучести

Бормотин К. С.

*Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет
Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре
ks_x81@mail.ru*

Как известно, технологические решения при формообразовании изделий в режиме ползучести активно используются в процессах изготовления ответственных конструкций в отечественном и зарубежном авиастроении, так как обеспечивают детали более высокий остаточный прочностной ресурс и меньшую поврежденность.

Существующие способы формообразования крупногабаритных плит из высокопрочных сплавов, основанные на многоэтапных процессах формовки и/или штамповке в нескольких штампах, имеют ограничения по прессовому оборудованию, по габаритам и нагрузкам, а также высокой стоимости штампов. В последнее время в качестве перспективного решения этой задачи рассматривается формование изделий из листов и панелей, с помощью реконфигурируемого стержневого пуансона (матрицы), позволяющего изменять форму заготовки. Данное устройство формования включает штыревую оснастку, которая задает формующую поверхность верхней и нижней матрицей. Матрицы образованы двумя системами соосно расположенных стержней. Для каждого стержня задается закон движения с помощью числового программного управления, что позволяет адаптировать оснастку для изготовления деталей различной конфигурации.

Таким образом, для формовки данной технологией с помощью штыревой оснастки необходимо знать закон перемещения каждого стержня, задающий упреждающую форму панели. Упреждающая форма панели должна обеспечивать заданную остаточную кривизну панели после освобождения ее. В связи с этим возникает обратная задача: необходимо определить перемещения стержней, создающих такую упреждающую кривизну панели, которая обеспечивает заданную остаточную форму панели после разгрузки.

Для построения дискретной модели и численного решения данной задачи используются методы теории вариационного исчисления. Обратные задачи формообразования в режиме ползучести на реконфигурируемой штыревой машине формулируются с помощью функционалов прямых и обратных экстремальных квазистатических задач формообразования деталей с учетом контактных условий с оснасткой. На основе вариационных уравнений разрабатывается итерационный метод поиска перемещений стержней матриц формблока, обеспечивающих заданную остаточную кривизну панели. Расчет данных задач проводится методом конечных элементов в системе MSC.Marc, дополненной пользовательскими подпрограммами. На примере формообразования панели двойной кривизны центроплановой части самолета показана сходимость итерационного метода.

Прогнозирование толщины хрящевого трансплантата для реконструкции тимпанальной мембраны с ретракционным карманом

Босяков С. М.¹, Дутина А. А.¹, Майсюк М. М.², Михасев Г. И.¹,
Петрова Л. Г.², Юркевич К. С.¹

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Республиканский научно-практический центр отоларингологии, Минск
bosiakov@bsu.by, mikhasev@bsu.by

Ретракционный карман тимпанальной мембраны является клиническим проявлением ателектатического среднего отита и может привести к стойкой необратимой тугоухости. Одной из профилактических мер по устранению последствий возникновения этой патологии среднего уха является хирургический подход. Он подразумевает установку хрящевого трансплантата в области задневерхнего квадранта *pars tensa* тимпанальной мембраны для увеличения жесткости этой части барабанной перепонки и при этом сохранения ее слуховой функции. Целью исследования является конечно-элементное прогнозирование толщины хрящевого трансплантата при изменении упругих свойств задневерхнего квадранта тимпанальной мембраны для создания акустических условий соответствующих функциям здоровой барабанной перепонки.

Конечно-элементная модель среднего уха разработана с использованием томографических данных. Граничные условия соответствовали жесткой заделке контура тимпанальной мембраны. Модули упругости *pars tensa* (за исключением ее задневерхнего квадранта) и *pars flaccida* составляли 33 МПа и 11 МПа соответственно. Модуль упругости задневерхнего квадранта равен 33 МПа для уха в норме. Для среднего уха в норме и с патологическими изменениями упругих свойств *pars tensa* модуль упругости задневерхнего квадранта принимался равным 22 МПа, 11 МПа, 9 МПа и 3 МПа. Отрицательное давление в барабанной полости, которое приводит к втягиванию тимпанальной мембраны и образованию ретракционного кармана, моделировалось приложением статической равномерно распределенной нормальной нагрузки на внешней стороне барабанной перепонки. Хрящевой трансплантат накладывался на задневерхний квадрант с внутренней стороны тимпанальной мембраны среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств.

Конечно-элементный анализ показал, что за счет установки хрящевого трансплантата на область задневерхнего квадранта тимпанальной мембраны с патологическими изменениями упругих свойств можно добиться совпадения частот свободных колебаний среднего уха с патологией упругих свойств, соответствующей снижению упругих свойств до 9 МПа и 3 МПа, с частотами практически всего диапазона свободных колебаний среднего уха в норме. Оптимальной в этих случаях является толщина хрящевого трансплантата из диапазона от 500 мкм до 550 мкм. В то же время, установка хрящевого трансплантата не обеспечивает полного совпадения частот свободных колебаний среднего уха с патологией, соответствующей снижению упругих свойств до 22 МПа и 11 МПа, и среднего уха в норме. В таких случаях совпадения низких частот и высоких частот (в том числе частот из слухового диапазона) необходимы трансплантаты различной толщины.

Об одном подходе к обработке сигнала в задачах низкочастотной дефектоскопии

Бочарова О. В.¹, Анджинович И. Е.², Седов А. В.¹

¹*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

²*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

olga.v.bocharova@gmail.com

В процессе производства и эксплуатации ответственных частей сложных механизмов, важен постоянный контроль механической надёжности. В настоящее время при производстве инженерных конструкций широко используются современные композитные материалы, многослойные технологии. Скрытые неоднородности, возникающие как при производстве, так и при эксплуатации в условиях высоких нагрузок и вибраций могут привести к непоправимым последствиям. Создание методик оперативной отбраковки в стадии изготовления и своевременной замены уже используемого элемента всегда актуально.

В настоящей работе предлагается метод акустической диагностики внутренних неоднородностей и контроля статических напряжений посредством анализа поверхностной волны, возбужденной ударным воздействием. Создан измерительный комплекс, позволяющий проводить исследования, сопоставлять сигналы и строить спектральные характеристики датчиками различного типа. Методика продемонстрирована в лабораторных условиях на упрощённых моделях сложных конструкций. В моделях имитировались искусственные неоднородности и внутренние напряжения. Анализировался характер изменения поведения поверхностной волны, в зависимости от типа неоднородности.

В качестве модели использовалась алюминиевая балка, установленная на двух опорах через виброизолирующие прокладки. Такое крепление балки позволяло максимально «отвязаться» от влияния посторонних резонансов и акустического фона. Сигнал в исследуемой точке колебания контролировался калиброванным малогабаритным ИСР акселерометром фирмы PCB 352A24. Сигнал с акселерометра нормировался предварительным ИСР усилителем ZETLAB 440. Аналоговый сигнал подавался на вход аналого-цифрового преобразователя L-Card E14-140, обрабатываются на компьютере программой PowerGraph и сохранялся для дальнейшей математической обработки.

Параллельно проводился вычислительный эксперимент, основанный на использовании метода конечных элементов. Для расчета волнового поля на поверхности образца, ослабленного неоднородностью, применялся пакет ANSYS .

Для распознавания наличия неоднородности в образце и определения ее характеристик сигнал обрабатывался при помощи биспектрального метода. Настоящий метод основан на использовании настраиваемого ортонормированного базиса. Особенностью метода является адаптивная настройка базиса, в соответствии с критериями наилучшего распознавания неоднородности. Проведена серия вычислительных экспериментов. Использование предложенного подхода обеспечило достаточную возможность идентификации характеристик неоднородности.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 14-08-01213-а, 16-08-00802-а).

Собственные колебания прямоугольных пластин, взаимодействующих с вязкой жидкостью

Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

bochkarev@icmm.ru, lekomtsev@icmm.ru

Упругие пластины различной конфигурации, являясь элементами разнообразных машиностроительных конструкций, в процессе эксплуатации взаимодействуют с жидкой или газообразной средой, значительным образом влияющей на их динамические характеристики. Колебания таких систем анализируются уже более полувека с применением различных теоретических методов, включая численные. При этом в подавляющем большинстве работ используется модель идеальной жидкой среды, возмущённое движение которой является безвихревым. Между тем известно, что в процессе гидроупругого взаимодействия демпфирующие свойства системы существенно зависят от вязкостных характеристик жидкости. В данной работе представлено решение задачи о пространственных колебаниях одной или нескольких параллельно расположенных прямоугольных упругих пластин, находящихся в контакте с неподвижной вязкой жидкостью. Поведение жидкости описывается линеаризованными уравнениями Навье — Стокса. Соответствующие конечно-элементные соотношения формируются в результате использования метода Бубнова — Галёркина. Деформации пластин определяются с помощью теории на основе гипотез Тимошенко. Для математической постановки задачи динамики упругой конструкции используется вариационный принцип возможных перемещений, учитывающий силы инерции и гидродинамическое давление. Решение задачи сводится к вычислению и анализу комплексных собственных значений связанной системы уравнений и осуществляется с применением процедур ARPACK, в основе которых лежит неявно перезапускаемый метод Арнольди. Достоверность разработанного конечно-элементного алгоритма подтверждена сопоставлением полученных результатов с известными численными и экспериментальными данными.

Основной целью исследования является получение новых закономерностей о динамических характеристиках пластин, взаимодействующих с вязкими жидкостями различного рода. Представлены результаты вычислений собственных частот, форм колебаний и декремента затухания, полученных для одиночных пластин и их массива при различных геометрических размерах, граничных условиях и высоте слоя жидкости. Установлено, что вязкость практически не влияет на частоты колебаний исследуемых конструкций, однако существенно воздействует на декремент затухания. Продемонстрировано, что увеличение высоты слоя жидкости, заключённой между двумя параллельными пластинами, приводит к немонотонной зависимости низшей частоты колебаний с явно выраженным экстремумом. Данная особенность сохраняется при всех рассмотренных вариантах закрепления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-41-590646) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук МК-6167.2015.1.

Численное моделирование тестов на динамическое сжатие и раскалывание квазихрупких гетерогенных материалов

Братов В. А.^{1,2}, Волков Г. А.^{1,2}, Казаринов Н. А.^{2,3}

¹*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

²*Санкт-Петербургский государственный университет*

³*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

vladimir@bratov.com, volkovgrig@mail.ru, nkazarinov@gmail.com

Тесты с использованием разрезных стержней Гопкинсона являются одним из наиболее используемых способов определения динамических прочностных характеристик хрупких материалов. Существующие методики, основанные на классических подходах механики разрушения, не всегда позволяют однозначно трактовать экспериментально полученные данные. Для корректной интерпретации результатов испытаний необходимы новые подходы, учитывающие динамические особенности процесса разрушения при ударных воздействиях. В связи с этим была разработана численная модель хрупкого разрушения, основанная на критерии инкубационного времени, который хорошо зарекомендовал себя для предсказания квазихрупкого разрушения при динамических воздействиях. Основой разработанной модели является метод конечных элементов. Проверка критерия разрушения, а также анализ процесса разрушения осуществляется при помощи внешней управляющей программы. Созданная численная схема была применена для моделирования экспериментов по ударному сжатию образцов на установке с разрезными стержнями Гопкинсона, проведенных в Нижегородском университете группой профессора А. М. Брагова. Основным преимуществом данного численного подхода является отсутствие «подгоночных» параметров. В качестве параметров модели используются только начальные условия эксперимента, прочностные и деформационные константы материала, а также величины, измеряемые в независимых экспериментах. Моделирование ударного сжатия образцов с регулярной дискретизацией выявило, что в этом случае в материале образуются только продольные трещины, которые не препятствуют прохождению сигналов. Поэтому в модель были введены дефекты, распределённые случайным образом по объёму разрушаемого материала. Результаты моделирования показали, что формы прошедшего и отраженного импульсов качественно совпадают с экспериментально наблюдаемыми профилями деформаций в стержнях. Таким образом, для численных расчётов испытаний по ударному сжатию не подходят модели с регулярной и бездефектной структурой.

Данная численная схема может быть рекомендована для предсказания разрушения в тестах по ударному сжатию. Предварительные численные расчёты могут значительно уменьшить количество отладочных испытаний при выполнении экспериментальных исследований новых материалов. Также данная расчётная схема может быть использована для моделирования экспериментов на динамическое раскалывание материалов по схеме «Бразильского теста».

Расчет нестационарного вязко-пластического течения несжимаемой среды Бингама—Ильюшина в плоском конфузоре

Бураго Н. Г.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва

buragong@yandex.ru

Рассматриваются нестационарные течения вязкопластической несжимаемой сплошной среды Бингама-Ильюшина в плоском конфузоре. Кратко рассмотрена история вопроса и обзор состояния исследований. Отмечено, что рассматриваемые задачи до сих пор решались приближенными (численно-) аналитическими методами. Наличие сильных упрощающих предположений в аналитических решениях вызывает споры об их физической адекватности, поэтому получение численных решений на основе полных исходных уравнений, представляет интерес для сравнений с аналитическими решениями с одной стороны и, с другой стороны, для исследования задач со сложной геометрией и разнообразными вариациями исходных формулировок. Возможности такого общего подхода показаны на примерах расчета данных течений с помощью двухслойных схем метода конечных элементов.

Для расчета определяющие соотношения среды Бингама—Ильюшина были модифицированы с тем, чтобы получать решение сквозным счетом и для вязкопластического, и для жесткого состояний среды. Рассматриваемая система уравнений отличается от уравнений Навье—Стокса для несжимаемой среды только выражением коэффициента вязкости, которое больше напоминает выражения для турбулентной вязкости, используемые в моделировании турбулентных течений методом крупных вихрей. Для численного решения исходная система уравнений записывается в виде вариационного уравнения виртуальных работ, в котором условие несжимаемости учитывается методом штрафных функций. Скорости аппроксимируются кусочно-линейными функциями на нерегулярной сетке треугольных конечных элементов. Решение проводится по двухслойной неявной схеме. Конвективные члены аппроксимированы явно с использованием значений скоростей на старом временном слое. Поэтому для устойчивости в уравнения вводятся искусственная вязкость, адаптирующаяся к решению по методу экспоненциальной подгонки А. А. Самарского, и шаг по времени ограничивается условием Куранта. Для монотонизации решения применяется нелинейное покоординатное сглаживание скоростей, состоящее в применении обычного сглаживания только в тех соседних узлах, в которых вторые производные от решения меняют знак. Смена знака вторых производных на ребре сетки служит индикатором наличия нефизических осцилляций решения с длиной полуволны, равной шагу сетки. Такие осцилляции немедленно устраняются. Представленные типовые численные решения качественно согласуются с приближенными аналитическими решениями.

Автор благодарит Л. Д. Акуленко и С. В. Нестерова за приобщение к данной проблеме и ценные консультации. Работа поддержана грантом РФФИ 15-08-02392-а.

Несимметричные деформации упругих цилиндров переменной толщины

Бураго Н. Г.¹, Никитин И. С.^{1,2,3}¹*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва*²*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*³*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

buragong@yandex.ru, i_nikitin@list.ru

Во многих технических устройствах используются элементы конструкций в виде дисков с кольцевыми сечениями переменной толщины по радиальной координате. Иные конструкции содержат трубчатые элементы с кольцевыми сечениями, причем внутренний или внешний контуры кольца не обязательно являются окружностями с постоянным радиусом. Для оценки квазистатической или циклической (усталостной) прочности необходимо определить упругое напряженно-деформированное состояние (НДС) этих элементов при характерных эксплуатационных воздействиях. В настоящее время расчет НДС, как правило, производится с использованием универсальных или специализированных конечно-элементных пакетов программ. В работе задача о квазистатическом напряженно-деформированном состоянии упругих цилиндров переменной толщины под действием внутреннего давления решается более экономно и быстро численно-аналитически. То есть, предлагается метод экспресс-анализа. Для расчета напряжений использованы методы теории возмущений (разложения по малому параметру). Малый параметр характеризует относительное отклонение внутреннего радиуса цилиндра от постоянного значения в зависимости радиуса от окружной координаты. По окружной координате решение представлено рядами Фурье с коэффициентами, зависящими от радиальной координаты. Для коэффициентов Фурье нулевого и первого приближений выведены системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволило уменьшить размерность задачи и свести двумерную задачу теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем была решена аналитическим или численно-аналитическим методом. В качестве примера решена задача о квазистатическом напряженно-деформированном состоянии толстого цилиндра переменной толщины под действием внутреннего давления. Подробно исследован случай, соответствующий многим прикладным задачам, когда отличным от окружности является только внутренний контур поперечного сечения цилиндра, а внешний контур является окружностью. По рассчитанным напряжениям и пределам мгновенной и усталостной прочности материала, выполнены оценки допустимого безопасного уровня внутреннего давления. Для циклического нагружения получены оценки пространственного распределения времени до разрушения и расположение зон возникновения усталостного разрушения. Предложенный метод позволяет делать это численно-аналитически по фиксированному набору формул.

Работа поддержана грантом РФФИ 15-08-02392-а.

Экспериментальная методика определения технологических искажений в телах сложной формы, создаваемых методом стереолитографии

Бычков П. С., Сайфутдинов Ю. Н.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

bychkov@ipmnet.ru

В работе развивается экспериментальная методика определения технологических искажений изделий, получаемых методом стереолитографической 3D печати. Стереолитографический процесс представляет собой последовательность циклов нанесения тонких слоев жидкого полимера и его отверждения под действием ультрафиолетового излучения, причем технология изготовления предполагает дополимеризацию уже принявшего окончательную форму изделия. 3D стереолитография теоретически позволяет изготавливать детали сколь угодно сложной геометрической формы, однако техническая реализация этого процесса сопряжена с технологическими проблемами, существенно снижающими качество, точность и повторяемость изделий. Одна из таких проблем — искажения финальной формы, вызванные усадкой при солидификации материала. При изготовлении тонкостенных деталей эти искажения могут существенно превосходить заданную точность. Один из способов уменьшения искажений — их компенсация начальными искажениями, учитываемыми в проекте. Образно говоря, для изготовления геометрически правильного тела, например, куба, следует передать в технологическую машину цифровую модель тела сложной формы, такую, что её отличия от куба компенсировались бы искажениями, возникающими при солидификации в ходе процесса. Компенсирующие искажения могут быть определены из решения обратной задачи механики растущих тел, но для формулировки этой задачи необходимо иметь экспериментальные данные о характере искажений слоистой структуры, получаемой в ходе технологического процесса. В статье предлагается соответствующая экспериментальная методика.

Определение поля перемещений осуществляется методом голографической интерферометрии. Измерения проводятся в ходе процесса финальной полимеризации. Используется схема Лейта — Упатниекса в режиме реального времени, что позволяет получить динамическую картину для полос вторичной интерференции и по ним восстановить процесс эволюции искажений границы тела.

В качестве изучаемых объектов использовались сплошной куб (простое трехмерное тело), полый куб с тонкими стенками (тонкостенный объект) и пятая итерация фрактального тела — губка Менгера (объект сложной формы). Эти объекты изготавливались на 3D принтере из фотополимера с акриловой основой. После послойного нанесения и первичной солидификации полимера созданные объекты закреплялись на виброизолированном оптическом столе на шероховатой поверхности, запрещающую перемещение нижней части границы, после чего производилась экспозиция, фиксирующая отчетную конфигурацию. Далее воспроизводился технологический процесс финальной полимеризации (воздействие ультрафиолетового излучения) и на CCD камеру фиксировалась эволюция полос вторичной интерференции, характеризующей эволюцию искажений поверхности тела.

Работа выполнена при поддержке РФФИ №14-19-01280 и ОЭММПУ-12.

Восстановление межатомного потенциала биомолекул методом динамической силовой спектроскопии

Бычков А. А., Карпинский Д. Н., Роменская Е. С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

karp@math.rsu.ru

Разрыв межатомной (химической) связи под действием механической нагрузки является элементарным актом процесса разрушения твердого тела. Основные положения этого явления создали Н. Eyring, С.Н. Журков. Особенности процесса деформирования и разрушения нагруженных твердых тел часто изучают на цепных биомолекулах, которые состоят из идентичных сегментов (сегменты Kuhn'a). При таком выборе объекта исследования эксперимент удается выполнить с отдельной химической связью, нагруженной внешней растягивающей силой. В последние десятилетия эти исследования успешно выполняют с помощью атомно-силового микроскопа (АСМ). На опыте удается прикрепить один конец цепной молекулы к вершине зонда АСМ, а другой — к поверхности подложки. Существуют три этапа деформирования цепных молекул при растяжении: 1) энтропийная упругость, 2) скелетная (backbone) упругость и 3) конформационные изменения в молекулах. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением первого этапа деформирования полимерной цепи.

Энтропийная упругость определяется гибкостью биомолекул и доминирует при малых растягивающих усилиях, приложенных к концам цепной молекулы. Если биомолекула достаточно гибкая, то энтропийная упругость правильно описывается моделью свободно соединенных цепей (freely jointed chain, FJC). Однако, некоторые цепные молекулы биомолекул обладают жесткими связями между сегментами Kuhn'a (например, молекулы DNA). Эти полимерные молекулы описываются worm-like chain (WLC) моделью. Обе модели позволяют вычислить соотношение сила — удлинение для цепной молекулы в указанных случаях. До последнего времени экспериментальные исследования деформирования полимерных и биомолекул выполнялись в режиме монотонного увеличения расстояния между вершиной и подложкой.

В настоящей работе проверена возможность восстановления силы взаимодействия между вершиной зонда АСМ и подложкой, связанных полимерной цепью методом динамической силовой спектроскопии. На первом этапе моделирования решалась прямая задача: найти зависимости амплитуды и фазы колебаний зонда от минимального расстояния вершины зонда до подложки при заданных законах деформирования полимерной цепи. Компьютерное моделирование первого этапа выполнено с помощью программы (dForce). На втором этапе моделирования решалась обратная задача: восстановить законы деформирования цепной молекулы по полученным на первом этапе результатам.

Предполагалось, что модельная микроконсоль АСМ описывается простым точечным осциллятором, возбуждаемым при частоте вблизи резонансной частоты. Полученные результаты расчета указывают на эффективность предложенного метода реконструкции закона деформирования биомолекулы.

Об одном способе решения пространственных задач теории упругости

Вайсфельд Н. Д., Плюснов Д. С., Реут В. В.

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

vaysfeld@onu.edu.ua, reut@onu.edu.ua

Рассматривается упругое полупространство $-\infty < x, y < +\infty; z \geq 0$, находящееся под действием нагрузки $P(x, y)$, приложенной к его поверхности $z = 0$. Задача состоит в отыскании смещений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и краевым условиям, выполненным на поверхности полупространства:

$$\Delta u + \mu_0 \theta' = 0,$$

$$\Delta v + \mu_0 \theta^* = 0,$$

$$\Delta w + \mu_0 \theta' = 0,$$

$u = u_x(x, y, z)$, $v = u_y(x, y, z)$, $w = u_z(x, y, z)$ — смещения среды, $\theta = u' + v^* + w$ — объемное расширение, $\mu_0 = (1 + 2\mu)^{-1}$, G — модуль сдвига, μ — коэффициент Пуассона, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, штрих, звездочка и запятая в верхнем индексе обозначают производные по первой, второй и третьей переменным соответственно.

В работе используется подход, предложенный Г. Я. Поповым, который базируется на построении пространственной «матрицы влияния», компоненты которой — смещения в точке полупространства (x, y, z) от сосредоточенной нагрузки, приложенной в некоторой точке его поверхности $(\xi, \eta, 0)$. С целью построения указанной матрицы предлагается отыскать две плоские матрицы влияния (компоненты плоских матриц влияния — это смещения в точке плоскости (x, z) от сосредоточенной нагрузки, приложенной в точке $(s, 0)$) и решить антиплоскую задачу теории упругости.

Для отыскания матриц влияния плоских задач к сформулированным краевым задачам (непосредственно к уравнениям равновесия) применяются интегральные преобразования, что приводит в пространстве трансформант к одномерным краевым задачам, содержащим дифференциальный оператор второго порядка. Эти краевые задачи переформулированы в виде одномерных векторных краевых задач. Для их решения предложен подход, разработанный в работах Г. Я. Попова, который использует аппарат матричного дифференциального исчисления. Решения задач построены в явном виде. Учитывая формулы, связывающие компоненты плоских, антиплоской и пространственной матриц влияния, выписано решение поставленной задачи.

Проведено сравнение частного случая полученного решения с известным решением задачи Буссинеска для полупространства.

Испарение вращательно-симметричной капли

Васильев А. В.¹, Жуков М. Ю.^{1,2}, Ширяева Е. В.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ

shir@math.sfedu.ru

При помощи процедуры пространственного осреднения построены различные модели, описывающие поведение испаряющейся капли, расположенной на плоскости. В основе всех моделей лежат только два ключевых предположения — поток массы с поверхности при испарении пропорционален подводимому к ней потоку тепла, свободная граница является квазиравновесной границей раздела фаз жидкость — пар.

Одна из простейших бездиссипативных пространственно-двумерных моделей представляет собой систему уравнений

$$\begin{aligned} h_t + \operatorname{div}(h^2 \mathbf{s}) &= -V_0 \varphi, \quad \nabla(h - \sigma \Delta h)|_{t=0} = 0, \\ \mathbf{s}_t + (\beta_r - 1)h \mathbf{s} \operatorname{div} \mathbf{s} + (\beta_r + 1)h \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{s} &= 0, \\ \varphi_t + (\beta_r - 1)h \varphi \operatorname{div} \mathbf{s} + (\beta_r + 1)h \mathbf{s} \cdot \nabla \varphi &= 0, \end{aligned}$$

где h — высота свободной поверхности, s , φ — средняя скорость и температура, V_0 — скорость испарения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\beta_r = 1/3$.

Предположения о вращательной симметрии и стационарности функций s , φ :

$$\mathbf{s} = (s_0 r, 0), \quad \varphi = \varphi_0 r, \quad h = h(r, t) \quad (s_0 > 0),$$

позволяют существенно упростить уравнения, описывая лишь поведение свободной поверхности

$$\eta_\tau + \eta \eta_r = -v_0 r^2, \quad \eta(r, t) = r h(r, t), \quad \tau = 2s_0 t, \quad v_0 = V_0 \varphi_0 / (2s_0) > 0.$$

Анализ различных решений исходной задачи показал, что высыхание капли происходит наиболее интенсивно в области пересечения свободной границы капли с поверхностью.

В реальных экспериментах с каплями, содержащими примесь (например, капля крови), именно в окрестности пересечения границ происходит возникновение пространственно-временных структур, позволяющих идентифицировать некоторые патологии биологически активных жидкостей (клиновидная дегидратация). Для того чтобы описать подобный процесс требуется привлечение дополнительного механизма, описывающего процесс высыхания. Например, сорбционный механизм, сходный с хроматографией — методом разделение многокомпонентных смесей на отдельные компоненты.

Учет диссипативных эффектов — вязкости, теплопроводности, диффузии позволяет описать неустойчивости фронта высыхания капли, аналогичные неустойчивостям Малленза — Секерки.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

О реконструкции параметров закрепления неоднородной вязкоупругой балки

Васильев Л. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

leninid@mail.ru

Задачи об определении характеристик твердых тел по дополнительным данным об амплитудах смещений в последние годы все чаще привлекает внимание исследователей. Среди этого класса задач одним из наиболее изученных является класс граничных обратных задач по реконструкции граничных условий или параметров, входящих в граничные условия (ряд задач реконструкции параметров в граничных условиях для упругих балок были изучены ранее). Ранее было установлено, что для балки с постоянной жесткостью можно выписать решение в явном виде, например через функции Крылова, соответственно составить частотное уравнение в явном виде и далее на основе анализа аналитических зависимостей определять искомые параметры. При этом априорная информация о порядке этих параметров позволяет использовать асимптотические методы для реконструкции. В случае переменной жесткости балки построить явное решение при произвольных законах неоднородности невозможно, однако можно реализовать построение численного решения с любой степенью точности расчетов. В настоящей работе представлен метод восстановления параметров закрепления вязкоупругого стержня с переменной жесткостью, жестко закрепленного на левом конце и имеющего вязкоупругие связи на другом конце при известных (измеренных) смещениях, заданных в двух точках. Применен принцип соответствия для составления дифференциального уравнения собственных колебаний на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Представлен способ сведения задачи к каноническому виду. Составлены вспомогательные задачи Коши для численного решения как прямой, так и обратной задачи методом пристрелки. Искомые параметры вязкоупругости содержатся только в граничных условиях. Оценено влияние этих параметров на амплитуду смещения. Представлены два метода восстановления неизвестных параметров вязкоупругости опоры. Один метод реализуется на основе проведения анализа точек пересечения гиперболических функций от параметров вязкоупругости. Другой способ сводится к анализу линейных зависимостей от искомым параметров. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению 4 параметров податливости опоры для разных функций неоднородности балки, при условии равенства средних. Показана ограниченная применимость первого подхода вследствие возникновения множества фантомных решений. Анализ второго подхода дал нужный результат с достаточной точностью восстановления параметров. Проведено зашумление входных данных, показана возможность применения представленного способа.

Осциллирующий источник, движущийся по поверхности полуограниченного упругого тела

**Васильченко А. А.¹, Лапина О. Н.¹, Никитин Ю. Г.¹,
Сыромятников П. В.²**

¹*Кубанский государственный университет, Краснодар*

²*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

syromyatnikov_pv@mail.ru

Исследованию волновых полей, вызванных источниками нагрузок, движущихся по поверхности упругого полуограниченного тела, посвящено значительное количество исследований. Во многих случаях к задачам подобного рода применимы те же методы, что и для динамических задач теории упругости с неподвижным источником, но они имеют и свою определенную специфику, порождающую необходимость в модификациях имеющихся методов и разработке новых. В данной работе исследуются возмущения на поверхности изотропного слоя и полупространства, вызванные осциллирующими источниками различной конфигурации (сосредоточенный источник, равномерно распределенная в прямоугольной области вертикальная или горизонтальная нагрузка), перемещающимися с постоянной скоростью в фиксированном направлении поверхности. Рассматриваются плоская и пространственная несмешанные задачи для слоя и полупространства в системе координат, связанной с подвижным источником. Задача решается с помощью интегральных преобразований Фурье и двух методов численного интегрирования — приближенным методом интегрирования по прямолинейному контуру и теоретически точным методом интегрирования вычетов. Метод интегрирования по прямолинейному контуру, благодаря своей простоте, можно считать инженерным, хотя он вполне может использоваться для исследовательских целей. Метод интегрирования вычетов технически сложнее и применяется только в качестве контроля. Специфика задач с подвижным источником заключается в сложной структуре полярных множеств элементов символа матрицы Грина, существенно зависящей от скорости движения. В зависимости от скорости может меняться тип определяющих уравнений и соответственно типу изменяться свойства решений. Метод прямого контурного интегрирования может быть без дополнительных модификаций применен к многослойным изотропным и анизотропным материалам в качестве упругой подложки. Численно рассчитаны модельные поверхностные плоские и пространственные возмущения упругого изотропного слоя и полупространства, вызываемые подвижным поверхностным гармоническим источником в диапазоне скоростей от нуля до скорости продольной волны (и несколько выше) в широком диапазоне частот. Получены зависимости амплитуды плоских и пространственных поверхностных возмущений слоя от скорости, частоты и геометрических свойств источника.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края 16-48-230336 р_а.

О колебаниях неоднородных пьезокерамических тел

Ватульян А. О.^{1,2}, Кондратьев В. С.¹¹*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*²*Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ*

vatylyan@math.rsu.ru, kondratev.vs@yandex.ru

В настоящее время теория пьезоэлектриков интенсивно развивается в различных направлениях — учет пористости, затухания, предварительных напряжений. На основе модели неоднородной электроупругости возможна оптимизация свойств конструктивного элемента на стадии изготовления, причем в приложениях активно используются пьезоэлементы с неоднородной поляризацией. Отметим, что неоднородность физических свойств пьезоматериалов возникает как на стадии их изготовления и продиктована некоторыми целевыми функциями, так и на стадии эксплуатации в широком диапазоне изменения температуры, в результате чего может происходить частичная располяризация. Задачи о колебаниях пьезоэлементов с неоднородными свойствами требуют как совершенствования методов расчета амплитудно-частотных характеристик, так и определения функций, описывающих законы изменения их характеристик. Наиболее эффективным средством анализа прямых задач является использование КЭ-технологий, однако необходимы модельные примеры, позволяющие оценивать точность КЭ-расчетов. В настоящем исследовании представлен подход, позволяющий изучать радиальные колебания широко распространенных цилиндрических структур, в качестве примера изучена задача о радиальных колебаниях кругового пьезокерамического цилиндра, причем физические характеристики являются функциями радиальной координаты.

На базе модели линейной электроупругости построена каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных радиального смещения и радиального напряжения, краевая задача для которой далее решалась численно на основе метода пристрелки. Составлена программа, позволяющая определять резонансные значения и собственные формы радиальных колебаний для неоднородного пьезокерамического цилиндра независимо от характера неоднородности (непрерывные и разрывные законы); осуществлено тестирование в случае постоянных характеристик, который допускает аналитическое решение. Проанализирована зависимость резонансных частот и собственных форм колебаний от законов изменения физических характеристик материала — полиномиальных и кусочно-линейных.

На основе представленной модели построено решение обратной коэффициентной задачи о реконструкции законов неоднородности на основе информации о значениях безразмерных функций радиального смещения и радиального напряжения в некотором наборе точек, причем для нахождения производных использованы кубические сплайны. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению двух неизвестных функций, характеризующих законы неоднородности. Исследования показали достаточную степень точности реконструкции всюду, кроме областей, близких к началу координат.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00354).

О некоторых контактных задачах для неоднородных упругих тел

Ватульян А. О.^{1,2}, Плотников Д. К.¹¹*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*²*Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ*

vatulyan@math.rsu.ru, dplotnikov@sfnedu.ru

Рассмотрен ряд контактных задач теории упругости для неоднородных тел. Первый класс задач посвящен упрощению задачи о контакте двух упругих неоднородных тел. Задачи такого плана важны с точки зрения приложения в области индентирования различных материалов, в том числе и биологических тканей. В такой постановке упругие свойства одного из тел известны, упругие свойства второго тела необходимо определить на основе данных о контактном взаимодействии (размеры площадки контакта, глубина внедрения). В работе на основе вариационного подхода получена приближенная постановка такой задачи. Представлено сведение задачи о контакте двух неоднородных упругих тел к контактной задаче со специальными граничными условиями в области контакта, в которую входит два коэффициента податливости. На основе такой трактовки обсуждены приложения к проблеме идентификации коэффициентов упругой податливости на основе анализа коэффициентной обратной задачи для дифференциального оператора второго порядка с переменными коэффициентами, описывающего смещения вне зоны контакта. Представлен способ определения коэффициентов этого оператора (коэффициенты упругой податливости) на основе решения задачи Коши для дифференциального оператора первого порядка. Второй класс задач посвящен развитию методов решения контактных задач для неоднородных по глубине упругих оснований. Основной сложностью при исследовании таких задач является то обстоятельство, что дифференциальные операторы, описывающие равновесие имеют переменные коэффициенты и требуются специальные математические средства на этапе формулировки интегрального уравнения. Представлены два подхода к построению интегрального уравнения относительно контактного давления в задаче для неоднородного слоя. Оба подхода основаны на исследовании преобразованной по Фурье канонической системы дифференциальных уравнений для двух (антиплоский случай) или четырех функций (плоский случай). Первый подход основан на асимптотическом анализе краевой задачи при малых и больших значениях параметра преобразования, который может быть осуществлен на основе некоторой рекуррентной процедуры для произвольных законов неоднородности и построении ашпроксимаций. Второй базируется на методе Галеркина, который позволяет построить символ ядра интегрального оператора в виде дробно-рациональной функции, параметры которой выражаются в виде некоторых квадратур от законов неоднородности. Построены приближенные решения задач о стрингере и штампе, построена зависимость силы от внедрения, обсуждено влияние законов неоднородности основания на эту зависимость. Представлены результаты вычислительных экспериментов для различных законов неоднородности.

Асимптотическое приближение для цилиндрической поверхностной волны в упругом полупространстве со смешанными граничными условиями на поверхности

Вильде М. В.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

mv_wilde@mail.ru

Цилиндрическая поверхностная волна является обобщением волны Рэлея на трехмерный случай. Трехмерные уравнения теории упругости записываются в цилиндрической системе координат, что позволяет получить решение для волны с цилиндрическим фронтом. В случае, когда на поверхности ставятся условия свободного края, решение, описывающее цилиндрическую поверхностную волну, записывается через цилиндрические функции. С помощью асимптотик при больших значениях аргумента можно ввести понятие скорости волны, аналогичное фазовой скорости в случае плоских волн, и показать, что эта скорость совпадает со скоростью волны Рэлея. Если трехмерные уравнения теории упругости записываются в декартовой системе координат, то нетривиальное решение, описывающее поверхностную волну, существует не только в случае свободного края, но и в случае, когда на поверхности запрещено перемещение в одном из тангенциальных направлений. Скорость волны в последнем случае определяется уравнением

$$(2 - c^2)(2 \sin^2 \alpha - c^2) + c^2 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \sqrt{1 - \kappa^2 c^2} \sqrt{1 - c^2} = 0, \quad (1)$$

где α — угол между направлением распространения волны и направлением запрещенного перемещения, $\kappa = \sqrt{(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)}$.

В данной работе рассматривается цилиндрическая поверхностная волна в упругом полупространстве, на поверхности которого ставятся граничные условия вида

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad u_r = 0. \quad (2)$$

Попытка построить нетривиальное решение в бесселевых функциях по аналогии со случаем свободной поверхности приводит к переопределенной системе для констант. Это объясняется тем, что в случае смешанных условий на поверхности скорость волны зависит от угла распространения, который в цилиндрической волне зависит от радиальной координаты r . Таким образом, требуется построить решение для волны с переменной скоростью, закон изменения которой заранее не известен. Для построения приближенного решения, описывающего такую волну, предложен способ построения коротковолновой асимптотики, основанный на идее метода ВКБ. В результате получено приближенное дисперсионное уравнение, которое можно разрешить аналитически. Анализ решения показывает, что скорость цилиндрической поверхностной волны в данном случае стремится к скорости волны сдвига при $r \rightarrow \infty$ и к скорости волны Рэлея, когда значение r приближается к точке поворота. Для подтверждения выводов асимптотического анализа представлены результаты численных расчетов частот и форм краевых колебаний полого цилиндра, связанных с данной волной.

Асимптотический анализ влияния вязкоупругих свойств материала
на дисперсию гармонических волн в сплошном цилиндре

Вильде М. В., Сергеева Н. В.

*Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского*
knickknack@bk.ru

Рассматривается распространение гармонических волн в бесконечном сплошном круговом цилиндре. Динамическое напряженно-деформированное состояние цилиндра описывается уравнениями движения в напряжениях и перемещениях, записанными в цилиндрической системе координат и уравнениями состояния, взятыми в интегральной операторной форме.

Интегральные операторы определены формулами

$$\tilde{E} = E(1 - \Gamma^*), \quad \tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2}\Gamma^*, \quad \Gamma^* f(t) = k \int_{-\infty}^t \Theta_\alpha(-\beta, t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

где E, ν — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, α, k, β — параметры материала.

В качестве ядра интегрального оператора используется дробно-экспоненциальная функция Работнова

$$\Theta_\alpha(-\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))},$$

где $\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} \exp(-y) dy$ — гамма-функция.

На поверхности цилиндра ставятся условия отсутствия напряжений. Для осесимметричной задачи выведены дисперсионные уравнения для задач растяжения-сжатия и кручения. Получены асимптотики корней дисперсионных уравнений для малых и больших значений частот. Изучается влияние параметра α на поведение дисперсионных кривых. Рассматриваются два случая: $\alpha = 0$, соответствующий модели стандартного вязкоупругого тела, и $\alpha = -\frac{1}{2}$, соответствующий наследственно-упругой модели. Сравнительный анализ асимптотик показывает, что действительная часть для больших значений частот при различных значениях α имеет порядок $O(\omega)$, а мнимая часть имеет порядок $O(\omega^{-\alpha})$. Таким образом, для модели стандартного вязкоупругого тела поведение мнимой части волновой постоянной с ростом ω качественно отличается от модели наследственно-упругого тела: в первом случае мнимая часть практически не зависит от частоты, а во втором — растет пропорционально $\sqrt{\omega}$. В поведении действительной части также имеются различия: разность между значениями волнового числа для вязкоупругого и для упругого волновода в случае стандартного вязкоупругого тела имеет порядок ω^{-1} , а в случае наследственно-упругого тела — $\sqrt{\omega}$. При $\omega \rightarrow 0$ между двумя моделями нет существенных различий. В окрестности частот замирания упругого волновода дисперсионные кривые для случая наследственно-упругого тела характеризуются более значительным отклонением от упругого случая, чем дисперсионные кривые для модели стандартного вязкоупругого тела. Полученные результаты могут быть использованы для выбора модели вязкоупругого тела, наиболее подходящей для описания экспериментальных данных.

Особенности динамического прочностного расчета анизотропных термоупругих областей

Вовк Л. П., Кисель Е. С.

Автомобильно-дорожный институт Донецкого ГТУ, Донецк
lv777@list.ru, e.s.kisel@gmail.com

В данной работе проведено численное исследование зависимости краевых и граничных динамических эффектов от геометрических и термоупругих параметров, определяющих характеристики исследуемой области; исследование особенностей распределения термоупругих напряжений в зонах динамических эффектов на примере анизотропного термоупругого сечения детали сложной формы. В течение времени из-за перераспределения и релаксации внутренних остаточных напряжений, вызванных технологическими процессами при изготовлении (литья, сварки, механической обработки и др.), теряется стабильность геометрических и механических параметров деталей. Очевидно, надёжность работы таких изделий может быть снижена, что может привести к полному отказу работоспособности или к аварийной ситуации. Поэтому актуальным остается вопрос о расширении производственных технологических возможностей, направленных на внедрение новых технологий, при сохранении стоимости изделия в целом. Особые параметры металлической детали, в частности, наличие дефектов, особых областей геометрии, т. е. зон существенного изменения некоторых ее физико-механических характеристик, могут провоцировать аномальное изменение поля температурных и механических напряжений. Анализ публикаций позволяет заметить, что к настоящему времени разработан значительный математический аппарат, предназначенный для решения связанных задач термоупругости. Полученные в этих работах результаты позволяют исследовать влияние температурных параметров на локальную концентрацию напряжений в сингулярных зонах сечений, чаще всего, канонических областей. Наиболее распространенной и доступной для исследования, среди такого рода форм сечений, является прямоугольная область. С помощью процедуры совместного решения, было проведено объединение таких сложных задач теплообмена и расчета на прочность, как нестационарный тепловой и нелинейный динамический анализы. В предлагаемой работе авторами были проведены расчеты с использованием программного комплекса ANSYS первым способом, т. е. проведение связанного термоупругого расчета последовательным способом. Выводы, сформулированные в работе, могут быть обобщены на случаи неоднородных областей иной конфигурации с сингулярностью в угловых точках. Из чего следует, что предложенные методы могут найти свое применение при проведении прочностных расчетов динамического НДС элементов конструкций и деталей машиностроения со сложными физико-механическими свойствами.

Математическое моделирование потоков воздуха вокруг трехмерного элемента, имитирующего одиночный дом

Волик М. В.

*Финансовый университет при Правительстве РФ, Владикавказ
Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ
volikmv@mail.ru*

В работе представлены результаты расчетов, которые проводились с использованием свободно распространяемого пакета OpenFoam при поддержке программы «Университетский кластер» (<http://www.unicluster.ru>) и удаленного доступа к консоли на управляющем узле вычислительного кластера JSCC RAS Cluster Console, <https://unihub.ru/resources/js3console> Web-лаборатории Unihub (UniHUB.ru).

Исследовалась картина течения воздуха вокруг элемента городской застройки в форме куба, имитирующего одиночный дом. Размеры составили $20\text{ м} \times 20\text{ м} \times 20\text{ м}$. Расстояние от входной границы до препятствия выбиралось равным десяти его высотам, расстояние от препятствия до выходной границы — двадцати высотам, расстояние от нижней границы расчетной области до верхней — пяти высотам, расстояние от препятствия до боковых границ — двум высотам. На входе в расчетную область скорость потока воздуха принималась равной 1 м/с .

Вычислительный эксперимент проводился для интервала времени от 0 до 30 с (с шагом 0.001 с) с использованием стандартного решателя rimpleFoam, K-эпсилон модели турбулентности и пристеночных функций в соответствующих граничных условиях. Получено, что поток воздуха, обтекает препятствие сверху и затягивается в область за ним. На подветренной стороне дома образуются два симметричных вихря по обе стороны от середины дома вдоль основного потока. Сбоку от дома образуется небольшой вихрь, который прижимается основным потоком к боковым стенкам дома.

Результаты расчетов показали, что воздух в симметричных вихрях у нижней границы расчетной области перемещается по часовой стрелке и скорость течения значительно выше, чем в следе по центру препятствия. С увеличением расстояния от нижней границы расчетной области к крыше дома скорость движения воздуха в вихрях увеличивается. И лишь на высоте 15 м картина течения качественно изменяется: наблюдается перенос воздуха основным потоком в сторону выходной границы. Кроме того, получено, что результаты расчетов на расстоянии 5 м и 15 м от переднего края дома вдоль него (поперек течения) совпадают. На расстоянии 5 м от подветренной стороны дома скорость воздуха ниже, чем на расстоянии 10 м . Затем, по мере увеличения расстояния от дома вдоль потока, скорость потока воздуха снижается. Кроме того, на уровне крыши дома скорость больше, чем вблизи нижней границы расчетной области. Это может привести к быстрому переносу газообразных загрязняющих веществ на уровне крыши дома и, наоборот, накоплению в области вихревой структуры у нижней части на подветренной стороне дома.

Статистический анализ взаимосвязи уровня аберраций
высших порядков и сферического компонента рефракции

Воронкова Е. Б.¹, Еременко А. А.¹, Качанов А. Б.², Корников В. В.¹

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²Филиал МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С. Н. Федорова,
Санкт-Петербург
vkornikov@mail.ru

Острота зрения человека в первую очередь зависит от трех факторов: разрешающей способности сетчатки, дифракции света в области зрачка и от погрешностей оптической системы глаза — так называемых аберраций. Аберрации возникают вследствие искажения световых лучей при прохождении через функциональные структуры глаза (слезную пленку, роговицу, хрусталик и т. п.) и делятся на хроматические и геометрические (монохроматические). Среди последних различают аберрации низших порядков (близорукость, дальнозоркость и астигматизм) и высших порядков. Аберрации высших порядков (PV OPD HO) составляют 15 % от общего числа аберраций, они ухудшают зрение и проявляются как нечеткость изображения, блики вокруг источников света, двоение. К ним относят астигматизм косых пучков, кривизну поля, дистрофию, нерегулярные аберрации. Наибольший интерес представляют: сферическая аберрация, кома, дисторсия.

В данной работе проводится исследование зависимости между сферическим показателем глаза S и аберрациями высших порядков PV OPD HO. Данные по 385 глазам были получены из Санкт-Петербургского филиала ФГБУ МНТК «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова. Для каждого из глаз определялись следующие показатели: S — сферический компонент рефракции глаза, PVD OPD — уровень тотальных, то есть всех аберраций, PVD OPD HO — уровень аберраций высших порядков, коэффициенты разложения полиномов Цернике третьего и четвертого порядков, характеризующие величину аберрации. По сферическому показателю все глаза были разделены на семь групп (в зависимости от степени миопии или гиперметропии).

Проводилось сравнение групп по показателю PV OPD HO. Так как величина аберраций высших порядков не подчиняется нормальному распределению, для сравнения групп были использованы непараметрические критерии. Во всех рассматриваемых группах, за исключением последней, с помощью рангового коэффициента корреляции Спирмена, была выявлена статистически значимая, слабая обратная зависимость между S и PV OPD HO. В следующих группах при попарном сравнении не было выявлено статистически значимых различий: 1) группы глаз с миопией слабой, средней и высшей степени; 2) группы глаз с эметропией, гиперметропией слабой, средней и высшей степени. С целью выявления нелинейной зависимости между сферическим компонентом рефракции и уровнем аберраций высших порядков был проведен регрессионный анализ для следующих блоков групп: 1) глаза с миопией слабой, средней и высшей степени; 2) глаза с гиперметропией слабой, средней и высшей степени.

Проведенные исследования показали, что аберрации высших порядков присутствуют глазам и с эметропией, и с аметропиями, но несколько возрастают при средней и высшей степени миопии.

Моделирование распространения бегущих волн в структурах с локальными неоднородностями на основе гибридной численно-аналитической схемы

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А.

Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар
evdokimovmail27@gmail.com

Дифракция электромагнитных, акустических или упругих волн на локально неоднородных областях является классической вычислительной задачей, актуальность разработки эффективных методов решения которой только растет ввиду все увеличивающегося числа практически важных приложений в приборостроении, акустоэлектронике, геофизике, гидроакустике, медицинской томографии и электронной микроскопии. Однако прямое конечно-элементное или конечно-разностное (МКЭ/МКР) моделирование процессов распространения и дифракции бегущих волн в структурах с локальными неоднородностями сопряжено с большими вычислительными затратами, связанными с необходимостью сеточной аппроксимации протяженных областей, а также с проблемами строгого учета условий излучения на бесконечность. Одним из естественных подходов к преодолению указанных трудностей является сопряжение явного аналитического представления волнового поля во внешней однородной среде с численным решением для внутренней области. При этом для получения решения в локальной внутренней области представляется заманчивым использовать стандартные (коммерческие) МКЭ или МКР пакеты с широким диапазоном применимости в отношении размера, формы и неоднородности, моделируемых объектов. Но для пользователей такие пакеты, как правило, являются «черным ящиком», не дающим возможности изменять исходный код, чтобы добавить в формируемую систему уравнений соотношения, вытекающие из условий сопряжения с решением во внешней области. Взамен предлагаются инструменты для искусственного ограничения области дискретизации, например, с помощью поглощающих границ.

В настоящей работе предлагается гибридная вычислительная схема, основанная на получении с помощью стандартного конечно-элементного пакета набора численных решений в локальной области с определенными граничными условиями, которые играют затем роль базиса для искомого решения в этой области. Во внешней полубесконечной области используется аналитическое представление решения в виде разложения по нормальным модам. Коэффициенты разложения определяются из условий сшивания решений, полученных во внутренней и внешней областях. Данный подход реализован в среде Fortran — Comsol — Matlab. Его эффективность иллюстрируется примерами сопоставления с полуаналитическими решениями для задач дифракции на горизонтальных препятствиях, которые сводятся к интегральному уравнению Винера — Хопфа с последующей дискретизацией по методу Галеркина. Проводится также сопоставление с МКЭ решениями для ограниченных областей с поглощающими граничными условиями на искусственно введенных боковых торцах, а также с численными решениями, полученными независимо для препятствий различного вида (наклонные трещины в упругом слое, поверхностные выемки, полости, включения и др.).

Определение и контроль изменения характеристик слоистых композитов на основе бесконтактной регистрации параметров бегущих волн

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Мякишева О. А.

Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар

miakisheva.olga@gmail.com

Неразрушающее определение физико-механических характеристик материалов и контроль за их изменением в процессе эксплуатации применяются для раннего выявления негативных изменений (деградации) их свойств и предотвращения тем самым внезапного катастрофического разрушения объектов ответственного назначения, таких как изделия аэрокосмической и атомной промышленности, мосты, трубопроводы и др. В настоящее время для этой цели все шире используются бегущие волны, параметры распространения которых однозначно определяются геометрией и упругими свойствами инспектируемой тонкостенной конструкции. При этом вместо традиционных ультразвуковых зондов, перемещение которых вдоль всей поверхности не всегда возможно технологически, используются бесконтактные преобразователи (air-coupled transducers), регистрирующие акустические сигналы, переизлучаемые бегущими волнами в окружающую среду (воздух или жидкость) в процессе их распространения вдоль образца. Современные преобразователи позволяют определять параметры не только фундаментальных, но и высших мод, в том числе и мод с нулевой групповой скоростью, обладающих повышенной чувствительностью к малым вариациям значений упругих констант.

Необходимым этапом разработки и настройки указанных систем неразрушающего контроля является создание математических и компьютерных моделей, адекватно описывающих процесс возбуждения, распространения и регистрации волн в связной системе источник — образец, погруженный в окружающую среду — бесконтактный сенсор. В настоящем докладе представлен ряд полуаналитических моделей различной сложности, разработанных на основе использования функции Грина рассматриваемой связной структуры и явных интегральных и асимптотических представлений, полученных для волновых полей, возбуждаемых и регистрируемых заданной системой активных пьезосенсоров и/или бесконтактных трансдюсеров. Наиболее сложными из них являются модели для образцов из композитных материалов, таких как слоистые волокноно-армированные углепластики, которые все более широко используются в современных конструкциях и изделиях.

С помощью полученных интегральных и асимптотических представлений анализируется осредненное за период колебаний распространение волновой энергии в гармоническом волновом поле, возбуждаемым заданным источником, а также частотные зависимости мощности точечных источников, находящихся на различных расстояниях от образцов с различными упругими свойствами. В качестве контроля проверялось сохранение количества энергии, уходящей от источника на бесконечность через поверхности сфер разного радиуса. Приводятся также результаты сопоставления тестовых расчетов с экспериментальными измерениями, проведенными в ходе исследовательского визита в Институт механики Университета им. Г. Шмидта, Гамбург, при частичной поддержке научного фонда G-RISC.

Алгоритм анализа динамики распределенных вихревых конфигураций

Говорухин В. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

vngovoruhin@sfedu.ru

В докладе представлен алгоритм анализа динамики вихревых конфигураций на плоскости, основанный на бессеточных подходах к решению уравнений движения невязкой несжимаемой жидкости. В качестве исходных уравнений используются уравнения Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости в терминах функции тока и завихренности, и математическая геофизическая модель на так называемой γ -плоскости.

Алгоритм основан на одновременном решении нестационарной задачи для уравнений в частных производных с помощью варианта метода вихрей в ячейках, построении схематического фазовый портрета поля скорости жидких частиц в каждый момент времени, вычислении полей распределения локальных показателей Ляпунова (ЛПЛ), распределения завихренности и положения маркированных частиц в области течения.

Кроме того, предложен эвристический численный подход к качественному исследованию двумерных структур в жидкости, основанный на двух достаточно просто вычисляемых характеристиках — расстоянии между центрами завихренности вихревых пятен и их ориентации на плоскости. Использование данных характеристик оказалось эффективным при анализе взаимодействия двух и трех одинаковых распределенных вихрей. Результаты численных экспериментов позволяют предложить использовать величину расстояния между центрами завихренности не только как характеристику структуры вихревой конфигурации, но и как меру перемешивания вихрей в случае сонаправленных вихревых пятен. Предложенный эвристический критерий изменения структуры вихревой конфигурации может быть использован не только при численном исследовании динамики жидкости, но и для анализа наблюдений и физических экспериментов.

С помощью разработанного вычислительного алгоритма было изучено влияние сил Кориолиса на сохранение структуры вихревой конфигурации, которое можно интерпретировать как близкую к квазистационарной динамику, что определяет закономерности динамики жидкости и порождаемых процессов массопереноса. В частности, анализ поля ЛПЛ демонстрирует тот факт, что в случае сохранения структуры конфигурации процессы массопереноса менее активны. Оказалось, что в рассмотренных примерах, когда центр завихренности совпадает с полюсом (т. е. точкой где сила Кориолиса аннигилируется), то ее наличие стабилизирует структуру, и действует противоположно в обратном случае. Это еще раз подтверждает тот факт, что структурная устойчивость течений жидкости зависит от сочетания различных факторов, а не от наличия или отсутствия одного из них.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №14-01-00470.

Численный анализ динамики вихревых структур на γ -плоскости

Говорухин В. Н., Филимонова А. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
 vgovorukhin@gmail.com, alexandra.m.filimonova@gmail.com

Математическое моделирование течений идеальной несжимаемой жидкости в геофизических приближениях широко используется в исследованиях динамики вихревых конфигураций в атмосфере. В настоящей работе представлен численный метод анализа динамики и взаимодействия вихревых структур на γ -плоскости и приведены результаты вычислительных экспериментов.

Рассматриваются плоские геофизические течения идеальной несжимаемой жидкости с учетом силы Кориолиса. Такая задача описывается следующей системой уравнений в частных производных в терминах завихренности ω и функции тока ψ :

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad (1)$$

$$\omega = -\Delta\psi + \Lambda^2\psi - \frac{1}{2}\gamma r^2, \quad (2)$$

где t — время, x, y — координаты на плоскости, γ, Λ — параметры, а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус. Здесь параметр Кориолиса вблизи полюса представлен в виде:

$$f(r) = f_0 - \frac{1}{2}\gamma r^2 + O(r^4)$$

Динамика и взаимодействие вихревых структур рассматриваются в прямоугольной области, на границах которой для функции тока ψ заданы периодические краевые условия. Вихревые структуры рассматриваются при различных значениях параметров γ и Λ .

Для расчета динамики жидких частиц используется вариант метода вихрей-ячейках, который основывается на аппроксимации поля завихренности по его значениям в жидких частицах, заданным в начальный момент времени, и нахождении функции тока проекционным методом Бубнова — Галеркина из уравнения (2) связи завихренности ω и функции тока ψ . Завихренность ω переносится пассивно жидкими частицами с течением времени.

Динамика жидких частиц описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = -\psi_y, \dot{y} = \psi_x$, которая решается псевдо-симплектическим методом Рунге-Кутты.

В докладе представлены результаты вычислительных экспериментов для классических вихревых конфигураций, таких как, например, диполь Ламба, а также сценарии взаимодействия различно распределенных вихревых конфигураций, и приведены результаты численного исследования влияния силы Кориолиса на динамику вихревых структур.

Работа поддержана грантом РФФИ, код проекта 14-01-00470.

Дуговая трещина на границе раздела электрострикционных материалов

Годес А. Ю., Лобода В. В.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
alinej@rambler.ru

Рассматривается бесконечная плоскость с круговым включением радиуса R , которое скреплено с плоскостью по всей границе, кроме дуги с углом полураствора β , где возникла трещина; предполагается, что берега трещины не взаимодействуют между собой. Включение и матрица образованы изотропными линейно упругими электрострикционными материалами, которые в общем случае обладают различными механическими и электрострикционными свойствами. Диэлектрические проницаемости материалов также являются различными и отличаются от диэлектрической проницаемости наполнителя трещины. На бесконечности приложены произвольные электростатические и механические нагрузки.

Поставленная задача является несвязанной задачей электроупругости и в математическом плане сводится к последовательному решению двух граничных задач теории аналитических функций. Первая задача представляет собой граничную задачу электростатики для трех комплексных потенциалов $w'_1(z)$, $w'_2(z)$ и $w'_c(z)$, определяющих векторы напряженности электростатических полей включения, матрицы и трещины соответственно. Найденные электростатические потенциалы входят в постановку второй граничной задачи, неизвестными функциями которой являются четыре комплексных потенциала, представляющие собой аналоги потенциалов Колосова — Мухелишвили для электрострикционных материалов.

С помощью условий на границе раздела сред вторая граничная задача сводится к определению двух комплексных потенциалов $\omega'(z)$ и $F'(z)$. Функция $\omega'(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением начала координат, а функция $F'(z)$ — аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением начала координат и дуги трещины, на которой удовлетворяет задаче линейного сопряжения $F'^+(z) + \lambda F'^-(z) = f(z)$, $z = Re^{i\theta}$, $\theta < \beta$. Здесь λ — константа, которая зависит от механических свойств материалов матрицы и включения, $f(z)$ — известная функция, которая однозначно определяется решением граничной задачи электростатики, а также механическими, электрострикционными и диэлектрическими постоянными материалов.

Задача линейного сопряжения на трещине сводится к нахождению семи неизвестных комплекснозначных постоянных, однозначно определяющих функции $\omega'(z)$ и $F'(z)$. Эти неизвестные определяются из семи линейных алгебраических уравнений, которые представляют собой условия ограниченности перемещений и напряжений в начале координат, граничные условия для напряжений на бесконечности и условие однозначности смещений при обходе вокруг трещины. Полученные функции $\omega'(z)$ и $F'(z)$ вместе с электростатическими потенциалами $w'_1(z)$ и $w'_2(z)$ однозначно определяют напряженно-деформированное состояние матрицы и включения, в частности, раскрытие трещины, напряжения на границе раздела сред и коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины.

Прохождение упругих волн через многослойные волноводы
с периодически и стохастически распределёнными планарными
круговыми отслоениями

Голуб М. В., Дорошенко О. В.

Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар
oldorosh@mail.ru

Использование слоистых композитных материалов в производстве промышленных объектов и оборудования для придания им необходимых качеств на сегодняшний день продолжает оставаться устойчивой тенденцией. Нередко в таких материалах в ходе эксплуатации возникают повреждения (чаще всего на интерфейсах) в виде образовавшихся отслоений. Для обнаружения неоднородностей такого рода нередко используется ультразвуковые методы неразрушающего контроля. Для повышения точности имеющихся и разработки новых методов необходимы эффективные подходы и модели, описывающие взаимодействие упругих волн с неоднородностями различных типов.

В данной работе рассматривается распространение плоских упругих волн через многослойный композит с периодически и стохастически распределёнными круговыми трещинами. Решение задачи для стохастического распределения и определение коэффициентов отражения и прохождения происходит на основе решения задачи об одиночной трещине. Для построения решения с периодическим распределением круговых отслоений применяется теорема Флоке-Блоха, которая позволяет представить решение с помощью периодической функции, заданной в цилиндрической системе координат. С помощью интегрального подхода волновые поля отыскиваются в виде ряда Фурье по угловой координате с коэффициентами, определяемыми в виде свертки преобразования Ханкеля матрицы Грина и суммы скачков смещений на берегах дефектов. Дискретизация системы граничных интегральных уравнений производится на основе схемы Галёркина с разложением функции раскрытия берегов трещины по присоединённым нормированным полиномам Лежандра. Кроме того, повреждённый планарный интерфейс может быть описан с помощью граничных условий пружинного типа. Такая замена применима для низких частот или при условии малого размера дефектов по отношению к длине падающей волны. Значения коэффициентов пружинной жесткости указывают на качество адгезии между слоями от полностью расслоенного интерфейса до идеального контакта между материалами. Приводятся выведенные отношения для коэффициентов пружинной жесткости при равномерном стохастическом распределении микродефектов, которые выражаются через упругие модули материалов, удельную плотность распределения (трещиноватость) микротрещин и геометрические свойства дефектов. Производится сравнение периодического набора трещин, стохастически распределённых трещины и пружинной модели, сопоставляются амплитуды коэффициентов прохождения и волновые поля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №16-41-230352).

Изучение механических свойств костной ткани позвоночника
посредством пары ультразвуковых преобразователей

**Голядкина А. А., Доль Е. С., Рзаев В. А., Сафонов Р. А.,
Скрипаченко К. К.**

*Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского*

kseniya.skripachenko@mail.ru

Позвоночник постоянно испытывает большие нагрузки в процессе жизнедеятельности. Патологии, заболевания, возрастные изменения и многое другое могут вызывать ухудшение физических параметров костной ткани, что может вызывать дискомфорт и болевые ощущения пациента. Биомеханическое моделирование позвоночного столба является полезным инструментом для лучшего изучения дегенерации костной ткани и неэффективной работы позвоночника. Подобное изучение требует построение реалистичной модели и истинные значения упругих свойств костной ткани. Наиболее распространенной экспериментальной методикой определения упругой жесткости материалов являются механические испытания. Определение жесткости материала в случае высокопористых материалов может быть в значительной степени изменено неупругими деформациями, которые возникают в образцах материала, особенно в непосредственной близости от нагружающих устройств. Ультразвуковые (УЗ) волны, распространяющиеся через материал, генерируют очень малые напряжения и деформации. Таким образом, они дают возможность прямого определения компонентов тензоров упругой жесткости материалов с очень высокой пористостью. Изменения физико-механических свойств костной ткани, связанные с изменением состава и структуры, отражаются и на ее акустических параметрах — на коэффициенте поглощения ультразвука и на скорости его распространения в кости. Проведен эксперимент по определению физико-механических показателей костной ткани позвонков с помощью ультразвукового исследования. Образцы костной ткани кубической формы были подготовлены размерами от 5 до 7 мм. Далее образцы были тщательно промыты от частиц мягких тканей и высушены. Ультразвуковое исследование осуществлялось методом прохождения волны через образец с использованием генератора-приёмника, осциллографа и двух ультразвуковых преобразователей, подавался импульсный сигнал с частотой 10 МГц. Для поддержания непрерывного контакта и предотвращения проникновения воздуха образцы обрабатывались специальным гелем. По мере прохождения УЗ луча через ткани он постепенно ослабевает, благодаря совместному влиянию отражения, рассеяния и поглощения. На основе этого эффекта наблюдается разность фазовой частоты между излучаемой и прошедшей волной, значение которой позволяет рассчитать скорость прохождения волны через образец. Путем простых математических вычислений, используя значение скорости прохождения волны и значения плотности костной ткани, получаем значение модуля Юнга и коэффициента Пуассона. Данные параметры являются основными характеристиками физико-механических свойств костной ткани. На основе эксперимента и литературных данных можно судить, что УЗ исследование позволяет получить адекватные результаты о физико-механических свойствах костной ткани. При этом данный метод позволяет получить более точные значения механических свойств костной ткани, чем механические испытания.

Исследование механических свойств тканей позвонков

Голядкина А. А., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Сафонов Р. А.

*Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского*

aagramakova@mail.ru, nano-bio@sgu.ru, president@sgu.ru, safonovra@gmail.com

При проведении оперативных вмешательств на позвоночно-тазовом комплексе (ПТК) важную роль играет правильное планирование операции. В настоящее время существует ряд инструментов предоперационного планирования, такие как программные комплексы MediCad, OrthoView и т. п. Существенный недостаток этих программ в том, что они используют методики, основанные на геометрическом планировании без учета напряжений и деформаций, возникающих при приложении физиологических нагрузок. В связи с этим, после операции высок риск осложнений, приводящих к изменению формы позвоночника и реоперации.

Для проведения эффективного предоперационного планирования требуется учитывать механику позвоночно-тазового комплекса. В связи с этим, при подготовке больного к оперативному вмешательству необходимо провести пациенто-ориентированное биомеханическое моделирование позвоночно-тазового комплекса, включающее построение трехмерной индивидуальной модели ПТК пациента, механическую постановку задачи для этой модели, численное решение этой задачи и анализ полученных результатов с медицинской точки зрения. Остановимся более подробно на механической постановке задачи.

Постановка задачи механики сплошной среды включает в себя задание механических свойств материала, граничных и начальных условий, а так же нагрузок, действующих на элементы системы. Постановка осложняется тем, что механические свойства тканей зависят от разных факторов, включая половозрастные характеристики, нозологию и т. д.

Для получения данных о механических свойствах тканей можно использовать данные компьютерной томографии. Существуют эмпирические формулы, которые пересчитывают значения оттенка серого по шкале Хаунсфилда в приближенное значение плотности ткани и затем в значения модуля Юнга и предела прочности материала. Существенный недостаток такой методики состоит в том, что эти эмпирические формулы не учитывают зависимость механических свойств тканей от биометрических параметров.

Для получения индивидуальных механических свойств тканей предлагается методика, основанная на совместной статистической обработке данных компьютерной томографии и механических свойств тканей, полученных *in vitro* на испытательной разрывной машине. Обработка ведется с учетом группировки по половозрастным критериям и нозологии. Механические свойства тканей конкретного пациента строятся на основе полученных статистических зависимостей по оттенкам серого компьютерной томограммы.

Трехмерные контактные задачи о скольжении системы штампов по вязкоупругому полупространству

Горячева И. Г., Степанов Ф. М.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва
mcc.conf@gmail.com

В работе предлагается метод решения трехмерных контактных задач о скольжении системы штампов по вязкоупругому полупространству, основанный на решении задачи о движущейся с постоянной скоростью по границе вязкоупругого полупространства сосредоточенной силы (Александров В. М., Горячева И. Г. Движение с постоянной скоростью распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству. Материалы 5-ой Российской конференции с Международным участием «Смешанные задачи механики деформируемого твердого тела», Саратов, изд-во Саратовского университета, 2005, с. 23–25).

Модель материала полупространства характеризуется постоянным коэффициентом Пуассона и зависимостью сдвиговых деформаций от касательных напряжений, описываемой интегральным оператором Вольтерра с экспоненциальным ядром.

Рассматриваются следующие контактные задачи: задача об однонаправленном скольжении с постоянной скоростью двух инденторов, расположенных на заданном расстоянии друг от друга, и задача о скольжении индентора при наличии пригрузки в виде сосредоточенных сил, расположенных на заданном расстоянии от штампа. В обоих случаях учитываются касательные напряжения в области контактного взаимодействия штампа с полупространством, подчиняющиеся закону Кулона — Амонта. Штампы находятся под действием заданной нормальной нагрузки и некоторой тангенциальной силы, удовлетворяющей условиям равновесия и обеспечивающей движение штампов с постоянной скоростью.

Решения обеих задач сведены к анализу матричных систем уравнений, составленных на основании разбиения предполагаемой области контакта на ячейки, в которых действует неизвестное постоянное контактное давление. Для определения действительной области контакта и распределения давлений в ней используется итерационная процедура. При наличии пригрузки в виде сосредоточенных сил или другого штампа применяется дополнительная итерационная процедура.

Излагаются новые эффекты, связанные с взаимным влиянием штампов и наличием пригрузки. В частности установлено, что область контактного взаимодействия следующего за первым штампа может быть несвязанной при определенной скорости и достаточно близком расстоянии между штампами.

Разработанный метод исследования и полученные результаты могут быть использованы при анализе контактных характеристик и силы трения в условиях фрикционного взаимодействия шероховатых тел с эластомерами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14-29-00198).

Идентификация упругих свойств графена методами молекулярной динамики

Груздев Р. Ю., Соловьёв А. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

rgruzd91@gmail.com

Материалы, основанные на использовании графена обладают широким спектром применения. Например, такие материалы могут быть использованы при создании эффективных солнечных батарей, в силу уникальных свойств графена. С точки зрения механики интерес представляют упругие свойства, поскольку по оценкам графен обладает большой механической жесткостью.

Одним из важных направлений в исследовании подобных материалов является построение математической модели, адекватно описывающей свойства материала, а также дальнейшее использование полученных результатов. Целью данной работы является разработка модели и исследование упругих свойств графена на ее основе.

Инструментом моделирования является программный комплекс LAMMPS (LAMMPS Molecular Dynamics Simulator). Его основными особенностями являются: открытый исходный код; большое количество встроенных потенциалов, полей и граничных условий; возможность встраивания в другие вычислительные пакеты; параллельные вычисления.

Модель листа графена была построена на основе гексагональной кристаллической решетки (honey-comb lattice) с константой решетки 0,246 нм. Проведен анализ существующих потенциалов на предмет пригодности для описания структур из углерода. Наиболее перспективными являются потенциалы LCBOP, его модификация LCBOPII, COMB3.

Далее был проведен вычислительный эксперимент по определению упругих параметров — модуля Юнга и коэффициента Пуассона. Суть этого эксперимента заключается в продольном/поперечном сжатии/растяжении листа графена заданной силой. Полученные значения абсолютной и относительной деформации используются для вычисления интересующих нас констант. Важной особенностью является двумерная структура графена, в следствие чего была использована плоскостная жесткость, вместо классической трехмерной.

Для проверки корректности модели, эксперимент был проведен для разных потенциалов и значений относительной деформации. Наиболее точные результаты были получены для потенциала LCBOP: $E = 3047$ ГПа·А и коэффициент Пуассона равный 0,18. Этот результат согласуется с результатами в литературе — например, одно из самых распространенных значений для модуля Юнга — $E = 3,41$ ТПа·А. Результаты всех вычислительных экспериментов представлены в таблицах.

Данная работа может послужить базой для более сложных и фундаментальных исследований — например, исследование наноразмерных слоистых композитов, а также исследование углеродных структур графена с дефектами (фуллерен, седловидные искривления атомной плоскости).

Об анализе дисперсионного множества для неоднородного пористоупругого слоя

Гусаков Д. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
gusakov.dv@yandex.ru

В рамках плоской деформации рассмотрена задача об установившихся колебаниях неоднородного пористоупругого слоя. Материал слоя считается трансверсально-изотропным, а все характеристики слоя являются произвольными функциями поперечной координаты. В качестве модели пористоупругого материала использована модель М. Био. Важной динамической характеристикой при изучении колебаний является дисперсионное множество. Для рассмотренной задачи построение дисперсионного множества возможно при помощи численных либо приближенных аналитических методов.

В качестве численного метода использован метод пристрелки. Показано, что все точки дисперсионного множества рассматриваемой задачи будут иметь строго комплексную структуру. Разделение комплексной и мнимой частей позволяет свести задачу к вещественнозначной задаче удвоенной размерности, для которой дисперсионное уравнение будет функцией трех вещественных аргументов, причем нули этой функции будут одновременно ее максимумами (минимумами).

Большой интерес при анализе дисперсионных множеств представляют приближенные аналитические методы. Такие методы могут быть применены как для проверки численных результатов, так и в ситуациях, когда основной интерес представляют, например, области низких частот. В работе рассмотрено несколько аналитических методов, среди которых метод Бубнова—Галеркина, подразумевающий представление решений в виде линейных комбинаций линейно-независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи. Также построены асимптотики решений для малых частот и малых значений волнового числа. Получены линейные приближения для первых ветвей дисперсионного множества в задаче со свободными границами. Сформулирована вариационная постановка задачи с неоднородными характеристиками. На базе такой постановки применен метод Ритца для построения дисперсионного множества.

Проанализирована эффективность каждого представленных из методов с точки зрения точности решения и вычислительных затрат. Проведено сравнение решений полученных различными способами. Достоверность результатов, полученных численным методом, проверена на частных случаях, допускающих аналитическое решение. В случае произвольных неоднородностей аналитические и численные подходы дают схожие результаты. Выявлены особенности структуры дисперсионного множества при различных типах неоднородности. Сформулированы условия, при которых различные неоднородности могут считаться подобными с точки зрения их влияния на ветви дисперсионного множества.

Работа выполнена при поддержке госконтракта №9.665.2014/К.

Анализ особенностей в решении нестационарной задачи термомеханодиффузии для слоя

Давыдов С. А., Земсков А. В.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет)*
xenon_93@inbox.ru

Рассматривается линейная одномерная нестационарная задача термоупругости для слоя с учетом массопереноса:

$$Cu'' = \rho\ddot{u} + b\vartheta' + \alpha\eta', \quad \kappa\vartheta'' = c_{\varepsilon n}\dot{\vartheta} + T_0b\dot{u}' - \beta T_0\dot{\eta}, \quad D\eta'' = \dot{\eta} + \Lambda u''' - M\vartheta'',$$

где t — время; x — декартова координата, направленная в глубину слоя; u — компонента вектора перемещений; L — толщина слоя; $\eta = n - n_0$ — приращение концентрации; n и n_0 — актуальная и начальная концентрации вещества; C — упругая постоянная; ρ — плотность; b — температурная постоянные; α — коэффициент, характеризующий объемное изменение среды за счёт диффузии; D — коэффициент самодиффузии; R — универсальная газовая постоянная; $\vartheta = T - T_0$ — приращение температуры; T и T_0 — актуальная и начальная температуры среды; κ — коэффициент теплопроводности; γ — коэффициент активации (для твёрдых растворов $\gamma = 1$); $c_{\varepsilon n}$ — объемная теплоёмкость при постоянной концентрации и деформации. Коэффициенты β , Λ_{3333} , M_{33} определяются следующими формулами:

$$\beta = R \ln(\gamma n_0), \quad \Lambda = \frac{n_0 \alpha D}{RT_0}, \quad M = \frac{n_0 \ln(\gamma n_0)}{T_0} D.$$

На границах слоя заданы перемещения, теплообмен и диффузионные потоки:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = f_{11}(t), \quad \vartheta'|_{x=0} = f_{21}(t), \quad (\Lambda u'' - D\eta' - M\vartheta')|_{x=0} = f_{31}(t); \\ u|_{x=L} = f_{12}(t), \quad \vartheta'|_{x=L} = f_{22}(t), \quad (\Lambda u'' - D\eta' - M\vartheta')|_{x=L} = f_{32}(t); \end{aligned}$$

Начальные условия полагаются нулевыми:

$$u|_{t=0} = \dot{u}|_{t=0} = 0, \quad \eta|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = 0.$$

Решение ищется с помощью последовательного применения преобразования Лапласа по времени и разложения в ряды Фурье по собственным функциям упругодиффузионного оператора. Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений позволяет найти функции Грина рассматриваемой задачи в виде трансформант Лапласа. Их обращение осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Исследования показывают, что некоторые из функций Грина имеют особенности в окрестности $\tau = 0$, затрудняющие практические расчеты связанные с суммированием рядов Фурье. Для их выделения используются алгебраические приемы, связанные с выделением в пространстве изображений слагаемых имеющих порядок s^{-1} . Соответствующие им суммы рядов Фурье в пространстве оригиналов выражаются через Тета-функции Якоби.

Анализ потери несущей способности тонких пластин с вырезами при одноосном растяжении

Даль Ю. М.¹, Морозов Н. Ф.^{1,2}, Семенов Б. Н.^{1,2}

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

semenov@bs1892.spb.edu

Проведен анализ влияния дефектов типа вырезов и трещин на потерю несущей способности тонких пластин при растяжении. Потеря несущей способности конструкции может быть обусловлена как ее разрушением, так и потерей устойчивости, для тонких пластин – потеря плоской формы деформирования. Интерес к этим задачам вызван использованием в наноразмерных элементах наноразмерной толщины (MEMS, NEMS и др.).

Рассмотрены два класса задач: плоскость, ослабленная 1) решеткой параллельных трещин и 2) круговым вырезом.

Аналитическое исследование напряженного состояния плоскости с решеткой разрезов остается до сих пор сложной задачей теории упругости. Публикации по этой проблеме посвящены, как правило, вычислению коэффициентов интенсивности напряжений у вершин двух, трех или четырех коллинеарных разрезов, расположенных друг над другом. Такой подход представляется вполне естественным, когда речь идет о прочности массивных квазихрупких тел с трещинами, находящихся в условиях плоской деформации. В случае же обобщенного плоского напряженного состояния, характерного для растянутых тонких пластин, дело обстоит совершенно иначе. Здесь разрушению обычно предшествует образование и развитие специфических изгибов пластин в окрестности центров разрезов. Возникновение последних обуславливается сжимающими напряжениями, локализованными около кромок разрезов. При определенной величине растягивающих внешних усилий данные напряжения вызывают местную потерю устойчивости пластин, что существенно понижает их несущую способность. Поэтому точное аналитическое решение задачи теории упругости о растянутой плоскости с решеткой разрезов представляет не только теоретический, но и большой практический интерес. Для бесконечной системы коллинеарных трещин методом Колосова – Мухелишвили [2] впервые построено точное аналитическое решение, позволяющее считать напряженное состояние в любой точке области.

Проведен анализ зависимости разрушающей нагрузки и критической нагрузки, при которой происходит потеря плоской формы деформирования, в зависимости от отношения длины трещины к расстоянию между ними.

Для пластины наноразмерной толщины с круговым вырезом проведена оценка влияния поверхностных напряжений на потерю устойчивости при одноосном растяжении. Построена зависимость критической нагрузки от толщины пластины.

Проведен конечно-элементный анализ рассмотренных задач. Получена зависимость критических нагрузок от числа трещин.

Исследование возможности применения линии задержки
на поверхностных акустических волнах
в качестве датчика магнитного поля

Днепровский В. Г., Карапетьян Г. Я., Салафетов В. С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
valdnepr@ya.ru

В настоящее время датчики на поверхностных акустических волнах (ПАВ) широко применяются в целом ряде радиотехнических систем. Проблема беспроводного дистанционного контроля физических параметров (давления, влажности, деформации и т. п.) в настоящее время осуществляется с помощью различных датчиков по радиосигналу, т. е. к датчику придается радиопередатчик, осуществляющий передачу информации от датчика. Однако, при этом требуется источник питания и возникает необходимость его периодической замены. Так как датчик может быть установлен в труднодоступном месте или использоваться в условиях, при которых невозможна замена источника питания, например, при непрерывно работающем контролируемом объекте, весьма привлекательным становится применение пассивных беспроводных датчиков. В научной литературе, практически, нет данных о применении ПАВ датчиков для измерения магнитного поля. Поэтому данная задача представляется актуальной, в связи с чем, эта работа посвящена данной тематике.

Для выполнения исследований был собран экспериментальный стенд, включающий измеритель комплексных коэффициентов передачи «ОБЗОР-103», источник питания постоянного тока Б5-50, измерительный столик из комплекта ОСК-2, мультиметр TES 2360, ПК (ноутбук) Lenovo, линию задержки (ЛЗ) на ПАВ с центральной частотой 98 МГц, неодимовый магнит на специальном держателе и датчик Холла. ЛЗ на ПАВ, содержала два встречно-штыревых преобразователя ВШП, причем, первый был приемо-передающим, а второй ВШП — отражательным. Отражательный ВШП, с подстроечными емкостью и индуктивностью, был нагружен на элемент, чувствительный к магнитному полю — датчик Холла. Таким образом, величина импеданса нагрузки, зависела от магнитного поля и влияла на коэффициент отражения ПАВ от отражательного ВШП. Исследовалась частотная зависимость коэффициента отражения ПАВ в зависимости от величины магнитного поля, были получены Фурье преобразования частотных характеристик.

Величина магнитного поля варьировалась при изменении расстояния от магнита до датчика Холла. При значениях индукции магнитного поля около 10 мТл наблюдался существенный скачок частотной зависимости коэффициента отражения ПАВ. Сравнение Фурье преобразований частотных характеристик коэффициента отражения до и после скачка свидетельствовало о значительном изменении структуры отраженного импульса в этом случае. Следует отметить, что до скачка и после него частотные зависимости коэффициента отражения ПАВ практически не менялись. Таким образом, экспериментально показана возможность контроля магнитного поля с помощью датчика на поверхностных акустических волнах.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке темы №16.219.2014К проектной части государственного задания Минобрнауки России.

Применение техники непрерывного нано- и микроиндентирования для определения механических свойств микрокомпонентов углей

Добрякова Н. Н.¹, Коссович Е. Л.¹, Минин М. Г.², Эпштейн С. А.¹

¹Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»,
Москва

²Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, Екатеринбург
e.kossovich@misis.ru

Механические свойства углей на разных уровнях их структурной организации определяют закономерности их поведения в условиях воздействий различной природы. Также, механическое поведение углей на нано- и микроуровне является ключевым фактором, влияющим на характеристики прочности угольных массивов, а также опасности выбросов угольной пыли при добыче. Последнее обусловлено тем фактом, что зарождение и рост дефектов (в том числе разрушения) в угольном веществе происходит на уровне микрокомпонентов и аномальных включений (минеральных компонентов и т. п.). Классические методы оценки механических свойств углей не позволяют учесть особенности строения угольного вещества на микро- и наноуровне (распределение органических микрокомпонентов и неорганических включений). Поэтому необходимо, помимо традиционных методов характеристики механических свойств углей на макро-уровне, также применять подходы, позволяющие оценить их характеристики на уровне микрокомпонентов, в том числе на нано- и микроуровнях. Для этих целей недавно был предложен новый подход, основанный на применении метода непрерывного индентирования с привлечением современных приборов микро- и наноиндентирования.

Целью данной работы является демонстрация возможностей современных методов инструментального индентирования для оценки локальных механических свойств микрокомпонентов углей. Эксперименты проводили на двух типах объектов — угле низкой стадии метаморфизма с показателем отражения 0.65% и антраците с показателем отражения 3.58%. Измерения проводили на двух типах микрокомпонентов угля — витрините и инертините, а также на микрокомпоненте витрините антрацита.

Инструментальные исследования проводили на приборе MicroHardness Tester (CSM Instruments) в режиме управления нагрузкой (с максимальной величиной нагружения 500 мН), а также на приборе Hysitron TI 750 в различных режимах (контроля нагружения и глубины внедрения в образец). Обработку результатов измерений проводили в соответствии с классическими подходами Оливера и Фарра и др. На каждом из образцов и на каждом из микрокомпонентов проводили не менее 10 измерений для того, чтобы добиться статистически достоверных результатов.

В результате были получены данные о качественных и количественных различиях между механическими свойствами микрокомпонентов углей, в том числе между разными микрокомпонентами одного и того же угля, а также их изменениями с увеличением стадии метаморфизма.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-17-10217).

Уравнения эллиптического типа для зонального электрофореза

Долгих Т. Ф.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

dolgikh@sfedu.ru

Уравнения, используемые для описания зонального электрофореза, — это, как правило, квазилинейные гиперболические уравнения в частных производных первого порядка. Однако при некоторых значениях параметров переноса — подвижностей компонент смеси $\mu^i = \text{const}$, тип этих уравнений становится эллиптическим.

Система уравнений, описывающая переносе веществ под действием электрического тока в двухкомпонентной смеси, всегда приводится к инвариантам Римана K^1, K^2 , которые для уравнений эллиптического типа являются комплексно сопряжёнными. Дополнительно к данной системе уравнений на некотором заданном контуре Γ ставятся начальные условия $K^i|_{\Gamma} = K_0^i(\tau)$, $i = 1, 2$. В простейшем случае начальные данные заданы при $t = t_0$. Полученная задача Коши может быть решена в неявном виде $x(u, v)$, $t(u, v)$ с помощью метода годографа, который позволяет получить линейное дифференциальное уравнение. Известно, что решением этого уравнения с точностью до множителя является функция Римана-Грина.

Для нахождения явной формы решения $p(x, t)$, $q(x, t)$ по его неявной форме используется численно-аналитический метод, основная идея которого заключается в параметризации линий уровня в заданные моменты времени $t = t_* = \text{const}$. В случае, когда уравнения зонального электрофореза имеют эллиптический тип, инварианты Римана K^1, K^2 комплексно сопряжены, ключевым моментом в построении решения поставленной задачи Коши будет требование комплексной сопряжённости констант a и b для параметризации изохрон.

В работе были рассмотрены задачи Коши с пространственно-периодическими начальными данными, которые используются при исследовании неустойчивых квазигазовых сред. Численные расчёты показывают, что с течением времени первоначальное пространственно-периодическое возмущение исчезает, превращаясь в солитоноподобный профиль для $q(x, t)$ и кинкоподобный профиль для $p(x, t)$ в точках $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В результате проведённых вычислительных экспериментов была выдвинута гипотеза: с течением времени возникает структура, состоящая из кноидальных неподвижных волн с растущей во времени амплитудой, то есть в эллиптическом случае задача описывает некоторую квазигазовую неустойчивую среду типа газа Чаплыгина.

Предлагаемый метод возможно также использовать и для решения уравнений опрокинутой мелкой воды, уравнений плотного солитонного газа, уравнений Борна — Инфельда.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Биомеханический анализ позвоночно-двигательного сегмента

Доль Е. С.

*Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского*

tusinaes@gmail.com

Травмы позвоночника составляют до 17% травм опорно-двигательного аппарата, причем до 40 случаев на миллион населения приходится именно на травмы поясничного отдела. На сегодняшний день разработано множество методик лечения различных травм и заболеваний позвоночного столба. При этом часто возникает необходимость выбора того или иного метода, а также вида устанавливаемых фиксирующих конструкций или имплантатов. В этом случае с помощью математических и численных расчетов (в частности, расчетов методом конечных элементов) могут быть учтены биомеханические факторы, влияющие на исследуемый объект, что, в свою очередь, позволит дать рекомендации по выбору наиболее оптимального с механической точки зрения варианта. Расчетам поясничного отдела позвоночника методом конечных элементов (МКЭ) уделяли внимание многие научные группы из разных стран. При этом большинство исследователей при постановке задач используют различные модели и свойства материалов, а также не всегда сходятся в значениях изгибающих моментов и компрессионных нагрузок.

Основой для численного моделирования является геометрическая модель исследуемого объекта, и в современных научных работах предлагаются различные методы построения как позвонков и межпозвонковых дисков, так и связочного аппарата. В некоторых работах авторы предлагают методики создания упрощенных идеализированных моделей позвоночного столба. Однако большинство исследователей все же стараются создавать реалистичные и пациентно-ориентированные модели позвоночника или его сегментов на основе данных компьютерной и магнитно-резонансной томографии (КТ и МРТ). Во многих современных работах большое внимание уделяется также методикам автоматического создания трехмерных моделей по данным КТ и МРТ. Целью данной работы является решение стационарной задачи о деформировании осевой нагрузкой функционального элемента поясничного отдела позвоночника (L4-L5) методом конечных элементов. Моделирование функционального элемента проводилось МКЭ в программном пакете ANSYS Workbench. Для этого на первом этапе работы была создана геометрия в программном пакете SolidWorks. Построенная модель функционального элемента была импортирована в ANSYS Workbench. Для каждого типа тканей был задан соответствующий материал, а также были заданы соответствующие граничные условия (закрепления и нагрузки).

В ходе работы на основе анализа литературы были определены основные механические характеристики тканей функционального элемента позвоночника, а также величины и характер приложения нагрузок, действующих на него. Это позволит в дальнейшем перейти к моделированию патологий ПДС и реконструктивных операций по замене межпозвонкового диска.

Сравнительный анализ стоматологических имплантатов

Доль А. В.

*Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского*

nerevishl@gmail.com

Полное отсутствие зубов приводит к значительным морфофункциональным изменениям в челюстно-лицевой системе, а также к социальной дезадаптации человека. Частичное и полное отсутствие зубов встречается в 40% у трудоспособного населения и более чем в 90% среди пожилых людей. Это является следствием сочетания несоблюдения правил гигиенического ухода за ротовой полостью и наличия заболеваний, усложняющих установку имплантатов, что требует разработки специальных терапевтических подходов. В настоящее время поиск оптимального дизайна имплантата осуществляется, в первую очередь, аналитическим путем. Для этого используют компьютерные программы двух- и трехмерного математического моделирования. Такие исследования с учетом биомеханических характеристик кости, имплантата и протезной конструкции позволяют рассматривать разные ситуации и получать данные о деформациях и напряжениях, возникающих в костной ткани под действием циклической жевательной нагрузки. Задача выбора конструкции дентального имплантата остается не до конца решенной.

В настоящее время актуальными являются исследования, посвященные математическому моделированию взаимодействия имплантата с костями челюсти под действием жевательной нагрузки. Для решения задачи исследователи выбирают метод конечных элементов, который хорошо подходит для анализа различных биологических объектов и успешно применяется в стоматологии. Основным достоинством метода конечных элементов является возможность решения задач в области любой формы, тогда как аналитические решения могут быть получены только для задач с простой геометрией и при допущении существенных упрощений в постановке задач.

В данной работе, были рассмотрены актуальные задачи 3D моделирования в стоматологии. Были построены 8 трехмерных моделей стоматологических имплантатов, фрагмент челюсти, состоящий из кортикального и губчатого слоев. Были определены области концентраций высоких напряжений в имплантате и кости. Для построения математической модели челюсти использовались данные компьютерной томографии. Метод КТ нашел широчайшее применение в стоматологии и позволяет оценить состояние кости и положение соседних зубов. На основе данного метода диагностики определяются формы и размеры отдельных частей альвеолярного отростка.

Было проведено сравнение двух стоматологических имплантатов разной длины. В результате сравнения было получено, что стоматологические имплантаты стандартной длины испытывают меньшие напряжения и осуществляют меньшие воздействия на кость. Однако короткие имплантаты испытывают близкие к ним деформации.

Также в работе было проведено сравнение 4 форм абатментов, в ходе которого было выявлено, что имплантаты с круглой формой поперечного сечения абатмента испытывают меньшие деформации и напряжения.

Биомеханическое моделирование при планировании операции на позвоночно-тазовом комплексе

Донник А. М., Калинин А. А.

*Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского*
mathandon@mail.ru, faktor.lex@gmail.com

Правильно проведенное планирование имеет решающее значение для успешности операции на элементах позвоночно-тазового комплекса (ПТК). Выбор того или иного типа операции осложняется большими значениями сил, действующих в системе. В связи с этим, нередки случаи, когда наблюдаются осложнения, связанные со смещениями межпозвонковых кейджей, поломками металлоконструкций, значительными постоперационными искривлениями позвоночника в сагиттальной плоскости и т. д. Эти осложнения могут приводить к реоперации с целью увеличения зоны фиксации или усиления фиксирующих конструкций. Причины осложнений связаны с недостаточным учетом биомеханических факторов на этапе планирования операций.

Существует ряд программных продуктов, которые позволяют автоматизировать планирование операции. Среди них стоит отметить OrthoView, MediCAD, TraumaCAD. Программа Orthoview обладает большим набором имплантатов, что позволяет планировать большое количество типов операций. Однако она допускает лишь двумерное планирование, что не дает возможности установить успешность планируемой операции. Программа MediCAD, в отличие от OrthoView, визуализирует как двумерную, так и трехмерную модель результатов компьютерной томографии, позволяет автоматически проводить классические измерения (расстояние между ножками позвонков, лордоз, кифоз, высота межпозвонкового диска, угол межпозвонкового диска, спондилолистез и др.). Так же, как и в MediCAD, в TraumaCad возможно проведение классических измерений. Однако, поскольку в TraumaCad организована работа с различными областями ПТК по отдельности, она позволяет проводить шаблонные измерения, необходимые именно для выбранной области, что существенно упрощает работу врача с программой. Также в каждой из перечисленных программ имеется опция оценки сагиттального баланса.

К сожалению, все существующие программные продукты для планирования операций позволяют проводить только геометрическое планирование с целью восстановления нормальной геометрии позвоночника без учета биомеханических факторов. В настоящее время оценка успешности операции и прогнозирование ее результатов на этапе планирования выполняется хирургом на основе его личного опыта и знаний. Для снижения количества осложнений в постоперационном периоде необходима разработка программного инструментария для планирования операций с учетом биомеханики персонифицированной модели позвоночно-тазового комплекса пациента.

Математические модели природных склоновых потоков

Дроздова Ю. А.¹, Эглит М. Э.², Якубенко А. Е.³¹Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И. М. Губкина, Москва²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова³Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

drozdovz@list.ru, m.eglit@mail.ru, yakub@imec.msu.ru

Доклад посвящен математическому моделированию потоков, возникающих на горных склонах и могущих представлять опасность для людей и различных объектов. Примерами таких потоков являются быстрые оползни, сели, лавины, лавовые потоки.

В докладе дается краткий обзор использующихся до настоящего времени моделей, а также представлены новые модели. В простейших моделях весь поток рассматривается как материальная точка, движущаяся по склону под действием силы тяжести и сопротивления окружающей среды. В более сложных моделях поток представляется как движение сплошной среды, но применяется так называемый гидравлический подход, то есть используются уравнения, осредненные по глубине или по поперечному сечению потока. Структура потока в поперечном к склону направлении такими моделями не описывается. Новые математические модели склоновых потоков также основаны на уравнениях механики сплошных сред, но без использования осреднения по глубине. Модели такого уровня дают возможность вычислить величины скорости на разных расстояниях от дна, более точно рассчитать распределение ударного давления на стене, подвергшейся удару склонового потока, а также связать происходящий, как правило, захват потоком и вовлечение в движение лежащего на склоне материала с процессами, происходящими в придонной зоне потока. В представленных моделях учитываются следующие три фактора: сложные нелинейные реологические свойства движущейся среды, захват и вовлечение в движение материала, лежащего на склоне, и возможный турбулентный характер движения. Для задания реологических свойств движущегося материала принимается так называемая модель Хершеля — Балкли, которая при различном выборе коэффициентов описывает линейно и нелинейно вязкие (степенные) жидкости, а также среды с пределом текучести, которые предлагались различными исследователями в качестве возможных реологических моделей для снежных лавин, селевых, лавовых, оползневых потоков. При моделировании захвата донного материала используется следующая гипотеза: захват происходит тогда, когда касательное напряжение на дне потока достигает значения предела прочности на сдвиг слоя, по которому движется поток. Величина скорости вовлечения при этом определяется в результате расчета касательного напряжения на дне при решении задачи. Для описания турбулентных характеристик движения используется дифференциальная трехпараметрическая модель турбулентности, предложенная и примененная ранее в работах В. Г. Лущика, А. А. Павельева и А. Е. Якубенко для расчета движения жидкостей вдоль проницаемых и непроницаемых стенок в присутствии градиента давления, массообмена и других процессов. Представлены результаты модельных расчетов движения потоков по длинным однородным склонам, проведенных с целью выяснить влияние реологических свойств, турбулентности и захвата массы на поведение потока.

К определению преднапряжений в электроупругом цилиндре

Дударев В. В.^{1,2}, Мнухин Р. М.¹¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону²Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ

dudarev_vv@mail.ru, romamnuhin@yandex.ru

В настоящее время развитие техники устанавливает все более строгие требования к качеству изделий и конструкций. В состав элементной базы большинства высокоточных диагностических приборов входят пьезоэлементы различной формы. При этом они обычно играют важную функциональную роль. Технология создания пьезокерамики включает в себя многие процессы, которые выполняются при различных температурных и механических режимах. Недавние исследования показали, что в готовом элементе обычно возникают предварительные напряжения (ПН). Такие напряжения также могут появляться в объекте в результате приложения рабочих эксплуатационных нагрузок или прочих скрытых воздействий. Современные модели для предварительно напряженных тел позволяют учесть поле ПН при оценке основных характеристик пьезоэлемента. При этом одним из наиболее эффективных неразрушающих способов диагностики является метод акустического зондирования.

В работе представлена задача об установившихся колебаниях пьезокерамического цилиндра с учетом неоднородного поля ПН. Торцевые поверхности цилиндра являются электродированными. Радиальные колебания возбуждаются путем подачи переменной разности электрического потенциала. Принято, что электроупругие характеристики являются постоянными. Поле преднапряжений считается плоским, отличные от нуля компоненты тензора ПН: $\sigma_{rr}^0(r) \neq 0$, $\sigma_{\theta\theta}^0(r) \neq 0$. На основе общей формулировки задачи о колебаниях электроупругого тела при наличии ПН сформулирована постановка задачи для рассматриваемого цилиндра. С учетом выполнения условий плоского напряженного состояния проведено осреднение по толщине цилиндра. После обезразмеривания исследование прямой задачи об определении функции радиального смещения при заданном законе изменения компонент ПН сведено к численному решению системы дифференциальных уравнений первого порядка с помощью метода пристрелки. На основе составленной вычислительной схемы проведен анализ влияния уровня и структуры поля ПН на амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и функцию смещения. Сформулирована обратная задача об определении преднапряжений по данным об АЧХ, заданной в конечном наборе частот. Для ее решения предложен итерационный подход, в основе которого лежит решение уравнения относительно поправки к восстанавливаемой функции. В качестве критерия остановки процесса предложены условие достижения малости построенного функционала невязки и ограничение наперед заданного количества итераций. Описаны аспекты численной реализации предложенного подхода с учетом некорректности обратной задачи.

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за поставленную задачу и подходы ее исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00354) и гранта Президента Российской Федерации (проект МК-5440.2016.1).

Плоская автомодельная задача о падении ударной продольной волны
на границу раздела жидкость-твердое тело

Дудко О. В., Манцыбора А. А.

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
manzubor@iacp.dvo.ru*

Несомненный интерес к изучению особенностей распространения механических возмущений в различных средах выражается наличием множества научных трудов, содержащих теоретические и экспериментальные результаты. Среди них можно отдельно выделить исследования, посвященные переходу таких возмущений из одной среды в другую через их границу. Различия в механических свойствах сопряженных материалов, особенности геометрии границы оказывают влияние на характеристики возникающих волновых фронтов.

В представленной работе рассматривается процесс отражения и преломления плоской ударной волны сжатия, приходящей из жидкости на границу раздела с твердым телом. Распространение возмущений в жидкости изучалось экспериментальными методами в работах E. P. Rees, D. H. Trevena, D. C. F. Couzens, D. H. Trevena, V. H. Kenne. В работе T. Balendra и J. Dundurs теоретически рассматривается задача об отражении и преломлении сжимающей волны от границы жидкость-твердое тело с целью изучения процесса зарождения эффекта кавитации. Распространение возмущений в пористых морских средах изучалось A. K. Vashishth и M. D. Sharma.

Решение краевой задачи о распространении плоской продольной ударной волны, движущейся в идеальной жидкости и падающей на твердое тело, проводится в автомодельной постановке. С этой целью скорость падающей волны и угол падения задаются постоянными. Предполагается, что на границе раздела сред существует вязкое трение между частицами жидкости и твердым основанием. В отличие от жидкости, где возможны только объемные волны, возмущения в твердом теле в плоском случае могут распространяться посредством двух волновых фронтов, несущих одновременные изменения объема и формы. Таким образом, единичная падающая из жидкости волна порождает в твердом основании два фронта преломленного волнового пакета. В жидкость же от границы раздела по-прежнему отражается единственная волна. Для решения системы уравнений, описывающей подобный процесс, оказывается необходимым привлечение приближенных численных методов. Основное внимание при решении сосредоточено на распределении энергии после прохождения отраженных и преломленных волн. На границе раздела «жидкость — твердое тело» происходит потеря энергии из-за трения или любой неупругой связи, которая существует в месте перехода.

Численный эксперимент проводился для плоской волны, распространяющейся в морской воде, падающей на базальт. В ходе решения за каждым волновым фронтом рассчитывались значения таких энергетических характеристик, как упругий потенциал и плотность полной энергии. Результаты показали, что большая часть энергии отражается от границы раздела обратно в жидкость, а в твердое тело переходит на порядок меньше.

Возникновение упругих нелинейных волн при нестационарном одноосном сжатии идеальноупругого пористого полупространства

Дудко О. В.

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
dudko@iacp.dvo.ru*

Изучаются особенности распространения нелинейных волн деформаций в пористых материалах, подвергаемых динамическим нагрузкам. Подобные материалы могут рассматриваться как сплошная среда, обладающая свойством разносопротивляемости (т. е. различной податливостью при раскрытых или закрытых порах). Здесь описание такого материала проводится в рамках модели идеальноупругой пористой среды, имеющей в случае одноосного деформирования кусочно-линейную диаграмму «напряжения — деформации» с одной ненулевой особой точкой в области сжатия (В. М. Садовский и О. В. Садовская, 2008). Такую зависимость между напряжениями и деформациями можно задать двумя различными наборами упругих модулей (параметров Ламе) для непрерывных участков диаграммы. При изменении нагрузки модель идеальноупругой пористой среды «переключается» с одного набора констант на другой при переходе через особую точку диаграммы (т. е. в момент упругого схлопывания пор или их раскрытия), из-за чего характеристическая скорость одномерного уравнения движения может принимать два различных значения. Смена значений характеристической скорости в рассматриваемом случае может произойти не только при изменении типа деформированного состояния (растяжение или сжатие, как у разномодульной изотропноупругой среды), но и просто вследствие приложения к границе материала нарастающего сжимающего усилия.

На примере решения краевой задачи о нестационарном одноосном сжатии идеальноупругого пористого полупространства показано, что подобная особенность модельных соотношений может приводить к возникновению таких нелинейных эффектов, как одномерный плоский фронт сильного разрыва (или простой разрыв, согласно терминологии В. П. Маслова и П. П. Мосолова, 1985) и движущийся слой постоянства напряжения, обрамленный волнами ускорений в качестве переднего и заднего фронтов. На простом разрыве скачком происходит увеличение модуля деформации сжатия и соответствующего ему напряжения, расширяющийся слой постоянного напряжения является переходным между областями среды с различными характеристиками. Указаны краевые условия, при которых простой разрыв распространяется с постоянной скоростью, отличной от обоих значений характеристической скорости. Таким образом, полученное решение демонстрирует возможность описания особых волновых эффектов нелинейной динамики деформирования разносопротивляющихся сред в рамках простейших кусочно-линейных моделей теории упругости в приближении малых деформаций.

Конечно-элементное моделирование напряженного состояния в трубе с повреждением из двух дефектов при восстановлении ее состояния накладкой композитного бандажа

Думитреску А.¹, Зекеру Г.¹, Черпаков А. В.^{2,3}

¹ *Университет нефти и газа Плоешти*

² *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

³ *Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*
alex837@yandex.ru

Рассмотрена задача моделирования напряженного состояния поврежденного участка трубопровода при его ремонте наложением композитной оболочки (бандажа). Конечно-элементное моделирование проводилось в комплексе Ansys.

Трубопровод имел внешний диаметр $D = 323.9$ мм. Материал трубы принимался на примере стали марки X52 (европейское обозначение). Моделировались повреждения в виде одного или двух дефектов, имеющие прямоугольную форму. Края дефектов имеют правильную конфигурацию круглой формы определенного радиуса $R = 19$ мм для конкретной модели трубопровода. Особенностью данной модели является то, что область дефектной зоны заполняется в виде композитного заполнителя, имеющего анизотропные свойства по всему объему дефекта. Поверх дефектной зоны, захватывая часть поверхности трубы, накладывается композитная оболочка, имеющая несколько слоев. Один слой композитной оболочки включает в себя клеевой слой толщиной 0.25 мм и слой намотки толщиной 0.5 мм. При моделировании рассматривалось упругое напряженное состояние трубы, нагруженной внутренним давлением. Рассматривалось напряженное состояние трубы для двух вариантов исполнения ее модели: I: модель с дефектом без наложения композитной оболочки; II: модель дефекта с наполнителем и композитной оболочкой. Исследовано неоднородное поле напряжений. Получены характеристики напряженного состояния по двум осям, проходящих через центр дефекта, — по главной оси, направленной вдоль оси трубки, и в радиальном осевом направлении.

Авторы выражают благодарность за поддержку Южному федеральному университету (проект №213.01.-2014/03ВГ), Российскому фонду фундаментальных исследований (16-08-00740, 14-08-00546-А), а также Европейской комиссии, программа Марии Кюри, контракт PIRSES-GA-2012-318874, проект “Innovative non-destructive testing and advanced composite repair of pipelines with volumetric surface defects (INNOPIPES)”.

Взаимодействие разрывов в математической модели капиллярного зонального электрофореза

Елаева М. С.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва
mselaeva@fa.ru

Рассматривается математическая модель массопереноса электрическим полем (капиллярный зональный электрофорез) для двухкомпонентной смеси веществ в бездиффузионном виде. Математическая модель представляет собой систему двух квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка с кусочно-постоянными начальными данными в двух различных пространственных точках. Указанная система приводится к инвариантам Римана и записывается в виде

$$\frac{\partial R^k}{\partial t} + \lambda^k(R^1, R^2) \frac{\partial R^k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

$$\lambda^1(R^1, R^2) = R^1 R^1 R^2, \quad \lambda^2(R^1, R^2) = R^2 R^1 R^2,$$

$$R_0^1(x) = \begin{cases} \mu^1, & x < x^1, \\ q^1, & x^1 < x < x^2, \\ \mu^1, & x^2 < x, \end{cases} \quad R_0^2(x) = \begin{cases} \mu^2, & x < x^1, \\ q^2, & x^1 < x < x^2, \\ \mu^2, & x^2 < x, \end{cases}$$

где q^1, q^2 — заданные константы.

Задачу о распаде разрывов (1) следует дополнить условиями Ренкина — Гюгонио на разрывах и условиями устойчивости Лакса.

В общем случае возможны три типа взаимодействий: ударная волна — ударная волна, фронт волны разрежения — ударная волна и фронт волны разрежения — фронт волны разрежения. В последнем случае возникает задача Гурса с начальными данными, поставленными на характеристиках. Именно такая задача возникает, когда в системе (1) константы q^1, q^2 удовлетворяют условиям: $0 < q^1 < \mu^1 < \mu^2 < q^2$.

С помощью метода годографа получено решение (1) в аналитической форме в виде неявных соотношений

$$t(R^1, R^2) = T_{int} V(q^1, q^2 | R^1, R^2) =$$

$$= \frac{(x^2 - x^1)(2R^1 R^2 + 2q^1 q^2 - (q^1 + q^2)(R^1 + R^2))}{q^1 q^2 (R^1 - R^2)^3},$$

$$x(R^1, R^2) = (x^2 - x^1)(R^1 R^2)^2 \frac{R^2 + R^1 - 2(q^1 + q^2)}{q^1 q^2 (R^1 - R^2)^3} +$$

$$+ \frac{(x^1(R^1)^3 - x^2(R^2)^3) + 3R^1 R^2 (R^2 x^2 - R^1 x^1)}{(R^1 - R^2)^3},$$

где T_{int} — время взаимодействия фронтов двух волн разрежения, $V(q^1, q^2 | R^1, R^2)$ — функция Римана — Грина. Также приведен эффективный численный алгоритм, позволяющий свести решение системы квазилинейных уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

On propagation of interfacial surface waves considering interface energy

Eremeyev V. A.*Rzeszów University of Technology*

veremeyev@prz.edu.pl

We discuss the interfacial antiplane waves localized near microstructured interface describe within the framework of the surface elasticity. In other words, the interface is modelled as a material surface with mass, elastic and inertia properties. The latter depends on the microstructure of the interface. Using direct approach we introduced the interfacial elastic and kinetic energies. Dispersion relations are introduced and analyzed. We analyze the propagation of anti-plane interfacial waves in solids with enhanced interfacial properties similar to presented in [Placidi L., Rosi G., Giorgio I., Madeo A. Reflection and transmission of plane waves at surfaces carrying material properties and embedded in second-gradient materials, *Math. Mech. Solids* 19 (5) (2014) 555–578]. The material in the bulk is described using linear isotropic elasticity or the strain gradient elasticity. It is known that within the framework of the classic elasticity there are no anti-plane surface waves in an elastic halfspace. In other words, the antiplane waves whose amplitude decays exponentially with distance from the surface or interface do not exist. On the other hand for extended models of continua such as media with surface stresses or strain gradient media such waves may exist, see for example [Eremeyev V. A., Rosi G. and Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy. *Mech. Research Communications*, 74 (2016) 8–13] for the case of surface elasticity and [Vardoulakis I. and Georgiadis H. G. SH surface waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy, *J. Elasticity* 47 (2) (1997) 147–165] for the strain gradient elasticity.

The aim of this lecture is to analyze the propagation of interfacial waves localized near plane interface between two half-spaces. The key point of the model is the constitutive equations for the interfacial strain and kinetic energies which leads to the certain compatibility conditions. The model extends the Gurtin-Murdoch model of surface elasticity considering possible discontinuities in displacements and adhesion forces. In the model in addition to the kinetic and strain energy densities in the bulk we introduce the surface stain energy and surface kinetic energy. For the non-perfect interface the surface energy consists of several terms that are related to the Gurtin-Murdoch surface energy and to the energy of adhesion. The latter is similar to energy of the Winkler and Pasternak foundations and describes the influence of discontinuities in displacements. Few examples of interfaces with inner microstructure related with proposed energy are considered. For a plane interface between two halfspaces the dispersion curves are obtained. We demonstrate that the presence of surface elastic properties influence on propagation of surface/interfacial waves. In particular, surface elasticity may result in appearance of new type of waves.

Устойчивость трехслойных плит с предварительно напряженными слоями из материалов Трелоара и Муни — Ривлина

Еремеев В. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

er.vadim@gmail.com

В большинстве исследований потери устойчивости в рамках трехмерной нелинейной теории упругости рассматриваются либо однородные тела, либо неоднородные, неоднородность которых обусловлена различием свойств материала в разных точках среды. Однако, неоднородность деформируемых тел может быть вызвана также неоднородностью распределения начальных (остаточных) напряжений или наличием в теле предварительно напряженных включений. Подобные включения могут образовываться в результате различных искусственных или естественных процессов в отдельных областях тела, примерами которых могут служить фазовые превращения, процессы роста в биологических тканях, химические реакции, пластические деформации и др. Особенностью нелинейно упругих тел с предварительно напряженными включениями является то, что они не имеют единой для всего тела естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации. Единую отсчетную конфигурацию в подобном случае можно выбрать такой, чтобы она была предварительно напряженной для одних частей тела и ненапряженной для остальных.

В работе проведен анализ устойчивости трехслойных прямоугольных плит из несжимаемых моделей материалов Трелоара и Муни — Ривлина. Для каждого материала рассматривается трехслойная плита, строение которой симметрично по толщине, с начальными напряжениями, действующими во внутреннем слое. Потеря устойчивости равновесия исследуется методом наложения малых деформаций на конечные. Сформулирована линеаризованная задача для трехслойной плиты с предварительно напряженным средним слоем, которая использует линеаризованные уравнения состояния различных моделей материалов, линеаризованные уравнения равновесия и граничные условия, дополненные соответствующими линеаризованным условием несжимаемости. Проведен анализ зависимости критических нагрузок от параметров начальной деформации среднего слоя. Показано, что предварительно растянутый средний слой увеличивает абсолютное значение критической нагрузки, а предварительно сжатый наоборот — уменьшает. Исследования выявили, как количественные, так и качественные отличия потери устойчивости плит из различных материалов. Из результатов анализа следует вывод, что начальные напряжения (деформации) меняют не только значения критических нагрузок, но и характер потери устойчивости.

Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания

Численное моделирование транспорта пассивной примеси русловым потоком

Жиляев И. В.¹, Надолин К. А.²

¹Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

nadolin@math.sfedu.ru

Рассматривается перенос пассивной примеси турбулентным русловым потоком с учетом процессов диффузии и распада вещества. Предполагается, что водоток является мелким протяженным и слабо искривленным, а его русло неразмываемое и твердое. Для численного моделирования используется математическая модель, предложенная ранее одним из авторов.

Моделирование русловых потоков на основе полных уравнений гидродинамики и массопереноса требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому разработка и использование упрощенных математических моделей транспорта вещества русловыми течениями является весьма актуальной задачей и привлекает внимание многих исследователей. Следует отметить, что естественные водотоки всегда являются турбулентными, поэтому любая, даже самая упрощенная модель должна учитывать турбулентность течения.

При моделировании распространения пассивной примеси в сдвиговых течениях на основе уравнения конвективного массопереноса в движущейся среде с учетом диффузии и распада вещества необходимо задавать скорость потока жидкости и значение коэффициента диффузии. В случае турбулентного течения процесс диффузии происходит более интенсивно за счет флуктуаций движения жидкости, влекущей транспортируемую примесь. Это существенно усложняет математическую модель процесса и ее численное исследование. Поэтому на практике ограничиваются использованием различных значений для коэффициента диффузии в разных направлениях течения.

В основу предлагаемого подхода к выводу редуцированных уравнений положен тот факт, что русловые потоки характеризуются относительно малой глубиной течения по сравнению с его шириной, а также значительной протяженностью. Отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеблется в пределах от 0.1 до 0.005, что может быть основой применения методов малого параметра. Подходы, использующие малый параметр, приводят к рекуррентным последовательностям модельных задач, что позволяет при необходимости повысить точность моделирования. Переход к осредненным величинам дает возможность понизить размерность возникающих математических моделей, а подбор коэффициентов позволяет провести их калибровку и согласовать с имеющимся экспериментальным материалом.

Уравнения используемой редуцированной математической модели описывают течение в русловом потоке как пространственно трехмерный процесс, при этом они существенно проще полных трехмерных уравнений, а в некоторых случаях — и двумерных. В отличие от распространенных осредненных моделей, предлагаемые модели учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности течения и массопереноса.

Построение явного решения для некоторого класса квазилинейных уравнений

Жуков М. Ю.^{1,2}, Ширяева Е. В.¹, Щитов Ф. А.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ

shir@math.sfedu.ru

Представлен метод построения явного решения для некоторых систем квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка, описывающих в бездиффузионном приближении широкий круг процессов переноса массы в многокомпонентных смесях, таких как электрофорез, хроматография, центрифугирование, седиментация, которые имеют вид

$$\partial_t u^k + \partial_x(\mu^k u^k E) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $u^k(x, t)$ — концентрации компонент смеси, μ^k — скорости переноса компонент, $E(u^1, \dots, u^n)$ — интенсивность внешнего поля.

Характерной особенностью системы является зависимость интенсивности внешнего поля E от «коллективного» взаимодействия компонент смеси

$$E = \frac{E_0}{1 + s}, \quad s = \sum_{k=1}^n u^k, \quad E_0 = \text{const.}$$

Для исходной системы, записанной в инвариантах Римана R^k , поставлена задача Коши, которая имеет вид

$$\partial_t R^k + \lambda^k(\mathbf{R}) \partial_x R^k = 0, \quad \lambda^k = R^k \prod_{j=1}^n R^j, \quad R^k(x, 0) = R_0^k(x), \quad k = 1, \dots, n.$$

Неявное решение записывается при помощи обобщенного метода годографа

$$x - \lambda^i(\mathbf{R})t = w^i(\mathbf{R}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Предложен эффективный способ конструирования коммутирующих потоков $w^i(\mathbf{R})$, основанный на использовании аппарата разделенных разностей. Коммутирующие потоки в общем случае зависят от n неизвестных функций одной переменной и определяются начальными данными задачи. Разработан метод построения явного решения путем введения лагранжевых координат, сохраняющихся на характеристиках λ^k , который позволяет сводить решение задачи Коши для системы уравнений в частных производных первого порядка к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Примечательно, что метод построения явного решения не использует конечно-разностные, конечно-элементные и иные аппроксимации исходных уравнений, и его точность фактически ограничена точностью интегрирования задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобный метод может быть использован для решения аналогичных квазилинейных уравнений, допускающих представление в инвариантах Римана и являющихся полугамильтоновыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Математическая модель интрастромальной коррекции формы роговицы глаза

Журавлев А. Б.¹, Ирошников Н. Г.^{2,3}, Никитин И. С.^{4,5}, Якушев В. Л.⁵

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

³ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Москва

⁴Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

⁵Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

i_nikitn@list.ru

В работе предложена механико-математическая модель интрастромальной коррекции формы роговицы глаза при кератоконусе. Кератоконус (от др.-греч. *κερας* — «рог» и *κωνος* — «конус») — заболевание глаза, при котором роговица принимает коническую форму. Кератоконус может привести к серьёзному ухудшению зрения.

Суть операции коррекции формы роговицы состоит в следующем. В ходе операции фемтосекундным лазером в структуре роговице выполняют два полукруглых микроканала для последующего помещения туда имплантов. Импланты представляют собой два кольцевых сегмента с радиусом, большим, чем радиус подготовленных каналов. Материал имплантов — полиметаметилкрилат. Эти гибкие кольцевые сегменты, вставленные в микроканалы, стремятся восстановить свою начальную форму, тем самым деформируя и растягивая роговицу. Предполагается, что при растяжении роговицы может разгладиться дефект ее формы — кератоконус.

Разработанная механико-математическая модель коррекции кератоконуса состоит в решении задачи совместного контактного деформирования гибких кольцевых сегментов и роговицы глаза. Деформирование кольцевых сегментов описывается дифференциальным уравнением изгиба криволинейного стержня, а деформирование роговицы глаза с дефектом рассчитывается методом конечных элементов как трехмерная упругая задача для слоя сферического сегмента со сглаженным коническим выступом на вершине. На основе этой модели разработан программный комплекс, позволяющий оценивать геометрические и механические параметры кольцевого сегмента, вставляемого в роговицу для коррекции дефекта. Была создана геометрическая модель склеры глаза и роговицы с рассматриваемым дефектом кератоконуса. Этот дефект может располагаться как на оси роговицы (создавая «конусность» ее формы), так и сместиться с оси на какой-то участок ее боковой поверхности. Основные расчеты проводились для треугольного сечения кольцевого сегмента, используемого в медицинской практике. При этом было учтено внутреннее глазное давление на склеру и роговицу. Расчеты показали, что процедура наиболее эффективна для коррекции дефекта при его центральном положении на оси роговицы. Для коррекции дефекта при его смещенном положении необходим индивидуальный подбор уровня расположения импланта, его угла раствора и начального радиуса кривизны.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 15-29-03895офи_м.

Моделирование механического поведения уплотнительных элементов из терморасширенного графита для трубопроводной арматуры

Зайцев А. В., Зубко И. Ю., Кокшаров В. С., Судаков И. А.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
zav@pstu.ru, zoubko@list.ru, koksharovvs@gmail.com, sudakov-ia@yandex.ru

Терморасширенный графит (ТРГ) — уникальный материал, который даже при повышенных температурах, термоциклировании и контакте с агрессивными средами обладает высокими деформационными свойствами, термо-химической стойкостью и низким коэффициентом трения. Уплотнительные элементы (УЭ) из ТРГ, к числу которых относятся уплотнительные кольца (УК) и сложные разборные конструкции, надежны, не требуют дополнительной герметизации при эксплуатации, работают при температурах до 560 °С и давлениях до 40,0 МПа в кранах с уплотнениями по штоку и во фланцевых соединениях трубопроводов. Разработана модель начального режима работы УК и УЭ из ТРГ для трубопроводной арматуры большого диаметра, учитывающая цилиндрическую анизотропию, экспериментально определенные упругие и прочностные характеристики ТРГ. Контактное давление определялось экспериментально на основе разработанной методики с использованием ультратонких пленок Fuji Prescale, размещаемых в зоне контакта. Получены новые численные решения задач для отдельных колец и их пакетов в режиме «приработки». квазистационарных условиях без износа, проведена оценка начальной прочности при различных температурах и давлениях рабочей среды, различной толщине и количестве УК в сальниковой камере, различных режимах возвратно-поступательного и вращательного движения штока, а также различных условиях на поверхностях контакта.

Основной причиной выхода из строя трубопроводной арматуры является протечка во фланцевых соединениях, герметичность которых достигается путем точной установки УЭ, заданными моментами затяжки шпилек, обеспечивающих однородность давления по всей площади контакта, «жесткими» требованиями по шероховатости и отклонениям от параллельности поверхностей фланца. Для повышения прочности и износостойкости, было предложено новое конструктивное решение — армирование ТРГ перфорированной металлической пластиной (были определены эффективные свойства и коэффициенты концентрации напряжений), вызвавшей неоднородность распределения давления на поверхности контакта УЭ и фланца, что было подтверждено качественным и количественным совпадением результатов тестовых расчетов и натуральных испытаний с использованием пленок Fuji Prescale на стенде для гидравлических испытаний на герметичность фланцевых уплотнений СИГ–1.400. Было показано, что перепады давлений, вызванные неоднородностью армированного УЭ, не оказывают влияния на эксплуатационные характеристики, а неоднородность контактного давления, вызванная отклонением от параллельности поверхностей фланца, приводит к значительным перепадам давлений и разгерметизации.

Работа выполнена в рамках задания №2015/152 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (код проекта — 1911).

Аналитические решения задач о равновесии анизотропных тел с центральной симметрией, находящихся под действием массовых сил, и их приложения к задачам механики геологических сооружений

Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
zav@pstu.ru, sokolkin@pstu.ru, mr_aa@mail.ru

В строительстве и геологии находят применение конструкции и сооружения сферической формы, изготовленные из анизотропных материалов, для которых возникает потребность в решении краевых задач. Примерами служат задачи определения прочностного анализа монолитных крепей горных выработок, предназначенных для хранения и добычи полезных ископаемых, при решении которых необходимо учитывать центральную симметрию, равномерно и/или неравномерно распределенные внешнее и/или внутреннее давление. Получение новых аналитических решений важно и актуально для разработки инженерных методов уточненного прочностного анализа, для тестирования численных алгоритмов решения более сложных задач, в которых отдельные элементы конструкций и сооружений имеют аналогичную геометрию и граничные условия, а также для отработки методик эксперимента с тяжелыми телами простейшей геометрии.

Используя разложение компонент вектора перемещений по окружной и радиальной координате в тригонометрические и обобщенные степенные ряды и рассматривая монолитную железобетонную крепь сферической горной выработки и окружающий массив осадочных горных пород как единую механическую систему, получены новые точные аналитические решения задач о равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления с жестко закрепленной или ограниченной по перемещениям только в радиальном направлении внешней поверхностью. Описано влияние окружающего массива осадочных пород на монолитную крепь сферической горной выработки и окружающего массива горных пород, а также проведена оценка начальной прочности крепи на основе многокритериального подхода. Рассмотрев монолитную крепь горной выработки и окружающий породный массив, как единую механическую систему (предполагая, идеальное сопряжение по сферической поверхности контакта) и, применив метод, основанный на разложении компонент вектора перемещений по окружной и радиальной координате в ряды по полиномам Лежандра и обобщенные степенные ряды, получены новые точные аналитические решения задач о равновесии «тяжелых» составных сфер, находящихся под действием внутреннего давления, и жестко закрепленной или закрепленной только в радиальном направлении (при наличии скольжения без трения) внешней поверхностью. Из полученных решений в частном случае следуют выражения для перемещений, напряжений и деформаций в точках полых и составных изотропных сфер, находящихся в поле гравитационных сил, на внутренней и внешней поверхностях которых заданы аналогичные граничные условия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ-Урал №14-01-96029).

Решение задачи линейной вязкоупругости для однородных и кусочно-однородных плит

Занько А. И., Калоеров С. А., Кошкин А. А.

Донецкий национальный университет

all5370@rambler.ru, kaloerov@mail.ru, koshkin.andrey.aleksandrovich@gmail.com

Рассматривается тонкая многосвязная однородная или кусочно-однородная анизотропная плита, находящаяся в условиях, описываемых прикладной теорией изгиба тонких плит. Материал плиты обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости. Методом малого параметра рассматриваемая задача сводится к последовательности краевых задач классической прикладной теории изгиба плит, решаемых с использованием комплексных потенциалов для многосвязных анизотропных плит. Получены общие представления комплексных потенциалов приближений, краевые условия для их определения; заменой степеней малого параметра операторами Работнова разработан механизм определения напряженного состояния плиты в любой момент времени по комплексным потенциалам приближений. Изотропные плиты рассматриваются как частный случай анизотропных. В качестве примера дано решение задачи для плиты с эллиптическими отверстиями, которые могут касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы, образовывать контуры отверстий сложной конфигурации. Отверстия могут быть подкреплены упругими включениями.

При решении задач комплексные потенциалы приближений представляются рядами Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, для определения которых из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений, псевдорешение которой находится методом сингулярных разложений.

Проведены численные исследования для плиты с одним или двумя отверстиями или включениями. Установлено, что с течением времени значения моментов в плите изменяются. При этом значительные изменения значений моментов происходят лишь в первые 50 ч после приложения нагрузки, а через 200 ч они практически не изменяются, т. е. в плите устанавливается стационарное состояние. При переходе в стационарное состояние значительные изменения претерпевают значения изгибающих моментов вблизи отверстия. С уменьшением расстояния между отверстиями значения изгибающих моментов в зоне между отверстиями растут уже в упругой постановке, а при переходе в стационарное состояние они претерпевают большие изменения. Если расстояние между отверстиями больше их диаметра, то влияние одного отверстия на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь. Максимальные значения изгибающих моментов в анизотропной плите оказываются больше, чем в изотропной. Для изотропного материала полученные результаты совпадают с известными в литературе как в линейной постановке, так и с учетом вязкоупругих свойств. В случае подкрепления отверстий упругими включениями на значения моментов существенно влияют жесткости материалов включений. При этом влияние геометрических и упругих характеристик плиты на значения моментов такие же, как и для плиты без включений.

Конечные деформации упругого полого цилиндра с распределенными дислокациями

Зеленина А. А.¹, Зубов Л. М.²

¹*Ростовский государственный университет путей сообщения*

²*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

a.zelenina@gmail.com

Система уравнений нелинейной континуальной теории дислокаций состоит из уравнений несовместности $\text{rot}\mathbf{C} = \alpha$ относительно тензора дисторсии \mathbf{C} , уравнений равновесия $\text{div}\mathbf{D} = 0$ для несимметричного тензора напряжений Пиолы \mathbf{D} и определяющих соотношений упругого материала $\mathbf{D} = \Phi(\mathbf{C})$. Тензорное поле плотности дислокаций α считается заданным и должно удовлетворять требованию соленоидальности $\text{div}\alpha = 0$. Введем цилиндрические координаты r, φ, z и отвечающие им единичные базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, которые направлены по касательным к координатным линиям. Здесь первый индекс соответствует радиальной координате, второй — угловой, третий — осевой. Предположим, что тензор плотности дислокаций задан в виде $\alpha = \alpha_{sk}(r)\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_k$ и будем разыскивать решение задачи в аналогичной форме $\mathbf{C} = C_{sk}(r)\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_k, \mathbf{D} = D_{sk}(r)\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_k$. Тогда из тензорного уравнения несовместности с учетом соленоидальности тензора α в явном виде находятся функции $C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{23}$. Остальные пять компонент тензора дисторсии определяются из системы пяти обыкновенных дифференциальных уравнений: двух уравнений несовместности и трех уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{dC_{21}}{dr} + \frac{C_{12} + C_{21}}{r} &= \alpha_{31}, & \frac{dC_{22}}{dr} + \frac{C_{22} - C_{11}}{r} &= \alpha_{32} \\ \frac{dD_{11}}{dr} + \frac{D_{11} - D_{22}}{r} &= 0, & \frac{dD_{12}}{dr} + \frac{D_{12} + D_{21}}{r} &= 0, & \frac{d}{dr}(rD_{13}) &= 0 \end{aligned}$$

На внутренней и внешней боковых поверхностях цилиндра могут быть заданы равномерно распределенные нормальные и касательные нагрузки. Для полученной нелинейной краевой задачи найден ряд точных решений. В рамках модели полулинейного материала решена задача Ляме о нагружении цилиндрической трубы внутренним и внешним давлениями с учетом краевых дислокаций, распределенных с плотностью $\alpha = \gamma(r)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2$, где $\gamma(r)$ — произвольная функция. В классе изотропных несжимаемых материалов построены универсальные решения о больших деформациях полого цилиндра с распределенными дислокациями. Установлено, что в цилиндре с плотностью дислокаций

$$\alpha = \frac{\sin \chi_0}{r}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + \frac{\cos \chi_0 - 1}{r}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \chi_0 = \text{const}$$

при отсутствии внешних сил реализуется квазитвердое состояние, характеризующееся нулевыми напряжениями и неоднородным полем вращений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-01492).

Параметрическая термоупругая неустойчивость
в связанной квазистатической задаче термоупругости
о скользящем фрикционном контакте с разогревом от трения

Зеленцов В. Б., Митрин Б. И.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону
vبزelen@gmail.com, bmitrin@dstu.edu.ru

Рассматривается связанная контактная задача термоупругости о скольжении жесткого тела в виде полуплоскости по поверхности упругого покрытия с учетом трения и тепловыделения от трения. Задача рассматривается в квазистатической постановке. Скорость скольжения полуплоскости постоянна, покрытие сцеплено с жесткой подложкой, работа сил трения переходит в тепло, которое полностью поступает в покрытие, осуществляя его разогрев. Решение поставленной задачи осуществляется с помощью интегрального преобразования Лапласа и сводится к вычислению контурных квадратур обратного преобразования Лапласа для температуры, смещений и напряжений, как на контакте, так и по глубине покрытия.

Для вычисления полученных квадратур методами теории функций комплексного переменного изучаются свойства подынтегральных функций. Подынтегральные функции контурных квадратур в комплексной плоскости переменной интегрирования являются мероморфными функциями и имеют в качестве изолированных особых точек счетное множество полюсов, располагающихся на действительной оси. Подынтегральные функции в квадратурах для температуры, напряжений и смещений неубывают на бесконечности — остаются постоянными, а квадратуры, их содержащие, понимаются в обобщенном смысле. После регуляризации подынтегральных функций в квадратурах решения задачи записываются в виде суммы регулярной составляющей обобщенной части и свертки Лапласа. После вычисления сверток решение задачи записывается в виде функциональных рядов по полюсам подынтегральных функций. Полюса подынтегральных функций зависят от трех безразмерных параметров задачи, что позволяет достаточно эффективно с помощью численно-аналитических методов определить их расположение вдоль действительной оси.

Анализ полученных решений в пространстве тех же безразмерных параметров позволяет определить и изучить области устойчивых и неустойчивых решений задачи, основные свойства устойчивых и неустойчивых решений задачи. С помощью численного анализа полученных решений изучается влияние размерных параметров задачи на температуру и напряжения как на контакте, так и по глубине покрытия. Устанавливается влияние начальной температуры на полученные решения, которые сравниваются с решениями соответствующей несвязанной задачи термоупругости о скользящем контакте.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-07-00271-а, 14-07-00705-а, 16-07-00929-а).

Осесимметричная модель механодиффузии для изотропной плоскости

Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)**Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

azemskov1975@mail.ru, tdvhome@mail.ru

При исследовании нестационарных процессах в сплошных средах зачастую требуется учет различных взаимодействующих между собой полей: механических, тепловых, электрических, магнитных и диффузионных. Изменяющееся во времени поле деформаций вызывает изменение поля температуры, и наоборот. Кроме того, наличие диффузионных потоков приводит к перераспределению компонентов вещества, поэтому в диффузионной зоне возникает напряжённо-деформированное состояние, которое в свою очередь за счет деформации кристаллической решетки влияет на величину диффузионного потока. Также, взаимное влияние оказывают друг на друга и другие поля, проявляющиеся в виде электромагнитных волн, нагрева проводников, пьезоэффекта и обратного пьезоэффекта, термоэлектрических эффектов (явления Зеебека, Пельтье, Томпсона) и электрострикции, магнитоупругих эффектов и магнитоэлектричества, электродиффузии и т. д.

В зависимости от геометрии области бывает целесообразно рассматривать задачи механики в криволинейных системах координат. Так, например, для пространственных задач, если область решения задачи имеет форму цилиндра (сплошной цилиндр или цилиндрическая полость), то будет удобно строить математическую модель в цилиндрических координатах. Кроме того, сюда относится и задача для пространства, как предельный случай задачи для цилиндра при стремлении его радиуса к бесконечности.

В работе рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния изотропной среды, находящейся под влиянием нестационарных объемных упруго-диффузионных возмущений. Предполагается, что физические поля являются осесимметричными, поэтому в качестве математической модели используется связанная система уравнений упругой диффузии в цилиндрической системе координат. Начальные условия полагаются нулевыми.

Решение задачи ищется в интегральной форме и представляется в виде сверток функций Грина рассматриваемой задачи с правыми частями уравнений движения и массопереноса. Для этого к исходной системе уравнений последовательно применяется преобразование Лапласа по времени, преобразование Ганкеля и разложение в ряды Фурье по угловой координате. Из полученной таким образом системы линейных алгебраических уравнений находятся трансформанты Ганкеля-Лапласа компоненты вектора перемещений и приращения концентрации диффузанта. Эти трансформанты являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа и переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью теоремы о вычетах. Обращение трансформант Ганкеля осуществляется численно с помощью квадратурных формул.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161).

Уравнения движения микрополярных упругих оболочек в эйлеровых координатах

Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

zubovl@yandex.ru

Формулируются уравнения динамики упругих оболочек типа Коссера, испытывающих большие деформации. За независимые переменные принимаются эйлеровы координаты на круговом цилиндре и время, а одной из неизвестных функций является расстояние от точки поверхности оболочки до оси цилиндра. Уравнения динамики нелинейно упругих оболочек в эйлеровых координатах удобны при точной постановке задачи взаимодействия сильно деформируемых оболочек с движущимися жидкостями и газами. Полученные в представленной работе уравнения могут быть использованы для динамических расчетов процессов протекания жидкостей и газов в трубопроводах, кровеносных сосудах, шлангах и других нелинейно деформируемых тонкостенных трубчатых элементах конструкций.

В нелинейной теории оболочек, испытывающих большие деформации, повороты и перемещения, как правило, используются только материальные координаты, в качестве которых принимаются некоторые гауссовы координаты на срединной поверхности оболочки в ее отсчетной конфигурации. Однако материальное описание движения оболочки пригодно не всегда. При лагранжевом подходе к уравнениям оболочек в условиях конечных перемещений затруднительно, например, строгая и общая постановка задачи о взаимодействии оболочек и движущейся жидкости. Изучая взаимодействие оболочки и жидкости в условиях больших деформаций оболочек, обычно используют совместный лагранжево-эйлеров подход, при котором уравнения движения жидкости записываются в эйлеровых координатах, а уравнения движения оболочки — в лагранжевых координатах. Такой подход дает возможность только приближенной постановки условий сопряжения оболочки и жидкости.

В докладе выводятся нелинейные уравнения динамики упругих оболочек типа Коссера, основанные на эйлеровом описании движения поверхности. Предположим, что срединная поверхность σ оболочки в отсчетной (недеформированной) конфигурации однозначно проектируется на некоторую поверхность π , и зададим поверхность σ функцией $s(\eta^1, \eta^2)$, где η^α , ($\alpha = 1, 2$) — произвольные координаты на π , s — расстояние точки поверхности σ от поверхности π , отсчитанное по нормали к π . Пусть срединная поверхность Σ деформированной оболочки также однозначно проектируется на некоторую фиксированную поверхность Π , в которой введены координаты q^β ($\beta = 1, 2$). Определим положение точки на Σ в момент времени t расстоянием $S(q^1, q^2, t)$, отсчитываемым от неподвижной поверхности Π по нормали к Π . Движение поверхности Σ можно описать функциями $q^\beta(\eta^\alpha, t)$, $S(q^\beta, t)$. Параметры η^α являются лагранжевыми, а параметры q^β — эйлеровыми координатами деформирующейся поверхности. Уравнениями динамики оболочек в эйлеровых координатах называются такие уравнения, в которых независимыми переменными служат эйлеровы координаты q^β и время t , а одной из неизвестных функций является $S(q^\beta, t)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (15-01-01492)

Численное исследование напряженно-деформированного состояния системы кость — фиксатор при околосуставных переломах проксимального отдела бедренной кости

Иванов Д. В.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

ivanovdv@gmail.com

Одной из наиболее важных медицинских, социальных и экономических проблем, стоящих перед травматологами, является скорейшее возвращение пострадавших вследствие производственного и бытового травматизма к активному способу жизни. В настоящее время в оперативной ортопедии и травматологии широко применяются различные металлические конструкции, а также аппараты, обеспечивающие надежное стабильное удержание отломков костей в заданном положении. Эти конструкции можно условно разделить на три группы: интрамедуллярные фиксаторы, накостные конструкции и компрессионно-дистракционные аппараты. Интрамедуллярный остеосинтез подразумевает использование различных металлических стержней и винтов. При интрамедуллярном остеосинтезе стремятся обеспечить стабильное соединение костных отломков, не требующее дополнительной послеоперационной гипсовой иммобилизации. В данной работе исследованы проксимальные блокируемые интрамедуллярные фиксаторы, обеспечивающие фиксацию отломков бедра при околосуставных переломах. Был рассмотрен перелом типа 31-A1 (в соответствии с классификацией АО/ASIF), как наиболее простой из переломов вертельной зоны. С математической точки зрения решалась статическая задача теории упругости. В поставленной задаче граничные условия имели смешанный вид. Считалось, что материалы костных отломков и фиксаторов являлись линейно упругими и изотропными. При контакте между винтами и костью, стержнем и костью использовался тип bonded (склейка), запрещающий относительные перемещения контактирующих поверхностей. Для контакта между костными отломками выбран тип no separation (без разделения), разрешающий тангенциальные перемещения контактирующих поверхностей друг относительно друга (поверхности скользят без трения, а нормальные перемещения запрещены). В результате численного исследования напряженно-деформированного состояния системы «кость-фиксатор» при околосуставных переломах проксимального отдела бедренной кости, выявлено, что модели фиксаторов PFN и PFNA испытывают практически одинаковые перемещения при рассчитанных осевых, поперечных и скручивающих нагрузках. Максимальные перемещения для фиксаторов PFN и PFNA возникают в головке бедренной кости при осевой силе 700 Н (0.64 мм и 0.63 мм). В случае поперечной нагрузки величиной 100 Н максимальные перемещения головки бедра для PFN составили 0.39 мм, а для PFNA — 0.38 мм. При скручивающем моменте величиной 10 Н*м максимальное перемещение для PFN и PFNA достигло 0.053 и 0.051 мм соответственно. Численный эксперимент показал, что стержни PFNA и PFN обеспечивают практически одинаковую стабильность фиксации переломов. Результаты расчетов показали равномерное распределение контактного давления между костными отломками в случае системы кость-фиксатор при блокирующем интрамедуллярном стержне PFNA и неравномерное при фиксаторе PFN.

Особенности применения метода лучевых рядов к одной двумерной задаче ударной деформации несжимаемого упругого полупространства

Иванова Ю. Е.^{1,2}, Рагозина В. Е.¹

¹*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток*

²*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

ivanova@iacp.dvo.ru, ragozina@vlc.ru

Задачам ударного деформирования в твердом теле посвящено большое число исследований. Из них известны наиболее общие свойства движения ударных волн: зависимость скорости переднего фронта от напряженно-деформированного состояния среды в его окрестности, влияние друг на друга процессов объемного и сдвигового деформирования, определяемая только в процессе решения поставленной краевой задачи геометрия передних волновых фронтов и расходимость лучевых линий и т. д. Перечисленные проявления нелинейного характера процессов ударного деформирования при переходе к решению конкретных краевых задач приводит к необходимости использования приближенных методов, таких как метод малого параметра, метод лучевых рядов в своем варианте, адаптированном для ударных волн. На сегодня известно много приложений лучевого метода к наиболее простым одномерным задачам ударного деформирования. Дальнейшее развитие лучевого метода обязательно должно быть связано с переходом к неодномерным динамическим процессам. В настоящей работе предлагается решение двумерной задачи плоской ударной деформации несжимаемой нелинейно упругой среды. Вследствие присутствия в краевой задаче ударной волны теряется возможность применения классической схемы лучевого метода за счет нарушения рекуррентности бесконечной цепочки дифференциальных уравнений затухания. С целью снятия такого ограничения ранее был разработан модифицированный метод лучевых рядов. Данная модификация включает дополнительные внутренние ряды, задающие каждый из разрывов, имеющих место на переднем фронте ударной волны и являющихся коэффициентами основных лучевых разложений. Нелинейность и многомерность процесса деформации приводят к расходимости лучевых направлений, изменению геометрии ударной волны, которые нельзя задать без согласования с основным решением для поля деформаций. Условие несжимаемости, записанное в разрывах, необходимо учитывать наряду с остальными уравнениями лучевого метода. Все перечисленные особенности двумерной чисто сдвиговой деформации изучаются на примере задачи об ударе по границе предварительно недеформированного нелинейно упругого несжимаемого полупространства с краевым условием, заданным в касательных перемещениях, зависящих от координат вдоль границы. В работе получены уравнения движения, уравнения затухания на ударной волне, лучевые ряды для поля перемещений, приближенные формулы для определения геометрии лучевых направлений и ударной волны.

Тонкое жесткое межфазное включение с трещиной на части поверхности

Иванова А. В., Сильвестров В. В.

*Российский государственный университет нефти и газа (национальный
исследовательский университет) им. И. М. Губкина, Москва
v-silvestrov@yandex.ru*

Аналитическими методами решается плоская задача о тонком жестком остроконечном включении, расположенном между разными упругими материалами, занимающими две полуплоскости, дополняющие друг друга до полной плоскости. На одной из поверхностей включения имеется открытая трещина, которая примыкает к вершине включения и занимает лишь часть поверхности. На берегах трещины и на бесконечности действуют заданные напряжения, на включение действуют внешние силы, имеющие заданные главный вектор и момент. С помощью формул Колосова — Мусхелишвили в интерпретации Г. П. Черепанова задача сводится к матричной краевой задаче Римана с кусочно-постоянным коэффициентом, решение которой строится явно методом конформных отображений и записывается через гипергеометрическую функцию Гаусса. Находятся явно комплексные потенциалы, угол поворота включения. Исследуется поведение напряжений вблизи вершин включения и трещины. Особое внимание уделяется поведению напряжений вблизи точки, являющейся одновременно как вершиной включения, так и трещины. Вблизи этой точки напряжения имеют степенно-осциллирующую особенность и интенсивность напряжений определяется четырьмя коэффициентами. Приводятся явные формулы для коэффициентов интенсивности напряжений вблизи указанной точки, вблизи вершины трещины, расположенной на поверхности включения, и вблизи второй вершины включения. На конкретных числовых примерах в случае прямолинейного включения изучается зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от упругих параметров материалов, относительной длины трещины и силовых параметров задачи (напряжений на бесконечности, главный вектора и момента действующих на включение внешних сил). Рассматривается модель распространения трещины вдоль поверхности включения до достижения ее второй вершины включения. Предполагается, что плоскость растягивается на бесконечности медленно растущим нормальным напряжением, в результате чего происходит скачкообразный рост трещины вдоль поверхности включения. В качестве количественного параметра роста трещины принимается модуль комплексного коэффициента интенсивности напряжений в расположенной на поверхности включения вершине трещины. При достижении этого модуля «верхнего» критического значения происходит локальное скачкообразное увеличение длины трещины вдоль поверхности включения на заданную характерную величину или до уменьшения значения модуля коэффициента интенсивности напряжений до «нижнего» критического значения.

Трёхмерные моды в задаче Тэйлора — Куэтта с радиальным потоком

Ильин К. И.¹, Моргулис А. Б.^{2,3}¹Йоркский университет²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону³Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ

morgulisandrey@gmail.com

Пусть вязкая несжимаемая и однородная жидкость прокачивается сквозь зазор между двумя соосными проницаемыми пористыми цилиндрами радиусов $r_1 < r_2$, вращающиеся с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 , причём расход жидкости равен Q . Тот цилиндр, через который жидкость вводится (выводится) назовём входом (выходом). Если вход лежит внутри выхода, то течение назовём сходящимся, иначе — расходящимся. Граничные условия (в безразмерной форме) запишем в виде

$$u|_{r=1} = \beta, \quad u|_{r=a} = \beta/a, \quad v|_{r=1} = \gamma_1, \quad v|_{r=a} = \gamma_2/a, \quad w|_{r=1,a} = 0,$$

где u, v и w — радиальная, азимутальная и осевая скорости жидкости, $a = r_2/r_1 > 1$, r_1, r_2 — радиусы цилиндров; $\gamma_i = \Omega_i r_i^2 / Q$, $i = 1, 2$, Q — расход жидкости; $\beta = +1$ соответствует расходящемуся течению, $\beta = -1$ — сходящемуся. При этом уравнения Навье-Стокса зависят от радиального числа Рейнольдса

$$Re = Q/\nu.$$

. Указанные граничные условия определяют семейство плоских течений

$$U = \frac{\beta}{r}, \quad V = Ar^{\beta Re+1} + \frac{B}{r}; \quad W = 0, \quad Re = \frac{Q}{\nu};$$

$$A = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{a^{\beta Re+2} - 1}, \quad B = \frac{a^{\beta Re+2} \gamma_1 - \gamma_2}{a^{\beta Re+2} - 1}, \quad \beta Re \neq -2.$$

где через U, V обозначены радиальная и азимутальные скорости, соответственно, и При $Re \rightarrow \infty$, указанные течения стремятся к невязкому течению, создаваемому прямолинейной нитью вихреисточников/стоков, совмещённой с общей осью цилиндров, а у выхода потока возникает погранслои. Интенсивность нити при этом равна $\beta + \gamma_{in}$, $\gamma_{in} = \gamma_1$ в случае источника, и $\gamma_{in} = \gamma_2$ в случае стока.

Fujita H., Morimoto H. и Okamoto H. (1997) рассмотрели устойчивость течений (U, V) относительно плоских возмущений. Они доказали невозможность монотонной неустойчивости, и численно установили, что колебательная неустойчивость имеет место при умеренных $Re < \infty$, если вход вращается достаточно быстро. Gallet, Doering и Spiegel (2010) рассмотрели асимптотику узкого зазора для сходящихся течений с неподвижным выходом ($\gamma_1 = 0$), точнее два различных предела: $Re \rightarrow \infty$, $a - 1 \sim \sqrt{Re}$, $\gamma_2 \sim Re^p$, $p = 1, 2$.

В настоящем сообщении мы развиваем результаты [1], в частности, включаем в рассмотрение произвольные течения вида (2), исследуем трёхмерные моды, и устраняем ограничение узкого зазора. Важную роль при этом играет предел $Re \rightarrow \infty$, где в отличие от [1], все прочие параметры произвольно фиксированы.

Моделирование работы шестеренного насоса с использованием технологии наложения сеток в ANSYS CFX

Ильиных Г. В., Сметанников О. Ю.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
ilinykh.pnpu@yandex.ru, sou2009@mail.ru

Эксплуатация шестеренных насосов связана с экстремальными режимами работы (высокая скорость, большой перепад давления), следствием которых может являться кавитационный износ деталей. Определенная модификация насоса (в первую очередь изменение формы подпятников, подшипников и зубьев шестерен) позволяет исключить или минимизировать износ. Анализ гидродинамического поведения компрессорных машин, а также влияния изменения геометрии деталей на их работу, проводится с помощью различных методов вычислительной гидродинамики. Однако численное моделирование работы насосов с подвижными деталями значительно осложняется из-за необходимости учета движения и деформаций расчетной сетки.

В работе апробирован метод наложения сеток, позволяющий исключить деформацию расчетной сетки, включив в модель наложенные сетки подвижных шестерен насоса. Наложение расчетные сетки используются для определения границ шестерен и описания поведения среды вблизи их за счет включения дополнительного члена в уравнения Навье — Стокса. На основе данного метода в программном модуле ANSYS CFX (встроенная технология — Immersed solid) смоделирована работа шестеренного насоса заданной конфигурации для двух режимов работы.

Исследованы и представлены достоинства и недостатки метода наложения сеток на примере тестовых задач. Так, в частности, в работе отмечено, что использование технологии наложения сеток приводит к искажению в распределении характеристик течения (поля скоростей и давления). В то же время, исключение твердой стенки зубьев шестерен связано с частичным проникновением потока в зону шестерен, что улучшает сходимость численного решения.

Решена нестационарная задача гидродинамики с использованием метода наложения сеток и модели Рэлея — Плессета, необходимой для описания эффекта кавитации. Получено численное решение, представляющее собой стационарный режим работы шестеренного насоса. Показано, что построенная модель верно отражает качественную картину распределения параметров потока, моделирует зоны повышенного и пониженного давления, а также зоны кавитационного воздействия на зубья шестерен. Исследованы зоны появления кавитации, возникающие вблизи зубьев и подпятников шестеренного насоса, следствием которых является износ данных деталей.

Проведена верификация численной модели на основе данных о расходе насоса и локальном износе подпятников, подшипников и зубьев шестерен. Показано, что зоны кавитации соответствуют зонам эрозионного разрушения деталей насоса.

Многоуровневая модель исследования фильтрационных свойств армирующего каркаса полимерных композитов

Ильиных Г. В.¹, Сметанников О. Ю.²

¹*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

²*Пермский государственный национальный исследовательский университет*
ilinykh.pnpu@yandex.ru, sou2009@mail.ru

Предметом исследования являются полимерные композиционные материалы, изучение особенностей изготовления и эксплуатации которых создает необходимую основу для их успешного применения в аэрокосмической отрасли.

Актуальной, ввиду роста объемов использования таких материалов, стала проблема расчетной оценки конструкционной прочности многослойных армированных пластиков на этапе проектирования. Ее решение связано с целым комплексом задач и отличается большой сложностью, обусловленной, в частности, многообразием механизмов разрушения армированных пластиков, анизотропией материалов, значительным числом варьируемых переменных, а также возможным присутствием дефектов различного характера. Наиболее часто встречаемыми дефектами в конструкции деталей авиационной техники являются смоляные карманы, поры, складки (или волны в одном или нескольких слоях) и расслоения. Такие дефекты могут образоваться на этапе инфузии или пропитки под давлением — RTM (Resin Transfer Molding). Разработка технологий RTM для создания ответственных конструкций невозможна без моделирования технологического процесса пропитки. В этой связи поставлена актуальная задача многоуровневого исследования фильтрационных свойств армирующего каркаса, учитывающего, в том числе, поверхностное натяжение связующего, особенности укладки волокон в жгутах и жгутов в ткани и другие факторы.

Для реализации многоуровневого подхода были созданы численные нестационарные модели механики многофазной жидкости на трех масштабных уровнях: уровень жгута, уровень ткани, уровень многослойной выкладки. В ходе моделирования каждого уровня были использованы данные натурных экспериментов для описания поведения связующего, а также данные, полученные из численных результатов предыдущего масштабного уровня для описания пористой среды. На уровне жгута также исследованы механизмы заполнения связующим, включая исследование образования дефектов (пузырей, пор и т. д.). На уровне ткани исследован процесс заполнения связующим ячейки периодичности, включающей переплетение нитей основы и утка, а также зону, полностью наполненную связующим. На макроуровне исследовано заполнение многослойного армирующего каркаса связующим. Параметры и условия модели данного уровня соответствуют известным экспериментальным данным, по которым проведена верификация модели. Подход реализован в виде новых библиотек программных модулей (макросов) САЕ пакета ANSYS. Макросы предназначены для определения фильтрационных свойств тканей со стандартными схемами плетения и материалами волокна.

О контакте тел с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярных систем штампов

Казаков К. Е.^{1,2}, Курдина С. П.²

¹*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

²*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*
kazakov-ke@yandex.ru

Механика контактного взаимодействия является активно развивающейся областью механики сплошных сред. Она находит применение как в задачах машиностроения и приборостроения, в которых улучшение характеристик в областях контакта приводит к увеличению ресурса работы механизмов и приборов, так и при строительстве объектов недвижимости, когда разработка методов определения допустимых кренов объектов как на этапе планирования застройки, так и в условиях частичной застройки, позволит скорректировать технологию возведения зданий и сооружений и разработать рекомендации по постепенному усилению инженерных и строительных конструкций.

В работе рассматриваются плоские задачи контактного взаимодействия стареющего вязкоупругого слоя с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярной конечной системы жестких штампов. Учитываются возрастные и структурные неоднородности покрытий, обусловленные процессом нанесения на основной слой, а также поверхностной обработкой уже существующего слоя. Поверхностная неоднородность может быть также вызвана использованием различных материалов при изготовлении покрытий. Такие неоднородности могут описываться как быстро осциллирующими, так и даже разрывными функциями. Рассмотрены различные варианты возможной постановки задачи. Получена система разрешающих интегральных уравнений с системой дополнительных условий, которая приведена к одному операторному уравнению с тензорным ядром и двум векторным дополнительным условиям в функциональном векторном пространстве. Поскольку применение классических методов (например, метода ортогональных многочленов) приводит к необходимости исследования бесконечных систем интегральных уравнений Вольтера, то для нахождения ее решения использован проекционно-спектральный метод. Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы поверхности основания выделена в явном виде отдельным сомножителем. Это позволяет проводить расчеты для покрытий, неоднородности которых описываются быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Также получены аналитические выражения для определения осадок и углов наклона штампов.

Авторы благодарят А. В. Манжирова за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научных проектов №15-31-70002 «мол_а_мос» и №16-31-00320 «мол_а».

Расчет S-параметров для фильтров на поверхностных акустических волнах на основе пленок титаната бария на подложке из оксида магния в COMSOL

Калинчук В. В.^{1,2}, Панькин А. В.¹, Тимошенко П. Е.¹, Широков В. Б.^{1,2}

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

p.e.timoshenko@gmail.com

В последнее время широкое распространение получили устройства на поверхностных акустических волнах. Они осуществляют аналоговую обработку информации, а в качестве объекта переноса информации используют акустические волны в кристаллах. Неотъемлемым элементом данных устройств является преобразователь электрического сигнала в акустическую волну, выполняющий также и обратное преобразование. Конструкция преобразователя зависит от требований к его амплитудно-частотной характеристике, фазочастотной характеристике, а также зависит от вида используемой волны. В случае применения поверхностных волн на пьезоэлектрических пленках наиболее удобно использовать встречно-штыревой преобразователь, состоящий из двух групп металлических электродов (штырей), вложенных навстречу друг другу и расположенных на поверхности пьезоактивного звукопровода. Обычно они изготавливаются из тонкой пленки алюминия. На данный момент является актуальным изучение влияния электро-механических параметров среды и параметров встречно-штыревого преобразователя на распространение поверхностных волн в структурах, содержащих тонкие пленки титаната бария.

В настоящей работе представлен порядок решения задач возбуждения, распространения и приема поверхностной акустической волны в тонкой пьезоэлектрической пленке титаната бария на подложке из оксида магния посредством встречно-штыревых преобразователей, выполняющих преобразование электромагнитных волн в поверхностные акустические волны и обратно. Задача сводится к решению обобщенной системы дифференциальных уравнений, где в качестве независимых переменных выбираются три компонента вектора механического смещения и электрический потенциал. Численные расчеты проводились в пакете конечно-элементного моделирования COMSOL.

В работе приведены результаты численного расчета параметров рассеяния S_{11} и S_{21} для структур, содержащих пленку титаната бария, имеющую различную толщину и величину вынужденной деформации, которая, как известно, вследствие несоответствия кристаллических решеток пьезоэлектрического слоя и подложки приводит к изменению диэлектрической проницаемости и пьезоэлектрического коэффициента. В зависимости от величины вынужденной деформации происходит изменение материальных констант, которое особенно велико вблизи фазовых переходов, где вынужденная деформация пленки близка к критическому значению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №14-19-01676).

Управление свойствами пленок титаната бария-стронция

Калинчук В. В.^{1,2}, Широков В. Б.^{1,2}, Юзюк Ю. И.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

shirokov-vb@rambler.ru

Разработка современных акустических устройств невозможна без предварительных расчетов. Как правило, подобные расчеты для практических приложений выполняются с использованием математических пакетов типа ANSYS, COMSOL и основаны на линейных уравнениях пьезоэффекта. При использовании в устройствах в качестве активного элемента сегнетоэлектрических пленок необходимо знание материальных постоянных — коэффициентов уравнений, которые могут значительно меняться.

Гистерезисные явления, наблюдаемые в сегнетоэлектриках, приводят к потерям. Одним из эффективных направлений уменьшения потерь — уход в высоко-симметричную фазу, где в отсутствии внешнего поля нет спонтанной поляризации, и поэтому отсутствуют гистерезисные явления.

Для количественного описания нелинейных свойств сегнетоэлектриков широко применяется теория Ландау фазовых переходов. Сегнетоэлектрические твердые растворы титаната бария-стронция удалось успешно количественно описать используя потенциал Ландау восьмой степени.

Тонкая пленка твердого раствора титаната бария стронция BST65 ($x = 0.65$) при комнатной температуре в зависимости от величины вынужденной деформации u_m может находиться в одном из трех основных состояний: c -фаза симметрии $2m$ ($C2v$) при $u_m < -1.33 \cdot 10^{-3}$ с направлением спонтанной поляризации по нормали к плоскости пленки $(0, 0, p_3)$; aa -фаза симметрии m (Cs) при $u_m > 1.41 \cdot 10^{-3}$ с направлением спонтанной поляризации в плоскости пленки $(p_1, p_1, 0)$; параэлектрическая фаза симметрии $4/mmm$ ($D4h$) с нулевым значением спонтанной поляризации при $-1.33 \cdot 10^{-3} < u_m < 1.41 \cdot 10^{-3}$. В данной работе рассмотрено действие планарного электрического поля E_x на материальные постоянные в области существования параэлектрической фазы.

Под действием поля E_x по мере приближения к границе с aa -фазой, диэлектрическая проницаемость в плоскости пленки становится больше, а максимумы острее, то есть увеличивается управляемость. Пьезоэлектрические модули ведут себя экстремально, причем острота экстремумов возрастает с приближением к aa -фазе. Наибольшему изменению подвержен модуль e_{11} , наименьшее — e_{12} . Все упругие модули, за исключением c_{44}^E , подвержены изменению под действием поля E_x . Однако наиболее значительные изменения происходят с модулем c_{11}^E .

Полученные результаты показывают направление поиска пленок с наиболее интересными свойствами, которые позволяют создавать устройства с наиболее эффективным управлением электрическим полем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант №14-19-01676.

Численное исследование равновесия и устойчивости неоднородного нелинейно-упругого цилиндра

Карякин М. И., Обрезков Л. П., Шубчинская Н. Ю.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

nyshubchinskaya@sfedu.ru

Большинство работ, посвященных устойчивости нелинейно-упругих тел в точной трехмерной постановке ограничиваются моделями изотропных однородных сред. В настоящей работе предпринята попытка исследовать известными методами более сложный объект — неоднородный цилиндр. При этом были рассмотрены два источника неоднородности: материальные свойства (слоистый или непрерывно неоднородный по толщине цилиндр) и конструкционные эффекты, связанные с существованием в цилиндре неоднородного равновесного поля внутренних напряжений. В качестве последних могут выступать поля дефектов типа дислокаций Вольтерра.

Было рассмотрено несколько задач:

- Растяжение и раздувание полого цилиндра с неоднородным полем внутренних напряжений, вызванных наличием изолированного дефекта типа клиновой дисклинации;
- Осевая и радиальная деформация двухслойного цилиндра с резко различающимися жесткостными характеристиками слоев;
- Равновесие и устойчивости неоднородного цилиндра с переменным модулем упругости;
- Деформация двухслойного цилиндра, когда для каждого из слоев используется принципиально отличная функция удельной потенциальной энергии.

Анализ устойчивости проводился методом линеаризации на основе метода наложения малой деформации на конечную. Полученные этим методом уравнения нейтрального равновесия, описывающие положение тела, которое отличается от первоначального на некоторую малую деформацию и существует без приложения дополнительных поверхностных сил, исследовались численно. Существование нетривиального решения у этих уравнений — линейной однородной краевой задачи — отождествлялось с потерей устойчивости, а соответствующие такому решению значения материальных, геометрических или деформационных характеристик назывались критическими.

Были рассмотрены задачи осесимметричной и неосесимметричной потери устойчивости для описанных выше постановок. Бифуркационные кривые, очерчивающие область устойчивости, построены на плоскости параметров «изменение внешнего радиуса» — «коэффициент осевого удлинения», «кратность удлинения цилиндра» — «параметр дисклинации» и т. п. Для каждой задачи проанализирована зависимость критических значений характеристик от параметров неоднородности.

Работа выполнена при поддержке проекта Министерства образования и науки РФ №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания.

Устойчивость составного бруса при изгибе

Карякин М. И., Пустовалова О. Г., Шубчинская Н. Ю.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

karyakin@sfnedu.ru, ogpustovalova@sfnedu.ru, nyshubchinskaya@sfnedu.ru

Разработка и создание новых, в том числе композиционных, материалов с заранее заданными свойствами, а также проблемы моделирования биологических тканей и их заменителей сложной структуры делают актуальными рассмотрение в различных постановках задач о неоднородных телах, испытывающих большие деформации. В настоящей работе в качестве объекта исследования выбран составной брус и изучены проблемы его изгиба при больших и сверхбольших деформациях. Представляется, что полученные результаты могут быть использованы для моделирования различных экспериментов на изгиб, активно использующихся при определении и уточнении параметров, описывающих поведение материала в линейной и нелинейной зонах диаграммы нагружения.

В работе рассмотрен двухслойный брус, слои которого состоят из разных материалов. Поперечное сечение бруса — прямоугольник, разделенный линией, параллельной основанию. В работе рассмотрены два случая неоднородности. В первом случае брус состоит из двух слоев, упругие модули, входящие в определяющее соотношение для удельной потенциальной энергии деформации, для каждого слоя индивидуальны, но постоянны по толщине. Во втором случае упругие модули каждого из слоев являются функциями, зависящими от координаты x по толщине бруса. Рассмотрены два типа неоднородности — полиномиальная и экспоненциальная, при этом коэффициент Пуассона считается постоянным, а неоднородность связана с переменным по толщине модулем сдвига $\mu = \mu_0 f(x)$.

Для получения основных характеристик напряженно деформированного состояния и вывода уравнений равновесия был использован полубратный метод нелинейной теории упругости. Другая постановка задачи изгиба — без полубратных гипотез — реализована в пакете FlexPDE, где, в частности, осуществлялась визуализация механических полей. В качестве определяющих соотношений были выбраны общеупотребительные модели сжимаемых и несжимаемых нелинейноупругих материалов — упрощенная модель материала Блейтца и Ко, материал Муни — Ривлина, материал Гента.

В рамках бифуркационного подхода, на основе метода наложения малой деформации на конечную, было проведено исследование устойчивости составного бруса при изгибе, для чего с использованием компьютерной системы автоматизации полубратного метода нелинейной теории упругости, реализованной в пакете Maple, были выведены дифференциальные уравнения нейтрального равновесия. Использование системы компьютерной алгебры позволило избежать ошибок и ускорить процедуру получения необходимых уравнений, актуально в случаях сложных многопараметрических выражений функций удельной потенциальной энергии.

Численно определено расположение критических точек, ближайших к точке максимума диаграммы нагружения. Выявлена зависимость появления точек бифуркации от законов неоднородности и от соотношения толщин слоев бруса.

Контактная задача для балок переменной толщины

Касаткин А. А., Няшин Ю. И., Осипенко М. А.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
osipenko.michael@yandex.ru

Пачка балок переменной толщины моделирует листовую рессору. Листовые рессоры широко используются в подвесках автомобильного и железнодорожного транспорта. Поэтому задачи расчета и оптимизации листовых рессор являются актуальными. В данной работе рассматривается двухлистовая рессора. Простейшей моделью такой рессоры являются две балки Бернулли — Эйлера, нагруженные сосредоточенной силой. Длины балок, толщину длинной балки считаем постоянной, толщину короткой балки — переменной. Между балками имеет место односторонний контакт. Поэтому задача отыскания упругих линий балок и напряжений относится к контактными задачам теории балок. Задачи такого рода для произвольной переменной толщины еще мало изучены.

Рассматриваемый простейший переменный профиль — линейный. Аналитическое решение в данном случае не известно, поэтому контактную задачу следует решать численно. Контактная задача состоит в отыскании прогиба рессоры и напряжения в рессоре. Эта задача сводится к отысканию плотности контактных сил. После решения контактной задачи можно оптимизировать рессору. Варьируются длина короткого листа и толщины всех листов, возможно переменные. Критерии оптимизации: минимальность напряжения при заданных общем размере и жесткости на изгиб или максимальность коэффициента использования материала рессоры (КИМР), являющегося мерой равнонапряженности.

Контактная задача решалась посредством дискретизации плотности контактных сил в виде множества сосредоточенных сил с дальнейшим итерационным уточнением области контакта. Задача оптимизации решалась методом Нелдера — Мида. Найдены параметры оптимальной рессоры.

Полученный результат позволяет высказать гипотезы об аналитической структуре контактных сил и о равнонапряженности оптимальной рессоры. Если принять эти гипотезы, то можно найти аналитическое выражение для плотности контактных сил и обнаружить необычные свойства оптимальной рессоры. Оказывается, что указанное выше условие равнонапряженности не определяет однозначно оптимальные параметры, но эта неоднозначность имеет место только в узком диапазоне значений наклона линейного профиля (ширина диапазона — около 1 процента от среднего значения). Наличие малого параметра в свойствах решения задачи, постановка которой столь малых параметров не содержит, можно считать необычным явлением. Далее, оказывается, что параметры, соответствующие максимальному КИМР, не точно совпадают с найденными выше оптимальными параметрами, но различие составляет 0,04 процента. Таким образом, обнаруживается еще один малый параметр в свойствах решения (но не постановки) задачи оптимизации в системе двух контактирующих балок.

Задача для эллиптического погранслоя в цилиндрической оболочке при ударных поверхностных воздействиях нормального типа

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
iv@info.sgu.ru

В работах Кириловой И.В., Коссовича Л.Ю. «Эллиптический погранслой в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа» (Изд. Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1, 2015) и «Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа» (Изд. Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1, 2016) построены как уравнения первого порядка приближения, так и уточнённые уравнения эллиптического погранслоя в окрестности условных фронтов поверхностных волн Рэлея в оболочках вращения при осесимметричных ударных нормальных поверхностных нагрузках. Данный тип погранслоя используется в асимптотической схеме расчленения нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) на составляющие с различными показателями изменчивости при ударных торцевых воздействиях нормального типа и при ударных нагрузках нормального типа на лицевые поверхности. Особенностью этого погранслоя является характер полученных разрешающих уравнений: эллиптические уравнения описывают изменение погранслоя по толщине, а гиперболические уравнения задают граничные условия и характеризуют волновой процесс на поверхности оболочки.

В данной работе подробно описывается построение данного погранслоя для цилиндрической оболочки при ударном воздействии на лицевые поверхности вида

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -P(\xi, \tau), \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = \pm h, \\ P &= pH(L - \xi)H(\tau) \quad (\xi \geq 0) \quad \text{и} \quad P = pH(L + \xi)H(\tau) \quad (\xi \leq 0), \end{aligned} \quad (1)$$

где p — величина нагрузки; $2L$ — длина участка приложения нагрузки; ξ, τ — безразмерная координата вдоль образующей и время, H — функция Хевисайда. Использование аппарата интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по ξ даёт следующее выражение для той части асимптотически главной составляющей нормального напряжения, которая соответствует волне, инициированной нижней лицевой поверхностью $\zeta = -1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= p\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{B_\omega}{\varkappa_R} \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{2La(1 + \zeta)}{a^2(1 + \zeta)^2 - L^2 + (\xi - \varkappa_R\tau)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arctg} \left(\frac{2Lb(1 + \zeta)}{b^2(1 + \zeta)^2 - L^2 + (\xi - \varkappa_R\tau)^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где ζ — безразмерная нормальная координата.

Приведен численный анализ поведения решения при удалении от квазифронттов и с изменением нормальной координаты.

О доказательстве существования решения в связанных задачах термодинамики для балок моделей Тимошенко

Кириченко А. В.¹, Крылова Е. Ю.², Крысько В. А.¹, Папкина И. В.¹

¹Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

²Саратовский национальный исследовательский государственный

университет им. Н. Г. Чернышевского

kat.krylova@bk.ru, ikravzova@mail.ru

Изучение эффектов, связанных с влиянием динамических термосиловых воздействий на поведение механических систем, является чрезвычайно сложным и перспективным направлением научных исследований, поскольку фактором обуславливающим перестройку режимов динамических систем может являться не только изменение параметров силового (механического) нагружения, но и температурные воздействия со стороны окружающей среды. Интерес к подобным задачам связан с необходимостью разработки механических конструкций, способных работать в условиях неравномерного стационарного и нестационарного нагревов (например, в авиационной и ракетной технике, гироскопостроении, в системе защиты ядерных реакторов и т. д.). Использование гипотезы Тимошенко и гипотезы Пелеха — Шереметьева (уточненной гипотезы Тимошенко), модели связанной термоупругости и учет случайных флуктуаций внешней среды существенно уточнит результаты, полученные при математическом и компьютерном моделировании динамики элементов пространственных конструкций.

В работе построены новые математические модели нелинейных колебаний распределенных механических структур в виде многослойных спаянных гибких балок, составленных из слоев переменной толщины, с учетом связанности температурного и деформационного полей, а также случайных флуктуаций внешней среды. Материал балок изотропный и однородный. Рассматривается диссипативная система. Геометрическая нелинейность учтена в форме Теодора фон Кармана. При этом никаких ограничений на распространение температуры по толщине балок не накладывается, то есть рассматривается двумерное уравнение теплопроводности. Записан новый функционал, из которого возможно получить дифференциальное уравнение в частных производных разных порядков и размерности, граничные условия. При выводе функционала использовались теории С. П. Тимошенко и Пелеха — Шереметьева, которые учитывают поперечные деформации и напряжения и наиболее интересны с точки зрения приложений. Сформулирована и доказана теорема о фазовом пространстве для эволюционных уравнений.

Полученные дифференциальные задачи в частных производных сводятся к дифференциальным задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей по пространственным координатам, что позволит рассматривать механическую конструкцию как систему с потенциально бесконечным числом степеней свободы. Задача Коши по времени будет решаться методами Рунге — Кутты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-31-00092)

Критерии полноты систем неприводимых тензоров конечных деформаций микрополярного континуума

Ковалев В. А.¹, Радаев Ю. Н.²

¹*Московский городской университет управления Правительства Москвы*

²*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

radayev@ipmnet.ru

Континуальный подход выступает как один из важнейших методов моделирования механического поведения сред с микроструктурой. Хорошо известно, что классическая механика сплошных деформируемых сред не в состоянии учесть в своих определяющих уравнениях для реальных тел характерные внутренние линейные микромасштабы, связанные с их микроструктурой. Постепенный отход от классических моделей континуума начался с интенсивным развитием теорий микрополярных континуумов. Экстрадеформации и микровращения элементов таких континуумов в рамках математических моделей представляются в форме метрических искажений и изменений пространственной ориентации триэдров полярных директоров, ассоциированными с микроэлементами. Микрополярные континуумы обеспечивают возможность более или менее точного описания механического поведения нескольких классов материалов, обладающих микроструктурой: жидкие кристаллы (среда с микроструктурой, определяемой одним полярным директором), горные породы и гранулированные среды, композиты, кристаллы с несовершенствами в форме дислокаций.

Представляемая работа посвящена проблеме построения полных систем неприводимых объективных мер деформации и экстрадеформации микрополярного континуума, допускающего вложение во внешнее пространство (возможно более высокой размерности) со стандартной метрикой. Сформулированная проблема решается в рамках и методами физической теории поля и теории алгебраических инвариантов конечных систем контравариантных векторов. Тензоры деформации при этом конструируются как инварианты системы контравариантных векторов внешнего эйлерова пространства, с помощью которых задается плотность интеграла действия, относительно группы ортогональных преобразований. Решение ограничивается характерными для механики континуума системами рациональных или целых рациональных инвариантов. Сначала с помощью некоторой регулярной процедуры осуществляется выбор системы объективных (т. е. не зависящих от вращений эйлеровой координатной системы) тензоров деформации. Затем устанавливается неприводимость тензоров, образующих систему. Каждая система объективных тензоров деформации должна удовлетворять свойству полноты: полная система не допускает присоединения к ней новых неприводимых тензоров деформации и тем самым гарантирует отсутствие не имеющих физического смысла вкладов в интеграл действия. Указаны критерии полноты системы тензоров деформации и экстрадеформации микрополярного континуума. Приводятся примеры полных неприводимых систем. Рассматривается объективная геометрия конечной деформации микрополярного континуума с нежестким микроструктурным триэдром.

Самонапряженные полимембраны

Койфман К. Г., Лычев С. А.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва

koifman.bmstu@yandex.ru

В настоящее время интенсивно развиваются аддитивные технологические процессы, основанные на изготовлении деталей путём последовательного нанесения тонких слоев материала на подложку, которая может иметь весьма сложную геометрическую форму. К таким технологиям относятся, в частности, фотохимическая стереолитография. Одно из достоинств подобных технологий заключается в возможности изготовления деталей сложной геометрии. Кроме того, существенно сокращается путь от проекта до изделия; в ходе разработки можно оперативно менять геометрию деталей. Однако, при реализации фотохимического процесса в слоях, образующих тело, неизбежно возникает усадка, что приводит к искажению геометрической создаваемой детали. При изготовлении тонкостенных деталей эти искажения могут существенно превосходить заданную точность изготовления.

Один из способов уменьшения технологических искажений — внесение в исходную САД модель заранее определённых отклонений от требуемой геометрической формы, которые компенсируют технологические искажения. Известны многочисленные работы, в которых предлагается определять начальные компенсирующие отклонения эмпирически, однако все эти способы позволяют определить коррекцию САД моделей очень узкого класса геометрических форм, причём эти формы, как правило, определяют только простые тела типа цилиндров и шаров. Построение математических методов нахождения полей начальной коррекции является актуальной и открытой проблемой современной механики деформируемого твёрдого тела. Развитию этих методов посвящена настоящая работа.

При определённых условиях, которым соответствует технология стереолитографии, тела, получаемых в результате послойного нанесения материала, могут быть представлены как совокупности криволинейных мембран, попарно механически связанных континуальной совокупностью одномерных связей. В рамках работы такие системы называются полимембранами. Напряжённое состояние таких систем определяется несовместными (усадочными) индивидуальными деформациями мембран как материальных поверхностей, возникающих в процессе солидификации граничного слоя, и последующей деформацией в составе тела. В работе предлагается вариационная формулировка задачи, в предположении, что полные деформации малы, напряжения в мембранах определяются двумерными линейными законами состояния, а напряжения в связях — одномерными линейными соотношениями. В рамках этих предположений сформулирован функционал действия системы, получены уравнения Эйлера — Лагранжа и соответствующие естественные краевые условия. Для осесимметричных полимембран построены решения модельных задач в форме разложения по собственным функциям.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 14-01-00741 и ОЭМПУ-12.

Стягивание цилиндрической мембраны, одетой на жёсткий цилиндр

Колесников А. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Alexey.M.Kolesnikov@gmail.com

В данном исследовании рассматривается контактная задача тонкостенной трубки, изготовленной из высокоэластичного материала, и жёсткого негладкого цилиндра. Полагаем, что деформация трубки является осесимметричной. Трубку моделируем полубесконечной цилиндрической мембраной (безмоментной оболочкой) кругового поперечного сечения радиуса r_0 и постоянной толщины h в отсчётной конфигурации. Считаем, что мембрана изготовлена из несжимаемого, однородного, изотропного нелинейно-упругого материала. Свойства материала будем задавать с помощью функции потенциальной энергии деформации W . Пусть один конец мембраны одет на неподвижный негладкий жёсткий цилиндр радиуса $R_0 > r_0$. Кроме этого на мембрану действует продольное усилие Q , стягивающее её с цилиндра.

Из уравнений равновесия безмоментных оболочек можно показать, что мембрана будет прилегать без отрыва к боковой поверхности жёсткого цилиндра. Обозначим за L длину части мембраны, которая контактирует с жёстким цилиндром, $s \in [0, s_L]$ — лагранжевы координаты точек мембраны находящихся в контакте. Полагаем, что выполняется закон Кулона для напряжений трения между мембраной и жёстким цилиндром. Обозначим за f коэффициент трения покоя. На части, не находящуюся в контакте с жёстким цилиндром, отсутствует внешняя поверхностная нагрузка. На достаточном удалении от области контакта влияние вставки на мембрану отсутствует. Следовательно, при $s \rightarrow +\infty$ мембрана стремиться к одноосному напряжённо-деформированному состоянию под действием продольного усилия Q .

Для функции потенциальной энергии Бартенева — Хазановича задача имеет явное решение. Длина области контакта L может быть представлена как функция r_0 , R_0 , f и Q следующим образом (μ — постоянная материала)

$$L = \frac{2r_0\rho_0}{f} \ln \left(\frac{3\rho_0 \left(\rho_0 - \left(1 - \frac{Q}{4\pi\mu hr_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right)}{2(\rho_0^2 - \sqrt{\rho_0})} \right), \quad Q < \frac{4\pi\mu hr_0}{27} (27 - \rho_0^3), \quad \rho_0 = \frac{R_0}{r_0}.$$

Для произвольной потенциальной энергии деформации задача сводится к системе нелинейных уравнений и задачи Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения, которые могут быть решены численно. Для функций потенциальной энергии Муни — Ривлина и Фына построены зависимости между длиной L и силой Q для различных отношений радиусов трубки и жёсткого цилиндра.

Данное исследование поддержано министерством образования и науки Российской Федерации (контракт 9.665.2014/К) и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 15-01-01492-а, 16-08-00802-а).

Зависимость механических свойств сорбентов от размеров микропор

Колесникова А. С.

*Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского*

kolesnikova.88@mail.ru

На протяжении многих столетий используются пористые углеродные материалы (сорбенты). Расширяются области использования углеродных сорбентов в медицине и фармацевтике. В настоящее время основные направления использования углеродных сорбентов связаны с технологическими процессами адсорбционной очистки, разделения и концентрирования в газовых и жидких средах. Углеродные сорбенты делятся на гемосорбенты (для очистки крови вне организма) и энтеросорбенты (для очистки организма внутри от вредных веществ и микробов). Углеродные сорбенты встречаются различной формы: в виде порошка, гранул, блоков различной формы и величины, пленок и т. д. Пористость углеродных сорбентов определяет направление их применения в сорбционной медицине. Например, микропористые структуры используются для удаления из биологических жидкостей продуктов небольшой молекулярной массы.

Среди большого разнообразия пористых структур наибольший интерес вызывают пористые углеродные структуры с плотностью 1.4 г/см^3 . Этот интерес обусловлен отработанной технологией синтеза данного материала, а также технология синтеза таких структур, позволяет, не меняя концентрацию частиц, изменять размер пор в ней. Известно, что механическая прочность сорбентов является одним из требований предъявляемым к сорбентам медицинского назначения. Сорбенты с высокими механическими свойствами могут быть использованы для фильтрации тяжелых частиц, движущихся с высокой скоростью. В связи с этим целью данной работы является теоретическое исследование модуля Юнга пористого углеродного материала с плотностью 1.4 г/см^3 с различным размером пор. Данное исследование осуществляется впервые. Исследование механических свойств пористых структур осуществлялось на основе элементарной ячейки с использованием молекулярно-механического метода REVO и с учетом периодических условий по трем направлениям пористой структуры.

Для расчета модуля Юнга была использовалась методика, включающая следующие этапы:

- 1) Расчет полной энергии равновесной конфигурации углеродного стекловидного композита с помощью эмпирического потенциала Бреннора.
- 2) Расчет изменения энергии наноструктуры при деформации, которая определяется в свою очередь тензором деформации.
- 3) Поиск упругих постоянных, используя нотацию Фойгта.
- 4) Расчет модуля Юнга с помощью упругих постоянных.

В работе установлено, что модуль Юнга пористого углеродного материала изменяется в зависимости от температуры, при которой материал был синтезирован. Чем выше температуры, при которой пористая структура синтезировалась, тем больше модуль Юнга. Установлено изменение пор сорбента в зависимости от температуры, при которой он был синтезирован, а также выявлено влияние размера пор и формы сорбента на адсорбционную способность.

Моделирование контактного взаимодействия упругих тел с учетом трения, тепловыделения от трения и конвективного теплообмена

Колосова Е. М., Ляпин А. А., Чебаков М. И.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
chebakov@math.sfedu.ru

На основе конечно-элементного метода рассматриваются нестационарные контактные задачи связанной термоупругости при наличии в зоне контакта трения, тепловыделения от трения и конвективного теплообмена на свободных поверхностях. В качестве примеров исследуются задачи, моделирующие работу различных типов металлополимерных подшипников скольжения в пространственной постановке.

Рассматривается нестационарная динамическая контактная задача связанной термоупругости о взаимодействии упругого однородного цилиндра (вала) с внутренней поверхностью цилиндрического слоя конечной длины со вставками в виде цилиндров. Такая задача является моделью так называемого бинарного подшипника. Внешняя поверхность подшипника закреплена относительно всех смещений, кроме вращательных. Во внутреннюю поверхность подшипника вдавливается вал, ось которого параллельна оси подшипника. Подшипник вращается с заданной угловой скоростью в течение определенного времени, вал неподвижен. Между валом и подшипником действуют силы Кулоновского трения. Предполагается, что на поверхностях вала и подшипника, которые граничат с окружающей средой, заданы условия конвективного теплообмена.

Аналогично рассматривается задача для двухслойного подшипника скольжения. В этом случае вращается вал, подшипник закреплён по внешней поверхности.

Для решения поставленных задач применяется метод конечного элемента с использованием специально разработанного программного модуля для конечно-элементного пакета Abaqus.

Исследования показали, что большое значение в достижении теплового баланса в рассмотренных моделях подшипниковой системы играет теплоотвод с поверхностей вала и подшипника, а при увеличении таких параметров, как скорость вращения подшипника или вала, значение нагрузки, коэффициент трения, достижение теплового баланса в подшипниковой системе замедляется. Отметим, что конечно-элементный метод с использованием пакета Abaqus для данных задач оказался достаточно эффективным и позволяет исследовать подобные задачи при различных значениях входных геометрических и механических параметров.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект №213.01-11/2014-28) и при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-08-00852).

Конечно-элементный анализ наноструктурированных пористых термоупругих композитов с поверхностными эффектами

Корниевский А. С., Наседкин А. В., Наседкина А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

nasedkin@math.sfedu.ru

Как известно, для наноразмерных тел наблюдается масштабный эффект, приводящий к изменению эффективных жесткостей и других материальных модулей по сравнению с соответствующими телами макроразмеров. Среди различных подходов, объясняющих этот феномен, широко используются модели теории упругости с поверхностными напряжениями, являющиеся частным случаем моделей несовершенных интерфейсных границ.

В настоящей работе рассматриваются анизотропные термоупругие материалы со случайно расположенными нанопорами. Для учета наноразмерности на границах материала с порами использованы модель Гуртина — Мурдоха поверхностных напряжений и модель сильной теплопроводности. В работе приводится математическая постановка задачи гомогенизации двухфазных композитов со специальными условиями на скачки напряжений и потоков тепла на границах раздела фаз. Обе фазы композита предполагаются анизотропными термоупругими материалами. Описаны постановки краевых задач, их слабые формулировки и результирующие формулы для определения полного набора эффективных констант двухфазного композита с произвольными типами анизотропии фаз и поверхностных свойств. Указано, что процедуры гомогенизации пористых композитов с поверхностными напряжениями и потоками тепла могут рассматриваться как частные случаи соответствующих процедур для двухфазных композитов с несовершенными интерфейсными границами при пренебрежимо малых модулях жесткости и температурных напряжений для наноразмерных включений.

Для численного решения рассматриваемых задач гомогенизации приведены их конечно-элементные аппроксимации. Отмечено, что эти задачи можно решать с использованием известного конечно-элементного программного обеспечения, выбирая для учета поверхностных межфазных напряжений и потоков тепла оболочечные конечные элементы с опциями мембранных напряжений и пластинчатые температурные элементы.

Реализация представленных подходов была выполнена в программном комплексе ANSYS. Представлен алгоритм автоматического определения межфазных границ и размещения на них оболочечных и пластинчатых элементов, сохраняющий работоспособность при различных размерах представительных объемов, построенных в форме кубической решетки гексаэдральных термоупругих и температурных конечных элементов. В качестве примера рассмотрены модели пористого материала кубической сингонии при различных значениях поверхностных модулей, пористости и количества пор. Отмечено влияние величины площади межфазных границ на эффективные модули пористого материала наноразмерной структуры.

Работа первых двух авторов выполнена в рамках проекта РНФ №15-19-10008.

Предельное состояние образца трапецевидной формы при одноосном сжатии с учетом внешнего и внутреннего трения

Костандов Ю. А., Локшина Л. Я.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

ipgd@yandex.ru, ipgd@yandex.ru

Предел прочности горных пород и строительных материалов при одноосном сжатии является одним из основных параметров оценки напряжённо-деформированного состояния горных массивов и строительных конструкций и их разрушения. Поэтому актуальной является разработка метода его аналитического расчёта.

Авторами ранее были проведены исследования предельного состояния образцов из хрупких материалов прямоугольной формы. Однако в реальных условиях выемки полезного ископаемого выработки, забои и откосы, а также строительные конструкции имеют не только прямоугольную форму, но и достаточно часто усеченно-конусную форму. Учитывая это, представляет интерес исследование предела прочности образцов трапецевидной формы из хрупкого материала.

Рассматривался образец горной породы в виде пластины трапецевидной формы. Материал образца представляет собой однородную изотропную среду, деформирующуюся по упругому закону, характеризующуюся упругими константами и коэффициентом внутреннего трения, в данном случае отличным от нуля. Взаимодействие плит пресса с нагружаемым телом учитывается заданием касательного контактного напряжения, определяемого контактным трением на поверхности приложения нагрузки. При этом напряжение, действующее на контактирующих с плитами пресса поверхностях образца, рассматривается как результат воздействия на них плит пресса и потому зависит от координаты. Полагаем, что разрушение материала начинается при его деформировании за пределом упругости в некоторой локальной области. Дальнейшее нагружение приводит к тому, что в одних областях происходит разрушение материала, в то время как в других он продолжает находиться в не разрушенном упругом состоянии. Формирование очагов разрушения происходит в локальных областях на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН). Под эффективным касательным напряжением понимается активное касательное напряжение за вычетом фрикционной составляющей, зависящей от коэффициента внутреннего трения материала. Считается, что материал подчиняется закону Гука вплоть до момента разрушения. В качестве критерия разрушения материала использовался критерий Кулона.

Получено уравнение состояния материала на ТМЭКН. Найдена зависимость предельного (разрушающего) напряжения от внутреннего трения и контактного касательного напряжения, обусловленного внешним трением на поверхности приложения нагрузки. Установлена связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона касательных к ТМЭКН. Получены формулы для определения углов наклона касательной к ТМЭКН, углов поворота ТМЭКН за счет действия контактного касательного напряжения, обусловленного внешним трением на поверхности приложения нагрузки, и положения ТМЭКН в зависимости от приложенной нагрузки.

Методы микро- и наноиндентирования для характеристики локальных физико-механических свойств тонкостенных конструкций, тонких пленок и покрытий

Кренев Л. И.¹, Пирожкова Т. С.², Садырин Е. В.¹, Тюрин А. И.²

¹Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону

²Научно-образовательный центр «Нанотехнологии и наноматериалы» ТГУ

и.м. Г. Р. Державина, Тамбов

evgeniy.sadyrin@gmail.com, tyurin@tsu.tmb.ru

Современные производства и технологии широко используют тонкостенные конструкции, тонкие пленки и покрытия. Так, например, нанесение тонких пленок и покрытий на поверхности деталей и готовых изделий может значительно улучшить их прочностные свойства и эксплуатационных характеристики (повысить износо- и эрозионную стойкость, защиту от абразивного износа, термо- и коррозионную устойчивость, химическую стабильность, прочностные характеристики, снизить коэффициент трения и износа конструкционных, инструментальных и других материалов). Это достигается за счёт свойств материала покрытия. При этом синтез современных покрытий направлен на создание, с одной стороны, все более тонких (нанометровых), а с другой стороны, — более функциональных покрытий, что достигается созданием различных видов покрытий (наноструктурированных, многослойных, градиентных и др.) Их разработка и использование требует знания физико-механических свойств и контроля их качества как на стадии изготовления, так в процессе эксплуатации. Учитывая специфику тонких пленок и покрытий, традиционные способы исследования прочностных свойств для этого практически мало пригодны или вообще невозможны.

Поэтому для исследования физико-механических свойств тонких приповерхностных слоев, тонких пленок и покрытий в микро- и наношкале все большее распространение приобретают методы микро- и наноиндентирования, которые используют прецизионное локальное силовое воздействие на материал и одновременную регистрацию деформационных откликов с нанометровым разрешением.

В работе рассматриваются возможности и результаты применения методов микро- и наноиндентирования для исследования процессов локального деформирования и разрушения тонких приповерхностных слоев, тонких пленок и покрытий различных материалов (металлы, металлические сплавы, керамики, полимеры и др.) и их характеристики локальных физико-механических свойств (микро- и нано твердости — H , модуля Юнга — E , коэффициента вязкости разрушения — K_c , коэффициента трения — k и др.) С помощью этого метода определены числовые значения H , E , K_c , и k в микро- и наношкале. Показано влияние масштабного фактора на значения H и E для ряда исследованных материалов. Исследованы зависимости K_c и k в микро- и наношкале от величины приложенной нормальной нагрузки.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-38-50252-мол_нр.

Влияние температурного поля
на сценарий перехода колебаний гибких оболочек в хаос

Крылова Е. Ю., Яковлева Т. В.

НИИ механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

kat.krylova@bk.ru, yan-tan1987@mail.ru

Тонкостенные прямоугольные в плане гибкие оболочки, в качестве элементов конструкций находят широкое применение в различных областях инженерного строительства. Для поддержания стабильной работы всей системы необходимо исследование влияния температурных полей на нелинейные колебания ее составных частей. Предполагаем, что нагрев тела не слишком велик и поэтому не изменяет механических свойств материала. Коэффициент теплового расширения предположим не зависящим от температуры, удельная объемная теплоемкость тела и коэффициент теплопроводности считаем постоянными. Положим, что в теле отсутствуют источники тепла. Стационарное температурное поле описывается уравнением Лапласа. Математическая модель колебаний прямоугольной в плане оболочки построена на основе теории Кирхгофа. Геометрическая нелинейность учтена в форме Теодора фон Кармана. Рассматривается диссипативная система. Материал оболочки изотропный однородный. Уравнения движения элемента оболочки описываются нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных. Данная система с учетом граничных и начальных условий сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка по пространственным переменным. Применение метода конечных разностей позволяет рассматривать прямоугольную в плане оболочку, как механическую систему с большим числом степеней свободы, что очень важно для достоверности получаемых результатов. По временной координате система решается методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности. В работе приведено обоснование выбора численных методов решения поставленной задачи.

В работе помимо классического аппарата Фурье преобразований применяется вейвлет анализ, что позволяет изучить локальные временные особенности сигналов, полученных в результате численных экспериментов. В качестве анализирующего вейвлета, выбран вейлет на основе 32-ой производной функции Гаусса, который дает лучшее разрешение как по временной оси, так и по оси частот по сравнению с ранее используемым вейвлетом Морле.

В работе рассмотрены неоднородные краевые условия соответствующие шарнирному опиранию на гибкие в касательной плоскости нерастяжимые ребра и нулевые начальные условия. Температурное поле задается гармонической функцией, являющейся аналитическим решением уравнения теплопроводности. Рассматривается стальная прямоугольная пластина. По периметру пластины действует продольная нагрузка, заданная гармонической функцией. Продольная нагрузка учтена в граничных условиях. Целью работы является исследование влияния интенсивности стационарного температурного поля на сценарий перехода рассматриваемой механической системы в хаос.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ проект №15-19-10039.

Сравнение эффективности методов контрольных объемов, вихревых элементов, погруженных границ и конечных элементов с частицами при решении сопряженных задач гидроупругости

Кузьмина К. С., Марчевский И. К., Пузикова В. В.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
kuz-ksen-serg@yandex.ru, iliarmarchevsky@mail.ru

Моделирование явления ветрового резонанса упругозакрепленного кругового профиля является хорошей модельной задачей для сравнения эффективности различных численных методов. Для данной задачи известно множество результатов экспериментальных и численных исследований для большого диапазона параметров: числа Рейнольдса, величины шероховатости поверхности профиля, степени турбулентности набегающего потока и т. д.

В настоящей работе рассмотрена простейшая задача: моделирование обтекания гладкого кругового профиля, закрепленного посредством линейного вязкоупругого элемента Кельвина — Фойгта, при малом значении числа Рейнольдса $Re = 150$, когда набегающий поток можно считать ламинарным.

Рассмотрены четыре численных метода и их соответствующие реализации:

- метод контрольных объемов (МКО), реализованный в программном комплексе OpenFOAM с открытым исходным кодом с помощью библиотеки собственной разработки;
- собственная модификация метода вихревых элементов, реализованная в виде собственного параллельного программного комплекса;
- метод погруженных границ (LS-STAG — Level-Set STAGgered Method), также реализованный в рамках программного комплекса собственной разработки;
- метод конечных элементов с частицами (PFEM2 — Particle Finite Element Method) — реализованный в программном комплексе Kratos с открытым исходным кодом.

Методы контрольных объемов и погруженных границ являются сеточными, метод вихревых элементов — бессеточным чисто лагранжевым, метод конечных элементов с частицами — смешанным лагранжево-эйлеровым, в котором частицы используются для аппроксимации нелинейного конвективного слагаемого.

Расчеты показали, что все методы позволяют моделировать явление ветрового резонанса упругозакрепленного кругового профиля: полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, однако их трудоемкости применительно к данной задаче различаются. Стоит отметить, однако, что рассмотренные реализации МВЭ и PFEM2 на данный момент не позволяют моделировать течения, характеризующиеся высокими значениями числа Рейнольдса. Опыт показывает, что наиболее широкую область применения имеет программный комплекс OpenFOAM, однако в некоторых частных случаях другие методы могут оказаться более эффективными.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента Российской Федерации для молодых ученых-кандидатов наук (проекты МК–5357.2015.8, МК–7431.2016.8).

Моделирование гидроупругих колебаний профилей в потоке вязкой несжимаемой среды методом вихревых элементов

Кузьмина К. С., Марчевский И. К., Морева В. С.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
kuz-ksen-serg@yandex.ru, iliamarchevsky@mail.ru

Моделирование гидроупругих колебаний — актуальная задача, возникающая во многих технических приложениях при анализе поведения упругих конструкций, помещенных в поток жидкости или газа и воспринимающих нестационарные аэрогидродинамические нагрузки. Во многих случаях рассматриваемые конструкции являются протяженными, а скорость потока — сравнительно малой, поэтому в качестве модельной задачи можно рассмотреть обтекание соответствующего профиля, который может быть подвижным и/или деформируемым, потоком вязкой несжимаемой среды.

Необходимость решения сопряженной задачи гидроупругости, когда область течения изменяется на каждом шаге расчета, может серьезно усложнять применение хорошо разработанных сеточных методов в связи с необходимостью перестроения или сильной деформации сетки.

Весьма подходящими для решения подобных задач являются бессеточные лагранжевы вихревые методы, в основе которых лежит переход к завихренности как к первичной расчетной величине, при этом влияние профиля заменяется присоединенными слоями вихрей и источников и свободным вихревым слоем. Главным преимуществом вихревых методов является отсутствие необходимости построения сетки в области течения. При этом моделирование движения частиц (вихревых элементов) происходит только в той области, где завихренность отлична от нуля — вблизи поверхности обтекаемых профилей и в следах за ними, что делает данные методы сравнительно экономичными.

Наличие вышеописанных преимуществ не снимает проблемы разработки эффективных расчетных схем вихревых методов, в первую очередь, для обеспечения высокой точности выполнения граничного условия прилипания на профиле, поскольку именно это в первую очередь определяет точность решения задачи в целом. Классический подход, обычно применяемый в вихревых методах, приводит к необходимости решения сингулярного интегрального уравнения первого рода (с неинтегрируемым ядром), и соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Расчеты показывают, что данный подход в ряде случаев приводит к большой погрешности решения, иногда качественного характера.

Альтернативный подход, развитый в настоящей работе, основан на сведении задачи к интегральному уравнению второго рода (для случаев гладких профилей — к уравнению Фредгольма с ограниченным ядром) и позволяет существенно повысить точность решения задачи. Обсуждаются возможности дальнейшего повышения точности расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента Российской Федерации для молодых ученых-кандидатов наук (проекты МК–5357.2015.8, МК–7431.2016.8).

Моделирование трансформации и взаимодействия микродефектов в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля

Кукуджанов К. В., Левитин А. Л.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

kconstantin@mail.ru, alex_lev@ipmnet.ru

В работе моделируются процессы трансформации и взаимодействия дефектов типа плоских микротрещин с линейными размерами порядка 10 мкм, протекающие в металле при обработке его импульсами тока. Исследование осуществляется численно на основе связанной модели воздействия интенсивным электромагнитным полем на предварительно поврежденный термоупругопластический материал с дефектами, которая учитывает плавление и испарение металла, а также зависимость всех его физико-механических свойств от температуры. Решение получающейся системы уравнений ищется методом конечных элементов на подвижных сетках с использованием смешанного эйлера-лагранжева метода.

Моделирование показало, что под действием импульсов тока происходит сварка трещины и залечивание микродефекта. Залечивание происходит путем одновременного уменьшения длины, выброса расплавленного металла внутрь трещины и смыкание берегов, что приводит к тому, что берега трещины начинают контактировать со струей расплавленного материала, и в конце этих процессов струя оказывается полностью зажатой берегами трещины.

В результате расчетов установлено, что при изучении процесса залечивания микротрещин можно без потери точности ограничиться рассмотрением в качестве области интегрирования одного представительного элемента (или одной четверти осесимметричного представительного элемента), задавая на ее границах, не являющихся осями симметрии, разность потенциалов, определенную для элемента без дефекта (в состоянии «невозмущенном» наличием микротрещины). При расстояниях между трещинами, превышающих 5–6 их длин, процессы залечивания будут протекать одинаково независимо от того моделируем мы их в области интегрирования, состоящей из одного или нескольких представительных элементов.

С увеличением расстояния между трещинами наблюдается уменьшение влияние взаимного расположения микротрещин на процессы их залечивания, так что при расстояниях между микротрещинами, превышающих шесть их длин, время залечивания микротрещин оказывается фактически одинаковым при любом расположении трещин друг относительно друга.

Взаимодействие между микротрещинами начинает заметно сказываться на процессе их залечивания, когда расстояния между ними сокращается до 5–6 длин микротрещин. Если же расстояние между трещинами превышает шесть и более их длин, то процессы залечивания микротрещин, становятся практически независимыми как от расстояния между дефектами, так и от расположения дефектов друг относительно друга.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №15-08-08693.

Автомодельная задача для упругой среды при наличии фронта фазового превращения

Куликовский А. Г.¹, Свешникова Е. И.²

¹Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
sveshn@mech.math.msu.su

Рассматривается автомодельная задача о набегании потока невзаимодействующих частиц на плоскую неподвижную стенку с образованием в результате уплотнения и соединения частиц между собой упругой среды. Считается, что образующаяся среда нелинейная, обладает анизотропией и присоединяется к стенке без проскальзывания. Поток считается однородным и все частицы в нем движутся с одной и той же скоростью, имеющей нормальную к стенке и касательные компоненты. Возникающее в образовавшейся упругой среде движение одномерное и все величины зависят от x/t , где x — расстояние от стенки. Впереди движется фронт затвердевания, в котором образуется упругая среда из потока частиц. Если скорость фронта достаточно велика, то следом за ним по упругой среде могут распространяться упругие волны (ударные или волны Римана). Задача заключается в выяснении возникающей картины волн с нахождением изменения величин на каждой из них.

При исследовании этой задачи приняты следующие предположения. (1) Упругая среда предполагается несжимаемой. Это значит, что x -компонента скорости упругой среды равна нулю, при этом скорость фронта затвердевания легко выражается через параметры набегающего потока согласно закону сохранения массы. (2) Считается, что анизотропия и возникающие в среде деформации являются малыми. Это позволяет использовать проведенные ранее авторами исследования ударных и простых волн в слабонелинейной слабоанизотропной упругой среде. (3) Считается, что структура фронта затвердевания описывается моделью вязкоупругой среды Кельвина — Фойхта.

Для рассматриваемой задачи важно отметить, что исследование структуры необходимо для формулировки граничных условий на фронте затвердевания. В зависимости от соотношений между скоростью фронта затвердевания и скоростями малых возмущений в упругой среде требуется разное число граничных условий на фронте. При этом всегда присутствующих законов сохранения может оказаться недостаточно. Необходимые дополнительные соотношения найдутся как условия существования решения, представляющего структуру фронта. В указанных предположениях структура фронта затвердевания была исследована авторами ранее (ПММ, 2015, том 79, вып. 6) и найдено множество состояний упругой среды за фронтом.

Решение задачи для упругих волн, следующих вслед за фронтом затвердевания, строится отдельно для каждой из категорий фронтов. В данной работе найдены и приведены последовательности упругих волн — ударных и волн Римана, следующих в порядке убывания скоростей за фронтом затвердевания в разных диапазонах скоростей фронта для всех возможных параметров образующейся упругой среды и для сред с разными типами нелинейности.

Об устойчивости триполярных и квадрупольных дискретных вихревых структур в однородной и двухслойной вращающейся жидкости

Куракин Л. Г.^{1,2}, Островская И. В.¹, Соколовский М. А.^{3,4}

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ

³Институт водных проблем РАН, Москва

⁴Институт океанологии им. П. П. Ширшова, Москва

kurakin@math.rsu.ru, ivostrovskaya@sfnu.ru

Рассматривается двухслойная квазигеострофическая модель в приближении f -плоскости. Проводится анализ устойчивости дискретной осесимметричной вихревой структуры, состоящей из центрального вихря произвольной эффективной интенсивности Γ и двух/трех идентичных периферийных вихрей. Одинаковые вихри расположены в одном слое равномерно на окружности радиуса R и имеют единичную эффективную интенсивность. Центральный вихрь лежит либо в другом слое, либо в том же самом. Задача имеет три параметра (R, Γ, α) , где α — разность толщин слоев. Рассматривается также предельный случай однородной жидкости.

Применяется теория устойчивости стационарных движений динамических систем с непрерывной группой симметрии \mathcal{G} . Используются два определения устойчивости: устойчивость по Раусу и \mathcal{G} -устойчивость. Устойчивость по Раусу — это устойчивость однопараметрической орбиты стационарного вращения вихревого мультиполя, а \mathcal{G} -устойчивость — устойчивость трехпараметрического инвариантного множества $O_{\mathcal{G}}$, образованного орбитами непрерывного семейства стационарных вращений мультиполя.

Задача устойчивости по Раусу сведена к проблеме устойчивости семейства равновесий гамильтоновой системы. Аналитически исследованы квадратичная часть гамильтониана и собственные значения матрицы линеаризации. Вся область параметров задачи разбивается на три части: (а) область устойчивости по Раусу в точной нелинейной постановке; (б) область экспоненциальной неустойчивости и (с) область, в которой все собственные значения матрицы линеаризации лежат на мнимой оси, но вопрос об устойчивости в точной нелинейной постановке остается открытым.

Для исследования \mathcal{G} -устойчивости применяются результаты теории устойчивости инвариантных множеств для систем с несколькими интегралами. Найдены области параметров, при которых интеграл, построенный методом связки интегралов, имеет на инвариантном множестве $O_{\mathcal{G}}$ локальный минимум. Они включают в себя целиком область (а) и целиком (частично) область (с) для триполя (квадруполья). Математически строгому доказательству \mathcal{G} -устойчивости препятствует некомпактность множества $O_{\mathcal{G}}$. Отдельно исследованы случаи нулевой суммарной интенсивности триполя и квадруполья.

Работа первых двух авторов выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания ЮФУ в сфере научной деятельности (задание №1.1398.2014/К), а третьего автора — гранта РНФ (проект 14-50-00095).

Неоднородно поляризованные пьезоэлементы устройств накопления энергии: конечноэлементное моделирование и прикладная теория

Ле Зыонг Ван¹, Оганесян П. А.², Скалиух А. С.², Соловьев А. Н.^{2,3}

¹ *Технический университет им. Ле Куи Дона, Ханой*

² *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

³ *Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*
solovievarc@gmail.com

Рассматривается пьезоэлектрический генератор (ПЭГ) для устройства накопления энергии, рабочим элементом которого является многослойный пьезоэлемент. Пьезоэлемент выполнен в виде двух- или трехслойной пластины или диска, с двумя пьезоэлектрическими слоями. В качестве пьезоэлектрического материала рассматривается пьезокерамика с неоднородной поляризацией. Поляризация пьезоэлементов характеризуется наличием участков с толщиной, продольной поляризацией и переходных зон. Электроды частично покрывают внешние лицевые поверхности пластин. Пьезоэлемент шарнирно закреплен по внешнему радиусу. Возбуждение колебаний осуществляется за счет переменного поля давления на лицевую поверхность пластины или гармонических колебаний точек на линии закрепления.

Работа состоит из нескольких частей. В первой части рассматривается теория неоднородной поляризации пьезокерамики под действием разности потенциалов подведенных к электродированным участкам границы и ее реализация в конечноэлементном пакете ACELAN.

Во второй части работы в ACELAN решаются задачи неоднородной поляризации пьезоэлементов, при этом предлагается два способа: в первом используются технологические электроды расположенные симметрично основным и поляризация осуществляется за два шага, во втором способе технологические электроды не используются. Сравниваются поля предварительной поляризации, полученные первым и вторым способом.

В третьей части работы рассматривается пьезоэлемент с кусочно-постоянной поляризацией и с помощью моделирования в ACELAN проводится анализ влияния неоднородной поляризации на характеристики пьезоэлемента: частоты резонанса и антирезонанса, выходной потенциал.

В следующей части работы строится прикладная теория изгиба двухслойного пьезоэлектрического генератора с двумя участками: толщиной поляризацией и встречно-продольной поляризацией. Проводятся сравнения собственных частот, полей смещений и электрического потенциала с расчетом в ACELAN и отмечается достаточная работоспособность предложенной прикладной теории.

В последней части работы на основе модели с кусочно-постоянной поляризацией проведены численные эксперименты, в которых изучается влияние геометрических и физических параметров ПЭГ на его выходные характеристики: резонансные частоты, электрический потенциал и мощность при подключении внешней электрической цепи с активным сопротивлением. На основе анализа результатов этих расчетов предложены рациональные конструкции ПЭГ.

Работа частично поддержана грантом РФФИ №16-01-00354 А.

О влиянии деформации несоответствия на электромеханические характеристики электроупругой среды

Леви Г. Ю.^{1,2}, Леви М. О.^{1,2}, Татарков Д. А.²

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

mlevi@mindonline.ru

Изучается модель электроупругой среды $|x_1| \leq \infty$, представляющей собой тонкий слой $0 < x_3 \leq h_1$ лежащий на подстилающем его полупространстве $x_3 \leq 0$. Поверхность среды предполагается полностью свободной от механических напряжений, в качестве осциллирующей нагрузки может быть задана механическая или электрическая нагрузка ($q_3 \exp[-i\omega t]$ и $q_4 \exp[-i\omega t]$ соответственно) распределенная в области $|x_1| \leq a$. Все колебания являются устоявшимися, происходящими по гармоническому закону, и удовлетворяют уравнениям движения и уравнениям Максвелла: $\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \partial^2 u^{(n)} / \partial t^2$, $\nabla \cdot D^{(n)} = 0$. Здесь $\Theta^{(n)}$ – тензор напряжений n -слоя среды, $D^{(n)}$ – вектор индукции, $\rho^{(n)}$ – плотность, $u^{(n)} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор механических смещений. Колебания в среде происходят с учетом условия распространения плоских волн: $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$, $u_2 = 0$, $u_n = u_n(x_1, x_3)$, $n = 1, 3, 4$. Материальные уравнения среды можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} T^{(n)} \\ D^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(n)} & -e^{(n)} \\ e^{T^{(n)}} & \varepsilon^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S^{(n)} \\ E^{(n)} \end{bmatrix},$$

где $T^{(n)}$ и $S^{(n)}$ – компоненты тензоров напряжения и деформации второго порядка в упрощенном виде при использовании обозначений Фойгта, $E^{(n)}$ – вектор напряжения электрического поля, $c^{(n)}$, $e^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ – упругие, пьезоэлектрические, диэлектрические коэффициенты соответственно.

Граничные условия на границе слоя и полупространства предполагают полное сцепление механических смещений и напряжений, а так же неразрывность электрической индукции и потенциала. В полупространстве условия соответствуют условиям затухания механических и электрических полей на бесконечности.

Все исследования проводились в безразмерных параметрах. В качестве исследуемого материала слоя рассматривается титаната бария-стронция (80% бария и 20% стронция). Материал полупространства предполагается выполненным из диэлектрика – оксида магния. Разница в жесткости материалов слоя и полупространства создает сильную дисперсию в среде. Были получены коэффициенты электромеханической связи для первых мод электроупругой волны. Исследовано поведения волны пленки титаната бария-стронция при различной деформации несоответствия, получены графики коэффициентов электромеханической связи на поверхности среды. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании тонкопленочных устройств основанных на ПАВ.

Замкнутые решения нестационарной задачи динамики для вязкоупругого конечного цилиндра

Лычёва Т. Н.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва
taniko81@mail.ru

В работе развиваются математические методы моделирования нестационарных колебаний линейно-вязкоупругих тел. Актуальность этих исследований, в частности, объясняется тем, что теоретические зависимости, определяемые решениями соответствующих начально-краевых задач, используются при идентификации реологических моделей материалов в динамических методах испытаний. Для построения таких теоретических зависимостей предпочтительным являются замкнутые (в рядах) решения модельных задач, поскольку они, в отличие решений, получаемых численными методами, допускают строгие оценки погрешности при вычислительной реализации (вычислении частичных сумм). Однако, построение аналитических решений сопряжено со следующими трудностями аналитического и вычислительного характера: 1) представление решений трёхмерных задач в форме разложений по собственным функциям приводит к необходимости учёта большого числа собственных значений, которые, как правило, находятся численно как корни трансцендентных уравнений; при этом велика вероятность пропуска близко расположенных и кратных корней; 2) построенные ряды медленно сходятся; 3) как правило, принимается гипотеза о пропорциональности операторов релаксации, соответствующих первому и второму модулям Ламе, что равносильно гипотезе о постоянстве коэффициента Пуассона. В настоящей работе предлагаются способы решения этих проблем.

В рамках развиваемой методики построены замкнутые решения трёхмерной линейной динамической задачи для вязкоупругого конечного цилиндра. Краевые условия соответствуют жестко-гладкому контакту на основаниях цилиндра и отсутствию напряжений на цилиндрической поверхности. Для случая постоянного коэффициента Пуассона решения представлены в форме разложений по ортогональным системам собственных функций самосопряжённого оператора, определяемого начально-краевой задачей. В общем случае разложения строятся по собственным функциям пучка дифференциальных операторов. Получены алгоритмически эффективные соотношения для компонент разложения, определяющие нормировку собственных функций, координатные функции, а также асимптотические формулы для начальных приближений корней частотного уравнения, включающие их пропуск при вычислениях, в том числе в случаях кратных корней. Предложен способ построения частичных сумм, члены которых ранжируются по их энергетическому вкладу. Эффективность вычислительных алгоритмов показана на примерах. Получены расчётные соотношения для частных видов динамических воздействий, соответствующих стандартным экспериментальным схемам идентификации вязкоупругого материала.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 16-58-52033 и ОЭММПУ-12.

Геометрические методы механики тел переменного состава

Лычев С. А.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва

lychevsa@mail.ru

В работе развиваются геометрические методы моделирования конечных несовместных деформаций твердых тел переменного состава. Несовместность деформаций в таких телах является следствием изменения их материального состава одновременно с деформированием. Примером может служить процесс создания трехмерного тела методом послойной стереолитографии, в ходе которого каждый присоединённый слой испытывает усадку, вызванную фотохимическим процессом, уже после вхождения в состав создаваемой детали. Следствиями несовместных деформаций являются остаточные напряжения и искажение геометрической формы тела. Эти факторы определяют критические параметры современных высокоточных технологий, и, в силу этого, развитие методов их количественного описания является актуальной проблемой современной механики деформируемого твёрдого тела. Геометрические методы основаны на представлении тела и физического пространства гладкими многообразиями: материальным и физическим. На этих многообразиях определены особые метрики и связности. При этом, деформация формализована как вложение (или, в особом случае, погружение) материального многообразия в физическое. Меры локальной деформации, предназначенные для описания отклика простого материала, представлены как обратный образ («pull-back») пространственной метрики и прямой образ («push-forward») материальной. Абстрактная теория интегрирования, основанная на исчислении внешних форм, адаптирована для рассматриваемой проблемы. Это позволяет определить напряжения на гладком многообразии с общей аффинной связностью, как ковекторно-значные формы и сформулировать уравнения баланса мощности в терминах внешнего исчисления Картана.

В работе рассмотрены различные способы определения связностей на материальном и физическом многообразиях. Связность наделяет многообразия геометрическими свойствами, в частности, понятием параллельности. Удачный выбор связности позволяет существенно упростить постановку начально-краевых задач теории несовместных деформаций, поэтому вопрос о выборе связностей на материальном и физическом пространствах представляется важным. Связность на физическом многообразии полагается согласованной с метрикой и определяется соотношениями Леви — Чивиты. Материальное многообразие рассматривается в двух альтернативных вариантах: многообразии Вайценбока (плоское, но с отличным от нуля кручением) и риманово многообразии, которое связано с многообразием Вайценбока преобразованием конторсии. Уравнения баланса в терминах внешней ковариантной производной получены из общего принципа ковариантности и сформулированы в пространственном и материальном описаниях в терминах внешней ковариантной производной.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 15-08-06330 и ОЭМПУ-12.

Релаксационные процессы в двухслойном цилиндрическом спае стекла с металлом при резком охлаждении

Любимова О. Н., Солоненко Э. П.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

berms@mail.ru, el-solonenko@yandex.ru

Исследование технологических напряжений в двухслойном цилиндрическом спае связано с оптимизацией и нахождением режима изготовления стеклометаллокомпозитных стержней со стеклянным сердечником. Технология изготовления включает нагрев, выдержку и охлаждение с различными скоростями. В рассматриваемой технологии спаивание стекла с металлом происходит при температурах выше температуры стеклования, при этом стекло находится в состоянии вязкой жидкости.

Решение задачи теплопроводности показывает, что для цилиндров диаметром менее 20 мм, температура в цилиндре не зависит от координаты r , а определяется только температурой окружающей среды. Однако, исследования поперечного сечения образца показывают, что при резком охлаждении (температурном скачке) в стекле возможно формирование слоистой структуры с различными свойствами, и при дальнейшей выдержке эти свойства стабилизируются, а стекло достигает нового равновесного состояния. Подобные процессы приближения к равновесию в стеклах, предварительно выведенных из равновесного состояния, известны как релаксационные процессы. Несмотря на огромный интерес к теории стеклования, которой посвящены сотни публикаций, предложено большое количество феноменологических моделей, обзор которых представлен в работе Т.В. Тропина и Ю.В. Шмельцера, и В.Л. Аксенова «Современные аспекты кинетической теории стеклования» (Успехи физических наук, Том 186, №1, 2016), общей кинетической теории стеклования до сих пор не существует. Поэтому исследования, позволяющие накопить информацию и апробировать тот или иной метод, описывающий релаксационные процессы являются актуальными. В настоящей работе релаксацию напряжений в цилиндрическом спае стекла с металлом предлагается исследовать в рамках модели Тула — Нарайанасвами — Мойнихана — Мазурина, которая наиболее успешно описывает экспериментальные данные по стеклованию различных аморфных материалов. Зависимость конечных свойств стекла от тепловой истории приводит к задаче определения его механических параметров. Для описания структурных (релаксационных) изменений при высоких температурах используется неэкспоненциальный закон — функция Кольрауша.

Результатом данной работы является метод расчета термических напряжений в цилиндрическом спае с учетом изменяющейся структуры стекла в результате резкого охлаждения при условии идеального контакта как на границе соединения стекло-металл, так и в самой слоистой структуре стекла.

Контактная задача для пористой пластины на упругом основании

Ляпин А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

alexlpn@hotmail.com

Представляемая работа посвящена моделированию контактной задачи для пористой пластины на упругом основании. Штамп — жесткое тело параболической формы. Такая задача может служить инструментом анализа процессов, возникающих при наноиндентировании различных горных пород, в том числе углей. Необходимость анализа пластин в процессах наноиндентирования обусловлена спецификой изготовления тестируемых образцов — тонких шлифов горной породы. Сама горная порода, и уголь в частности, обладает сложными физико-механическими свойствами, которые необходимо учитывать при проведении процедуры индентирования. Основной информацией в процессе индентирования является кривая зависимости силы вдавливания от перемещения индентора. Построение такой зависимости и анализ влияния на неё различных параметров модели — основная цель представляемой работы.

Важным этапом решения задачи является корректная формулировка уравнений пористой пластины. Существуют различные теории деформации пластин, отличающиеся учетом различных факторов. В данной работе была сформулирована теория, аналогичная теории пластин Кирхгофа, с учетом пористости материала. В качестве модели пороупругости выступает модель материала с пустыми порами, что наиболее близко к структуре углей. В данной модели полевыми функциями являются поле перемещений среды и функция пористости, выражающая отношение объема пустот к общему объему тела в данной точке.

Вывод уравнений пористой пластины осуществлен двумя способами: интегрированием общих уравнений среды с учетом соответствующих гипотез и на основе вариационного принципа Лагранжа для пористых материалов. Пластина лежит на упругом основании Фусса — Винклера с заданной жесткостью и считается неограниченной. Контакт между штампом и пластиной задан без учета трения.

В отличие от классических решений для упругой пластины Кирхгофа, решение для пористой пластины по аналогичной теории не сводится к сосредоточенным усилиям в вершинах штампа. Учет пористости приводит к непрерывному распределению функции контактных напряжений под штампом. Более того, в процессе решения возможно исключить функцию пористости из уравнений деформации пластины. Решение поставленной задачи строится методом склейки решений для частей пластины на основе удовлетворения требованиям непрерывности соответствующих функций.

Полученные решения являются базовыми для исследования процессов наноиндентирования пористых пластин на упругом основании.

Управление прочностными свойствами углеродных композитов

Мазепа М. М.

ОНИ наноструктур и биосистем СГУ им. Н. Г. Чернышевского, Саратов
wargyrl@gmail.com

Актуальной задачей в области усовершенствования работы устройств наноустройств является создание композитного материала с уникальными свойствами, который будет использоваться в качестве элементной базы этих наноустройств. Новый виток в области развития таких материалов связан с синтезом и исследованием свойств композитных углеродных наноструктур (КУНС) на основе углеродных нанотрубок и графена. Эти композиты состоят из графенового листа и присоединенных перпендикулярно к нему с помощью химических связей углеродных нанотрубок. Углеродные нанотрубки перпендикулярно ориентированы относительно графенового листа и присоединены к нему с помощью химических связей. При образовании композита края УНТ остаются открытыми, а в графеновом листе образуется отверстие, форма и размер которого соответствует диаметру присоединенных нанотрубок. При образовании КУНС нанотрубки располагаются в шахматном порядке, что подтверждается экспериментальными работами.

С целью увеличения времени работы прибора за счет повышения прочностных характеристик его элементной базы впервые проводится исследование модуля Юнга углеродных композитов с разной длиной armchair нанотрубок в зависимости от увеличения приложенной силы к вертикальной оси УНТ, входящих в состав этих композитов. Серия численных экспериментов осуществлялась на ячейке композита с учетом периодических граничных условий, заданных в плоскости листа графена. Задание периодических условий только в двух направлениях обусловливается тем, что в эксперименте протяженность композитов наблюдается только в плоскости графенового листа. Исследования осуществлялись в рамках молекулярно-механического метода с использованием потенциала REBO. Ячейка углеродного композита состояла из графенового листа длиной 62.48 \AA и шириной 46.748 \AA , и УНТ вертикально ориентированных, расположенных с разных сторон относительно плоскости графенового листа в шахматном порядке. В составе одного композита длина УНТ оставалась постоянной. Для каждого композита длина изменялась в пределах от 15 \AA до 35 \AA постоянного диаметра 12.12 \AA .

Установлено, что при растяжении на 1% композита вдоль оси нанотрубок модуль Юнга композита увеличиваются с увеличением длины нанотрубок в композите. Следовательно, можно построить диаграмму зависимости силы, которую необходимо приложить для растяжения структуры на 1%, и геометрических параметров композита. По этой диаграмме, зная прикладываемые силы в наноустройстве, можно определить минимальный размер композита, который необходимо использовать в качестве элементной базы этого наноустройства. Подобное использование композитов позволит уменьшить расход материалов при конструировании наноустройства без потери качества его работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской стипендии 2016-2018 (проект №СП-2502.2016.1).

Колебания анизотропных цилиндрических оболочек

Макаров С. С., Устинов Ю. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

makarov-sergey-rostov@mail.ru

Исследование колебаний армированных оболочек тесно связано с исследованием винтового движения крови в артериальных сосудах. Устиновым Ю. А. было предложено рассматривать данные сосуды как композит, упругие свойства которого обладают винтовой анизотропией. Данная работа является продолжением исследований, выполненных им и его учениками.

В рамках двух двумерных теорий оболочек исследованы собственные колебания цилиндрических оболочек со спиральной (первый тип) и биспиральной (второй тип) анизотропией. Основные соотношения первой теории основываются на классических гипотезах Кирхгоффа — Лява, вторая теория — уточненная. Во всех рассматриваемых случаях получены дисперсионные уравнения и на их основе построены дисперсионные кривые. Проведено исследование влияние «угла накрутки» на дисперсионные кривые и спектр собственных частот. Результаты исследований проиллюстрированы трёхмерными графиками. На основе проведенных исследований, определен диапазон изменения геометрических параметров, в котором классическая и уточненная теории дают близкие результаты. Вместе с этим на основе проведенных исследований определены области значений основных геометрических параметров, при которых дисперсионные кривые и значения собственных частот, полученные в рамках указанных теории, существенно отличаются.

При исследовании осесимметричных колебаний решение выбиралось в виде:

$$u_i = C_i \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad i = \phi, z, r.$$

При исследовании несимметричных колебаний решение выбиралось в виде

$$u_i = C_i \cdot e^{i(n\phi + kx - \omega t)}, \quad i = \phi, z, r.$$

Здесь ω — круговая частота колебаний, k — волновое число.

Расчеты проводились для двух типов граничных условий:

- на обоих торцах оболочки выполняются условия жесткой заделки, т. е.

$$z = 0, L: \quad u_\phi = u_z = u_r = 0, \quad \theta_z = \partial_z u_r = 0;$$

- на одном торце оболочки выполняется условие жесткой заделки, на втором — условия отсутствия усилий и моментов, т. е.

$$z = 0: \quad u_\phi = u_z = u_r = 0, \quad \theta_z = \partial_z u_r = 0$$

$$z = L: \quad T_{zz} = 0, \quad M_{zz} = 0, \quad Q_z = 0, \quad T_{z\phi} + R^{-1}M_{z\phi} = 0$$

Здесь L — длина оболочки, θ_z — угол поворота нормали, T_{zz} , $T_{z\phi}$ — компоненты тензора усилий, M_{zz} , $M_{z\phi}$ — компоненты тензора моментов, Q_z — поперечная сила.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания №9.665.2014.К в сфере научной деятельности.

Контактные задачи для тел с покрытиями:
истоки, достижения, проблемы

Манжиров А. В.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва
manzh@inbox.ru

Рассматриваются задачи механики контактных взаимодействий для тел с покрытиями. Дается краткий обзор публикаций по данной проблематике, включающий основополагающие статьи и монографии профессора В. М. Александрова, его учеников и соавторов. Обсуждаются основные направления развития данной области, а также методы решения возникающих смешанных задач механики. Детально представлено направление контактных задач для оснований с мягкими однородными, неоднородными и шероховатыми покрытиями.

Дана классификация контактных задач для мягких покрытий и их разрешающих интегральных уравнений. Рассмотрены задачи для однородных и неоднородных по глубине покрытий; для поверхностно неоднородных и шероховатых покрытий; для покрытий с реальной формой поверхности, описываемой быстро изменяющейся функцией; для штампов, форма основания которых описывается быстро меняющейся функцией; для случая, когда форма поверхности покрытия и форма основания штампа описываются различными быстро меняющимися функциями; для упругих и вязкоупругих оснований и покрытий, для тел из материалов с постоянными и переменными с течением времени свойствами; для изолированных штампов, а также их систем.

Изучаются уравнения с одним и несколькими разными интегральными операторами, уравнения с одной или двумя быстро меняющимися функциями, с одним или двумя дополнительными условиями. Рассмотрены аналогичные системы уравнений: с одним самосопряженным компактным оператором, имеющим матричное ядро, и двумя несамосопряженными операторами Вольтерра, с одной или двумя последовательностями быстро меняющихся функций или дополнительных условий. Показано, что все представленные задачи можно привести к решению одного операторного уравнения относительно непрерывных по времени функций со значениями из абстрактного гильбертова пространства.

Предложен обобщенный проекционный метод решения полученного операторного уравнения, который позволяет строить решения всех рассмотренных многомерных интегральных уравнений и систем таких уравнений. Метод является алгоритмическим и конструктивным. В каждом конкретном случае достаточно по условиям задачи и виду правой части интегрального уравнения или системы интегральных уравнений построить разрешающий оператор ортогонального проектирования, чтобы затем шаг за шагом построить аналитическое решение в рядах с заданной степенью точности. При наличии быстро меняющихся функций метод позволяет получить решение в форме с выделенными в явном виде функциями такого типа и получить результат высокой точности с использованием небольшого числа членов разложения. Полученные решения иллюстрируются графиками основных характеристик.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №14-19-01280).

Математическое моделирование перестройки костной ткани с аппаратом наружной фиксации

Маслов Л. Б., Сабанеев Н. А., Седов В. М.

Ивановский государственный энергетический университет

leonid-maslov@mail.ru, nsabaneev@mail.ru, nsabaneev@mail.ru

Математическое моделирование является мощным инструментом для познания организации физиологических функций человека. Математическое и компьютерное моделирование, применяемое для получения информации о механизмах изучаемых процессов имеет важное значение в биомеханике.

По статистике переломы костей голени составляют 20–37% среди переломов длинных трубчатых костей. 60–70% переломов костей голени получают люди трудоспособного возраста. Сроки временной нетрудоспособности пострадавших с различными переломами костей голени колеблются в широких пределах: от 5–6 недель до 10–12 месяцев при сложных переломах. Важным моментом для оптимального течения процессов регенерации и успешного восстановления целостности поврежденной кости является сопоставление и фиксация отломков. Процесс перестройки костной ткани представляет собой сложный физиологический процесс, который протекает в несколько стадий. В первые дни, в зоне повреждения образуется материальный запас клеток и тканей для регенеративного процесса. Затем начинается стадия репарации кости, образование и дифференцировка тканевых структур.

На процесс перестройки костной ткани оказывают влияние как внешние, так и внутренние факторы. К внешним факторам, прежде всего, можно отнести механическую нагрузку. Исследование влияния механической нагрузки на процессы регенерации проводилось на конечно-элементной модели большеберцовой кости человека с системой для аппарата наружной фиксации билатеральной одноплоскостной. Характеристики материалов тканей получены расчетным путем по алгоритму вычисления эффективных модулей композитных материалов. Граничные условия, наложенные на модель, моделируют шарнирное соединение в коленном и голеностопном суставах. В качестве внешней нагрузки, действующей на модель, выбрана медленно изменяющаяся сжимающая сила, постоянная на каждом шаге по времени, с наложенной на нее гармонической составляющей.

На процесс регенерации ткани в зоне перелома оказывает влияние изменение частоты внешнего гармонического возмущения. Основными переменными, характеризующими процесс восстановления костной ткани в зоне репарации, в течение периода восстановления являются модуль продольной упругости, плотность и пористость ткани.

Результаты исследования численного моделирования подтверждают положительное влияние приложения внешней нагрузки на восстановление костной структуры в области перелома. Так при низкочастотной вибрации от 1 до 10 Гц уже к 60 дню происходит образование зрелой костной ткани, благодаря адаптации клеток к условиям внешней нагрузки. При увеличении частоты нагрузки не обеспечивается консолидация костной ткани в месте перелома. Однако, на высоких частотах, на процесс регенерации положительное влияние оказывает уменьшение амплитуды динамической составляющей силы.

Влияние тонкой оксидной плёнки на эффективные механические свойства металлического покрытия при наноиндентировании

Митрин Б. И.¹, Николаев А. Л.², Садырин Е. В.¹

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

evgeniy.sadyrin@gmail.com

Поверхностные слои оказывают существенное влияние на механическое поведение компонентов техники. Целью работы было дать количественную и качественную оценку этого влияния. В качестве объекта теоретических и экспериментальных исследований был использован образец никелевого покрытия, нанесенного под вакуумом методом магнетронного распыления на кремниевую подложку. Толщина полученного покрытия Ni составила ~ 1 мкм. На воздухе на поверхности покрытия образовалась оксидная пленка NiO толщиной 45–50 нм.

Механические свойства покрытия исследовались с помощью наноиндентометра Nanotest 600 Platform 3. Прибор оборудован пирамидальным индентором Берковича с алмазным наконечником. Максимальная нагрузка на индентор в каждой серии экспериментов составляла от 0,1 до 75 мН, что соответствовало глубинам внедрения от 10,6 до 443,2 нм. На этапе нагрузки и удержания нагрузки происходит упруго-пластическое деформирование образца, но на этапе разгрузки отклик почти целиком упругий, что позволяет применять для его описания модели теории упругости. В результате экспериментальных исследований была получена зависимость эффективного модуля Юнга, определяемого из наклона разгрузочной части кривой сила–осадка, от глубины внедрения индентора.

Ввиду сферического притупления кончика вершины индентора Берковича, на малых глубинах внедрения индентора для моделирования процесса индентирования возможно применение модели сферического индентора. С помощью решения прямой контактной задачи теории упругости о внедрении жёсткого сферического индентора в упругое покрытие, неоднородное по глубине, сцепленное с однородным упругим полупространством, построены теоретические зависимости эффективного модуля Юнга от глубины внедрения для покрытий Ni (без оксидной пленки) и NiO-Ni (с оксидной пленкой).

Было установлено, что теоретическая зависимость для NiO-Ni соответствует экспериментальным результатам, что подтверждает гипотезу о влиянии оксидной пленки на результат эксперимента. Эффективные значения модуля Юнга (как экспериментальные, так и теоретические для покрытия NiO-Ni) в зависимости от глубины внедрения могут существенно отличаться от значения для Ni из литературы. Из-за наличия оксидной пленки применение распространенного на практике подхода (внедрение на глубину $\leq 10\%$ от толщины покрытия) приводит к неверным результатам определения упругих свойств покрытия Ni.

Покрытие наносилось в учебно-научной лаборатории наноматериалов Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича ЮФУ. Измерения на наноиндентометре и атомно-силовом микроскопе проводились в Ресурсном центре коллективного пользования НОЦ «Материалы» ДГТУ.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-07-00343-а, 15-07-05208-а, 15-57-04084-Бел_мол_а.

Влияние вязкоупругих свойств предварительно напряженной тимпанальной мембраны на собственные частоты колебательной системы среднего уха

Михасев Г. И., Славашевич И. Л.

Белорусский государственный университет, Минск

Mikhasev@bsu.by, slavashevichi@yandex.ru

Перфорация тимпанальной мембраны, вызванная воспалительными процессами, может приводить к серьезным негативным последствиям, вплоть до полной потери слуха. Мирингопластика — это операция, направленная на восстановление целостности барабанной перепонки. Процесс отложения солей в области среднего уха может стать причиной такой патологии, как отосклеротический анкилоз суставов слуховых косточек (существенным увеличением жесткости тканей сустава), из-за чего слуховые косточки теряют подвижность в этом суставе. В данном случае применяется стапедопластика.

В данной работе представлена математическая модель колебательной системы среднего уха (СУ) при тотальной реконструкции, предполагающую мирингопластику и стапедопластику с последующей установкой протеза типа TORP. В данном случае основание протеза располагается на восстановленной тимпанальной мембране (ТМ), а конец ствола вводится в перилимфу через перфорацию подножной пластинки стремени.

Тимпанальную мембрану моделируем как вязкоупругую кольцевую пластинку с внешним и внутренним радиусами a и b соответственно. Тотальный протез состоит из круглой пластинки радиуса b и сопряженного с ней ствола под некоторым углом γ . В работе Михасева Г. И. показано, что наиболее предпочтительной техникой установки протеза с точки зрения минимизации начальных напряжений, является такая техника, когда основание протеза размещается на восстановленной ТМ как можно ближе к центру. В данной работе рассмотрим случай, когда центры реконструированной ТМ и основания протеза совпадают. Предполагаем, что основание протеза и хрящевой трансплантат жестко склеены.

Рассматриваем случай, когда перфорация подножной пластины стремени выполняется в месте, где ее толщина максимальна. При данной технике протез имеет лишь одну степень свободы, определяемую направляющей перфорации. В уравнении, описывающем движение протеза, учитывается сила реакции кохлеарной жидкости, состоящая из двух компонент — упругой составляющей, зависящей от степени натяжения мембраны круглого окна, и ее вязкоупругой части, пропорциональной скорости движения ствола протеза. С использованием асимптотического метода строятся решения уравнений движений колебательной системы в окрестности начального статического напряженно-деформированного состояния СУ, характеризующегося мембранными усилиями в ТМ. Получено трансцендентное уравнение относительно искомой комплексной частоты колебаний СУ. С использованием численных методов находятся собственные частоты и декремент колебаний системы в зависимости от физических и геометрических характеристик вводимого протеза и хрящевого имплантата.

Кинематические характеристики нелинейных ангармонических возмущений для монохроматических нормальных волн кручения в анизотропных цилиндрах из Gd и Tb

Моисеенко И. А., Сидаш О. Ю., Сторожев В. И.

Донецкий национальный университет

stvi@i.ua

В рамках модели физически и геометрически нелинейного динамического деформирования трансверсально-изотропного упругого тела исследуется проблема получения оценок для уровней нелинейных ангармонических возмущений, генерируемых при распространении осесимметричных монохроматических нормальных волн крутильного типа вдоль осевого направления в протяженных трансверсально-изотропных цилиндрах со свободной либо жестко закрепленной граничной поверхностью. Используемая модель базируется на представлении упругого потенциала деформируемого трансверсально-изотропного тела с квадратичными и кубическими членами по конечным деформациям, коэффициенты которого выражаются через пять независимых упругих постоянных второго порядка и девять независимых упругих постоянных третьего порядка. Применяется методика описания характеристик динамического напряженно-деформированного состояния двумя низшими членами разложений по малому параметру в виде отношения максимального амплитудного уровня исследуемых волн к радиусу волновода и последующего сведения задачи описания ангармонических возмущений к рекуррентной последовательности краевых задач первого (линейного) и второго (нелинейного) приближения. Установлено, что в рамках данной модели для цилиндров с рассматриваемым типом физико-механической симметрии нелинейные вторые гармоники уединенных монохроматических линейных нормальных крутильных волн из произвольной моды дисперсионного спектра представляют собой осесимметричные упругие волны продольно-сдвигового типа с удвоенной частотой и удвоенным волновым числом относительно линейной нормальной волны кручения. С использованием специального алгоритма аналитических преобразований в среде компьютерной алгебры и реализующего алгоритм программного приложения получены представления компонентов волновых перемещений во вторых гармониках для свободных и закрепленных по боковой поверхности цилиндров в форме абсолютно сходящихся степенных рядов радиальной координаты.

Реализован детальный сопоставительный анализ зависимостей кинематических характеристик нелинейных ангармонических возмущений от факторов относительной длины и выбора порядкового номера моды линейной нормальной волны кручения для цилиндрических волноводов из гадолиния (Gd) и тербия (Tb). В частности, исследована параметрическая трансформация амплитудных форм колебательных смещений в сечении цилиндра, обусловленных вторыми гармониками, а также в широком диапазоне описаны зависимости максимальных амплитудных уровней вторых гармоник от относительной длины линейной волны.

Представлены результаты сопоставления оценок для кинематических характеристик вторых гармоник, полученные в рамках частных моделей геометрически и физически-нелинейного динамического деформирования.

Типы ветвления автоколебаний в горизонтальном слое бинарной смеси

Моршнева И. В.*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

morsh4@yandex.ru, morsh@math.sfedu.ru

Рассматривается задача о возникновении вторичных автоколебательных конвективных режимов в горизонтальном бесконечном слое двухкомпонентной смеси, состоящей из нереагирующих компонент. Предполагается, что границы слоя свободные, плоские и на них отсутствуют касательные напряжения. Значения температуры и концентрации примеси на границах считаются фиксированными. Расход жидкости через поперечное сечение предполагается равным нулю. Перекрестные эффекты — термодиффузия и диффузионная теплопроводность — не учитываются. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции смеси в приближении Обербека — Буссинеска в форме, описанной Шапошниковым И. Г.

Уравнения движения имеют стационарное (основное) решение, соответствующее покоящейся смеси, в предположении, что градиенты температуры и концентрации постоянны и вертикальны. Известно, что в двухкомпонентной смеси, в отличие от случая чистой среды, возможны два вида неустойчивости основного решения — монотонная и колебательная.

Данная работа посвящена изучению автоколебаний, которые возникают при колебательной потере устойчивости основного режима. Рассматриваются плоские возмущения, периодические по горизонтальной переменной x . Уравнения для возмущений инвариантны относительно преобразования инверсии (замены x на $-x$) и относительно сдвигов по x . Возникновение автоколебаний в системах с такими симметриями изучено в работах Юдовича В. И. и Моршневой И. В. Показано, что при переходе параметра через критическое значение колебательной потери устойчивости от основного режима могут ответвиться автоколебательные режимы двух видов: бегущие навстречу друг другу волны, а также нелинейная смесь пары бегущих волн. Характер ветвления и устойчивость этих автоколебаний зависит от коэффициентов системы уравнений разветвления Ляпунова — Шмидта. В данной работе были получены аналитические выражения этих коэффициентов для рассматриваемой задачи. Эти коэффициенты представляют собой функционалы, которые выражаются через собственные функции линейной и сопряженной задач устойчивости, а также через решения ряда неоднородных краевых задач с правыми частями, явно зависящими от этих же собственных функций. Проведен анализ зависимости коэффициентов уравнений разветвления от параметров задачи. Показано, что и бегущие волны, и нелинейная смесь бегущих волн могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. Может происходить как сверхкритическое, так и докритическое ветвление автоколебаний. Для обоих видов автоколебаний найдены первые два члена ряда по степеням параметра надкритичности.

Возникновение пространственных периодических режимов в вертикальном слое бинарной смеси

Моршнева И. В., Петрова Е. И.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

morsh4@yandex.ru, morsh@math.sfedu.ru

Рассматривается задача о ветвлении пространственных периодических режимов в вертикальном бесконечном слое двухкомпонентной смеси, состоящей из нереагирующих компонент. Предполагается, что границы слоя непроницаемы для вещества, поддерживаются при постоянных разных температурах и задан горизонтальный градиент концентрации, обусловленный эффектом термодиффузии. Эффект диффузионной теплопроводности не учитывается. Также предполагается замкнутость потока. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции смеси в приближении Обербека — Буссинеска в форме, выписанной И. Г. Шапошниковым.

Уравнения движения имеют стационарное плоскопараллельное решение с кубическим профилем скорости, линейным распределением температуры, концентрации и постоянным давлением, которое далее будем называть основным. Устойчивость этого решения была исследована Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицким, Л. Е. Сорокиным. Ими показано, что возможна как монотонная, так и колебательная потеря устойчивости основного решения.

В данной работе изучаются периодические по времени решения, которые возникают при колебательной потере устойчивости основного стационарного режима относительно пространственных возмущений. Предполагается, что возмущения периодичны по однородным пространственным переменным. Уравнения возмущений обладают двойной круговой симметрией: они инвариантны относительно двух преобразований инверсии и двух преобразований сдвига. Это позволяет применить теорию бифуркации рождения циклов в динамических системах с такой симметрией. Из результатов теории следует, что при переходе параметра через критическое значение от основного режима могут ответвляться периодические решения следующих пяти типов: автоколебания, представляющие собой бегущие вдоль вертикального направления волны; автоколебания вида бегущих вдоль горизонтального направления волн; автоколебания вида косой бегущей волны; периодические режимы, представляющие собой нелинейную смесь пары косых бегущих волн; периодические режимы, симметричные относительно инверсий и являющиеся нелинейной смесью косых бегущих волн, связанных инверсионной симметрией. Характер ветвления и устойчивость этих режимов зависит от соотношений между коэффициентами системы уравнений разветвления. Эти коэффициенты представляют собой функционалы, которые выражаются через собственные функции линейной и сопряженной задач устойчивости, решения ряда неоднородных краевых задач с правыми частями, явно зависящими от этих же собственных функций. Вычисления коэффициентов системы уравнений разветвления показали, что при определенных значениях параметров задачи возможно появление описанных выше автоколебаний. Также исследована устойчивость возникающих автоколебаний.

О решении смешанной граничной задачи
нелинейной теории установившейся ползучести
для полупространства при антиплоской деформации

Мхитарян С. М.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван
smkhitaryan39@rambler.ru

Рассматривается смешанная граничная задача (СГЗ) нелинейной теории установившейся ползучести (НТУП) при степенной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций для полупространства, находящегося в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига). При этом в области в форме полосы $\omega = \{-a \leq x \leq a, -\infty < z < \infty\}$ граничной плоскости $y = 0$ полупространства $y \leq 0$, отнесенного к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, задана компонента скорости: $w(x, -0) = f(x)$, а на остальной части граничной плоскости $\Pi \setminus \omega$ ($\Pi = \{y = -0; -\infty < x, z < \infty\}$) касательные напряжения равны нулю: $\tau_{yz}|_{y=-0} = 0$. Эта задача эквивалентна соответствующей смешанной граничной задаче для полупространства в рамках деформационной теории пластичности со степенным упрочнением материала.

Для решения сформулированной СГЗ предварительно в рамках НТУП в замкнутом виде решается первая граничная задача (ПГЗ) для полупространства при антиплоской деформации, когда на его граничной плоскости $y = -0$ действуют распределенные касательные силы. Это замкнутое решение строится методом функции псевдонапряжений при антиплоской деформации, предложенным Y. S. Lee, H. Gong для плоской задачи. Ранее для решения нелинейных задач о трещинах при антиплоской деформации степенно упрочняющего бесконечного пространства J. R. Rice предложил метод годографа. Метод годографа применительно к контактными и смешанным граничным задачам НТУП при степенном законе связи между напряжениями и скоростями деформаций широко использовался в работах В. М. Александрова и его учеников. Эти два метода взаимно дополняют друг друга и расширяют возможности исследования нелинейных граничных задач.

Решение сформулированной выше нелинейной СГЗ при помощи результатов по решению ПГЗ сведено к решению нелинейного интегрального уравнения, допускающего точное решение. Одновременно на основании обобщенного принципа суперпозиции скоростей (ОПСС) Н. Х. Арутюняна получено определяющее интегральное уравнение поставленной СГЗ, совпадающее с интегральным уравнением Карлемана. Это уравнение решается методом ортогональных многочленов Гегенбауэра. В случае, когда скорости распределены по закону параболы ($w(x, -0) = \delta - Ax^2$) проведен сравнительный анализ решений этих двух уравнений, позволяющий оценить ОПСС. Этот случай соответствует плоской классической контактной задаче теории упругости, когда параболический штамп вдавливается в упругую полуплоскость.

О моделях микропористых пьезоэлектрических композитов,
полученных методом транспорта металлосодержащих микрочастиц

Наседкин А. В., Наседкина А. А., Рыбьянец А. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

nasedkin@math.sfedu.ru

Пористые пьезокерамические материалы с улучшенными свойствами активно разрабатываются в последние годы. Недавно третьим автором доклада был предложен оригинальный метод транспорта микро- и наночастиц различных веществ в пьезокерамические материалы. Разработанная технология позволяет создавать пористые пьезокерамические материалы с контролируемыми параметрами (тип связности, форма, размер и распределение пор по размерам и по объему образца) и с модифицированными свойствами на поверхности пор. В частности, в результате применения данного метода можно получать новые пористые пьезокерамические материалы, внутри которых на границах керамической матрицы с порами осаждены микро- или наночастицы из металла.

В настоящей работе представлены численные результаты по расчету эффективных свойств микропористых пьезокерамических материалов с полностью металлизированными поверхностями пор. Исследование проведено на основе комплексного подхода, включающего метод эффективных модулей механики композитов, моделирование представительных объемов стохастической структуры с закрытой пористостью и конечно-элементное решение набора статических задач теории пьезоэлектричества со специальными граничными условиями. Для численного решения применялся конечно-элементный комплекс ANSYS. Представительный объем создавался в виде кубической решетки из одинаковых кубических элементарных ячеек. Каждая из элементарных ячеек состояла из гексаэдральных конечных элементов с внутренним центральным элементом. Далее, среди этих центральных элементов датчиком случайных чисел выбирались элементы, материальные свойства которых модифицировались на свойства пор. В результате получался представительный объем пористого пьезоэлектрического материала с замкнутой пористостью (пористостью 3-0) частично стохастической структуры. Для моделирования металлизации на границах пор с керамической матрицей задавались граничные условия свободных электродов.

Как было обнаружено, для композита с металлизацией пор значения эффективных жесткостей убывают с ростом пористости, а эффективные диэлектрические проницаемости, наоборот, возрастают. Еще более интересно поведение пьезомодулей. Так, пьезомодули e_{33} и e_{15} убывают с ростом пористости, в то время как пьезомодуль $|e_{31}|$ существенно возрастает с ростом пористости. Кроме того, оба значения пьезомодулей d_{33} и $|d_{31}|$ также возрастают с ростом пористости. Таким образом, на основании проведенных расчетов можно сделать вывод, что микропористая пьезокерамика с металлизированными поверхностями пор имеет ряд необычных свойств, перспективных для многих практических применений. Дальнейшее развитие исследований может быть связано с более адекватными структурами представительных объемов, с учетом механических свойств поверхностей пор и размерных эффектов при переходе на наноуровень.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ №16-01-00785.

Колебания неоднородных пьезоэлектрических тел в условиях предварительного напряженно-деформированного состояния

Недин Р. Д.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ
rdn90@bk.ru*

Одними из наиболее перспективных неоднородных пьезоэлектриков являются функционально-градиентные пьезоэлектрики (ФГПЭ), основная особенность которых состоит в непрерывном изменении электрических и механических свойств, благодаря чему не происходит разрушения в результате расслоения, вызванного концентрацией напряжений в пограничных зонах. Тем самым функциональный градиент материальных свойств определяют структурную целостность и прочность всего изделия.

Развитие методов неразрушающей реконструкции свойств различных элементов конструкций представляет собой одно из важных направлений современной механики деформируемого твердого тела. Эффективность и точность работы современного измерительного оборудования напрямую зависит от теоретических моделей, заложенных в основу их работы, в частности, от констант и переменных, входящих в определяющие соотношения и уравнения моделей, описывающих поведение материала основного функционального элемента того или иного устройства. Одним из наиболее эффективных методов реализации неразрушающей реконструкции произвольных неоднородных свойств твердых тел является акустический метод.

Представлены уравнения движения и граничные условия для текущей и начальной конфигурации неоднородного пьезоэлектрического тела с учетом всех факторов предварительного напряженно-деформированного состояния. Осуществлен вывод слабой постановки общей задачи для произвольных пробных функций, удовлетворяющим главным граничным условиям задачи. На основе слабой формулировки сформулирован общий вариационный принцип для предварительно напряженного пьезоэлектрического тела. На основе сформулированных принципов выведены частные постановки краевых задач, позволяющие моделировать поведение различных типов неоднородных (в частности, функционально-градиентных) пьезоэлектрических материалов с учетом предварительных напряжений и деформаций: 1) задача об установившихся продольных колебаниях неоднородного пьезоупругого предварительно напряженного стержня; 2) задача об установившихся радиальных колебаниях неоднородного поляризованного по толщине предварительно напряженного тонкого диска.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (114072870112) «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур», Проекта МинОбрНауки РФ №9.665.2014/К, Гранта Президента Российской Федерации МК-5440.2016.1, РФФИ (№16-01-00354, №16-38-60157 мол_а_дк).

Напряженно-деформированное состояние вблизи выработки
эллиптического сечения в условиях ползучести
анизотропных горных пород

Нескородев Р. Н.

Донецкий национальный университет

promn@i.ua

Свойства ползучести горных пород проявляются в условиях их естественно-го залегания, сказываясь непосредственно на устойчивости и надежной работе подземных сооружений. Известно, что свойства ползучести горных пород подчиняются уравнениям линейной наследственности Вольтерра. При применении принципа Вольтерра к решению задач ползучести, как правило, используется ядро Работнова $\lambda \mathcal{E}_\alpha(\beta; t - \tau)$, имеющее произвол, содержащий три константы λ , α и β . Это обстоятельство не всегда позволяет построить функцию, хорошо описывающую экспериментально найденные величины на достаточно большом временном интервале. Известно также, что построение алгебры операторов Вольтерра не связано с каким-либо их специальным видом и может быть осуществлено для любых резольвентных операторов. Это обстоятельство делает возможным реализацию решений граничных задач теории вязкоупругости во времени проводить алгебраическими методами. Решение может быть осуществлено с использованием произвольных исходных операторов и выражено через значения этих операторов, заданных непосредственно таблицей экспериментальных данных.

В настоящей работе предложена методика преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости для случая деформации анизотропного массива горных пород к временным уравнениям закона Гука. Показано, что реализация решений граничных задач вязкоупругости может быть осуществлена, без каких либо конкретных аналитических заданий исходных операторов. Предложены упрощающие предположения, которые позволяют уменьшить число параметров, определяющихся из эксперимента. На основе свойств резольвентных операторов для интегральных уравнений с ядрами произвольного вида, предложен метод получения кривых ползучести и релаксации путем использования непосредственно экспериментальных данных, заданных таблично. Предварительно табличные данные сглаживаются и восполняются. Показано, как на основании экспериментальных данных можно получить элементы матрицы состояния в любой момент времени.

Используя матрицы состояния в любой момент времени проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния вблизи протяженной выработки эллиптического сечения в условиях обобщенной плоской деформации анизотропного полупространства. Исследования проводились начиная с изотропных горных пород и до пород, обладающих анизотропией самого общего вида.

Определение наведенного потенциала в неоднородном термоэлектроупругом слое

Нестеров С. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
1079@list.ru

В настоящее время важной технической проблемой является расчет параметров для конструирования различных температурных датчиков на основе функционально-градиентных пироматериалов. В пироматериалах в результате теплового воздействия, наводится разность потенциалов, которая подлежит определению с учетом взаимного влияния теплового, электрического и упругих полей. Для этого необходимо решать задачу термоэлектроупругости. В случае однородных материалов получены аналитические решения задачи термоэлектроупругости для слоя и полупространства. Однако задача термоэлектроупругости для функционально-градиентных материалов при произвольных законах неоднородности остается практически неисследованной.

В работе рассмотрена процедура определения электрического потенциала, который наводится в результате воздействия тепловым потоком на верхнюю грань неоднородного термоэлектроупругого слоя из пьезокерамики класса 6mm. При этом нижняя грань слоя поддерживается при постоянной температуре; обе грани свободны от напряжений. Рассмотрены две постановки: динамическая и квазистатическая в приближении слабой связанности. После обезразмеривания и исключения электрического потенциала, получена начально-краевая задача термоупругости с модифицированными термомеханическими характеристиками. После применения преобразования Лапласа полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений в трансформантах решается методом Рунге — Кутты для набора значений параметра преобразования Лапласа. Обращение преобразования Лапласа осуществлено на основе разложения оригинала в ряд по смещенным членам Лежандра.

В первой серии вычислительных экспериментов проведено исследование влияния различных законов изменения теплового потока на характер изменения наведенного электрического потенциала однородного слоя. Во второй серии экспериментов исследовалось влияние различных типов градиентных зависимостей (степенных, экспоненциальных, тригонометрических) коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости слоя на наведенный электрический потенциал.

В работе проведено сравнение результатов точного и приближенного подходов. Численно исследовано отношение передаточных функций точного и приближенного решений, определены временные интервалы, при которых точный и приближенный подходы дают практически одинаковые результаты, что позволяет для расчета потенциала использовать концепцию квазистатической задачи.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-01-00354-а.

Кавитационное торможение твердого тела в возмущенной жидкости

Норкин М. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

norkinmi@mail.ru

Движение твердого тела в жидкости со свободной поверхностью часто сопровождается такими явлениями, как образование волн, каверн и брызговых струй. Как правило формы свободных границ заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных проблеме генерации волн движущимся в жидкости телом, а также задачам проникания тел в жидкость, в которых необходимо учитывать погранслоиные решения в зонах брызговых струй. В гораздо меньшей степени исследованы нестационарные нелинейные задачи о начальном этапе движения твердых тел в жидкости с учетом отрыва частиц жидкости от их поверхностей. Учет явления отрыва важен для правильного определения реакции жидкости на тело, а также для правильного описания картины течения жидкости вблизи твердых и свободных границ. В настоящей работе рассматривается плоская задача о горизонтальном и безотрывном движении твердого тела под свободной поверхностью идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Предполагается, что после некоторого (начального) момента времени скорость тела уменьшается по линейному закону (происходит торможение тела в жидкости). При быстром торможении возникают области низкого давления вблизи тела и образуются присоединенные каверны. В общем случае зона отрыва представляет собой несвязное множество. Отрыв происходит сразу по конечным участкам поверхности тела. При этом важную роль играют первоначальные зоны отрыва, которые априори неизвестны. Для их определения возникает смешанная краевая задача теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. Центральным моментом работы является вывод краевых условий типа неравенств в зонах контакта и отрыва. Динамическое условие в виде неравенства в области контакта означает, что давление на смоченной поверхности цилиндра должно быть неотрицательным. Соответствующее кинематическое условие в зоне отрыва говорит о том, что жидкие частицы не могут входить внутрь твердого тела, хотя им разрешается отрываться от твердой границы. Важно отметить, что по своей структуре данная задача совпадает с классической задачей об ударе с отрывом. Это дает возможность использовать для ее решения известные численные методы. Как правило, для решения таких задач применяют итерационные методы, в которых последовательно уточняются неизвестные заранее зоны отрыва частиц жидкости. На основе решения задачи с односторонними ограничениями определяются формы внутренних свободных границ жидкости на малых временах. Существенное влияние на отрыв оказывают безразмерное ускорение тела, числа Фруда и кавитации, а также начальное возмущение жидкости. Как показывают примеры, при плавном изменении ускорения тела можно наблюдать такие явления, как образование одной и двух каверн, а также слияние каверн. В предельном случае бесконечно большого ускорения, когда скорость тела резко падает до нуля (происходит удар плавающего тела), приходим к задаче о мгновенной остановке тела в жидкости.

Устойчивость неоднородного полого цилиндра

Обрезков Л. П.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

leonidobrezkov@bk.ru

Во многих областях, таких как техника и биомеханика, уже продолжительное время применяются материалы, которые при больших деформациях сохраняют свои упругие свойства. Такие материалы носят название гиперупругих, а свойства их обычно задаются функцией удельной потенциальной энергии деформации. Разработано достаточно большое количество таких моделей, причем наиболее распространенными являются обобщенная модель Блейтца и Ко, используемая для описания деформаций резиноподобных материалов, например, губчатой резины, пятиконстантная модель Мурнагана или её упрощенный вариант — модель Кирхгофа — Сен-Венана. Решение задач для таких моделей сопряжено с большими трудностями даже при исследовании тел простой формы. Также надо отметить, что большинство реальных тел обладает некоторой неоднородностью, попытка учесть их и была сделана в данной работе.

Было рассмотрено несколько задач о деформировании и устойчивости полого упругого неоднородного цилиндра в рамках упрощенной модели Блейтца и Ко с экспоненциально меняющимся модулем упругости, двухслойный полый цилиндр с внешним мягким и внутренним жестким слоями и наоборот. Описана деформация двухслойного цилиндра состоящего из разных моделей материалов. Анализ устойчивости проводился методом линеаризации. В качестве метода линеаризации нелинейных задач использовался метод наложения малой деформации на конечную. Используя уравнения нейтрального равновесия, находится положение тела, которое отличается от первоначального на некоторую малую деформацию и существует без приложения дополнительных поверхностных сил. Такое равновесное состояние называется нейтральным. Сколь угодно малой добавкой к параметру, характеризующему деформацию, тело может быть переведено из данного состояния в неустойчивое положение равновесия. Точку потери устойчивости будем отождествлять с точкой существования нетривиального решения линейной однородной краевой задачи. Численный анализ поставленных задач выполняется в программной среде Maple.

В результате исследования были рассмотрены задачи осесимметричной и неосесимметричной потери устойчивости для всех описанных выше постановок задач, построены области устойчивости при растяжении вдоль образующей, а также при обжатии внешним или раздувании внутренним давлением для различных параметров дисклинации. Все бифуркационные кривые описываются на плоскости параметров «относительная деформация внешнего радиуса» — «коэффициент осевого удлинения».

Работа выполнена при поддержке проекта Министерства образования и науки РФ №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания.

Нестационарное воздействие касательной подвижной нагрузки на упругую полуплоскость

Оконечников А. С.¹, Тарлаковский Д. В.², Федотенков Г. В.¹

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

²Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

tdv@mai.ru

Нестационарные процессы в механике деформируемого твердого тела вызывают возрастающий интерес по мере развития технологий и увеличения эксплуатационных требований к объектам эксплуатации. При усложнении характера воздействия на изделия, переходные процессы, происходящие в твердом теле играют все более значительную роль.

В данной работе рассматривается возмущение однородной изотропной упругой полуплоскости под действием сосредоточенного подвижного источника. В результате такого воздействия, в полуплоскости возникают упругие волны, распространяющиеся с высокими скоростями. Эти волны вносят большой вклад в напряженно-деформированное состояние твердого тела, и потому их исследование крайне важно. Поведение полуплоскости существенно зависит от параметров исследуемого процесса — от скорости движения нагрузки и времени. Особый интерес представляют случаи движения нагрузки со скоростью распространения упругих волн.

При описании сосредоточенного источника возмущений используется аппарат обобщенных функций. Источник возмущения приложен к границе полуплоскости, а его компонента сонаправлена с границей полуплоскости. Наибольший интерес представляют компоненты напряженно-деформируемого состояния на границе полуплоскости, так как их значения максимальны в этой области и быстро затихают по мере удаления от нее.

Математическая постановка задачи осуществляется в потенциалах упругих смещений, в которой участвуют уравнения движения, граничные условия, отражающие отсутствие нормальных напряжений и равенство касательных напряжений приложенной нагрузке, ограниченность перемещений в бесконечно удаленной точке, а также однородные начальные условия. Решение задачи отыскивается с помощью принципа суперпозиции, где в качестве функции Грина используется решение задачи о возмущении упругой полуплоскости сосредоточенной неподвижной касательной нагрузкой. Получены расчетные формулы для случая произвольного закона движения нагрузки. Построено полное аналитическое решение задачи в случае движения нагрузки с постоянной скоростью. Из структуры решения видна зависимость характера решений от скорости движения нагрузки. В расчетных формулах для перемещений участвуют интегралы, носящие как регулярный, так и сингулярный характер. Последние понимаются в смысле главного значения по Коши, а особенности, содержащиеся в них соответствуют фронтам волн Рэлея и приложенной нагрузке.

Представлены графические результаты для различных скоростных режимов движения нагрузки.

Динамика относительно толстых слоев в процессе виброкипения

Орлова Н. С.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Владикавказ

Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ

norlova.umi.vnc@gmail.com

Рассматривался процесс виброкипения относительно толстых слоев (с толщиной засыпки 100 мм) монодисперсных частиц стекла диаметром 0,3 мм. Для исследования динамики виброкипящего слоя использовался свободно распространяемый пакет для численного моделирования задач механики сплошных сред OpenFOAM (англ. Open Source Field Operation And Manipulation CFD ToolBox) при поддержке программы «Университетский кластер» с удаленным доступом к консоли на управляющем узле вычислительного кластера JSCC web-лаборатории UniHUB. Расчеты проводились с использованием модифицированного решателя `muTwoPhaseEulerFoam`, предназначенного для описания процесса виброкипения. Следует отметить, что ранее проводилось исследование динамики относительно тонкого слоя (с толщиной засыпки 50 мм) в процессе виброкипения. В данной работе проводилось исследование поведения относительно толстого слоя (с толщиной засыпки 100 мм) в процессе виброкипения в более широком диапазоне значений частоты колебаний (10–80 Гц) при различных значениях амплитуды колебаний (1,5–9 мм).

В основе решателя `muTwoPhaseEulerFoam` лежит двухжидкостная модель. Для учета эффектов, обусловленных взаимодействием частиц друг с другом, использовалась кинетическая теория (по аналогии с кинетической теорией газа), с помощью которой можно выразить эффективные напряжения, возникающие в дисперсной фазе за счет движения частиц и за счет столкновений частиц друг с другом.

Проводилось трехмерное моделирование динамики виброкипящего слоя. Размеры вычислительной области: высота — 0.4 м, ширина — 0.4 м, толщина — 0.4 м. При этом использовался шаг по времени, равный 10^{-4} с. Шаг по координате x равен 0.005 м, шаг по координате y — 0.005 м, шаг по координате z равен 0.005 м. Выполнялось распараллеливание вычислений на 8 ядрах.

По сравнению с результатами расчетов, которые были получены для относительно тонкого слоя (50 мм), результаты моделирования динамики относительно толстого слоя (100 мм) показали, что степень расширения слоя в процессе виброкипения гораздо ниже в случае использования относительно толстого слоя. Кроме того, волнообразная поверхность слоя и всплески над поверхностью наблюдались при более высоких значениях амплитуды и частоты колебаний, чем в случае моделирования динамики относительно тонкого слоя. Следует отметить, что при малых значениях амплитуды и частоты колебаний на поверхности слоя наблюдались структуры в виде кругов, как и в случае виброкипения слоя с толщиной засыпки 50 мм. В случае виброкипения относительно толстого слоя круговых структур было больше, и их размеры меньше.

Напряженное состояние вязкоупругого слоя, формируемого на жесткой подложке в процессе центробежного нанесения материала

Паршин Д. А.

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
parshin@ipmnet.ru*

Моделируются процессы постепенного нанесения равномерных по толщине слоев дополнительного материала на внутреннюю поверхность круговой цилиндрической жесткой подложки, вращающейся вокруг своей оси с переменной угловой скоростью. При нанесении материала скорость его притока в окружном направлении предполагается несравнимо более высокой по сравнению со скоростью его притока в радиальном направлении, поэтому в модели рассматривается осесимметричный процесс наращивания слоя одновременно по всей его внутренней поверхности. Этот процесс считается кусочно-непрерывным, состоящим из разделенных произвольными по продолжительности паузами нескольких этапов непрерывного наращивания, в течение которых за каждый бесконечно малый промежуток времени присоединяется бесконечно тонкий слой дополнительного материала. Предполагается, что все воздействия на дополнительный материал, сопровождающие его включение в состав формируемого тела, не приводят к появлению ненулевых напряжений вблизи поверхности роста.

Ставится задача проследить эволюцию НДС наносимого слоя под действием сил инерции его вращательного движения вместе с подложкой. Принимается плавное изменение во времени скорости вращения подложки, такое что тангенциальные силы инерции вращения пренебрежимо малы по сравнению с центробежными силами. Задача решается в квазистатической постановке в приближении плоского деформированного состояния. Используется линейный вязкоупругий однородно стареющий изотропный материал с постоянными и совпадающими коэффициентами Пуассона для мгновенной упругой деформации и развивающейся со временем деформации ползучести.

На основе общей теории линейной механики наращиваемых вязкоупругих тел поставлена соответствующая начально-краевая задача. Построено ее замкнутое аналитическое решение в квадратурах, позволяющее проследить эволюцию НДС слоя. Выполнены многочисленные числовые расчеты. Проведено сравнение распределений напряжений в рассматриваемом наращиваемом слое с соответствующими классическими распределениями в аналогичном по размерам и свойствам ненаращиваемом вращающемся слое, полностью изготовленном без остаточных напряжений до начала вращения. Исследована эволюция контактного давления формируемого слоя на подложку во время и по завершении процесса нанесения на нее материала. Найдены остаточные напряжения, возникающие в окончательно сформированном слое после завершения его формирования и последующей остановки вращения, а также остановки вращения и отсоединения готового слоя от подложки.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№14-01-00741-а, 16-58-45038-ИНД_а, а также Программы ОЭММПУ РАН №12.

Смешанные задачи теории упругости для плоского клина с переменным коэффициентом Пуассона

Пожарская Е. Д., Пожарский Д. А.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

pozharda@rambler.ru

В работах В. М. Александрова и его учеников исследовался ряд смешанных задач теории упругости для плоского однородного и неоднородного клина. В последнем случае модуль сдвига являлся функцией полярного угла, а коэффициент Пуассона считался постоянным, фундаментальное решение строилось численно путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах других авторов для неоднородного плоского клина переменным считался модуль упругости, а коэффициент Пуассона был постоянный.

В настоящей работе изучается система двух дифференциальных уравнений упругого равновесия в полярных координатах для случая, когда коэффициент Пуассона является произвольной достаточно гладкой функцией угловой координаты (эта функция принимает значения в интервале от -1 до 0.5), а модуль сдвига постоянный. Ясно, что в этом случае модуль упругости будет зависеть от угловой координаты. По аналогии с подходом А. Н. Бородачева, развитого им для исследования упругого равновесия слоя с переменным по глубине коэффициентом Пуассона, общее представление решения системы уравнений упругого равновесия строится в форме, которая совпадает с известным представлением Фрайбергера для однородного материала. В результате приходим к двум уравнениям Лапласа и одному уравнению Пуассона, правая часть которого зависит от коэффициента Пуассона. Для плоского неоднородного клина при помощи интегрального преобразования Меллина и метода вариации произвольных постоянных построены в квадратурах точные общие решения уравнений Лапласа и Пуассона. Найдены в квадратурах фундаментальные решения для случаев, когда на одной грани клина действует заданная нормальная нагрузка, а другая грань находится в условиях жесткой или скользящей заделки либо свободна от напряжений. Получены интегральные уравнения трех соответствующих контактных задач для неоднородного клина без учета сил трения, которые в частном случае однородного материала в точности совпадают с известными интегральными уравнениями из работ В. М. Александрова. Для специального случая неоднородности при помощи специальных аппроксимаций символов ядер интегральных уравнений получены замкнутые приближенные решения контактных задач. Изучено поведение напряжений в вершине неоднородного клина. Показано, что даже для частного случая, когда клин разворачивается в полуплоскость (одна часть границы полуплоскости свободна от напряжений, а на другой действует штамп или заданная нормальная нагрузка) в окрестности полюса (начала координат, вокруг которого изменяется коэффициент Пуассона) возможен неограниченный рост напряжений. Также показано, что в случае, когда контактная задача для неоднородной полуплоскости (при специальном виде неоднородности) симметрична относительно декартовой оси перпендикулярной границе полуплоскости, контактное напряжение в начале координат под штампом остается конечным.

Моделирование клиновидной дегидратации высыхающей капли крови

Полякова Н. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

zhuk_nata@mail.ru

Метод клиновидной дегидратации биологических жидкостей (кровь, слезная жидкость, ликвор и др.) используется для медицинской диагностики различных заболеваний. Метод основан на формировании пространственных структур в высыхающей капле жидкости, расположенной на горизонтальной поверхности. Для определенности моделируется процесс высыхания капли крови, которая считается изотропным активным гелем, то есть сплошной средой, состоящей из упругого каркаса и жидкости. Система уравнений, описывающая такую среду имеет вид (ввиду сравнительно медленного течения опущены конвективные члены)

$$\rho_f \mathbf{v}_t = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \Gamma(\mathbf{u}_t - \mathbf{v}), \quad \rho \mathbf{u}_{tt} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \Gamma(\mathbf{u}_t - \mathbf{v}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^a.$$

Здесь ρ_f, ρ — плотности жидкости и упругого каркаса, p — давление, \mathbf{v} — скорость течения жидкости, \mathbf{u} — вектор перемещений упругого каркаса, μ — динамическая вязкость жидкости, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжения для каркаса, Γ — трение между каркасом и жидкостью. Упругая часть $\boldsymbol{\sigma}^e$ тензора $\boldsymbol{\sigma}$ — это обычный тензор упругих напряжений, характеризуемый коэффициентом Лямэ. Диссипативная часть тензора $\boldsymbol{\sigma}^d$ связана с изменением энтропии геля. Наконец, активная часть тензора $\boldsymbol{\sigma}^a$ возникает в случае, когда каркас геля состоит, например, из взаимодействующих полимерных нитей.

В случае крови упругий каркас возникает в результате химического (каталитического) взаимодействия фибрина (полимерные нити) и фибриногена (белка, из которого образуется фибрин). Для идентификации тензора $\boldsymbol{\sigma}^a$ к исходным уравнениям следует добавлять уравнения, описывающие химическую кинетику процесса. В случае изотропного геля такой тензор будет шаровым и пропорциональным изменению химического потенциала реакций взаимодействия. В настоящее время процесс коагуляции крови достаточно хорошо изучен, однако, для детального описания требуется рассмотрения значительного количества уравнений химической кинетики. В связи с этим в настоящей работе использованы упрощенные модели свертывания крови.

Оказывается, что для описания возникновения в процессе испарения капли грубых пространственных структур достаточно рассматривать бездиссипативные модели на основе уравнений для величин, осредненных по толщине капли. В частности, поведение свободной поверхности капли $h(r, t)$ в предположении вращательной симметрии дается уравнением

$$\eta_t + \eta \eta_r = -v_0 r^2,$$

где v_0 — параметр, связанный со скоростью испарения капли.

Приведены результаты численного решения модели показывают возможность ее использования для описания процесса образования пространственных структур при высыхании капли.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Об оценке упругого опирания и давления при анализе деформирования решетчатой пластины

Потетюнко О. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

ol_potet73@mail.ru

Как известно, задний отдел склеры в месте выхода зрительного нерва очень тонок и имеет множество отверстий в области, именуемой решетчатой пластинкой (РП). Изучение характеристик РП имеет существенное значение в патогенезе глаукомного повреждения зрительного нерва. Обычно моделируется такой объект жестко закрепленной по краю пластиной переменной жесткости. Оценка влияния упругости закрепления позволяет уточнить модель деформирования пластины и точнее проводить оценку величины внутриглазного давления.

Работа состоит из двух основных частей. В первой части изучен прогиб круглой упругой пластинки переменной жесткости с различными граничными условиями. Считается, что пластина по краю имеет упругую связь, которая характеризуется двумя коэффициентами в граничных условиях. На основе вариационного подхода составлен функционал Лагранжа для пластины, из него получено уравнение для прогиба и соответствующие граничные условия. Задача решена методом Рунге. Проведен ряд вычислительных экспериментов для различных характеристик пластины и граничных условий, выполнено сравнение с имеющимися в литературе данными для однородной пластины.

Во второй части решена задача об определении коэффициентов граничных условий на основе различных данных о прогибе в наборе точек. Разработана схема анализа задачи: сформулированы вспомогательные задачи, не содержащие искомые коэффициенты, установлена структура для прогиба в виде дробно-рациональной функции от искомым коэффициентов, построена система нелинейных алгебраических уравнений, из которой и находятся коэффициенты граничных условий. Проблема неединственности решений разрешается наложением условия положительности на коэффициенты. Кроме того, была решена задача по восстановлению третьего параметра — нагрузки, в этом случае можно получить систему такого же типа, что и в задаче о восстановлении двух коэффициентов. Также было рассмотрено влияние упругости заделки на характеристики прогиба: при упругой заделке находился прогиб, по этом прогибу восстанавливалась нагрузка в предположении жесткой заделки. Погрешность восстановления нагрузки характеризует ошибку, которая возникает, если не учитывать упругость опирания.

Был проведен ряд вычислительных экспериментов по определению динамических характеристик пластины, коэффициентов граничных условий, нагрузки и погрешности при неучете упругости закрепления.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Ватульяну А. О.

Использование метода LS-STAG для математического моделирования в сопряженных задачах гидроупругости

Пузикова В. В.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
vvp@dms-at.ru

Сопряженные задачи гидроупругости возникают во многих инженерных приложениях, в частности, при моделировании автоколебаний конструкций в потоке жидкости или газа. Данные задачи являются достаточно сложными для численного решения, поскольку необходимо учитывать взаимное влияние течения среды и движения погруженного в нее тела. При этом погруженное тело и жидкость должны рассматриваться как единая система. Для случая достаточно тяжелого тела задачу можно решать «по шагам», моделируя поочередно обтекание движущегося с заданными параметрами тела и рассчитывая динамику тела при известных гидродинамических нагрузках.

Для численного решения сопряженных задач гидроупругости удобно использовать методы погруженных границ, которые не требуют совпадения границ ячеек с границами расчетной области и позволяют решать задачи в областях сложной и изменяющейся в процессе счета формы на прямоугольной сетке без перестроения ее на каждом шаге расчета. Наиболее важным вопросом при использовании методов погруженных границ является работа с усеченными ячейками, т. е. ячейками неправильной формы, которые образуются при пересечении прямоугольных ячеек с границей области течения, поскольку именно в этих ячейках задаются граничные условия, а решение вблизи границы обтекаемого тела может иметь большие градиенты.

В данной работе для решения сопряженных задач гидроупругости используются разработанные модификации одного из наиболее эффективных методов погруженных границ — метода LS-STAG. Данная модификация позволяет проводить расчет течений с движущимися границами на неподвижной прямоугольной сетке, поэтому она может быть эффективной альтернативой сеточным методам с подвижной сеткой, согласованной с телом. Для представления погруженной границы и эффективной организации обработки усеченных ячеек в данном методе используются функции уровня. LS-STAG-дискретизация сохраняет пятиточечную структуру шаблона MAC-метода, причем она производится по одним и тем же формулам как в прямоугольных ячейках, так и в усеченных. Модификация LS-STAG-сетки для случая подвижных границ основана на идеях, используемых при построении лагранжево-эйлеровых сеток (ALE — Arbitrary Lagrangian-Eulerian).

Для численного моделирования движения профилей в потоке методом LS-STAG и его модификациями разработан собственный программный комплекс. С использованием разработанной модификации метода LS-STAG получено численное решение гидроупругих задач о моделировании ветрового резонанса кругового профиля, авторотации профилей в потоке, бафтинга круговых профилей с двумя степенями свободы.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых ученых-кандидатов наук (МК–5357.2015.8).

Численный анализ контактной задачи для упругой накладки переменной жесткости, выходящей на линию раздела материалов составной упругой плоскости

Саакян А. В.¹, Шавлакадзе Н. Н.^{2,3}

¹Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

²Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, Тбилиси

³Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили
avsahakyan@gmail.com, nusha@rmi.ge

Рассматривается кусочно-однородная изотропная упругая пластинка, составленная из двух разнородных полуплоскостей. Пластина в одной из полуплоскостей усилена тонкой накладкой переменной жесткости и конечной длины l , один конец которой перпендикулярно выходит на линию раздела материалов, а жесткость, в частности ширина, изменяется по степенному закону $h(x) = h_0 x^p (1 - x)^q$ ($p, q \geq 0$). Относительно накладки, предполагается, что она жестко сцеплена с пластинкой, не сопротивляется изгибу и растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. Разрешающим уравнением поставленной задачи является следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение типа Прандтля с обобщенным ядром Коши, записанное в безразмерных величинах,

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\xi - \zeta} + K(\xi, \zeta) \right) \varphi(\xi) d\xi = \frac{2^{1+p+q} A_0}{(1 + \zeta)^p (1 - \zeta)^q} \left[\int_{-1}^{\zeta} \varphi(\xi) d\xi - \int_{-1}^{\zeta} q_0(\xi) d\xi \right] \quad (1)$$

Здесь $\varphi(\xi)$ — искомое контактное напряжение, $q_0(\xi)$ — внешняя нагрузка, действующая на накладку, $K(\xi, \zeta)$ — ядро, описывающее неподвижную особенность, A_0 — постоянная, зависящая от механических характеристик накладки и полуплоскости, на которой она находится.

Специфика уравнения (1) состоит в том, что в правой части имеется особенность, которая обусловлена переменностью жесткости накладки и существенно влияет на степенное поведение искомой функции у концов накладки. Проведен детальный анализ зависимости этого поведения от параметров p и q и получены соответствующие весовые функции для всего спектра изменения указанных параметров, который разбивается на три характерные зоны для каждого из них: $0 \leq p, q < 1$; $p, q = 1$ и $p, q > 1$. Показано, что искомую функцию, кроме случая $p, q > 1$, следует искать в виде двух слагаемых, имеющих различные весовые функции.

При помощи метода механических квадратур для определенных значений параметров p и q из каждой из указанных характерных зон проведен численный анализ зависимости контактных напряжений под накладкой от упругих модулей материалов пластин-полуплоскостей. Показана сходимость вычислительного процесса. Построены соответствующие графики.

Нестационарная контактная задача
с подвижной областью взаимодействия для цилиндрической оболочки
с упругим наполнителем и упругого полупространства

Сапожников Г. А., Федотенков Г. В.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет)*
greghome@mail.ru

Задачи нестационарного контактного взаимодействия играют важную роль в современной механике деформируемого твёрдого тела. Среди них выделяются задачи с несколькими компонентами, возникающие при взаимодействии различных сред, например, при контакте оболочки с наполнителем и упругого полупространства. Современный технологический прогресс диктует постоянно возрастающие требования к точности расчётов с учетом динамического характера механических процессов. В работе предложен метод решения нестационарной контактной задачи с подвижными границами для цилиндрической оболочки с упругим или акустическим наполнителем и упругого полупространства.

Разрешающие задачу уравнения строятся использованием принципа суперпозиции и граничных условий. Неизвестная заранее область контакта в нулевом приближении определяется из условия пересечения недеформированных граничных поверхностей полупространства и оболочки. Затем она итерационно уточняется с учетом деформируемости граничных поверхностей и требования отрицательных значений контактного давления в зоне контакта, которая при этом может быть многосвязной.

Ядрами интегральных операторов, входящих в основное разрешающее двумерное интегральное уравнение являются нестационарные поверхностные функции влияния для полупространства и оболочки с наполнителем. Функция влияния для полупространства известна.

Функция влияния тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки, заполненной упругой средой, определяется путем решения соответствующей начально-краевой задачи. Для ее построения используются разложения в ряды Фурье и интегральное преобразование Лапласа по времени. Предложено два способа приближенного определения оригиналов коэффициентов ряда разложения для функции влияния оболочки с наполнителем. Первый состоит в замене изображений их асимптотическими аналогами при малых значениях времени. Во втором случае соответствующие оригиналы определяются численно с использованием квадратурных формул наивысшей степени точности. Рассмотрен также случай акустического наполнителя, для этого в полученных выражениях для коэффициентов необходимо совершить предельный переход при стремлении к нулю скорости волн сдвига в наполнителе.

Для реализации численного обращения интегрального преобразования Лапласа и вычисления оригиналов искомых коэффициентов рядов в среде MATLAB разработана программа с пользовательским интерфейсом, позволяющим варьировать входные данные. Приведены примеры расчетов и графические результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты 16-58-00034-Бел-а, 16-08-00260-а).

Некоторые задачи равновесия и свободных колебаний микрополярных упругих гибких пластин и пологих оболочек

Саркисян А. А.¹, Саркисян С. О.^{1,2}

¹Гюмрийский государственный педагогический институт

²НАН Республики Армения, Ереван

armenuhis@mail.ru

Геометрически линейные математические модели микрополярных упругих тонких пластин и оболочек построены в работах: Саркисян С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. Физическая мезомеханика. 2011. Том. 14. №1. С. 55–66; Саркисян С. О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек. Доклады АН России. 2011. Т. 436. №2. С. 195–198. В классической постановке геометрически нелинейные теории упругих тонких пластин и пологих оболочек построены, соответственно, на основе гипотез Кармана и Маргерра. Развивая подход Кармана — Маргерра и методику построения линейных теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек, построены (Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. Geometrically nonlinear static theory of thin elastic micropolar shallow shells. Proceedings of the XLIII Summer School-Conference. APM 2015. St. Petersburg. June 22–27. 2015. P. 299–305) математические модели статики и динамики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек. Здесь считается, что упругие прогибы сравнимы с их толщиной и вместе с тем малы по отношению к характерным размерам в плане. В основе построения этих моделей поставлены:

1) основные гипотезы построения геометрически линейных математических моделей микрополярных упругих тонких пластин и оболочек, которые формулированы на основе изучения асимптотических свойств решения граничных задач соответствующих трехмерных теорий в тонких областях пластин и оболочек;

2) соответственно, гипотеза Кармана (для пластин) или Маргерра (для оболочек) (Karman Th. Collected works. V. 1. London. 1956. 530 p.; Marguerre K. Die Durchschlags kraft eines schwachgekrummtten Balkes/Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Cesellschaft. 1938. Bd. 37. S. 22–40).

В данной работе принимая в основу указанные математические модели геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек решены: 1) статические задачи изгиба шарнирно-опертых микрополярных упругих гибких пластин и пологих оболочек (прямоугольных в плане) под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки; 2) свободные колебания микрополярных гибких тонких пластин и пологих оболочек.

Выполнен численный анализ, когда материал пластин и пологих оболочек представляет собой синтетический полиуретан (Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua// Continuum models for materials with micro-structure/ Ed. By H. Muhlhaus, J. Wiley. N. Y.: J. Wiley and sons, Ltd., 1995. Ch. 1. P. 1–22). В результате анализа установлены специфические свойства микрополярных материалов.

Некоторые задачи математического моделирования в виброакустике конструктивно сложных полимерных композитных оболочек вращения

Сафроненко В. Г., Шутько В. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

ya.safronenko2014@yandex.ru, shutkovm@yandex.ru

Развиты математическая и компьютерная модели виброакустики композитных (на полимерной основе) оболочек вращения, подкрепленных круговыми ребрами жесткости при воздействии вибрационных нагрузок. Рассмотрены многослойные оболочки из волокнистого композита в рамках теории типа Тимошенко для пакета, а также оболочки трехслойной структуры в рамках гипотезы ломаной линии. Для колец композиционной структуры также учитываются деформации поперечного сдвига на основе кинематики Тимошенко. По внешней поверхности оболочки могут контактировать с линейной акустической средой, учитываемой импедансным методом. Построение акустических полей выполняется с помощью интеграла Гельмгольца. Модели направлены на анализ модовой структуры формирования вибрационных и акустических полей в аспекте проблемы демпфирования колебаний. Исследовались амплитудно-частотные и диссипативные характеристики системы «композитная оболочка — акустическая среда» в зависимости от структуры оболочки и физико-механических свойств компонент композита. При этом использовались определяющие соотношения для полимерного связующего, которые учитывают нелинейный и немонотонный характер зависимостей физико-механических характеристик от частоты нагружения и температуры. Анализировалось излучение акустической энергии во внешнюю среду и внутренние потери механической энергии в оболочке. Численные эксперименты выполнялись на оболочках вращения, для которых искомые функции решения представлялись комплекснозначными рядами Фурье по окружной координате с последующим формированием разрешающей системы уравнений нормального типа. Полученные квазиодномерные системы, содержащие номер окружной гармоники, решались методом перехода к задачам Коши. При этом использовался метод ортогональной прогонки, обеспечивающий устойчивый счет при интегрировании по образующей оболочки. В случае многослойной подкрепленной оболочки из волокнистого композита определяется динамическое напряженно-деформированное состояние оболочки, осуществляется модальный анализ амплитудно-частотных характеристик перемещений и давлений на поверхности оболочки и в окружающей ее акустической среде в зависимости от механических характеристик и структурных параметров круговых ребер, учитываемых дискретным образом. Для оценки демпфирующих и диссипативных свойств композитной конструкции вводится коэффициент поглощения энергии, определяемый как отношение энергии, поглощаемой в теле оболочки за период колебаний к среднему значению за период колебаний полной механической энергии, рассчитываются диссипативные характеристики системы «композитная оболочка — акустическая среда».

Моделирование массопереноса твердых примесей при высыхании пленок жидкостей в условиях направленного внешнего воздействия

Сахарова Л. В.

Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)

L_Sakharova@mail.ru

Разработка новых систем печати и покраски (в первую очередь, новых моделей струйных принтеров) требует исследования механизма возникновения так называемых «кофейных колец» и разработки способов управления им. Физический эффект «кофейных колец» наблюдается при испарении жидкостей со взвешьями; он заключается в том, что после высыхания капля взвешенные частицы не распределяются равномерно по всей поверхности капли, а концентрируются по ее границам. Установлено, что эффект связан, в первую очередь, с соотношением толщины испаряющейся пленки и размером взвешенных частиц, а также их формой. Поэтому важное значение имеет моделирование процесса высыхания жидкостей, содержащих твердые примеси, в условиях направленного внешнего воздействия. Получено автомодельное решение типа бегущей волны для задачи тепловой конвекции, осредненной по тонкому слою испаряющейся жидкости. Установлена, что зависимость толщины протяженной капли от времени t и координаты x описывается уравнением:

$$h = \frac{\theta h_0}{2(x_k + \theta)} \pm \sqrt{\frac{\theta^2 h_0^2}{4(x_k + \theta)^2} + \frac{h_0^2 x_k}{x_k + \theta} - \frac{h_0^2}{x_k + \theta}(x - vt)},$$

где v — скорость направленного внешнего воздействия, h_0 — толщина пленки в начальный момент времени; x_k — точка трехфазного контакта «жидкость — атмосфера — твердое непроницаемое основание» в начальный момент времени;

$$\theta = \frac{vh_0}{V_0\varphi_1}$$

есть параметр, для которого V_0 — безразмерный параметр, характеризующий скорость массопереноса через межфазную границу «жидкость — атмосфера»; φ_1 — осредненный по толщине капли тепловой поток в начальный момент времени. Осредненная по толщине пленки скорость массопереноса определяется формулой: $s_1 = (vh_0 + V_0\varphi_1 x_k) / h_0^2$. В процессе высыхания капли наблюдается опрокидывание профиля ее границы, при этом высота ее нижней и верхней границы описываются формулами:

$$h_1 = \frac{h_0}{\theta}(x_k - x + vt), \quad h_2 = \frac{\theta h_0}{x_k + \theta} + \frac{\theta h_0}{4(x_k + \theta)^2}(x_k - x + vt),$$

где h_1 и h_2 , соответственно, высота нижней и верхней границы пленки. Получен критерий, устанавливающий соответствие между скоростью внешнего воздействия, осредненным тепловым потоком и начальными геометрическими параметрами капли; при его выполнении возникает взаимодействие между твердыми частицами, прекращается их движение к краям капли и, как следствие, предотвращается эффект возникновения «кофейных колец».

Моделирование прочностных свойств магистрального газопровода в зоне восстановительных работ

Скалиух А. С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

a.s.skaliukh@gmail.com

Работа посвящена моделированию прочностных свойств магистрального газопровода в зоне, где были проведены работы по устранению дефектов, типа коррозии, с помощью наложения изолирующего и муфтового полимерного композитного материала без применения сварочных работ. Подобные работы проводятся в том случае, когда на трубопроводах выявляются небольшие дефекты типа поверхностных областей, подверженных процессу коррозии. При очистке такой области инструментом, в котором применяются абразивные материалы, стенка трубопровода уменьшается. В ней образуется выемка, которую заполняют заливным полимерным композитным материалом (ПКМ), а сверху наматывают муфтовый ПКМ. Заливной ПКМ используется для заполнения дефектов, связанных с потерей металла по толщине стенки трубы. Муфтовый ПКМ обеспечивает восстановление несущей способности труб с дефектами. Основная сложность после проведения таких работ заключается в оценке прочностных свойств поврежденного участка, которая определяется степенью концентрации напряжений в сечении дефекта. Оценить прочность на таком участке не простая задача. В отличие от экспериментальных методов математическое моделирование таких участков может стать наиболее действенным аппаратом по определению прочностных характеристик, связанных с напряженно-деформированным состоянием критических областей. В связи с вышесказанным, была рассмотрена задача в рамках модели плоской деформации, для сечения трубопровода с выемкой и с композиционными накладками. Было рассмотрено несколько вариантов моделирования. В простейшем случае муфтовый ПКМ заменялся внешней нагрузкой, которая возрастала пропорционально числу намотанных слоев. Для оценки степени предварительной нагрузки использовалось условие несжимаемости материала. Следующим вариантом явилось использование симметрии сечения с дополнительным условием распределения кольцевых напряжений вдали от дефекта по закону осесимметричного раздувания трубы без дефекта. И, наконец, был рассмотрен случай одновременного учета деформированного состояния муфтового ПКМ, заливного ПКМ и стенки трубы. Для заливного ПКМ принималось условие всестороннего сжатия. После некоторых физических предположений было получено решение о влиянии геометрических и физических параметров углубления и накладки на прочностные свойства ослабленного участка трубопровода. Были исследованы напряжения в зоне трубы по теории текучести Мизеса в зависимости от геометрических параметров дефекта. Найдены зоны, в которых возникают наибольшие напряжения, которые могут привести к разрушению.

Нелинейный анализ поведения тонкостенных конструкций при динамическом и статическом нагружении

Столяр А. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

ajoiner@mail.ru

Рассматриваются начально-краевые задачи, описывающие поведение составных тонкостенных конструкций при различных режимах нагружения. Конструкция представляет собой набор соосных цилиндрических корпусов, подкреплённых шпангоутами, с упругими и жесткими пологими сферическими и коническими переборками. Математическая модель содержит уравнения колебаний элементов конструкции, условия их сопряжения, начальные условия. Цилиндрические, сферические, плоские, конические элементы конструкции моделируются как тонкие упругие или упруго-пластические оболочки, для описания осесимметричных колебаний которых применяются уравнения нелинейной теории пологих оболочек, основанной на соотношениях Кирхгофа — Лява. Для описания неупругого поведения применяются соотношения деформационной теории пластичности как для сжимаемого, так и для несжимаемого материала. При решении задач о колебаниях упруго-пластических оболочек разработанный алгоритм расчёта допускает, что в ходе процесса деформирования возможны разгрузка и упрочнение различной направленности, т. е. повторное и переменное. При этом допускается также, что различные элементы оболочки, расположенные на одной нормали к её срединной поверхности, в каждый момент времени могут испытывать упрочнение различного типа. Под этим понимается следующее. Упруго-пластическое деформирование элемента оболочки может быть представлено движением точки вдоль «универсальной кривой» по часовой стрелке. Тогда повторному упрочнению отвечает движение изображающей точки по «универсальной кривой» в том же направлении, что и до предшествующей разгрузки, а переменному — в противоположном. Проведенное сравнение результатов расчётов сферической оболочки, круглой пластинки, цилиндрической панели с известными результатами других авторов и собственными, полученными с использованием различных вариантов теории течения, при различных режимах динамического нагружения показало их близость, в том числе и при определении критической нагрузки динамического прощёлкивания.

Для определения напряженно-деформированного состояния конструкции в условиях статического нагружения применяется метод установления, что позволяет для «статического» расчёта применять алгоритм и программу численного интегрирования при динамическом нагружении. Применение метода установления предполагает определение оптимального значения коэффициента вязкости. Данный подход используется при расчёте задач о колебаниях предварительно напряженных конструкций.

Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое

Сторожев С. В.

Донецкий национальный университет
stvistvi@mail.ru

Среди задач нечеткого математического моделирования в волновой механике деформируемых сред к числу первоочередных относятся вопросы оценки разбросов для эндогенных характеристик исследуемых моделей, используемых в технологиях волнового зондирования, геоакустике и ультразвуковой дефектоскопии. Данная проблема имеет широкий круг аспектов, к которым можно отнести задачи учета влияния неопределенностей в значениях параметров деформируемых материалов на эндогенные характеристики процессов волнового деформирования, поскольку для многих типов материалов, в первую очередь для геоматериалов и композитов, характерен существенный разброс в экспериментально определяемых значениях физико-механических постоянных. Учет факторов неопределенности в математических моделях естественных наук реализуется с использованием методов теории вероятностей и математической статистики, а также методов нечеткой математики, которые распространены в меньшей мере, но имеют определенные априорные особенности в виде возможностей оперирования непосредственно с нечеткими величинами, а не с их усредненными интегральными характеристиками. В этой связи, представляемое исследование относится к проблеме нечеткого оценивания фазовых и групповых скоростей нормальных упругих волн в трансверсально-изотропном слое в рамках гипотезы об интерпретации нечетких экспериментальных значений модулей упругости рассматриваемых сред нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами, в свою очередь описываемыми декомпозициями по множествам альфа-уровня. Используемый подход основывается на применении эвристического принципа обобщения к явным и неявным аналитическим зависимостям для фазовых и групповых скоростей симметричных и антисимметричных нормальных упругих волн сдвигового и продольно-сдвигового типа из различных мод спектров в свободном либо жестко закрепленном поперечно-анизотропном слое, получаемым из соответствующих дисперсионных уравнений. Используются функциональные параметрические зависимости для верхних и нижних граней соответствующих множеств альфа-уровня от значений показателя степени принадлежности в соответствующих нечетких интервалах. Искомые нечеткие оценки для фазовых и групповых скоростей рассматриваемых нормальных волн получены в форме разложений представляющих эти оценки нормальных нечетких множеств по множествам альфа-уровня. Представлены примеры использования разработанной методики и созданного для ее реализации программного приложения применительно к получению нечетких оценок фазовых и групповых скоростей нормальных волн из различных мод дисперсионных спектров в закрепленном по граням слое из нескольких типов реальных осадочных пород с характерными разбросами экспериментальных значений физико-механических постоянных.

Асимптотические методы в смешанных задачах механики — научное наследие В. М. Александрова

Сумбатян М. А., Чебаков М. И.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

sumbat@math.sfedu.ru

Рассматривается применение асимптотических методов к задачам механики со смешанными граничными условиями. Отмечается, что в научной школе академика И. И. Воровича и его учеников, в число которых входил В. М. Александров, были заложены основы регулярных и сингулярных асимптотических методов, впоследствии получивших название «метод больших лямбда» и «метод малых лямбда».

Идея рассматриваемых методов основана на сведении смешанных задач механики к интегральным уравнениям, содержащим некий параметр λ , который имеет весьма прозрачный геометрический или физический смысл. Регулярные методы класса «больших лямбда» обладают тем свойством, что при $\lambda \rightarrow \infty$ ядро интегрального уравнения вырождается к более простому виду, допускающему обращение в явной форме, причем равномерно на всем рассматриваемом интервале. В результате, в явном виде строится главный член асимптотики решения, так называемое «вырожденное решение», которое дает равномерное приближение к точному решению при больших λ . Последующие члены асимптотики, как правило, находятся последовательно из асимптотического разложения ядра по большому параметру λ .

В отличие от этого, «сингулярный» предел ядра при $\lambda \rightarrow 0$ приводит к «вырожденному» ядру равномерно во всей области изменения его аргумента, кроме малой окрестности нуля. Как следствие, «вырожденное решение» в этом случае дает равномерное приближение к точному решению, при малых значениях параметра λ , на всем интервале изменения решения, за исключением малых окрестностей концов интервала. Для построения решения вблизи концов необходимо решать рассматриваемое уравнение на полубесконечном интервале, что чаще всего достигается применением метода Винера — Хопфа. Известно, что основной трудностью в методе Винера — Хопфа является факторизация символа ядра. Точные формулы факторизации являются слишком громоздкими и сложными для вычислений даже на современных компьютерах, поэтому, как правило, здесь применяется приближенная факторизация. Она состоит в равномерном приближении символа ядра такой структурой, факторизация которой легко строится в явном виде.

Приводятся примеры смешанных задач механики, которые были решены этими методами самим В. М. Александровым, а также его учениками. Отмечается, что в работах учеников В. М. Александрова методы больших и малых лямбда получили дальнейшее развитие. В частности, они были распространены на динамические контактные задачи, а также на задачи теории дифракции. Наиболее сложным для исследования оказался высокочастотный режим для полугораниченных областей, однако некоторая модификация метода малых λ позволила построить асимптотику решения и в этом случае.

О вынужденных колебаниях поперечно-неоднородного слоя

Углич П. С.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону**Владикавказский научный центр РАН, Владикавказ*

puglich@inbox.ru

Рассмотрена задача о плоских колебаниях слоя, механические параметры которого (упругие модули и плотность) являются функциями поперечной координаты. Для решения задачи отыскания волнового поля использовано преобразование Фурье, при помощи которого построена каноническая система дифференциальных уравнений четвёртого порядка, в которой неизвестными являются трансформанты перемещений и напряжений. Таким образом, отыскание трансформант перемещений и напряжений сведено к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае произвольной зависимости механических параметров от поперечной координаты такая краевая задача может быть решена только численно, в настоящей работе использован метод пристрелки с решением вспомогательных задач Коши при помощи вложенных формул Рунге порядка 4(5).

После решения краевой задачи для отыскания волнового поля следует произвести обращение преобразования Фурье, для чего предлагаются два метода. Первый из них основан на непосредственном численном интегрировании с использованием квадратурных формул, второй — на использовании теории вычетов. При использовании теории вычетов используется стандартная формула для вычета в однократном полюсе. При её использовании необходимо знать производную знаменателя подынтегрального выражения по параметру преобразования Фурье, для её отыскания построена вспомогательная краевая задача. Приводится ряд результатов численных расчетов, их достоверность подтверждается сравнением результатов, полученных разными методами, а также сравнением с аналитическими результатами. Помимо расчётов волновых полей представлены дисперсионные кривые для различных законов неоднородности и различных краевых условий.

Затем рассматривается обратная задача об определении законов распределения механических параметров по информации о волновом поле на части верхней поверхности слоя. Построены интегральные уравнения для определения неизвестных и обратная задача сведена к решению итерационной последовательности уравнений Фредгольма первого рода. Ядра интегральных уравнений также представляет из себя интегралы Фурье, особенности которых являются полюсами второго порядка. Представлены формулы для их приближенного определения и произведено сравнение результатов расчётов ядер с результатами, полученными путём непосредственного численного интегрирования. Приведены результаты численных расчетов решения обратной задачи.

Особенности потери устойчивости нелинейно-упругих круглых плит с поверхностными напряжениями

Федоренко А. Г., Шейдаков Д. Н.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

afedorenko@mail.ru, sheidakov@mail.ru

Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел представляет значительный интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения. В связи с развитием современных технологий и появлением новых материалов достаточно большую актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости с учетом различных поверхностных явлений. Например, характер деформирования тел при микро- и наноразмерах часто заметно отличается от поведения тел макроразмеров, что может быть объяснено поверхностными эффектами. Кроме того, эти эффекты играют существенную роль в механике тел с нанопокрытиями. В последнее время для моделирования поверхностных явлений в микро- и наномеханике получила развитие теория упругости с поверхностными напряжениями. В рамках этой теории помимо обычных напряжений, распределенных в объеме, учитываются еще и независимые поверхностные напряжения на границе тела, которые обобщают известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твердых тел. Введение поверхностных напряжений позволяет, в частности, описать характерный для наноматериалов размерный эффект.

Целью настоящего исследования является изучение бифуркации равновесия нелинейно упругих плит с поверхностными напряжениями. В рамках общей теории устойчивости трехмерных тел проведен анализ выпучивания круглой плиты при радиальном сжатии. Для описания поведения плиты использовалась модель Гертнера–Мердока, которая с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений в рамках данной модели может рассматриваться как тензор усилий, действующий в этой мембране. Для определения докритического напряженно-деформируемого состояния круглой плиты в условиях больших деформаций применялся полуобратный метод. При выводе линеаризованных уравнений равновесия и граничных условий использовался метод линеаризации, адаптированный к задачам нелинейной теории упругости. Путем численного решения полученной линеаризованной краевой задачи для ряда материалов найдены спектры критических значений параметра нагружения (удельное радиальное сжатие) и соответствующие им моды неустойчивости. Используя полученные результаты, подробно проанализировано влияние размеров круглой плиты и величины поверхностных напряжений на потерю устойчивости при радиальном сжатии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-08-00802-а, 16-01-00647-а).

Волновые поля в слоистых анизотропных и пьезоэлектрических фононных кристаллах

Фоменко С. И., Александров А. А.

Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар
sfom@yandex.ru

Перспективным направлением современного материаловедения является разработка и исследование композитных материалов, состоящих из некоторого множества специально сопряженных друг с другом однородных упругих включений и несущей матрицы. Большой практический интерес представляют материалы с искусственно созданной внутренней полупериодической или периодической структурой, характерным примером которых служат фотонные кристаллы, разработанные в оптике и микроэлектронике. В упругих и акустических средах, в которых имеется периодическая система неоднородностей, обусловленная контрастностью физико-механических свойств составных материалов, волновые явления схожи с наблюдаемыми в фотонных кристаллах: имеют место запрещенные и разрешенные зоны. Рассматриваемые материалы получили название «фононный кристалл» и имеют практическую значимость в задачах виброгашения и виброфокусировки, увеличения прочности конструкций, при создании актуаторов и фильтров, а также в других приложениях.

В настоящей работе рассматриваются слоистые фононные кристаллы, состоящие из произвольного (ограниченного или неограниченного) количества ячеек. Ячейка кристалла может состоять из набора упругих изотропных, анизотропных, а также пьезоэлектрических слоев. Фононный кристалл помещен в среду, в которой колебания возбуждаются плоской гармонической волной, падающей под определенным углом. Для вычисления гармонического волнового поля применяется метод матриц переноса. На основе этого метода получен численно-устойчивый алгоритм, позволяющий представить волновое поле, проходящее через периодическую структуру, в виде суперпозиции волн Блоха, для определения амплитуд которых развит численно-устойчивый алгоритм. Полуаналитическое представление позволило провести классификацию запрещенных зон в рассматриваемых структурах. Анализ волновых полей осуществляется как с помощью полученных критериев, так и анализом энергетических коэффициентов прохождения и дисперсионных кривых волн Флоке — Блоха. Сравнение методов подтверждает полуаналитическую схему.

На основе разработанных алгоритмов проводится параметрический анализ фильтрационных свойств периодических включений. Установлено, что относительная толщина и а также контрастность свойств материалов, образующих периодическую структуру, существенно влияет на запрещенные зоны в частотной области: они могут сдвигаться, расширяться или сужаться при увеличении относительной толщины. Приводятся диаграммы запрещенных зон в зависимости от свойств слоев, количества ячеек, типа волн и режимов колебаний. Исследуется влияние пьезоэлектрического тензора на дисперсионные характеристики и запрещенные зоны.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента МК-7154.2015.1 и гранта РФФИ 16-51-53043.

Анализ рабочих характеристик пьезоэлектрического генератора кантелеверного типа с асимметричной фиксацией присоединенной массы на основе конечно-элементного моделирования

Черпаков А. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону
alex837@yandex.ru

Рассмотрена задача конечно-элементного моделирования пьезоэлектрического генератора (ПЭГ) с различными вариантами крепления присоединенной массы. Рассмотренный ПЭГ является частью системы преобразования механической энергии в электрическую с последующим накоплением последней.

Конечно-элементное моделирование произведено в комплексе Ansys. Проведен анализ оценки влияния электромеханических характеристик ПЭГ на их выходные параметры пьезоэлементов биморфа. Была предложена модель ПЭГ с включением в ее конструктивную схему присоединенной массы, которая имеет различные варианты крепления относительно нейтральной оси подложки кантелевера с биморфным элементом при ее различном местоположении: 1) симметричное исполнение, 2) антисимметричное исполнение. Приведены результаты расчета выходных параметров напряжения и мощности ПЭГ.

На основе анализа проведенных в конечно-элементном пакете Ansys расчетов ПЭГ рассмотрена задача влияния антисимметричного крепления инерционной массы на выходное напряжение при различной активной нагрузке на первой резонансной частоте. Анализ выходных параметров напряжения на пьезопластинах ПЭГ показывает, что напряжение на электродах различается не более чем на 0.6% от выходного напряжения при сопоставлении симметричной и асимметричной фиксации присоединенной массы. При этом выходная мощность на каждом электроде различается не более чем на 1% при различном сопротивлении активной нагрузки и асимметричном креплении присоединенной массы.

Автор выражает благодарность за поддержку Южному федеральному университету (проект №213.01.-2014/03ВГ) и Российскому фонду фундаментальных исследований (16-08-00740, 14-08-00546-А).

Определяющее уравнение для параметров анизотропии в модели триклинного упругопластического материала

Швед О. Л.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск
swed@newman.bas-net.by

Ранее предложена феноменологическая модель упругопластической среды, которая рассмотрена для частных видов анизотропии. Модель материала использует закон упругости Мурнагана, который позволяет учитывать рост упругой анизотропии вследствие пластической деформации. Правильный учет важен для критерия разрушения.

Тензор напряжений Коши аддитивно разлагается на изотропную и анизотропную составляющие. Второе слагаемое есть линейная форма скалярных параметров анизотропии с тензорными коэффициентами. В дифференциальном определяющем уравнении для параметров анизотропии различаются два случая, когда тензорный коэффициент не равен либо равен нулю. В основном, первом случае используется величина скалярного произведения вектора направления действия пластической деформации и нормированного тензорного коэффициента, поскольку все параметры анизотропии предполагаются равноправными. Определяются неотрицательный скалярный параметр роста упругой анизотропии и принимающий значения плюс, минус единица скаляр для каждого параметра анизотропии. Необходима минимизация параметра роста по всем наборам этих скаляров для устранения вероятной неустойчивости при расчете упругопластического процесса, так как модель связана с конкретным сложным законом упругости. Разработана процедура минимизации параметра роста упругой анизотропии, который находится из системы определяющих уравнений модели. Величина скорости изменения параметра анизотропии полагается равной произведению трех указанных скалярных величин. Во втором случае искомая величина считается нулевой.

Выполнена аналитическая и численная проверка определяющего уравнения. С этой целью использовалась зависимость удельной потенциальной энергии упругой деформации от параметров анизотропии для триклинного материала. Отыскивались возможные ограничения на параметры анизотропии в частных случаях: для трансверсально-изотропного, ортотропного, моноклинного, триклинного материалов. Устанавливалась пригодность определяющего уравнения для описания найденных ограничений. В результате проверки при простом растяжении и простом сжатии получены необходимые дополнительные к определяющему уравнению соотношения в конечном виде. Учет их обязателен, так как одноосные эксперименты являются базовыми.

Исследована возможность учета и кубически изотропного материала, как частного случая ортотропного. Рассмотрен модельный пример, в котором было бы возможно возникновение такой анизотропии при пластической деформации. Дополнения к определяющему уравнению здесь также получены и должны учитываться при условии, если кубическая анизотропия является деформационной.

Уравнения высшего порядка для динамических процессов в микронеоднородных упругих средах

Эглит М. Э.¹, Якубенко А. Е.², Якубенко Т. А.²

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

²Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

m.eglit@mail.ru, yakub@imec.msu.ru, yakubta@mail.ru

Рассматриваются динамические процессы в неоднородных, в общем случае анизотропных, упругих средах периодической структуры в предположении, что отношение ε масштаба неоднородности среды к характерной длине волн мало. Для описания таких процессов исходную неоднородную среду заменяют некоторой эффективной однородной. Математический метод вывода осредненных уравнений любого порядка точности был развит в работах Н. С. Бахвалова и других авторов. Метод основан на введении быстрых и медленных координат, описывающих соответственно детали распределения параметров внутри ячейки неоднородности и их глобальное распределение, и представлении перемещений в виде асимптотических рядов по ε . Коэффициенты этих рядов являются произведениями некоторых функций от быстрых переменных на производные по времени и координатам функций медленных переменных, которые можно трактовать как осредненные перемещения. Порядок этих производных равен степени ε . Функции быстрых переменных, входящие в состав коэффициентов рядов для перемещений, находятся при решении так называемых задач на ячейке, которые представляют собой статические задачи о растяжениях вдоль координатных осей и сдвигах параллельно координатным плоскостям со специальными граничными условиями и массовыми силами. Подстановка рядов в исходные уравнения микронеоднородной среды и последующее осреднение по ячейке неоднородности дает эффективные осредненные уравнения. Стандартно осредненными уравнениями называют уравнения в нулевом приближении по ε . Однако они не описывают ряд эффектов, наблюдаемых в микронеоднородных средах, в частности, дисперсию волн и масштабный эффект. Уравнения более высокого порядка точности нужны также для описания решения в тонких областях быстрого изменения напряженно-деформированного состояния, например, структуры ударных волн в композитах. В докладе демонстрируются уравнения, получаемые в более высоких приближениях по ε , они содержат производные высшего порядка по координатам и по времени. Приводятся результаты аналитического и численного исследования свойств коэффициентов этих уравнений для сред различной структуры. Особое внимание уделено главным членам, определяющим дисперсию волн. Это члены с производными третьего и четвертого порядка. Показано, что в общем случае локально анизотропных микронеоднородных сред третьи производные от перемещений входят в осредненные уравнения. Определен тип дисперсии волн в различных средах и структурах. С помощью преобразований с использованием низших приближений получены разные асимптотически эквивалентные формы уравнений высшего порядка, в частности, уравнения, не содержащие производных по времени порядка выше второго, и, следовательно, не требующие дополнительных начальных условий.

Дисперсионные соотношения для пьезоэлектрического неоднородного волновода

Юров В. О.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

vitja.jurov@yandex.ru

Анализ дисперсионных соотношений для волноводов различной структуры позволяет изучать закономерности формирования волновых полей (скоростей и затухания) в протяженных структурах. Отметим, что дисперсионные соотношения для однородных волноводов с затуханием изучаются в литературе на основе явного вида дисперсионного уравнения. В свою очередь явный вид дисперсионного уравнения удастся получить для волноводов с однородной структурой материала, либо для неоднородных волноводов со специальными видами неоднородности.

В настоящем исследовании на основе метода пристрелки разработан способ исследования дисперсионных свойств неоднородных по толщине пьезоэлектрических волноводов с затуханием. Для учета затухания в соответствии с концепцией комплексных модулей упругие характеристики и пьезомодули заменены комплексными функциями частоты.

Задача о колебаниях неоднородного волновода приведена к краевой задаче для матричного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами — $X' = A(x, \kappa, \gamma)X$, где матрица порождает спектральный пучок относительно двух спектральных параметров. Первый κ пропорционален частоте колебаний, а второй γ — волновому числу. Относительно первого параметра элементы матрицы являются дробно-рациональными функциями, относительно второго — квадратичными.

Аналитически изучены некоторые закономерности строения дисперсионных соотношений при комплексном и вещественном γ . Построены асимптотические формулы, описывающие структуру дисперсионного множества при малых значениях спектральных параметров. С помощью метода Галеркина построена простая прикладная теория, которая позволяет анализировать дисперсионные ветви в низкочастотном диапазоне, оценена область применимости этой теории. При исследовании влияния затухания происходит существенное изменение структуры дисперсионного множества (особенно для высших мод), все дисперсионные ветви берут начало из точки $(\gamma, \kappa = 0)$ и имеют ненулевую мнимую часть. При $\kappa = 0$ комплексная матрица системы становится вещественной, нуль является кратным собственным значением, а остальные располагаются симметричными группами. С увеличением частотного параметра симметрия разрушается, и все моды являются нераспространяющимися.

Представлены результаты расчетов для пьезоэлектрических волноводов, дан сравнительный анализ структуры дисперсионных соотношений для разных типов неоднородности с одинаковой интегральной характеристикой, оценено влияние различных факторов на топологию ветвей дисперсионного множества.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта — 16-01-00354А). Автор выражает благодарность научному руководителю Ватульяну А. О. за внимание к работе.

Formation of microcracks in femur after surgical resection: assessment of ultimate human's own weight

Alekseev D. V.¹, Bosiakov S. M.¹, Shpileuski I. E.², Silberschmidt V. V.³

¹*Belarusian State University, Minsk*

²*Republican Scientific and Practical Centre for Traumatology and Orthopedics, Minsk*

³*Loughborough University*

bosiakov@bsu.by, v.silberschmidt@lboro.ac.uk

The main method of treatment of benign tumours and metastatic lesions of long bones is a surgical removal of the affected area within an unmodified tissue (surgical resection). After surgery, a sectoral defect of rectangular shape is formed in the bone. As a result, strength of the bone segment and functionality of the limb decrease and the risk of pathologic fracture of surgical resection increases. A development of practical recommendations for prevention of pathologic failure after a surgical resection is a fundamental issue, since the restriction of the functional load on the operated limb reduces significantly a patient's ability for self-care and mobility. The aim of this study is the FE-based prediction of ultimate loading combinations for a femur with the post-resection defect under the action of human's own weight. The bone defect was placed in a middle section of the femur on its medial surface.

The finite-element (FE) model was developed using computed tomography data. A bone tissue was modeled as a homogeneous transversal isotropic material. The femur's position corresponded to a load direction along an axis extending from an upper pole of the femoral head to a middle of an interval between the end points of lower divisions of femoral condyles. The load was applied to the upper segment of the femoral head. To estimate the ultimate loads under the action of human's own weight on the femur for all concentrators of the post-resection defect, the respective values of J -integral were calculated. After a comparative analysis of the experimental and FE results the maximum values of J -integral corresponding to the crack formation in the post-resection defect region were defined. Ultimate magnitudes of the human's own weight corresponding to formation of microcracks near the post-resection defect. These results can be used to predict the situations corresponding to pathological fracture of the femur after surgical resection. The advantage of this approach is the possibility to assess loading conditions for a femur with the post-resection defect taking into account the simultaneous action of several loading factors, in addition to the weight. This is important since, generally, the pathologic fracture of the femur with the post-resection defect under the influence of only own human weight should not occur. Clinical recommendations for the prevention of pathological fracture on the basis of the obtained results can be formulated. These recommendations, primarily, may refer to the description of the unloading regime conditions for patients after surgical resections.

This research is the result of project implementation: TAMER "Trans-Atlantic Micromechanics Evolving Research: Materials containing inhomogeneities of diverse physical properties, shapes and orientations" supported by FP7-PEOPLE-2013-IRSES Marie Curie Action "International Research Staff Exchange Scheme".

On computational evaluation with micropolar elasticity

Eremeev V. A.^{1,2}, Skrzat A.¹, Stachowicz F.¹¹*Rzeszów University of Technology*²*Southern Federal University, Rostov-na-Donu*

askrzat@prz.edu.pl, stafel@prz.edu.pl, veremeyev@prz.edu.pl

Nowadays the interest grows to generalized models of continuum mechanics in order to describe behaviour of micro- and nanostructured materials which demonstrate complex inner structure. Among these generalized models there are the surface elasticity, micropolar or Cosserat continua, microstretched and micromorphic media, surface elasticity, media with internal variables, gradient elasticity, general models of media with internal variables, etc. In particular, the micropolar model proposed by Cosserat brothers more than hundred years ago found applications in modeling such materials as porous solids, bones, masonries, composites, magnetic fluids, soils, etc.

Within the Cosserat continuum two kinematically independent fields of the translations and rotations determine the kinematics of the medium. The stress and couple stress tensors are introduced in the theory. The couple stresses appear naturally in the case when one considers such material as open-cell foam or beam lattice. Indeed, in such case moments appear in beams or in foam struts bending deformations and related moments may play crucial role, so the effective homogenized media inherits somehow these properties. For example, micropolar properties of such materials as foams, bones and beam lattices were established in works by Lakes, Ganghoffer et al. among others. The micropolar properties of material may be important near singularities or to describe observed experimentally size-effect.

We present the basic equations of the linear micropolar elasticity. The equilibrium equations, static and kinematic boundary conditions and constitutive equations are given. We discuss the implementation the finite element approach to the linear micropolar elasticity in order to perform the analysis of the stress concentration near holes and notches. Within the micropolar elasticity we can analyze the behaviour of such microstructured solids as foams and bones. Efficient and accurate solution of boundary value problems requires advanced numerical code such as the finite element method. For the moment commercial FEM software give the possibility to use user defined elements and user defined procedure for implementation of nonstandard finite elements and nonstandard material models. Here we discuss the new 8-node hybrid micropolar isoparametric element and its implementation in ABAQUS. With developed new finite element few problems are analyzed where the influence of the microstructure may be important. The provided comparison of solutions obtained within the micropolar and classical elasticity show the influence of micropolar properties on stress concentration near notches and contact areas.

Содержание

Абделхафиз М. А., Цибулин В. Г. Численное моделирование анизотропной фильтрационной конвекции и сохранение косимметрии	3
Абрамов В. В., Алексиев А. Р., Гетманский М. С., Мирчев Й., Миховски М. М., Попужин В. В. Итерационный алгоритм решения дифракционных задач в низкочастотном ультразвуковом диапазоне	4
Абросимов Н. А., Елесин А. В., Новосельцева Н. А. Численный анализ нелинейного деформирования и прогрессирующего разрушения металлопластиковых цилиндрических оболочек при неосесимметричных импульсных воздействиях	5
Агаян К. Л., Григорян Э. Х., Джилаван С. А. Бесконечная пластина, подкрепленная полубесконечным стрингером	6
Азоян А. И., Иваночкин П. Г. Плоская контактная задача для тонкой двухслойной упругой полосы при неполном сцеплении слоев с учетом тепловыделения в зоне контакта	7
Айзикович С. М., Васильев А. С., Волков С. С. Контактная задача о взаимодействии двух упругих тел с функционально-градиентными покрытиями	8
Айзикович С. М., Кренев Л. И. Неизотермическое индентирование непрерывно-неоднородного полупространства	9
Акопян В. Н. Осесимметричное напряженное состояние кусочно-однородного слоистого пространства с параллельными монетообразными трещинами	10
Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. Приложения метода блочного элемента в некоторых областях	11
Баженов В. Г., Котов В. Л., Линник Е. Ю. Сравнительный анализ оптимальных форм осесимметричных тел при проникании в пластические грунтовые среды	12
Баженов В. А., Погорелова (Малкина) О. С., Постникова Т. Г. Разрывные бифуркации как предвестники кризиса в сильно нелинейных виброударных системах	13
Баженов В. Г., Демарева А. В., Кибец А. И., Шушкина Ю. А. Численное моделирование упругопластического выпучивания полусферических оболочек при квазистатических контактных нагружениях	14
Баландин В. В., Баландин В. В., Брагов А. М., Котов В. Л. Экспериментально-расчётное исследование динамического сопротивления сдвигу водонасыщенного песка	15
Баранникова С. А., Бочкарева А. В., Громов В. Е., Зуев Л. Б., Ли Ю. В. Эволюция картин локализации пластической деформации в биметалле при электролитическом насыщении водородом	16
Батищев В. А. Возникновение вращения в термогравитационном пограничном слое вблизи свободной границы	17
Бауэр С. М., Боденкова Е. О. Моделирование эластотонометрии глаза	18
Беликов Н. В., Какурин А. М., Юдин А. С. Развитие конструкций мембранных предохранительных устройств и методов эксперимента	19

Белубекян М. В., Саноян Ю. Г. Интерфейсные изгибные колебания в тонких составных свободно опертых пластинах	20
Белянкова Т. И., Ворович Е. И., Тукодова О. М. Распространение ПАВ в преднапряженных пьезоэлектрических структурах с неоднородным покрытием	21
Белянкова Т. И., Леви М. О., Лыжов В. А. Роль размерных параметров при решении контактных задач в электромагнитоупругих средах . .	22
Богачев И. В., Дударев В. В., Лапина П. А., Недин Р. Д. Идентификация механических характеристик неоднородной вязкоупругой пластины	23
Богданов А. Н., Диесперов В. Н. О моделях процессов взаимодействия течения в пограничном слое с трансзвуковым потоком	24
Боев Н. В. Прохождение продольной волны через тройкопериодическую систему твердых шаровых включений с возможными отслоениями их от упругой матрицы	25
Болнокин В. Е., Пачева М. Н., Сторожев В. И. Сдвиговые волны в звене волновода меандровой структуры с изломом дугообразной формы .	26
Бормотин К. С. Вариационная формулировка обратных задач многоточечного формообразования панелей в режиме ползучести	27
Босяков С. М., Дутина А. А., Майсюк М. М., Михасев Г. И., Петрова Л. Г., Юркевич К. С. Прогнозирование толщины хрящевого трансплантата для реконструкции тимпанальной мембраны с ретракционным карманом	28
Бочарова О. В., Анджиикович И. Е., Седов А. В. Об одном подходе к обработке сигнала в задачах низкочастотной дефектоскопии	29
Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В. Собственные колебания прямоугольных пластин, взаимодействующих с вязкой жидкостью	30
Братов В. А., Волков Г. А., Казаринов Н. А. Численное моделирование тестов на динамическое сжатие и раскалывание квазихрупких гетерогенных материалов	31
Бураго Н. Г. Расчет нестационарного вязко-пластического течения несжимаемой среды Бингама—Ильюшина в плоском конфузоре	32
Бураго Н. Г., Никитин И. С. Несимметричные деформации упругих цилиндров переменной толщины	33
Бычков П. С., Сайфутдинов Ю. Н. Экспериментальная методика определения технологических искажений в телах сложной формы, создаваемых методом стереолитографии	34
Бычков А. А., Карпинский Д. Н., Роменская Е. С. Восстановление межатомного потенциала биомолекул методом динамической силовой спектроскопии	35
Вайсфельд Н. Д., Плюснор Д. С., Реут В. В. Об одном способе решения пространственных задач теории упругости	36
Васильев А. В., Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Испарение вращательно-симметричной капли	37
Васильев Л. В. О реконструкции параметров закрепления неоднородной вязкоупругой балки	38

Васильченко А. А., Лапина О. Н., Никитин Ю. Г., Сыромятников П. В. Осциллирующий источник, движущийся по поверхности полуограниченного упругого тела	39
Ватульян А. О., Кондратьев В. С. О колебаниях неоднородных пьезокерамических тел	40
Ватульян А. О., Плотников Д. К. О некоторых контактных задачах для неоднородных упругих тел	41
Вильде М. В. Асимптотическое приближение для цилиндрической поверхностной волны в упругом полупространстве со смешанными граничными условиями на поверхности	42
Вильде М. В., Сергеева Н. В. Асимптотический анализ влияния вязкоупругих свойств материала на дисперсию гармонических волн в сплошном цилиндре	43
Вовк Л. П., Кисель Е. С. Особенности динамического прочностного расчета анизотропных термоупругих областей	44
Волик М. В. Математическое моделирование потоков воздуха вокруг трехмерного элемента, имитирующего одиночный дом	45
Воронкова Е. Б., Еременко А. А., Качанов А. Б., Корников В. В. Статистический анализ взаимосвязи уровня аббераций высших порядков и сферического компонента рефракции	46
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А. Моделирование распространения бегущих волн в структурах с локальными неоднородностями на основе гибридной численно-аналитической схемы	47
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Мякишева О. А. Определение и контроль изменения характеристик слоистых композитов на основе бесконтактной регистрации параметров бегущих волн	48
Говорухин В. Н. Алгоритм анализа динамики распределенных вихревых конфигураций	49
Говорухин В. Н., Филимонова А. М. Численный анализ динамики вихревых структур на γ -плоскости	50
Годес А. Ю., Лобода В. В. Дуговая трещина на границе раздела электрострикционных материалов	51
Голуб М. В., Дорошенко О. В. Прохождение упругих волн через многослойные волноводы с периодически и стохастически распределёнными планарными круговыми отслоениями	52
Голядкина А. А., Доль Е. С., Рзаев В. А., Сафонов Р. А., Скрипаченко К. К. Изучение механических свойств костной ткани позвоночника посредством пары ультразвуковых преобразователей	53
Голядкина А. А., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Сафонов Р. А. Исследование механических свойств тканей позвонков	54
Горячева И. Г., Степанов Ф. М. Трёхмерные контактные задачи о скольжении системы штампов по вязкоупругому полупространству	55
Груздев Р. Ю., Соловьёв А. Н. Идентификация упругих свойств графена методами молекулярной динамики	56

Гусаков Д. В. Об анализе дисперсионного множества для неоднородного пористоупругого слоя	57
Давыдов С. А., Земсков А. В. Анализ особенностей в решении нестационарной задачи термомехано-диффузии для слоя	58
Даль Ю. М., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н. Анализ потери несущей способности тонких пластин с вырезами при одноосном растяжении	59
Днепроvский В. Г., Карапетьян Г. Я., Салафетов В. С. Исследование возможности применения линии задержки на поверхностных акустических волнах в качестве датчика магнитного поля	60
Добрякова Н. Н., Коссович Е. Л., Минин М. Г., Эпштейн С. А. Применение техники непрерывного нано- и микроиндентирования для определения механических свойств микрокомпонентов углей	61
Долгих Т. Ф. Уравнения эллиптического типа для зонального электрофореза	62
Доль Е. С. Биомеханический анализ позвоночно-двигательного сегмента	63
Доль А. В. Сравнительный анализ стоматологических имплантатов	64
Донник А. М., Калинин А. А. Биомеханическое моделирование при планировании операции на позвоночно-тазовом комплексе	65
Дроздова Ю. А., Эглит М. Э., Якубенко А. Е. Математические модели природных склоновых потоков	66
Дударев В. В., Мнухин Р. М. К определению преднапряжений в электроупругом цилиндре	67
Дудко О. В., Манцыбора А. А. Плоская автомодельная задача о падении ударной продольной волны на границу раздела жидкость-твердое тело	68
Дудко О. В. Возникновение упругих нелинейных волн при нестационарном одноосном сжатии идеальноупругого пористого полупространства	69
Думитреску А., Зекеру Г., Черпаков А. В. Конечно-элементное моделирование напряженного состояния в трубе с повреждением из двух дефектов при восстановлении ее состояния накладкой композитного бандажа	70
Елаева М. С. Взаимодействие разрывов в математической модели капиллярного зонального электрофореза	71
Eremeyev V. A. On propagation of interfacial surface waves considering interface energy	72
Еремеев В. В. Устойчивость трехслойных плит с предварительно напряженными слоями из материалов Трелоара и Муни-Ривлина	73
Жилияев И. В., Надолин К. А. Численное моделирование транспорта пассивной примеси русловым потоком	74
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Щитов Ф. А. Построение явного решения для некоторого класса квазилинейных уравнений	75
Журавлев А. Б., Ирошников Н. Г., Никитин И. С., Якушев В. Л. Математическая модель интрастромальной коррекции формы роговицы глаза	76

Зайцев А. В., Зубко И. Ю., Кокшаров В. С., Судаков И. А. Моделирование механического поведения уплотнительных элементов из терморасширенного графита для трубопроводной арматуры	77
Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Аналитические решения задач о равновесии анизотропных тел с центральной симметрией, находящихся под действием массовых сил, и их приложения к задачам механики геологических сооружений	78
Занько А. И., Калоеров С. А., Кошкин А. А. Решение задачи линейной вязкоупругости для однородных и кусочно-однородных плит	79
Зеленина А. А., Зубов Л. М. Конечные деформации упругого полого цилиндра с распределенными дислокациями	80
Зеленцов В. Б., Митрин Б. И. Параметрическая термоупругая неустойчивость в связанной квазистатической задаче термоупругости о скользящем фрикционном контакте с разогревом от трения	81
Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Осесимметричная модель механодиффузии для изотропной плоскости	82
Зубов Л. М. Уравнения движения микрополярных упругих оболочек в эйлеровых координатах	83
Иванов Д. В. Численное исследование напряженно-деформированного состояния системы кость — фиксатор при околосуставных переломах проксимального отдела бедренной кости	84
Иванова Ю. Е., Рагозина В. Е. Особенности применения метода лучевых рядов к одной двумерной задаче ударной деформации несжимаемого упругого полупространства	85
Иванова А. В., Сильвестров В. В. Тонкое жесткое межфазное включение с трещиной на части поверхности	86
Ильин К. И., Моргулис А. Б. Трёхмерные моды в задаче Тэйлора — Куэтта с радиальным потоком	87
Ильиных Г. В., Сметанников О. Ю. Моделирование работы шестеренного насоса с использованием технологии наложения сеток в ANSYS CFX	88
Ильиных Г. В., Сметанников О. Ю. Многоуровневая модель исследования фильтрационных свойств армирующего каркаса полимерных композитов	89
Казаков К. Е., Курдина С. П. О контакте тел с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярных систем штампов	90
Калинчук В. В., Панькин А. В., Тимошенко П. Е., Широков В. Б. Расчет S-параметров для фильтров на поверхностных акустических волнах на основе пленок титаната бария на подложке из оксида магния в COMSOL	91
Калинчук В. В., Широков В. Б., Юзюк Ю. И. Управление свойствами пленок титаната бария-стронция	92
Карякин М. И., Обрезков Л. П., Шубчинская Н. Ю. Численное исследование равновесия и устойчивости неоднородного нелинейноупругого цилиндра	93

Карякин М. И., Пустовалова О. Г., Шубчинская Н. Ю. Устойчивость составного бруса при изгибе	94
Касаткин А. А., Няшин Ю. И., Осипенко М. А. Контактная задача для балок переменной толщины	95
Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Задача для эллиптического погранслоя в цилиндрической оболочке при ударных поверхностных воздействиях нормального типа	96
Кириченко А. В., Крылова Е. Ю., Крысько В. А., Папкова И. В. О доказательстве существования решения в связанных задачах термодинамики для балок моделей Тимошенко	97
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Критерии полноты систем неприводимых тензоров конечных деформаций микрополярного континуума	98
Койфман К. Г., Лычев С. А. Самонапряженные полимембраны	99
Колесников А. М. Стягивание цилиндрической мембраны, одетой на жёсткий цилиндр	100
Колесникова А. С. Зависимость механических свойств сорбентов от размеров микропор	101
Колосова Е. М., Ляпин А. А., Чебаков М. И. Моделирование контактного взаимодействия упругих тел с учетом трения, тепловыделения от трения и конвективного теплообмена	102
Корниевский А. С., Наседкин А. В., Наседкина А. А. Конечно-элементный анализ наноструктурированных пористых термоупругих композитов с поверхностными эффектами	103
Костандов Ю. А., Локшина Л. Я. Предельное состояние образца трапецевидной формы при одноосном сжатии с учетом внешнего и внутреннего трения	104
Кренев Л. И., Пирожкова Т. С., Садырин Е. В., Тюрин А. И. Методы микро- и наноиндентирования для характеристики локальных физико-механических свойств тонкостенных конструкций, тонких пленок и покрытий	105
Крылова Е. Ю., Яковлева Т. В. Влияние температурного поля на сценарий перехода колебаний гибких оболочек в хаос	106
Кузьмина К. С., Марчевский И. К., Пузикова В. В. Сравнение эффективности методов контрольных объемов, вихревых элементов, погруженных границ и конечных элементов с частицами при решении сопряженных задач гидроупругости	107
Кузьмина К. С., Марчевский И. К., Морева В. С. Моделирование гидроупругих колебаний профилей в потоке вязкой несжимаемой среды методом вихревых элементов	108
Кукуджанов К. В., Левитин А. Л. Моделирование трансформации и взаимодействия микродефектов в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля	109
Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Автомодельная задача для упругой среды при наличии фронта фазового превращения	110

Куракин Л. Г., Островская И. В., Соколовский М. А. Об устойчивости триполярных и квадрупольных дискретных вихревых структур в однородной и двухслойной вращающейся жидкости	111
Ле Зыонг Ван, Оганесян П. А., Скалиух А. С., Соловьев А. Н. Неоднородно поляризованные пьезоэлементы устройств накопления энергии: конечноэлементное моделирование и прикладная теория	112
Леви Г. Ю., Леви М. О., Татарков Д. А. О влиянии деформации несоответствия на электромеханические характеристики электроупругой среды	113
Лычѐва Т. Н. Замкнутые решения нестационарной задачи динамики для вязкоупругого конечного цилиндра	114
Лычев С. А. Геометрические методы механики тел переменного состава .	115
Любимова О. Н., Солоненко Э. П. Релаксационные процессы в двухслойном цилиндрическом спае стекла с металлом при резком охлаждении	116
Ляпин А. А. Контактная задача для пористой пластины на упругом основании	117
Мазепа М. М. Управление прочностными свойствами углеродных композитов	118
Макаров С. С., Устинов Ю. А. Колебания анизотропных цилиндрических оболочек	119
Манжиров А. В. Контактные задачи для тел с покрытиями: истоки, достижения, проблемы	120
Маслов Л. Б., Сабанеев Н. А., Седов В. М. Математическое моделирование перестройки костной ткани с аппаратом наружной фиксации .	121
Митрин Б. И., Николаев А. Л., Садырин Е. В. Влияние тонкой оксидной плѐнки на эффективные механические свойства металлического покрытия при наноиндентировании	122
Михасев Г. И., Славашевич И. Л. Влияние вязкоупругих свойств предварительно напряженной тимпанальной мембраны на собственные частоты колебательной системы среднего уха	123
Моисеенко И. А., Сидаш О. Ю., Сторожев В. И. Кинематические характеристики нелинейных ангармонических возмущений для монохроматических нормальных волн кручения в анизотропных цилиндрах из Gd и Tb	124
Моршнева И. В. Типы ветвления автоколебаний в горизонтальном слое бинарной смеси	125
Моршнева И. В., Петрова Е. И. Возникновение пространственных периодических режимов в вертикальном слое бинарной смеси	126
Мхитарян С. М. О решении смешанной граничной задачи нелинейной теории установившейся ползучести для полупространства при антиплоской деформации	127
Наседкин А. В., Наседкина А. А., Рыбьянец А. Н. О моделях микропористых пьезоэлектрических композитов, полученных методом транспорта металлосодержащих микрочастиц	128

Недин Р. Д. Колебания неоднородных пьезоэлектрических тел в условиях предварительного напряженно-деформированного состояния . . .	129
Нескородев Р. Н. Напряженно-деформированное состояние вблизи выработки эллиптического сечения в условиях ползучести анизотропных горных пород	130
Нестеров С. А. Определение наведенного потенциала в неоднородном термоэластостатическом слое	131
Норкин М. В. Кавитационное торможение твердого тела в возмущенной жидкости	132
Обрезков Л. П. Устойчивость неоднородного полого цилиндра	133
Оконечников А. С., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Нестационарное воздействие касательной подвижной нагрузки на упругую полуплоскость	134
Орлова Н. С. Динамика относительно толстых слоев в процессе виброкипения	135
Паршин Д. А. Напряженное состояние вязкоупругого слоя, формируемого на жесткой подложке в процессе центробежного нанесения материала	136
Пожарская Е. Д., Пожарский Д. А. Смешанные задачи теории упругости для плоского клина с переменным коэффициентом Пуассона	137
Полякова Н. М. Моделирование клиновидной дегидратации высыхающей капли крови	138
Потетюнко О. А. Об оценке упругого опирания и давления при анализе деформирования решетчатой пластины	139
Пузикова В. В. Использование метода LS-STAG для математического моделирования в сопряженных задачах гидроупругости	140
Саакян А. В., Шавлакадзе Н. Н. Численный анализ контактной задачи для упругой накладке переменной жесткости, выходящей на линию раздела материалов составной упругой плоскости	141
Сапожников Г. А., Федотенков Г. В. Нестационарная контактная задача с подвижной областью взаимодействия для цилиндрической оболочки с упругим наполнителем и упругого полупространства	142
Саркисян А. А., Саркисян С. О. Некоторые задачи равновесия и свободных колебаний микрополярных упругих гибких пластин и пологих оболочек	143
Сафроненко В. Г., Шутько В. М. Некоторые задачи математического моделирования в виброакустике конструктивно сложных полимерных композитных оболочек вращения	144
Сахарова Л. В. Моделирование массопереноса твердых примесей при высыхании пленок жидкостей в условиях направленного внешнего воздействия	145
Скалюх А. С. Моделирование прочностных свойств магистрального газопровода в зоне восстановительных работ	146
Столяр А. М. Нелинейный анализ поведения тонкостенных конструкций при динамическом и статическом нагружении	147

Сторожев С. В. Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое	148
Сумбатьян М. А., Чебаков М. И. Асимптотические методы в смешанных задачах механики — научное наследие В. М. Александрова	149
Углич П. С. О вынужденных колебаниях поперечно-неоднородного слоя	150
Федоренко А. Г., Шейдаков Д. Н. Особенности потери устойчивости нелинейно-упругих круглых плит с поверхностными напряжениями	151
Фоменко С. И., Александров А. А. Волновые поля в слоистых анизотропных и пьезоэлектрических фононных кристаллах	152
Черпаков А. В. Анализ рабочих характеристик пьезоэлектрического генератора кантелеверного типа с ассиметричной фиксацией присоединенной массы на основе конечно-элементного моделирования . .	153
Швед О. Л. Определяющее уравнение для параметров анизотропии в модели триклинного упругопластического материала	154
Эглит М. Э., Якубенко А. Е., Якубенко Т. А. Уравнения высшего порядка для динамических процессов в микронеоднородных упругих средах	155
Юров В. О. Дисперсионные соотношения для пьезоэлектрического неоднородного волновода	156
Alekseev D. V., Bosiaikov S. M., Shpileuski I. E., Silberschmidt V. V. Formation of microcracks in femur after surgical resection: assessment of ultimate human's own weight	157
Eremeev V. A., Skrzat A., Stachowicz F. On computational evaluation with micropolar elasticity	158
Содержание	159