

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное агентство научных организаций  
Российский национальный комитет по теоретической  
и прикладной механике  
Научный совет РАН по комплексной проблеме «Механика»  
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН  
Южный федеральный университет  
Южный научный центр РАН

# **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

**ТРУДЫ XVIII МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

(Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.)

**В двух томах**

**Том I**

---

Ростов-на-Дону  
Издательство Южного федерального университета  
2016

---

*XVIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды»  
(Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.)  
поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 16-01-20860*

---

**Программный комитет:**

В. Н. Акопян, Х. Альтенбах, Б. Д. Аннин, В. А. Бабешко, В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Н. Д. Вайсфельд, А. О. Ватульян, Р. В. Гольдштейн, И. Г. Горячева, Д. А. Губайдуллин, Н. К. Гупта, М. Ю. Жуков, Л. М. Зубов, Л. А. Игумнов, М. А. Ильгамов, Д. А. Индейцев, Г. И. Канель, Ю. Д. Каплунов, Д. М. Климов, В. И. Колесников, Л. Ю. Коссович, И. И. Кудиш, А. Г. Куликовский, А. М. Липанов, И. И. Липатов, Е. В. Ломакин, А. В. Манжиров, В. П. Матвеев, Б. Г. Миронов, Н. Ф. Морозов, С. М. Мхитарян, В. Е. Панин, В. В. Пухначев, Ю. Н. Радаев, А. В. Саакян, С. Т. Суржиков, Д. В. Тарлаковский, Ю. А. Устинов, И. Федотов, В. М. Фомин

**Организационный комитет:**

А. О. Ватульян, М. Ю. Жуков, М. И. Карякин, В. В. Калинин, А. В. Наседкин, А. В. Попов, В. Г. Сафроненко, А. Н. Соловьев, М. А. Сумбатян, В. Г. Цибулин, М. И. Чебаков, А. С. Юдин

**Ответственный редактор** А. О. Ватульян

**Редакторы:** А. В. Наседкин, А. В. Попов

С586 **Современные проблемы механики сплошной среды** : труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.) : в 2 т. – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2016.  
ISBN 978-5-9275-2116-6  
Т. 1. – 2016. – 264 с.  
ISBN 978-5-9275-2115-9 (Т. 1)

Сборник содержит научные доклады, представленные на XVIII Международную конференцию «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.). Конференция посвящена 80-й годовщине со дня рождения советского и российского учёного-механика, известного специалиста в области смешанных задач теории упругости, заслуженного деятеля науки РФ, лауреата Государственной премии РФ, профессора В. М. Александрова.

В сборнике представлены результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, по устойчивости движений вязкой жидкости, аэрогидродинамике, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности в механике контактных взаимодействий и теории оболочек, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и при их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

ISBN 978-5-9275-2115-9 (Т. 1)  
ISBN 978-5-9275-2116-6

УДК [531/534+539.3/.5](063)  
ББК 22.25я43

© Южный федеральный университет, 2016  
© Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 2016

## Содержание

Абделхафиз М. А., Цибулин В. Г. Численное моделирование анизотропной фильтрационной конвекции и сохранение косимметрии . . . . .	6
Абросимов Н. А., Елесин А. В., Новосельцева Н. А. Численный анализ нелинейного деформирования и прогрессирующего разрушения металлопластиковых цилиндрических оболочек при неосесимметричных импульсных воздействиях . . . . .	11
Агаян К. Л., Григорян Э. Х., Джилавян С. А. Бесконечная пластина, подкреплённая полубесконечным стрингером . . . . .	15
Азоян А. И., Иваночкин П. Г. Плоская контактная задача для тонкой двухслойной упругой полосы при неполном сцеплении слоев с учетом тепловыделения в зоне контакта . . . . .	20
Айзикович С. М., Васильев А. С., Волков С. С. Контактная задача о взаимодействии двух упругих тел с функционально-градиентными покрытиями . . . . .	25
Айзикович С. М., Кренев Л. И. Неизотермическое индентирование непрерывно-неоднородного полупространства . . . . .	30
Акопян В. Н. Осесимметричное напряженное состояние кусочно-однородного слоистого пространства с параллельными монетообразными трещинами . . . . .	35
Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Приложения метода блочного элемента в некоторых областях . . . . .	40
Батищев В. А. Возникновение вращения жидкости при локальном охлаждении свободной границы . . . . .	45
Бауэр С. М., Боденкова Е. О. Моделирование эластотонометрии глаза . . . . .	50
Беликов Н. В., Какурин А. М., Юдин А. С. Развитие конструкций мембранных предохранительных устройств и методов эксперимента . . . . .	55
Белубекян М. В., Саноян Ю. Г. Локализованные колебания в составных свободно опертых пластинах . . . . .	60
Белянкова Т. И., Ворович Е. И., Тукодова О. М. Распространение ПАВ в преднапряженных пьезоэлектрических структурах с неоднородным покрытием . . . . .	65
Богачев И. В., Дударев В. В., Лапина П. А., Недин Р. Д. Идентификация механических характеристик неоднородной вязкоупругой пластины . . . . .	70
Боев Н. В. Прохождение продольной волны через тройкопериодическую систему твердых шаровых включений с возможными отслоениями их от упругой матрицы . . . . .	75
Болнокин В. Е., Пачева М. Н., Сторожев В. И. Сдвиговые волны в звене волновода меандровой структуры с изломом дугообразной формы . . . . .	80
Бормотин К. С. Вариационная формулировка обратных задач многоточечного формообразования панелей в режиме ползучести . . . . .	85
Бочарова О. В., Анджиикович И. Е., Седов А. В. Об одном подходе к обработке сигнала в задачах низкочастотной дефектоскопии . . . . .	90
Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В. Собственные колебания прямоугольных пластин, взаимодействующих с вязкой жидкостью . . . . .	95

Бураго Н. Г. Расчет нестационарного вязко-пластического течения несжимаемой среды Бингама—Ильюшина в плоском конфузоре . . . . .	100
Бураго Н. Г., Никитин И. С. Несимметричные деформации упругих цилиндров переменной толщины . . . . .	105
Бычков П. С., Сайфутдинов Ю. Н. Экспериментальная методика определения технологических искажений в телах сложной формы, создаваемых методом стереолитографии . . . . .	110
Васильев Л. В. О реконструкции параметров закрепления вязкоупругой балки . . . . .	115
Ватульян А. О., Кондратьев В. С. О колебаниях неоднородных пьезокерамических тел . . . . .	120
Ватульян А. О., Плотников Д. К. О некоторых контактных задачах для неоднородных упругих тел . . . . .	125
Вильде М. В. Асимптотическое приближение для цилиндрической поверхностной волны в упругом полупространстве со смешанными граничными условиями на поверхности . . . . .	130
Вильде М. В., Сергеева Н. В. Асимптотический анализ влияния вязкоупругих свойств материала на дисперсию гармонических волн в сплошном цилиндре . . . . .	135
Воронкова Е. Б., Еременко А. А., Корников В. В., Качанов А. Б. Статистический анализ взаимосвязи уровня аббераций высших порядков и сферического компонента рефракции . . . . .	140
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Ерёмин А. А., Мякишева О. А. Определение и контроль изменения характеристик слоистых пластин на основе бесконтактного измерения волновых полей . . . . .	145
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А. Моделирование распространения бегущих волн в структурах с локальными неоднородностями на основе гибридной численно-аналитической схемы . . . . .	150
Говорухин В. Н. Алгоритм анализа динамики распределенных вихревых конфигураций . . . . .	155
Голуб М. В., Дорошенко О. В. Прохождение упругих волн через многослойные волноводы с периодически и стохастически распределёнными планарными круговыми отслоениями . . . . .	160
Гусаков Д. В. Об анализе дисперсионного множества для неоднородного пористоупругого слоя . . . . .	165
Давыдов С. А., Земсков А. В. Анализ особенностей в решении нестационарной задачи термомехано-dиффузии для слоя . . . . .	170
Днепровский В. Г., Карапетьян Г. Я., Салафетов В. С. Исследование возможности применения линии задержки на поверхностных акустических волнах в качестве датчика магнитного поля . . . . .	175
Долгих Т. Ф. Уравнения эллиптического типа для зонального электрофреза . . . . .	179
Дударев В. В., Мнухин Р. М. К определению преднапряжений в электроупругом цилиндре . . . . .	184

Еремеев В. В. Устойчивость трехслойных плит с предварительно напряженными слоями из материалов Трелоара и Муни—Ривлина . . . . .	189
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Васильев А. В. Испарение вращательно-симметричной капли . . . . .	194
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Щитов Ф. А. Построение явного решения для некоторого класса квазилинейных уравнений . . . . .	199
Зайцев А. В., Зубко И. Ю., Кокшаров В. С., Судаков И. А. Моделирование механического поведения уплотнительных элементов из терморасширенного графита для трубопроводной арматуры . . . . .	204
Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Упругое равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых анизотропных тел с центральной и осевой симметрией . . . . .	209
Зеленина А. А., Зубов Л. М. Конечные деформации упругого полого цилиндра с распределенными дислокациями . . . . .	214
Зеленцов В. Б., Митрин Б. И. Параметрическая термоупругая неустойчивость в связанной квазистатической задаче термоупругости о скользящем фрикционном контакте с разогревом от трения . . . . .	219
Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Осесимметричная модель механо диффузии для изотропной плоскости . . . . .	224
Зубов Л. М. Уравнения движения микрополярных упругих оболочек в эйлеровых координатах . . . . .	229
Ильиных Г. В., Сметанников О. Ю. Опыт использования технологии наложения сеток для моделирования работы шестеренного насоса . . . . .	234
Ильиных Г. В., Сметанников О. Ю., Смертина Т. А. Многоуровневая модель исследования фильтрационных свойств армирующего каркаса полимерных композитов . . . . .	239
Казаков К. Е., Курдина С. П. О контакте тел с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярных систем штампов . . . . .	244
Калоеров С. А., Занько А. И., Кошкин А. А. Решение задачи линейной вязкоупругости для однородных и кусочно-однородных плит . . . . .	249
Карякин М. И., Обрезков Л. П., Шубчинская Н. Ю. Равновесие и устойчивость неоднородного нелинейно-упругого цилиндра при растяжении и раздувании . . . . .	254
Pin K. I., Morgulis A. B. Three dimensional modes in the Couette–Taylor problem with radial cross-flow . . . . .	259

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ И СОХРАНЕНИЕ КОСИММЕТРИИ

Абделхафиз М. А.<sup>1,2</sup>, Цибулин В. Г.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Сухагский университет

**1. Введение.** При конвективных течениях в пористой среде модель Дарси используется не только для изотропных сред [1], но и для задач с учетом анизотропии [2, 3]. В [4] при исследовании фильтрационной конвекции для изотропной среды был обнаружен нетривиальный эффект ответвления семейства стационарных состояний от потерявшего устойчивость механического равновесия. Это явление было объяснено при помощи теории косимметрии В. И. Юдовичем [5]. Целью данной работы является анализ возникновения конвекции в анизотропной среде с учетом косимметричных эффектов.

**2. Уравнения конвекции теплопроводной жидкости в пористой анизотропной среде на основе закона Дарси.** Уравнения в безразмерных переменных для плоской задачи о подогреве снизу теплопроводной жидкости в пористой среде с учетом анизотропии тепловых характеристик и проводимости могут быть записаны в виде следующей системы [1, 3]:

$$\nabla p + M \cdot \mathbf{V} + \lambda \theta \gamma = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = L_D \theta - \mathbf{V} \cdot \gamma - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \theta \quad (2)$$

$$L_D = \partial_x (d_{11} \partial_x + d_{12} \partial_y) + \partial_y (d_{21} \partial_x + d_{22} \partial_y) \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  — скорость,  $t$  — время,  $(x, y)$  — декартовы координаты,  $p$  — давление,  $\theta$  — отклонение температуры от линейного профиля,  $M$  — тензор коэффициентов обратной проницаемости  $\mu_{ij}$ ,  $d_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности,  $\gamma = (0, -1)$  — единичный вектор, отвечающий направлению силы тяжести,  $\lambda$  — фильтрационное число Рэлея.

Уравнения (1), (2) дополняются краевыми условиями непротекания и однородности температуры

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = v(x, b, t) = 0 \quad (4)$$

$$\theta(x, 0, t) = \theta(0, y, t) = \theta(a, y, t) = \theta(x, b, t) = 0 \quad (5)$$

Из (1), (2) при помощи замен  $u = \psi_y$ ,  $v = -\psi_x$  получается система относительно функции тока  $\psi$  и температуры  $\theta$

$$0 = \mu_{11} \psi_{yy} - (\mu_{12} + \mu_{21}) \psi_{xy} + \mu_{22} \psi_{xx} + \lambda \theta_x = f_1 \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = L_D \theta - \psi_x - J(\psi, \theta) = f_2, \quad J = \theta_x \psi_y - \theta_y \psi_x \quad (7)$$

Из (4) следуют краевые условия для функции тока

$$\psi(x, 0, t) = \psi(0, y, t) = \psi(a, y, t) = \psi(x, b, t) = 0 \quad (8)$$

При  $\mu_{11} = \mu_{22} = d_{11} = d_{22} = 1$  и  $\mu_{12} = \mu_{21} = d_{12} = d_{21} = 0$  из (6), (7) получаются уравнения, отвечающие изотропной среде. В этом случае задача косимметрична согласно [5], т. е. имеется векторное поле  $C$ , которое ортогонально векторному полю задачи и не обращается в ноль на нетривиальном стационарном решении.

Следующая лемма устанавливает условия, при которых задача (3), (5)–(8) является косимметричной.

**Лемма.** Косимметрией системы (3), (5)–(8) является вектор-функция  $C = (\theta, -\psi)$  при выполнении условий

$$\mu_{11} = d_{22}, \quad \mu_{22} = d_{11}, \quad \mu_{21} = -d_{21}, \quad \mu_{12} = -d_{12} \quad (9)$$

**3. Анализ устойчивости механического равновесия.** При  $\mu_{12} = \mu_{21}$ ,  $d_{12} = d_{21}$  с помощью замены  $\lambda = \kappa^2$ ,  $\psi/\kappa \rightarrow \psi$  из (5)–(8) получается спектральная задача для определения критических значений  $\lambda$  при постоянных  $d_{ij}$

$$0 = \mu_{11}\psi_{yy} - 2\mu_{12}\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \kappa\theta_x \quad (10)$$

$$0 = d_{11}\theta_{xx} + 2d_{12}\theta_{xy} + d_{22}\theta_{yy} - \kappa\psi_x \quad (11)$$

В случае косимметрии ( $\mu_{11} = d_{22}$ ,  $\mu_{22} = d_{11}$ ) и при отсутствии перекрестных диффузионных эффектов ( $\mu_{12} = \mu_{21} = d_{12} = d_{21} = 0$ ) система (10), (11) запишется в виде

$$d_{11}\psi_{xx} + d_{22}\psi_{yy} + \kappa\theta_x = 0 \quad (12)$$

$$d_{11}\theta_{xx} + d_{22}\theta_{yy} - \kappa\psi_x = 0 \quad (13)$$

С помощью введения комплексной переменной  $w = \psi + i\theta$  из (12), (13) получается

$$d_{11}w_{xx} + d_{22}w_{yy} - ikw_x = 0 \quad (14)$$

Таким образом, для критических чисел Рэлея получаются явные выражения

$$\lambda_{kj} = 4\pi^2 d_{11} \left( \frac{d_{11}}{a^2} k^2 + \frac{d_{22}}{b^2} j^2 \right), \quad k, j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Критические значения фильтрационного числа Рэлея  $\lambda$  для изотропного случая следуют из (15) при  $d_{11} = d_{22} = 1$ . В [5] показано, что первое критическое значение  $\lambda_{11}$  двукратно для произвольной области, и при переходе параметра  $\lambda$  через  $\lambda_{11}$  от состояния механического равновесия ответвляется семейство стационарных режимов. Это семейство для плоской задачи фильтрационной конвекции в произвольной односвязной области имеет переменный спектр, что отличает косимметричную ситуацию от симметричной [6]. Каждому переходу  $\lambda$  через последующие критические значения  $\lambda_{kj}$  соответствует бифуркация рождения семейства неустойчивых стационарных режимов.

Собственные числа спектральной задачи (10), (11) являются функциями коэффициентов проницаемости, теплопроводности и геометрических параметров. Вследствие свойства симметрии задачи замена  $x \mapsto (a-x)$  в уравнениях (10), (11) дает следующую систему:

$$\mu_{11}\psi_{yy} + 2\mu_{12}\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} - \kappa\theta_x = 0 \quad (16)$$

$$d_{11}\theta_{xx} - 2d_{12}\theta_{xy} + d_{22}\theta_{yy} + \kappa\psi_x = 0 \quad (17)$$

Из сравнения уравнений (16), (17) и исходной системы (10), (11) для спектральных величин получается следующее соотношение

$$\kappa(\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{22}) = \kappa(d_{22}, -d_{12}, d_{11}, \mu_{22}, -\mu_{12}, \mu_{11}) \quad (18)$$

В частности, если зафиксированы параметры  $\mu_{22} = d_{11}$  и  $\mu_{12} = d_{12} = 0$ , то критическое значение числа Рэлея  $\lambda$  зависит от параметров  $\mu_{11}, d_{22}$ . В этом случае из (18) получается следующее свойство для критических чисел:

$$\lambda(\mu_{11}, d_{22}) = \lambda(d_{22}, \mu_{11}) \quad (19)$$

Следует отметить, что равенство  $\mu_{11} = d_{22}$  отвечает косимметрии задачи (см. (9)). Таким образом, косимметрия соответствует экстремуму для параметра, характеризующего отклонение от косимметричного случая:

$$\lambda(\mu_{11} + \delta, \mu_{11}) = \lambda(\mu_{11}, \mu_{11} + \delta).$$

**4. Результаты расчетов.** С применением метода смещенных сеток [7] были построены аппроксимации задач (1)–(5), (5)–(8). Были проведены расчеты для прямоугольной области с  $a = 1.5, b = 1$ . Результаты вычисления критических чисел при различных значениях коэффициентов обратной проницаемости  $\mu_{ij}$  и теплопроводности  $d_{ij}$  представлены в табл. 1. В последней колонке «+» отмечает выполнение условий косимметрии. Видно, что в этом случае получается парность критических значений. В табл. 2 приведены данные расчета критических чисел  $\lambda_{crit}$  демонстрирующие справедливость формулы (19). В табл. 3 представлены результаты, позволяющие оценить точность вычисления чисел Рэлея в зависимости от размеров сетки. На рис. 1 приведены характерные стационарные режимы (распределения температуры и функция тока) для ряда параметров.

Таблица 1 – Критические числа Рэлея для ряда значений параметров проницаемости и теплопроводности;  $a = 1.5, b = 1, n = 24, m = 16$ .

$\mu_{11}$	$\mu_{22}$	$\mu_{12}$	$\mu_{21}$	$d_{11}$	$d_{22}$	$d_{12}$	$d_{21}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	КОС
1	1	0	0	1	1	0	0	58.08	58.08	115.6	115.6	+
1	1.5	0	0	1	1	0	0	75.54	77.35	159.3	165.3	-
1	1.5	0	0	1.5	1	0	0	100.2	100.2	228.1	228.1	+
1	1.5	0.2	0.2	1.5	1	0	0	99.26	99.27	225.5	225.6	-
1	1.5	0.2	0.2	1.5	1	-0.2	-0.2	97.22	97.22	219.2	219.2	+
1	1.5	-0.2	-0.2	1.5	1	0.2	0.2	97.22	97.22	219.2	219.2	+

Таблица 2 – Критические числа Рэля  $\lambda_{crit}$  при различных  $\mu_{11}$ ,  $d_{22}$ ;  $\mu_{22} = d_{11} = 1.5$ ,  $\mu_{ij} = d_{ij} = 0, i \neq j$ ,

$\mu_{11} \backslash d_{22}$	1	1.5	2	2.5	3
1	100.24	113.31	126.21	138.94	151.50
1.5	113.31	130.68	145.03	159.08	172.51
2	126.21	145.03	161.30	176.10	190.00
2.5	138.94	159.08	176.10	192.09	206.83
3	151.50	172.51	190.00	206.83	223.06

Таблица 3 – Критические числа Рэля при различных  $\mu_{11}$ ,  $n, m$ ;  $d_{22} = 1, \mu_{22} = d_{11} = 1$ ,  $\mu_{ij} = d_{ij} = 0, i \neq j$

$n \times m$	$\mu_{11} = 1.5$				$\mu_{11} = 1.4$			
	$\lambda_{11}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{12}$
$24 \times 16$	78.52	137.0	243.4	268.2	76.44	134.6	240.4	259.3
$36 \times 24$	77.56	132.8	228.5	260.7	75.52	130.5	225.8	252.3
$48 \times 32$	77.22	131.3	223.5	258.0	75.19	129.0	220.9	249.8
$72 \times 48$	76.97	130.3	220.0	256.0	74.95	128.0	217.4	247.9
$36 \times 18$	77.50	132.7	228.5	259.8	75.46	130.4	225.8	251.4
$72 \times 36$	76.95	130.3	220.0	255.8	74.94	128.0	217.4	247.7
(15)	76.76	129.5	217.1	254.4	-	-	-	-

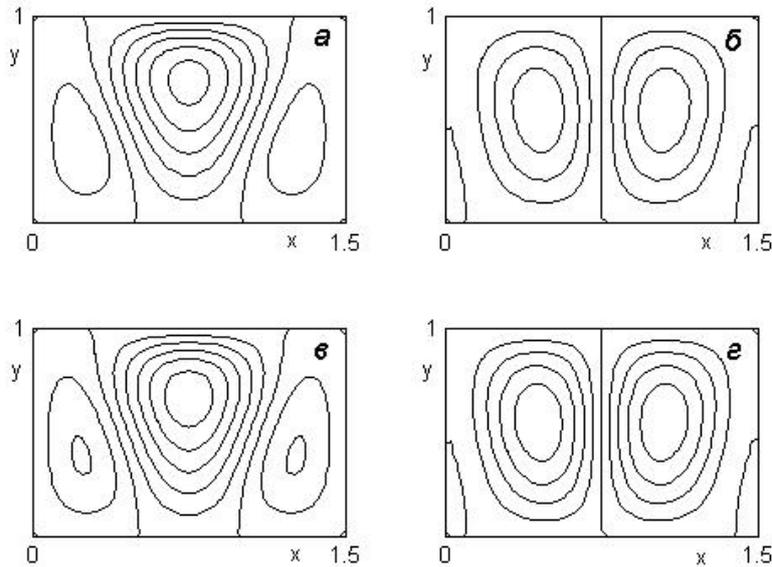


Рисунок 1 – Стационарный режим при  $\lambda = 85$ . Распределение температуры  $\theta$  (а, в), функция тока  $\psi$  (б, г):  $\mu_{11} = 1.5, \mu_{22} = 1, d_{11} = d_{22} = 1$  (а, б);  $\mu_{11} = \mu_{22} = 1, d_{11} = 1, d_{22} = 1.5$  (в, г)

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 14-01-00470 и правительства Египта.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Nield D. A., Bejan A.* Convection in Porous Media. NY.: Springer, 2013.
- [2] *Storesletten L.* Effects of anisotropy on convection in horizontal and inclined porous layers // In: Ingham, D.B., et al. (eds.) Emerging Technologies and Techniques in Porous Med. 2004. Kluwer, Dordrecht P. 285–306.
- [3] *Tyvand A. P., Storesletten L.* Onset of convection in an anisotropic porous layer with vertical principal axes // Transp Porous Med. 2015. № 108. P. 581–593.
- [4] *Любимов Д. В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
- [5] *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 142–148.
- [6] *Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. Vol. 5. № 2. P. 402–411.
- [7] *Karasözen B., Tsybulin V. G.* Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection // Comput. Phys. Comm., 2005. Vol. 167. P. 203–213.

**Abdelhafez M. A., Tsybulin V. G.** *Numerical simulation of anisotropic filtration convection and preservation of cosymmetry.* We study convection of the incompressible heat-conducting fluid in a porous rectangle with anisotropy in thermal characteristics and permeability. Darcy–Boussinesq equations are considered in the planar case both in primitive variables and for the temperature and stream function. It is found that this problem belongs to the class of cosymmetric systems under some additional conditions on parameters. We develop explicit formulas for the critical Rayleigh numbers corresponding to the loss of stability of the state of rest. The finite-difference approximation on spatial coordinates is derived to preserve cosymmetry conditions. Appearance of the family of steady states is analyzed numerically. Computations of convective flows are presented as well as investigation of the case of cosymmetry destruction when only isolated regimes are formed.

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛОПЛАСТИКОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

**Абросимов Н. А., Елесин А. В., Новосельцева Н. А.**

*НИИ механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород*

Разработана методика численного анализа динамической прочности двухслойных металлопластиковых цилиндрических оболочек при осесимметричных и неосесимметричных взрывных нагружениях. Кинематическая модель деформирования слоистого пакета основана на неклассической и прикладной теориях оболочек. Геометрические зависимости построены на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости. Связь между тензорами напряжений и деформаций в композитном макрослое установлена на основе закона Гука для ортотропного тела с учетом деградации жесткостных характеристик многослойного пакета вследствие локального разрушения некоторых элементарных слоев композита. Физические соотношения в металлическом слое сформулированы в рамках дифференциальной теории пластичности. Энергетически согласованная разрешающая система уравнений динамики металлопластиковых цилиндрических оболочек получена в результате минимизации функционала полной энергии оболочки как трехмерного тела. Численный метод решения сформулированной начально-краевой задачи основан на явной вариационно-разностной схеме. Приведены результаты достоверности рассматриваемой методики и анализа предельной деформируемости и прочности как однородных базальто- и стеклопластиковых цилиндрических оболочек, так и металлопластиковых.

## **1. Постановка и метод решения задачи**

Объектами исследований являлись как однородные стеклопластиковые и базальто-пластиковые цилиндрические оболочки, образованные намоткой чередующихся двойных спиральных и кольцевых слоев при соотношении толщин 1:1, так и неоднородные, полученные спиральной перекрестной намоткой однонаправленного стеклопластика или базальтопластика (по схеме армирования однородных оболочек) на стальную цилиндрическую оправку из малоуглеродистой стали. Кинематическая модель деформирования неоднородного многослойного пакета базируется на неклассической теории оболочек, для этого компоненты вектора перемещений аппроксимируются конечными рядами по толщине многослойного пакета [1]. Формулировка геометрических зависимостей базируется на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости в криволинейных координатах [2]. Связь между тензорами напряжений и деформаций в однородном композитном макрослое устанавливается на основе закона Гука для ортотропного тела в сочетании с теорией эффективных модулей [1]. Определяющие соотношения в изотропном стальном слое оболочки формулируются на основе

дифференциальной теории пластичности с линейным упрочнением [1]. Энергетически согласованная система уравнений движения металлопластиковой оболочки строится на основе принципа возможных перемещений [3, 4] посредством минимизации функционала полной энергии оболочки. Полученные уравнения являются достаточно универсальными, так как позволяют описывать нелинейные нестационарные процессы неосесимметричной деформации, оценивать предельную деформируемость и прочность двухслойных металлопластиковых цилиндрических оболочек, геометрические и структурные параметры которых изменяются в широких пределах. Численный метод решения сформулированной задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме [1]. Расчеты проводились на суперкомпьютере «Лобачевский».

## 2. Результаты исследования

Адекватность предлагаемой методики анализа предельной деформируемости и прочности металлопластиковых цилиндрических оболочек рассматривалась на задаче их динамического деформирования под действием импульса давления, имитирующего подрыв в центре оболочки сферического заряда взрывчатого вещества (ВВ). Типичные осциллограммы окружных деформаций в центральном сечении на внешней поверхности неразрушенных композитных и металлопластиковых оболочек, изготовленных на основе стекловолокна и базальтовых волокон и нагруженных зарядом ВВ массой  $m = 23,8$  приведены на рис. 1.

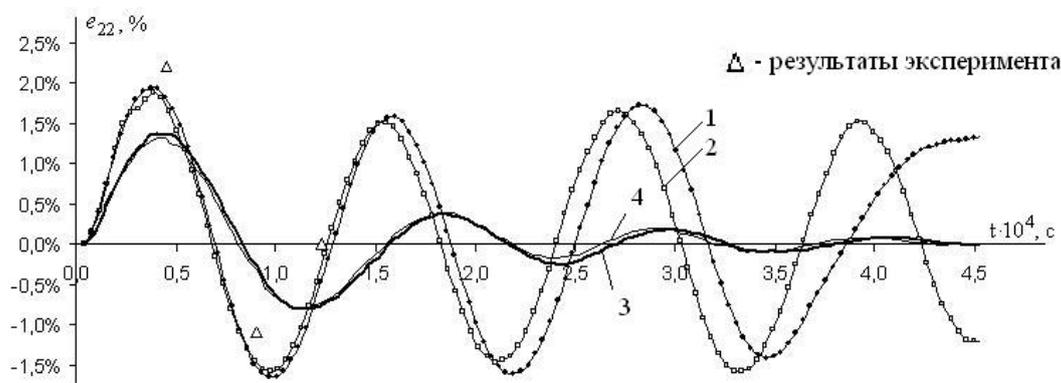


Рисунок 1 — Зависимости окружных деформаций от времени в центральном сечении на внешней поверхности оболочки (1 — численные расчеты однородных стеклопластиковых оболочек; 2 — численные расчеты однородных базальтопластиковых оболочек; 3 — численные расчеты металлопластиковых оболочек на основе стекловолокна; 4 — численные расчеты металлопластиковых оболочек на основе базальтовых волокон)

Видно, что однородные стеклопластиковые и базальтопластиковые оболочки ведут себя примерно одинаково, а наличие стального подкрепляющего пластически деформирующегося слоя приводит к быстрому затуханию процесса колебаний в центральной зоне оболочки и, как следствие, к существенному понижению уровня окружных деформаций и тем самым способствует повышению несущей способности металлопластиковых оболочек. Из анализа результатов следует, что существенного повышения предельной деформации и удельной прочности в случае как стеклопластиковых, так и базальтопластиковых оболочек с близкими схемами армирования удастся достичь, если внутрь композитной оболочки вставлена

стальная. При этом оболочки с кольцевой структурой армирования композитного макрослоя разрушаются при меньших значениях предельных деформаций по сравнению со структурой состоящей из кольцевых и спиральных элементарных слоев. Кроме того установлено, что при динамическом разрушении в начальной фазе растяжения стеклопластиковых и базальтопластиковых оболочек наблюдается существенное увеличение их предельных деформаций по сравнению с образцами из однонаправленного базальтопластика при их квазистатическом растяжении, которая составляет около 2,4% [5].

При оценке взрывостойкости цилиндрических оболочек одна из основных задач заключается в выборе такой структуры армирования, которая обеспечивала бы максимальное значение удельной взрывной нагрузки  $m^* = \frac{m}{m_0} m_0$  — масса оболочки).

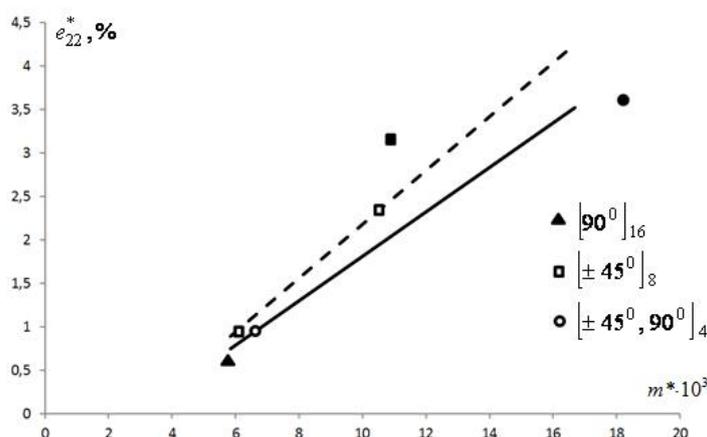


Рисунок 2 – Зависимости максимальных окружных деформаций от величины удельной нагрузки для некоторых структур армирования

На рис. 2 для разных структур армирования показаны зависимости максимальных окружных деформаций от удельной взрывной нагрузки  $m^*$ . Видно достаточно хорошее соответствие экспериментальных данных и численных расчетов при  $m^* \leq 0,1$ , а затем по мере увеличения удельной взрывной нагрузки наблюдается некоторое расхождение численных и экспериментальных результатов, что, по-видимому, связано с нелинейным поведением материала оболочки. При неосесимметричном нагружении происходит локализация выпучины и очага разрушения, что приводит к большим значениям предельных окружных деформаций по сравнению с осесимметричным нагружением.

### Заключение

Предложена расчетная модель позволяющая с удовлетворительной точностью описывать процессы прогрессирующего разрушения импульсно нагруженных металло-пластиковых цилиндрических оболочек с разными структурами армирования. Разработанный метод компьютерного моделирования динамической прочности неоднородных слоистых элементов конструкций может быть использован при проектировании и оценке предельной несущей способности силовых элементов защитных оболочечных конструкций.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки (проект № 2014/134 2226), грантов Российского фонда фундаментальных исследований (№ 15-08-04268, № 16-08-01124), гранта РНФ (проект № 16-19-10237 — получены результаты анализа прочности стеклопластиковых оболочек).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абросимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
- [2] Шаповалов Л. А. Об учете поперечного обжатия в уравнениях нелинейной динамики оболочек // Известия РАН МТТ. 1997. № 3. С. 156–168.
- [3] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 512 с.
- [4] Абросимов Н. А., Елесин А. В. Численный анализ влияния структуры армирования на динамическое поведение композитных цилиндрических оболочек при взрывном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2012. № 74. С. 78–83.
- [5] Русак В. Н., Федоренко А. Г., Сырунин М. А. Предельная деформируемость и прочность базальтопластиковых оболочек при внутреннем взрывном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т.43. № 1. С. 186–195.

**Abrosimov N. A., Elesin A. V., Novoseltceva N. A.** *Numerical analysis of nonlinear deformation and progressive collapse metalplastic cylindrical shells under non-axisymmetric impulse excitations.* The developed method of numerical analysis of the dynamic strength of two-layer metal-plastic cylindrical shells under axisymmetric and non-axisymmetric explosive loading. Kinematic model of deformation of the layered package is based on and applied nonclassical theories of shells. Geometric dependencies are built on ratios of quadratic the simplest variant of the nonlinear theory of elasticity. The connection between the tensors of stresses and deformations in composite Makrolon established on the basis of Hooke's law for orthotropic bodies taking into account the degradation of the stiffness characteristics of the multilayer package due to the local destruction of some of the elementary layers of the composite. Physical ratio in the metal layer are formulated in the framework of the incremental theory of plasticity. Energetically coordinated the resolving system of equations of dynamics of plastic cylindrical shells resulting from the minimization of the functional of total energy of the shell as a three-dimensional body. Numerical method for the solution of the formulated initial-boundary value problem based on an explicit variational difference scheme. The results of the reliability of the technique and analysis of the limiting deformability and strength of smooth basalt and fiberglass cylindrical shells and metalplastic.

# БЕСКОНЕЧНАЯ ПЛАСТИНА, ПОДКРЕПЛЕННАЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРОМ

**Агаян К. Л., Григорян Э. Х., Джилаван С. А.**

*Институт механики НАН Республики Армения, Ереван  
Ереванский государственный университет*

В предлагаемом кратком сообщении вновь рассматривается известная контактная задача для бесконечной упругой однородной пластины, усиленной полубесконечным стрингером. Решение задачи при помощи преобразования Фурье сведено к функционально-разностному уравнению и построено ее замкнутое решение. При помощи построенного решения и анализа функционального уравнения, позволяющего определить структуру аналитического продолжения преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения, предлагается подход, позволяющий вычислить коэффициенты асимптотического разложения контактных напряжений практически любого порядка в конечном виде в характерных участках контактного взаимодействия.

Контактными задачами о передаче нагрузки от тонкостенных элементов к массивным телам, в виде классических и неклассических областей теории упругости, занимались многие исследователи. Первая работа, в которой рассмотрена бесконечная пластина с присоединенным по всей длине бесконечно длинным ребром (стрингером), нагруженным продольной сосредоточенной силой, принадлежит Е. Мелану [1]. Обобщение задачи Мелана в случае полубесконечного стрингера сделано Е. Бюэлом [2], В. Койтером [3] и Е. Брауном [4], когда пластина деформируется под действием силы, приложенной на конце стрингера. В работах [2] и [4] с помощью методов функции комплексного переменного задача сведена к бесконечной системе алгебраических уравнений, регулярность которых не исследована. В. Койтеру удалось с помощью преобразования Меллина обсуждаемую задачу свести к решению функционально-разностного уравнения и построить ее оригинальное решение в замкнутом виде. В дальнейшем, в связи с тем, что задача допускала замкнутое решение не только с помощью преобразования Меллина, подобные исследования, основанные на [3], проводились в работах [5–9].

Пусть упругий лист в виде тонкой бесконечной пластины толщиной  $h$ , отнесенный к правосторонней декартовой системе координат  $Oxy$ , подкреплён ребром жесткости (стрингером) полубесконечной длины. Стрингер малой толщины  $h_s$  присоединен к бесконечной пластине вдоль оси  $Ox$  на полубесконечном интервале  $0 < x < \infty$ . Полученная упругая система пластина-стрингер деформируется сосредоточенной растягивающей силой  $P$ , приложенной к концу стрингера в точке  $x = 0$ . Как и в работах [1, 3], относительно стрингера принимается модель контакта по линии, т. е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния. При этих предположениях решение задачи, т. е. определение контактных напряжений, возникающих

под стрингером, при помощи комплексного преобразования Фурье можно свести к следующему однородному функционально-разностному уравнению относительно образа Фурье неизвестного контактного напряжения  $\bar{\tau}_1(\alpha)$

$$\alpha \cdot \operatorname{cth} \alpha \cdot \bar{\tau}_1(\alpha) - \lambda \bar{\tau}_1(\alpha - i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -0.5 \quad (1)$$

с условием равновесия  $\bar{\tau}(-i) = P$ , где

$$\bar{\tau}_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(u) e^{i\alpha u} du \quad \tau_1(u) = \tau(e^u), \quad \lambda = \frac{UEh}{(3\nu)(1+\nu)E_s F_s} \quad (2)$$

$F_s = h_s d_s$ ,  $E_s$  — модуль упругости стрингера,  $E$  — модуль упругости и  $\nu$  — коэффициент Пуассона пластины соответственно,  $\tau(x)$  — подлежащее определению неизвестное контактное напряжение. Решение разностного уравнения (2) с условием (3) построено методом Койтера в рамках преобразования Фурье и имеет вид

$$\bar{\tau}(\alpha) = -iP\lambda^{1-i\alpha} \Gamma(i\alpha) sh^{-1}(\pi\alpha/2) \cdot Y(\alpha), \quad -2 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2 \quad (3)$$

где  $\Gamma(z)$  — Гамма-функция Эйлера,  $Y(\alpha)$  — решение уравнения

$$Y(\alpha - i)/Y(\alpha) = \operatorname{ch} \pi\alpha / (\operatorname{ch} \pi\alpha - 1), \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2 \quad (4)$$

при условии  $Y(-i) = 1$ . Для  $Y(\alpha)$  получено следующее, регулярное в полосе  $-5/2 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ , представление:

$$Y(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp \left[ -\frac{i}{4} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha + 3i/2) dx}{x \operatorname{ch}(x/4) \operatorname{ch}^2(x/2)} \right], \quad (5)$$

Тогда, подставляя (5) в (6), и обращая преобразование Фурье, получим решение задачи в виде

$$\tau_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \bar{\tau}_1(\alpha) e^{-i\alpha u} d\alpha \quad -2 < c < -\frac{1}{2} \quad (6)$$

Здесь для исследования решения (6), т. е. определения асимптотических представлений для контактных напряжений при  $x \rightarrow +0$  и  $x \rightarrow \infty$  предлагается другой подход. Эти формулы будут получены непосредственно из (6). Но для этого необходимо определить полюсы продолжения функции  $\bar{\tau}_1(\alpha)$  вне полосы  $-2 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$  и вычислить соответствующие вычеты в этих полюсах. В полуплоскости  $\operatorname{Im} \alpha > -2$  функция  $\bar{\tau}_1(\alpha)$  регулярна в полосе  $-2 < \operatorname{Im} \alpha < -1/2$ . Из уравнения (1) следует, что точка  $\alpha = -i/2$  может быть простым полюсом для АП  $\bar{\tau}_1(\alpha)$ , так как  $\operatorname{cth}(-i/2) = 0$ . Теперь, так как  $\bar{\tau}_1(-i)$  конечная величина, то  $\bar{\tau}_1(0)$  также конечна. Тогда опять из уравнения (1) следует, что точка  $\alpha = i/2$  может быть полюсом второго порядка для АП  $\bar{\tau}_1(\alpha)$ . Продолжая, можно убедиться, что АП  $\bar{\tau}_1(\alpha)$  в точках  $\alpha = (n - 1/2)i$  может иметь полюсы  $(n + 1)$ -го порядка ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что возможные полюсы АП  $\bar{\tau}_1(\alpha)$  в полуплоскости  $\operatorname{Im} \alpha < -1/2$  могут быть в точках  $\alpha_n = -(n + 1)i$  с кратностью  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) соответственно.

Перейдем к определению асимптотической формулы при  $x \rightarrow \infty$  ( $u \rightarrow \infty$ ). Не вдаваясь в подробности, заметим, что при помощи теоремы Коши о вычетах из (6) можно получить конечную формулу для контактных напряжений  $\tau(x)$ . Ограничиваясь первыми двумя полюсами  $\bar{\tau}_1(\alpha)$ , получим следующее представление

$$\tau(x) = -i \left[ B_{-1}^{(-2i)} x^{-2} + B_{-1}^{(-3)} x^{-3} - i B_{-2}^{(-2i)} x^{-3} \ln x \right] + O \left[ x^{-4} (1 + \ln x + \ln^2 x) \right], \quad x \rightarrow \infty \quad (7)$$

где  $B_{-n}^{(-ki)}$  — вычет АП  $\bar{\tau}_1(\alpha)$  в точках  $\alpha_k = -ki$  ( $k = 2, 3$ ). Для определения этих коэффициентов обратимся снова к уравнениям (2), (4) и представлению (5). Так как  $Y(-i) = 1$ , то из (4) при  $\alpha \rightarrow -i$  получим, что  $Y(-2i) = 1/2$ . Тогда

$$B_{-1}^{(-2i)} = [(\alpha + 2i) \bar{\tau}_1(\alpha)]|_{\alpha=-2i} = 2Pi(\lambda\pi)^{-1} \Gamma(2) = iP(\lambda\pi)^{-1}, \quad (8)$$

Точка  $\alpha \rightarrow -3i$  является двукратным полюсом АП  $\bar{\tau}_1(\alpha)$ . Тогда вычеты  $B_{-1}^{(-3i)}$  и  $B_{-2}^{(-3i)}$  из (7) можно представить в виде

$$B_{-2}^{(-3i)} = [(\alpha + 2i) \bar{\tau}_1(\alpha - i)]|_{\alpha=-2i}; \quad B_{-1}^{(-3i)} = \frac{d}{d\alpha} [(\alpha + 2i) \bar{\tau}_1(\alpha - i)]|_{\alpha=-2i} \quad (9)$$

а уравнение (1) в виде

$$\alpha \operatorname{ch} \pi\alpha \frac{\alpha + 2i}{\operatorname{sh} \pi\alpha} (\alpha + 2i) \bar{\tau}_1(\alpha) + \lambda(\alpha + 2i)^2 \bar{\tau}_1(\alpha - i) = 0, \quad (10)$$

Перейдя в (10) к пределу  $\alpha \rightarrow -2i$  и учитывая (8) и (9), получим:

$$B_{-2}^{(-3i)} = 2i(\lambda\pi)^{-1} B_{-1}^{(-2i)} = -2P(\lambda\pi)^{-2}, \quad (11)$$

Для определения  $B_{-1}^{(-3i)}$  представим (3) в виде

$$(\alpha + 3i)^2 \bar{\tau}_1(\alpha) = -iP\lambda^{1-i\alpha} \Gamma(i\alpha) \operatorname{sh}^{-1}(\pi\alpha/2) Z_2(\alpha), \quad (12)$$

где

$$Z_2(\alpha) = (\alpha + 3i) Y(\alpha), \quad (13)$$

Дифференцируя (12) и перейдя к пределу  $\alpha \rightarrow -3i$ , с учетом (9), для  $B_{-1}^{(-3i)}$  получим

$$B_{-1}^{(-3i)} = \lambda P \left\{ -i \frac{\Gamma(i\alpha) \ln \lambda}{\lambda^{i\alpha} \operatorname{sh} \frac{\pi\alpha}{2}} Z_2(\alpha) + \lambda^{-i\alpha} \left[ \frac{\Gamma(i\alpha)}{i \operatorname{sh} \frac{\pi\alpha}{2}} Z_2'(\alpha) + Z_2(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\Gamma(i\alpha)}{i \operatorname{sh} \frac{\pi\alpha}{2}} \right) \right] \right\} \Big|_{\alpha=-3i}, \quad (14)$$

Имея в виду, что  $(\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z))$  — известная пси-функция)

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\Gamma(i\alpha)}{i \operatorname{sh} \frac{\pi\alpha}{2}} \right) \Big|_{\alpha=-3i} = -i\Gamma(3) \psi(3),$$

Из (14) получим

$$B_{-1}^{(-3i)} = \lambda^{-2} P \Gamma(3) [i (\ln \lambda - \psi(3) Z_2(-3i) - Z^1(-3i))], \quad (15)$$

Обратимся теперь к уравнению (4), представив его в виде

$$\frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{ch} \pi \alpha - 1} (\alpha + 2i)^2 Y(\alpha) = (\alpha + 2i)^2 Y(\alpha - i), \quad (16)$$

Перейдя здесь к пределу  $\alpha \rightarrow -2i$ , получим

$$Z_2(-3i) = 2\pi^{-2} Y(-2i) = \pi^{-2}, \quad (17)$$

Теперь, дифференцируя (16) и перейдя опять к пределу  $\alpha \rightarrow -2i$ , получим

$$Z'_2(-3i) = Y(-2i) \left[ \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{(\alpha + 2i)^2 \operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{ch} \pi \alpha - 1} \right) \right] \Big|_{\alpha=-2i} + \frac{2}{\pi^2} Y'(-2i), \quad (18)$$

Имея в виду, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow -2i} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{(\alpha + 2i) \operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{ch} \pi \alpha - 1} \right) = 0$$

из (18) получим

$$Z'_2(-3i) = 2\pi^{-2} Y'(-2i)$$

Определяя значение  $Y'(-2i)$ , с помощью (4) окончательно получим:

$$Z'_2(-3i) = -\pi^2, \quad (19)$$

и далее, имея в виду (17), из (15) будем иметь

$$B_{-1}^{(-3i)} = i P \Gamma(3) (\lambda \pi)^2 [\ln \lambda - \psi(3) - 1] \quad (20)$$

Теперь, подставляя полученные выражения коэффициентов — вычетов из (8), (11), (20) в (7), для контактных напряжений получим следующую асимптотическую формулу для больших  $X = \lambda x$

$$\tau(x) = \frac{\lambda P}{\pi} \left[ \frac{1}{X^2} + \frac{2}{\pi} (\ln \lambda - \psi(3) + 1) \frac{1}{X^3} + \frac{2}{\pi X^3} \ln X \right] + O[x^{-4} (1 + \ln x + \ln^2 x)]$$

Последнее точно совпадает с результатом из [3, 7].

Аналогичным способом могут быть вычислены коэффициенты асимптотического разложения контактного напряжения при  $x \rightarrow 0$ .

**Заключение.** Предлагаемый подход позволяет получить соотношения типа своеобразных рекуррентных формул, связывающих коэффициенты асимптотического разложения контактных напряжений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen // *Ingr. Arch.* 1932. Bd. 3. № 2, P. 123–129.
- [2] *Buell E.L.* On the distribution of plane stress in a semi-infinite plate with partially stiffened edge // *J. Math. and Phys.* 1948. Vol. 26., № 4, P. 223–233.
- [3] *Koiter W.T.* On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // *Quart. J. Mech. and Math.* 1955. Vol. 8., № 2, P. 164–178.
- [4] *Brown E.H.* The diffusion of load from a stiffener into an infinite sheet // *Proc. Roy. Soc. London. A.* 1957. № 239. P. 296–310.
- [5] *Каландия А.И.* О напряженном состоянии в пластинах, усиленных ребрами жесткости // *ПММ.* 1969. Т. 33. № 3, С. 538–543.
- [6] *Воробьев В.Л., Попов Г.Я.* Контактная задача для упругой полуплоскости и сцепленного с ней полубесконечного упругого стержня // *ПММ.* 1970. Т. 34, № 2, С. 354–359.
- [7] *Bentham J.P.*, On the Diffusion Problem of a Load from a Semi-infinite Stringer Bounder to a Sheet // *Contrib. Theory Aircraft. Struct. Delft*, 1972, P. 117–134.
- [8] *Александров В.М., Сметанин В.И., Соболев Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М: Наука. 1993. 234 с.
- [9] *Агаян К.Л., Григорян Э.Х.* О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости // *Изв. НАН РА Механика.* 2008. Т. 61. № 4. С. 5–19.

**Aghayan K.L., Grigoryan E. Jilavyan C.A.** *Infinite plate reinforced by a semi-infinite stringer*. The well-known contact problem for an infinite homogeneous elastic plate, reinforced by a semi-infinite stringer, is considered. Using Fourier transform, solution of the problem is reduced to a functional-difference equation solution for which is built in closed form. With the help of built solutions and analysis of the functional equation that allows to determine the structure of the analytic continuation of the Fourier transform of unknown contact stress, we propose an approach that allows to calculate coefficients of the asymptotic expansion of contact stresses of almost any order in closed form in specific areas of contact interaction.

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ ТОНКОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ  
ПРИ НЕПОЛНОМ СЦЕПЛЕНИИ СЛОЕВ  
С УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ В ЗОНЕ КОНТАКТА

**Азоян А. И., Иваночкин П. Г.**

*Ростовский государственный университет путей сообщения*

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости о действии твердого штампа на упругий шероховатый двойной слой. В результате фрикционного взаимодействия штампа со слоем в зоне контакта выделяется тепло. Требуется определить: распределение контактного давления и температуры в полосе, состоящей из двух разнородных материалов. Задача сводится к совместному решению уравнений Дюгамеля—Неймана и уравнения теплопроводности. В силу предположения о малости толщины полосы построено вырожденное асимптотическое решение задачи. На границе раздела двухслойной упругой полосы рассматривается условие неполного сцепления.

Рассматривается плоская контактная задача о действии твердого штампа шириной  $2a$  на двухслойную упругую полосу толщины  $h_1 + h_2$  (где  $h_1 + h_2 \ll 2a$ ). Штмп прижимается вертикальной силой  $\vec{P}$  и движется вдоль своей образующей со скоростью  $\vec{v}_0$ . В результате этого под штампом возникают силы трения  $\tau_{zy}(x)$ . Часть работы этих сил  $A_1 = n_1 A$  идет на образование тепловых потоков, направленных, соответственно, вглубь слоя и штампа. Силы трения  $\tau_{zy}(x)$  связаны с контактным давлением  $q(x) = \sigma_y(x)$ ,  $|x| \leq a$  законом трения Кулона [1]:

$$\tau_{zy}(x) = fq(x),$$

где  $f$  — коэффициент кулоновского трения, зависящий от степени шероховатости поверхностей и физико-механических условий.

На границе раздела двухслойной упругой полосы рассматривается условие неполного сцепления, предложенное в работе [2]:

$$\tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = \frac{1}{k}(u_1 - u_2), \quad (y = h_2). \quad (1)$$

Условие (1) допускает относительное проскальзывание на границе раздела двойного слоя. Изменение параметра  $k$  отражает степень сцепления слоев: при  $k = 0$  соотношение (1) совпадает с условиями полного сцепления на границе раздела:

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_y^1 = \sigma_y^2, \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2,$$

а при  $k \rightarrow \infty$  — соответствует случаю, когда верхний слой лежит без трения на нижнем:

$$u_1 = u_2 = 0, \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_y^1 = \sigma_y^2, \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = 0,$$

где  $\sigma_y^i, \tau_{xy}^i$  — нормальные и касательные напряжения;  $u_i, v_i$  — горизонтальные и вертикальные перемещения.

Тепловой поток, выделяющийся в области контакта, равен  $Q = fVq(x)$ , где  $q(x)$  — контактное давление. Можно ввести в рассмотрение постоянный коэффициент  $\chi$  разделения общего теплового потока между штампом и слоем от распределенного по области контакта теплового источника. Тогда на поверхности штампа

$$\frac{\partial T_1}{\partial y_1} = \eta_1 q(x), \quad \eta_1 = \frac{\chi V f q^*}{\lambda_s}, \quad q^* = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} q(\zeta) d\zeta,$$

а на поверхности слоя

$$\frac{\partial T_1}{\partial y_1} = \eta_2 q(x), \quad \eta_2 = \frac{(1 - \chi) V f q(x)}{\lambda_1},$$

где  $T_1$  — температура верхнего слоя;  $\lambda_s$  и  $\lambda_1$  — соответственно коэффициенты теплопроводности штампа и верхнего слоя.

При переходе через границу слоев температура и тепловой поток непрерывны. На верхней поверхности вне штампа и на нижней поверхности задан теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Требуется определить: изменение контактного давления и распределение температуры в полосе, состоящей из двух разнородных материалов. Рассматриваемая задача сводится к совместному решению уравнений Дюгамеля—Неймана и уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} + \mu_i \Delta u_i + K_i \alpha_i T_i = 0, \\ (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial \Theta_i}{\partial y_i} + \mu_i \Delta v_i + K_i \alpha_i T_i = 0, & (i = 1, 2) \\ \frac{\partial^2 T_i}{\partial \tilde{x}_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial \tilde{y}_i^2} = 0, \end{cases}$$

где  $K_i = 2\mu_i + 3\lambda_i = E_i/(1 - 2\nu_i)$  — утроенный модуль объемного сжатия;  $\alpha_i$  — коэффициент теплоотдачи;  $T_i$  — температура деформированного состояния;  $\Theta_i$  — объемное расширение.

Индекс 1 относится к верхнему слою, 2 — к нижнему. Запишем уравнения в перемещениях (уравнений Ламе с температурными членами) и уравнения теплопроводности для двухслойной полосы [3]:

$$\begin{cases} \frac{2(1 - \nu_i)}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_i^2} + \frac{1}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial y_i} + \frac{2\alpha_T(1 + \nu_i)}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial T_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{2(1 - \nu_i)}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \frac{1}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial y_i} + \frac{2\alpha_T(1 + \nu_i)}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial T_i}{\partial y_i} = 0, & (i = 1, 2) \\ \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y_i^2} = 0. \end{cases}$$

В силу предположения о малости толщины полосы построим вырожденное асимптотическое решение задачи. Введем в рассмотрение безразмерные геометрические параметры:

$$\varepsilon_i = \frac{h_i}{a}, \quad (i = 1, 2)$$

которые являются малым и, в окончательных уравнениях, устремим их к нулю. Введем новые переменные  $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$  по формулам:

$$dx_i = 2ad\tilde{x}_i, \quad dy_i = -h_id\tilde{y}_i, \quad (i = 1, 2)$$

и перейдем в уравнениях и граничных условиях к этим переменным. В результате простых преобразований получим упрощенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tilde{y}_i^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v_i}{\partial \tilde{y}_i^2} - \gamma_i \frac{\partial T_i}{\partial \tilde{y}_i} = 0, \\ \frac{\partial^2 T_i}{\partial \tilde{y}_i^2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\gamma_i = \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \alpha_T h_i, \quad (i = 1, 2)$$

с двумя сериями граничных условий:

$$1. \quad x \subset [-a; +a] \quad (3)$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad (\tilde{y}_2 = 0)$$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad (\tilde{y}_1 = 0; \tilde{y}_2 = 1)$$

$$v_1 = -\delta, \quad (\tilde{y}_1 = 1)$$

$$\tau_{xy}^1 = \frac{\mu_1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}_1} = \frac{1}{k} (u_1 - u_2), \quad (\tilde{y}_1 = 0)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 h_2 \left[ \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}_1} \left( 1 + \frac{1 - 2\nu_1}{\nu_1} \right) + \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \alpha_1 T_1 h_1 \right] = \\ = \lambda_2 h_1 \left[ \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{y}_2} \left( 1 + \frac{1 - 2\nu_2}{\nu_2} \right) + \frac{1 + \nu_2}{\nu_2} \alpha_2 T_2 h_2 \right], \quad (\tilde{y}_1 = 0; \tilde{y}_2 = 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}_1} = \frac{\mu_2}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{y}_2} = \frac{1}{k} (u_1 - u_2), \quad (\tilde{y}_1 = 0; \tilde{y}_2 = 1)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tilde{y}_1} = -\eta h_1 P(x), \quad (\tilde{y}_1 = 1)$$

$$\lambda_1 h_2 \frac{\partial T_1}{\partial \tilde{y}_1} = \lambda_2 h_1 \frac{\partial T_2}{\partial \tilde{y}_2}, \quad T_1 = T_2, \quad (\tilde{y}_1 = 0; \tilde{y}_2 = 1)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tilde{y}_2} - \alpha_2 h_2 (T_2 - T_2^*) = 0, \quad (\tilde{y}_2 = 0).$$

$$2. \quad x \in (-\infty; -a) \cup (+a; +\infty) \quad (4)$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad (\tilde{y}_2 = 0)$$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad (\tilde{y}_1 = 0; \tilde{y}_2 = 1)$$

$$\tau_{xy}^1 = \frac{\mu_1}{h_1} \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{y}_1} = \frac{1}{k} (u_1 - u_2), \quad (\tilde{y}_1 = 1)$$

$$\frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}_1} + \frac{1 + \nu_1}{1 - 2\nu_1} \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tilde{y}_1} = 0, \quad (\tilde{y}_1 = 1)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 h_2 \left[ \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}_1} \left( 1 + \frac{1 - 2\nu_1}{\nu_1} \right) + \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \alpha_1 T_1 h_1 \right] = \\ = \lambda_2 h_1 \left[ \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{y}_2} \left( 1 + \frac{1 - 2\nu_2}{\nu_2} \right) + \frac{1 + \nu_2}{\nu_2} \alpha_2 T_2 h_2 \right], \quad (\tilde{y}_1 = 0; \tilde{y}_2 = 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}_1} = \frac{\mu_2}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{y}_2} = \frac{1}{k} (u_1 - u_2), \quad (\tilde{y}_1 = 0; \tilde{y}_2 = 1)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tilde{y}_1} + \alpha_1 h_1 (T_1 - T_1^*) = 0, \quad (\tilde{y}_1 = 1)$$

$$\lambda_1 h_2 \frac{\partial T_1}{\partial \tilde{y}_1} = \lambda_2 h_1 \frac{\partial T_2}{\partial \tilde{y}_2}, \quad T_1 = T_2, \quad (\tilde{y}_1 = 0; \tilde{y}_2 = 1)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tilde{y}_2} - \alpha_2 h_2 (T_2 - T_2^*) = 0, \quad (\tilde{y}_2 = 1).$$

Решение задачи (2), (3) и (4) приводит к результатам:

$$u_1 = 0, u_2 = 0,$$

$$T_1 = c_1 y_1 + c_2, T_2 = a_1 y_2 + a_2,$$

$$v_1 = -\frac{1}{2} \gamma_1 y_1^2 c_1 + c_5 y_1 + c_6, v_2 = -\frac{1}{2} \gamma_2 y_2^2 a_1 + a_5 y_2 + a_6.$$

Такая постановка плоской контактной задачи для двухслойной полосы при учете тепловыделения в зоне контакта позволит определить распределение температуры в полосе. Решение системы уравнений (2) с граничными условиями (3) и (4) позволяет записать температуру верхнего слоя полосы в виде

$$T_1(xy) = \eta_2 q(x)(h_2 - y) + \eta_2 \lambda_1 (\alpha_2 h_2 + \lambda_2) (\alpha_2 \lambda_2)^{(-1)} q(x) + \Phi(x), \quad x \leq a$$

где  $\Phi(x)$  — распределение температуры на нижней границе полосы.

Выражая из полученного решения термоупругой контактной задачи упругие перемещения в зоне контакта получим, что в случае малой толщины полосы она работает по типу основания Фусса—Винклера. Полученный результат позволяет построить решение поставленной задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Воронин Н. А. Закономерности контактного взаимодействия твердых топокомпози- тов с жестким сферическим штампом // Трение, износ и смазка. 2006. № 4(29). С. 1–10.
- [2] Торская Е. В. Анализ влияния трения на сопряженное состояние тел с покрытия- ми // Трение и износ. 2002. № 2. С. 130–138.
- [3] Колесников В. И. Двухслойные композиции триботехнического назначения для тя- желонагруженных узлов трения: монография. Ростов н/Д: РГУПС, 2009. 124 с.

**Azojan A. I., Ivanochkin P. G.** *The plane contact problem for a thin two-layer elastic bands with incomplete coupling layers based on heat in the contact area.* The plane contact problem of elasticity theory on the effects of a solid punch on the elastic rough double layer. As a result of frictional engagement with the die nip layer generates heat. Required: contact pressure and temperature distribution in the band consisting of two different materials. The problem reduces to the simultaneous solution of Duhamel–Neumann’s equations and the heat equation. By the assumption of the smallness of the thickness of the strip built degenerate asymptotic solution of the problem. At the interface of the two-layer elastic band is considered a condition of incomplete coupling.

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Айзикович С. М.<sup>1</sup>, Васильев А. С.<sup>1,2</sup>, Волков С. С.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Рассматривается осесимметричная контактная задача о нормальном взаимодействии двух гладких упругих тел сферической формы с функционально градиентными покрытиями. Упругие модули в покрытии каждого тела изменяются с глубиной по произвольным независимым друг от друга законам. В зоне сопряжения покрытия и подложки может быть задан скачок величины упругих модулей, что позволяет моделировать жесткие и мягкие покрытия. Математическая постановка контактной задачи сформулирована в рамках линейной теории упругости. Методами интегральных преобразований задача сведена к решению парного интегрального уравнения, для решения которого использован двусторонний асимптотический метод. Решение задачи получено в аналитической форме и эффективно в широком диапазоне изменений геометрических и физических параметров задачи. Проанализировано влияние различных параметров задачи, таких как отношение толщин покрытий, отношение толщины одного из покрытий к радиусу зоны контакта, отношение эффективных упругих модулей в зоне сопряжения покрытия с подложкой и т. д., на функции податливости и распределение напряжений в зоне контакта.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим контакт двух упругих тел сферической формы с покрытиями, первоначально касающихся друг друга в точке, в которой поместим начало цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ , ось  $z$  проходит через центр этих тел. Осуществим деформацию тел, приложив к ним на бесконечности сдвигивающие усилия. Будем предполагать, что равнодействующие этих усилий лежат на оси  $z$  и под действием приложенных сил первое тело получит перемещение  $\delta_1$ , второе —  $\delta_2$ . Здесь и далее для определенности будем считать, что индекс 1 соответствует нижнему телу, а индекс 2 — верхнему. Смещения точек первого и второго тела —  $w_1$  и  $w_2$  — в области контакта удовлетворяют уравнению

$$w_1 - w_2 = -r^2/(2R_1) - r^2/(2R_2) + \delta_1 + \delta_2, \quad (1)$$

Предполагаем, что радиусы кривизны обоих тел ( $R_1$  и  $R_2$ ) велики по сравнению с размерами зоны контакта, поэтому при определении перемещений  $w_1$ ,  $w_2$  каждое из этих тел заменим полупространством. Оба тела имеют неоднородные покрытия толщинами  $H_1$  и  $H_2$ , упругие модули в которых изменяются по глубине по следующим законам

$$E_i, \nu_i = \begin{cases} \left\{ E_i^{(c)}(z), \nu_i^{(c)}(z) \right\}, & 0 \leq z(-1)^{i-1} \leq H_i; \\ \left\{ E_i^{(s)}, \nu_i^{(s)} = \text{const} \right\}, & H_i < z(-1)^{i-1} < \infty, \end{cases} \quad (2)$$

где  $E_i^{(c)}(z)$  и  $\nu_i^{(c)}(z)$  — произвольные непрерывные дифференцируемые функции. Здесь и далее индекс  $(c)$  соответствует покрытию, индекс  $(s)$  — подложке. В зоне сопряжения покрытия с подложкой выполнены условия непрерывности напряжений и смещений:

$$z = (-1)^{i-1} H_i : \quad \tau_{rz}^{(c)} = \tau_{rz}^{(s)}, \sigma_z^{(c)} = \sigma_z^{(s)}, w^{(c)} = w^{(s)}, u^{(c)} = u^{(s)}, \quad i = 1, 2.$$

Вне зоны контакта поверхность обоих тел свободна от напряжений, считаем, что силы трения между контактирующими телами отсутствуют:

$$z = 0 : \quad \tau_{rz} = 0, \quad r > 0; \quad \sigma_z = 0, \quad r > a. \quad (3)$$

Необходимо определить распределение нормальных напряжений в зоне контакта тел. На границе зоны контакта выполнено условие ограниченности контактных напряжений:

$$\sigma_z|_{z=0} = -p_0(r), \quad r \leq a, \quad p_0(a) = 0. \quad (4)$$

**2. Вывод интегрального уравнения задачи и его решение.** Для сведения поставленной задачи к интегральному уравнению используем интегральное преобразование Ханкеля:

$$w_i(r, z) = \int_0^\infty W_i(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad 0 < (-1)^{i-1} z < \infty, \quad p_0(r) = \int_0^\infty \bar{p}_0(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1), получим:

$$\int_0^\infty (W_1(\gamma, 0) - W_2(\gamma, 0)) \gamma J_0(\gamma r) d\gamma = \delta_1 + \delta_2 - r^2/(2R_1) - r^2/(2R_2), \quad r \leq a. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции:

$$W_i^*(\gamma, z) = (-1)^{i-1} 0,5 E_i'(0) \gamma W_i(\gamma, z) / \bar{p}_0(\gamma), \quad 0 < (-1)^{i-1} z < \infty, \quad (7)$$

где  $E_i' = E_i / (1 - \nu_i^2)$ ,  $i = 1, 2$  — эффективные упругие модули первого и второго тела. Отметим, что функции  $W_1^*(\gamma, z)$  и  $W_2^*(\gamma, z)$  положительны.

Используем следующие обозначения

$$\begin{aligned} R_r^{-1} &= R_1^{-1} + R_2^{-1}, \quad E'^{-1} = E_1'^{-1} + E_2'^{-1}, \quad C = \delta_1 + \delta_2, \quad \mu = H_2/H_1, \quad \gamma' = \gamma H_1, \\ a_{Hc} &= \left[ \frac{3PR_r}{4E'(0)} \right]^{1/3}, \quad p_{Hc} = \frac{3P}{2\pi a_{Hc}^2}, \quad r_c = \frac{r}{a_{Hc}}, \quad \rho_c = \frac{\rho}{a_{Hc}}, \quad \rho_{0c} = \frac{p_0}{p_{Hc}}, \quad C' = \frac{2R_r}{a_{Hc}^2}, \quad a_c = \frac{a}{a_{Hc}}, \\ L(\gamma') &= \tilde{W}(\gamma'/H_1) = E'(0) \left[ W_1^*(\gamma'/H_1, 0) E_1'^{-1}(0) + W_2^*(\gamma'/H_2\mu, 0) E_2'^{-1}(0) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Перепишем (6) с учетом сделанных замен переменных:

$$r_c^2 + \frac{8a_{Hc}}{\pi H_1} \int_0^{a_c} p_{0c}(\rho_c) \rho_c \int_0^\infty L(\gamma') J_0\left(\frac{a_{Hc}}{H_1} \gamma' r_c\right) J_0\left(\frac{a_{Hc}}{H_1} \gamma' \rho_c\right) d\gamma' d\rho_c = C', \quad r_c \leq a_c. \quad (9)$$

Здесь  $L(\gamma')$  — трансформанта ядра интегрального уравнения. Функции  $\tilde{L}_i(\gamma') = W_i^*(\gamma'/H_i, 0)$  являются функциями податливости для первого и второго тела соответственно (они совпадают с трансформантами ядер для случая внедрения жесткого штампа в первое или второе тело), их значения определяются численно из

решения краевой двухточечной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1]. Функции  $\tilde{L}_i(\gamma')$  не зависят от толщин покрытий первого и второго тела, однако функция  $L(\gamma')$  зависит от отношения толщин  $\mu = H_2/H_1$ . Кроме того, трансформанта ядра  $L(\gamma')$  зависит от безразмерных упругих параметров задачи:

$$\beta_i(z) = E_i^{(c)}(z)/E_i^{(s)}, \nu_{i,rel}(z) = v_i^{(c)}(z)/v_i^{(s)}, E_{2/1} = E_2^{(s)}/E_1^{(s)}, \nu_{2/1} = \nu_2^{(s)}/\nu_1^{(s)}.$$

Сведем (9) к парному интегральному уравнению, используя при этом следующие обозначения:

$$r'_c = \frac{r_c}{a_c}, \rho'_c = \frac{\rho_c}{a_c}, \gamma'' = \frac{a_{Hc}a_c}{H_1}\gamma', \lambda_c = \frac{H_1}{a_{Hc}}, p'_{0c}(\rho) = p_{0c}(\rho'a_c), \delta = \frac{C'}{a_c}.$$

Опуская знаки «штрих» и «два штриха» в (9), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{p}_{0c}(\gamma)L(\lambda_c a_c^{-1}\gamma)J_0(\gamma r_c)d\gamma &= \frac{\pi}{8}(\delta - a_c r_c^2), \quad r_c \leq 1, \\ \int_0^\infty \gamma \bar{p}_{0c}(\gamma)J_0(\gamma r_c)d\gamma &= 0, \quad r_c > 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Аппроксимируем  $L(\alpha)$  произведением дробно-квадратичных функций:

$$L(\alpha) \approx L_N(\alpha) = \prod_{i=1}^N (\alpha^2 + A_i^2)/(\alpha^2 + B_i^2), \quad A_i, B_i \in C. \tag{11}$$

Решение приближенного уравнения, полученного из (10) заменой функции  $L(\alpha)$  на её аппроксимацию  $L_N(\alpha)$ , может быть построено двухсторонне асимптотически точным методом аналогично работе [2]:

$$p_{0c}(r_c) = \frac{a_c}{L_N(0)} \left[ \sqrt{1 - r_c^2} - \sum_{i=1}^N \frac{C_i^*}{\text{sh}(A_i \lambda_c^{-1} a_c)} \int_{r_c}^1 \frac{\text{sh}(A_i \lambda_c^{-1} a_c t) dt}{\sqrt{t^2 - r_c^2}} \right] \tag{12}$$

Параметры  $C_i^*$  определяются из решения следующей СЛАУ:

$$\sum_{i=1}^N C_i^* \left[ \frac{B_k \frac{\text{ch}(A_i \lambda_c^{-1} a_c)}{\text{sh}(A_i \lambda_c^{-1} a_c)} + A_i}{A_i (B_k^2 - A_i^2)} - \frac{\lambda_c}{a_c B_k A_i^2} \right] = \frac{1}{B_k \lambda_c} \left[ \frac{a_c}{3} - \frac{L_N(0)}{3a_c^2} + \frac{(B_k a_c + \lambda_c)\lambda_c}{a_c B_k^2} \right] \tag{13}$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ . Неизвестная зона контакта  $a_c$  определяется из уравнения [2]:

$$a_c + 3 \sum_{i=1}^N C_i^* \cdot \frac{\lambda_c}{A_i} \left[ \frac{\lambda_c}{A_i a_c} - \frac{\text{ch}(A_i \lambda_c^{-1} a_c)}{\text{sh}(A_i \lambda_c^{-1} a_c)} \right] = \frac{L_N(0)}{a_c^2} \tag{14}$$

**3. Численные результаты.** Для анализа влияния различных параметров задачи на процесс упругого деформирования рассмотрим ряд модельных законов неоднородности. Будем считать, что коэффициент Пуассона в обоих телах не изменяется с глубиной и равен 0,3, а обе подложки выполнены из одного материала, т. е. их значения модулей Юнга совпадают. Рассмотрим три типа покрытий:

- 1) мягкие покрытия:  $E_i^{(c)}(0) = E_i^{(s)}/2$ ,
- 2) жесткие покрытия:  $E_i^{(c)}(0) = 2E_i^{(s)}$ ,
- 3) верхнее покрытие мягче подложки в 2 раза, нижнее — жестче:  $E_1^{(c)}(0) = 2E_1^{(s)}$ ,  $E_2^{(c)}(0) = E_2^{(s)}/2$ .

Пусть модули Юнга в обоих покрытиях изменяются с глубиной линейно. На примере таких покрытий проанализируем влияние геометрического параметра задачи  $\mu = H_2/H_1$  на функцию податливости задачи. По поведению функции податливости можно предсказать, каким будет распределение контактных напряжений для различных значений относительной толщины одного из покрытий (значения параметра  $\lambda_c$ ).

На рисунке 1 видно, как значение параметра  $\mu$  влияет на функцию податливости (трансформанту ядра интегрального уравнения (10)). Значение  $\mu = 1$  соответствует случаю, когда оба покрытия имеют одну толщину, что в данном случае означает, что оба тела одинаковы и из формулы (8) следует, что функция податливости совпадает со случаем внедрения жесткого штампа в одно из таких тел. Увеличение или уменьшение значения параметра  $\mu$  ведет к сдвигу графика функции податливости влево или вправо вдоль оси  $u$  соответственно. Кроме того, при существенном отличии значения  $\mu$  от единицы наблюдается возникновение «ступеньки» на графике функции в области средних значений аргумента. Это является следствием того, что функция податливости задачи представляет собой линейную комбинацию функций податливости, соответствующих каждому телу. Функции податливости, соответствующие жестким покрытиям, расположены выше прямой  $L = 1$ , а соответствующие мягким — ниже. Более необычная картинка наблюдается в случае 3, когда одно из покрытий мягкое, другое — жесткое (см. рисунок 2). В этом случае функция податливости имеет точку максимума для  $\mu > 1$  и точку минимума для  $\mu < 1$ . При этом, чем больше отличие толщин покрытий, тем больше максимум (минимум) удаляется от единицы.

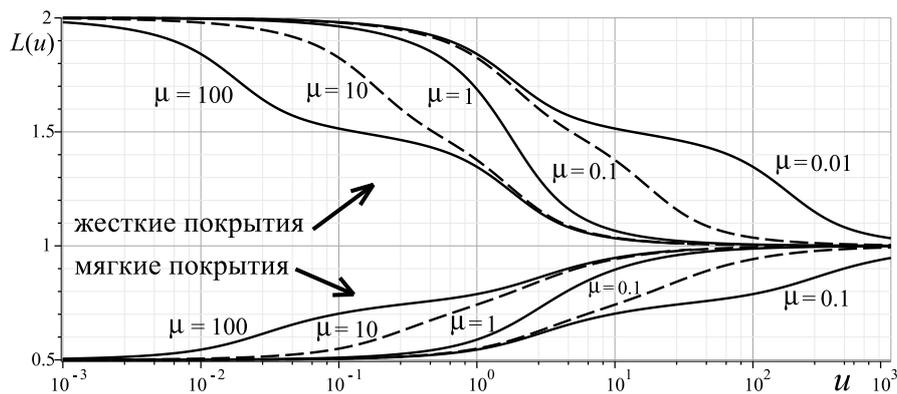


Рисунок 1 – Функции податливости (трансформанты ядер), соответствующие случаям 1 и 2 при значениях параметра  $\mu = 0,01, 0,1, 1, 10, 100$

Наиболее необычные графики функции податливости (а следовательно, и распределения контактных напряжений, функций жесткости и др.) по сравнению с задачей о внедрении жесткого штампа в одно из тел, являются графики, соответ-

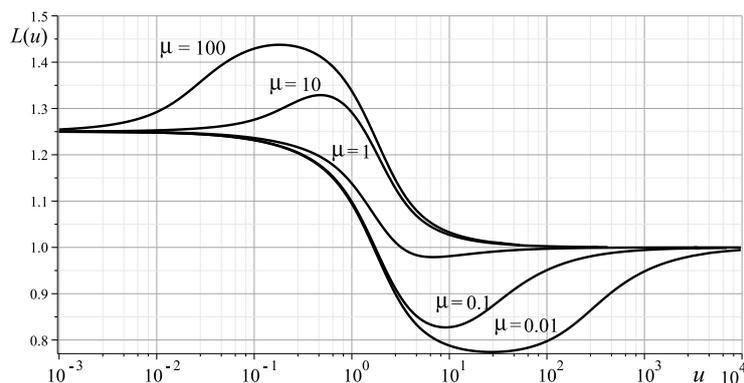


Рисунок 2 – Функции податливости (трансформанты ядер), соответствующие случаю 3 при значениях параметра  $\mu = 0,01, 0,1, 1, 10, 100$

ствующие случаям существенного отличия толщин двух покрытий, т. е.  $\mu$  сильно отличается от 1. Именно эти случаи представляют наибольший интерес для дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда — грант № 15-19-10056 и гранта Президента Российской Федерации МК-5342.2016.1.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Айзикович С. М., Александров В. М. Осесимметрическая задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство // Известия АН СССР. МТТ. 1984. Т. 39, № 2. С. 73–82.
- [2] Aizikovich S. M., Alexandrov V. M., Kalker J. J., Krenev L. I., Trubchik I. S. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties // Int. J. Solids Struct. 2002. Vol. 39, № 10. P. 2745–2772.

**Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Volkov S. S.** *Contact problem on interaction of two elastic bodies with functionally graded coatings.* Axisymmetric contact problem on normal interaction of two elastic spherical solids with functionally-graded coatings is considered. Elastic moduli in the coating of each solid vary with depth according to arbitrary independent functions. Values of elastic moduli in the coating-substrate interface can differ by more than two orders of magnitude, that allows to model the soft and hard coatings. Mathematical formulation of the problem is made in terms of linear theory of elasticity. Using integral transformation technique the problem is reduced to the solution of a dual integral equation, that is solved using the bilateral asymptotic method. The solution of the problem is constructed in analytical form and effective in wide range of values of geometrical and physical parameters of the problem. Influence of parameters of the problem such as ratio of the coatings thicknesses, ratio of the thickness of one coating to the radius of the contact area, ratio of effective elastic modulus in the interface of the coating-substrate, etc. on the compliance functions and the distribution of the contact normal stresses are analyzed.

# НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ИНДЕНТИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

**Айзикович С. М., Кренев Л. И.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассмотрена осесимметричная статическая задача о тепловом и механическом воздействии сферического штампа на неоднородный слой на упругом основании. Термомеханические характеристики слоя изменяются по его глубине по произвольным заданным законам. Для решения граничной задачи используется аппарат интегральных преобразований Ханкеля. С помощью асимптотического метода строится численно-аналитическое приближенное решение, определяется величина соответствующего теплового потока и смещения поверхности полупространства, распределение контактных напряжений и смещение штампа при известной зоне контакта.

**Введение** Для прогнозирования работы и создания покрытий оптимальной структуры становится актуальной задача моделирования поведения материалов с функционально-градиентными покрытиями.

Исследованиями в области воздействия температуры на функционально-градиентные материалы занимаются многие исследователи. Так влияние параметров неоднородности в ФГМ во время термоупругого установившегося контакта исследуется в статье Sakti Pada Barik [1], а Yong Hoop Jang в работе [2], приводит численное решение для установившегося термоупругого контакта для задачи типа Герца.

Заметим, что исследования проблемы термоупругого контакта, с учетом независимого изменения в покрытии по произвольному закону термомеханических характеристик в известных литературных источниках отсутствуют. В настоящей работе рассматривается осесимметричная статическая задача термоупругости для функционально-градиентного полупространства, термомеханические характеристики которого непрерывно изменяются в приповерхностном слое. В работе используются методы, развитые ранее для решения смешанных задач теории упругости задач для функционально-градиентных материалов и материалов с покрытиями, описанные в работах [3, 4].

## **1. Постановка задачи о неизотермическом воздействии параболического штампа на непрерывно-неоднородное полупространство.**

Рассмотрим полупространство  $\Omega$ , термомеханические характеристики которого непрерывно меняются с глубиной в пределах прилегающего к поверхности слоя толщины  $H$ , а затем стабилизируются и остаются постоянными. С полупространством свяжем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ . При этом полагаем, что  $0 \leq r < \infty$ , а  $z < 0$ . Обозначим через  $u, v, w$  смещения вдоль осей  $r, \varphi, z$ , а через  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$  — радиальное, угловое, нормальное и тангенциальные напряжения соответственно. Кроме того, введем обозначения для температуры —  $T$ , коэффициента теплопроводности  $\lambda_T(z)$ , коэффициента линейного расширения

$\alpha_T(z)$ . В ненапряженном состоянии температуру полупространства примем равной  $T_0$  и будем анализировать разность температур  $\theta = T - T_0$ .

На поверхность  $\Gamma$  неоднородного полупространства  $\Omega$  воздействует жесткий сферический штамп, радиус кривизны  $R$  которого велик по сравнению с зоной контакта, в этом случае его можно аппроксимировать параболической поверхностью. Под действием силы индентор перемещается на расстояние  $\delta$  вдоль оси  $z$ . Считаем, что поверхность штампа описывается квадратичной функцией  $z = \phi_1(r) = -\delta + (1/2R)r^2$  в окрестности начальной точки контакта. Вне индентора поверхность полупространства не нагружена. На контактной площадке  $0 \leq r < a$  поддерживается постоянная температура отличающаяся от температуры полупространства.

Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид:

$$z = 0, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad \begin{cases} w = -\delta + \frac{1}{2R}r^2, \quad \theta = \theta_0 & r \leq a \\ \sigma_z = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, & r > a \end{cases}$$

На границе сцепления неоднородного слоя с однородным полупространством, при  $z = -H$  в силу непрерывности, должны выполняться условия сопряжения по смещениям, их производным, температуре и тепловому потоку.

На бесконечности при  $(r, -z) \rightarrow \infty$  смещения, деформации и напряжения исчезают. Значения разности температур и теплового потока при этом также стремятся к нулю. Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом и величину теплового потока в пределах контактной зоны:

$$\begin{aligned} \sigma_z^C |_{z=0} &= -p(r), \quad r \leq a \\ \lambda_T \frac{\partial \theta}{\partial z} |_{z=0} &= \beta(r), \quad r \leq a \end{aligned}$$

**2. Общее решение системы интегральных уравнений задачи о воздействии горячего штампа на термоупругое неоднородное полупространство.**

При построении системы интегральных уравнений осесимметричной смешанной задачи статической термоупругости воспользуемся результатами [4], выражающими зависимость величины смещения  $w$  и температуры  $\theta$  через неизвестное распределение контактного давления  $p(r)$  и теплового потока через контактную зону  $\beta(r) = \lambda_T \frac{\partial \theta(r,z)}{\partial z} |_{z=0}$ .

$$\left\{ \begin{cases} \int_0^a p(\rho) J_0(\gamma \rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_1^3(\gamma, z) J_0(\gamma r) d\gamma + \\ + \int_0^a \beta(\rho) J_0(\gamma \rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^3(\gamma, z) J_0(\gamma r) d\gamma = -\delta + \frac{1}{2R}r^2, & r \leq a \\ \int_0^a p(\rho) J_0(\gamma \rho) \rho d\rho \int_0^\infty J_0(\gamma r) \gamma d\gamma = 0, & r > a \\ \int_0^a \beta(\rho) J_0(\gamma \rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^5(\gamma, z) J_0(\gamma r) d\gamma = \theta_0 & r \leq a \\ \int_0^a \beta(\rho) J_0(\gamma \rho) \rho d\rho \int_0^\infty J_0(\gamma r) \gamma d\gamma = 0 & r > a \end{cases} \right. \quad (1)$$

В рассматриваемой нами задаче упругие характеристики не зависят от температуры, поэтому решение системы (1) разобьем на два этапа.

На первом определим величину теплового потока и распределение температуры в неоднородном полупространстве.

После этого решим смешанную задачу о внедрении гладкого кругового штампа с плоской подошвой в неоднородное полупространство, деформированное воздействием найденного нами теплового потока через контактную зону.

Используя численно-аналитический метод, изложенный в [3], получим выражение для теплового потока

$$\beta(r) = \frac{\lambda_T(0)\theta}{\pi} \left\{ \frac{1}{L_3^5(0)} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + C \left[ \frac{\text{ch } A\lambda^{-1}}{\sqrt{1-r^2}} - A\lambda^{-1} \int_r^1 \frac{\text{sh } A\lambda^{-1}t dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right] \right\}$$

Мы рассматриваем установившийся процесс подвода тепла к полупространству при отсутствии его отвода через поверхность, поэтому форма поверхности описывается логарифмической функцией и, для определенности мы будем фиксировать некоторое значение  $r_0$  на оси  $r$ , при котором  $w_t(r_0, 0) = 0$ .

Второй этап сводится к решению парного интегрального уравнения:

$$\begin{cases} \int_0^\infty P(\gamma)L(\lambda\gamma)J_0(r\gamma)d\gamma = M(0)(-\delta + \frac{1}{2R}r^2 + \theta f(r)), & r \leq 1 \\ \int_0^\infty P(\gamma)J_0(r\gamma)\gamma d\gamma = 0, & r > 1 \end{cases}$$

Функция  $f(r)$  описывает деформацию поверхности под действием источника тепла с постоянной температурой. Ее можно представить в виде ряда Фурье—Бесселя:

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k r) \quad (2)$$

Смещение штампа  $\delta$  определим из условия отсутствия напряжений на границе зоны контакта  $p(1, 0) = 0$

$$\delta = \left( \frac{1 + 2S_1}{R} \right) + L_N(0) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \mu_k L_N^{-1}(\lambda\mu_k) + L_N(0) \sum_{i=1}^N C_i \text{ch}(A_i\lambda^{-1}) \quad (3)$$

С учетом условия (3) выражение для контактных напряжений примет вид:

$$p(r) = \frac{2}{\pi} M(0) \left\{ L_N^{-1}(0) \frac{-2}{R} \sqrt{1-r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k L_N^{-1}(\lambda\mu_k) \mu_k \int_r^1 \frac{\sin t\mu_k dt}{\sqrt{t^2-r^2}} - \sum_{i=1}^N C_i A_i \lambda^{-1} \int_r^1 \frac{\text{sh}(A_i\lambda^{-1}t)}{\sqrt{t^2-r^2}} dt \right\}, \quad 0 \leq r \leq 1$$

Постоянные  $C_i$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N C_i A_i \lambda^{-1} \frac{B_k \lambda^{-1} \text{sh } A_i \lambda^{-1} + A_i \lambda^{-1} \text{ch } A_i \lambda^{-1}}{B_k^2 \lambda^{-2} - A_i^2 \lambda^{-2}} = \\ = -\frac{1}{L_N(0)} \frac{1}{2R} \frac{B_k \lambda^{-1} + 1}{B_k^2 \lambda^{-2}} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \frac{B_k \lambda^{-1} \cos \mu_j - \mu_j \sin \mu_j}{L_N(\lambda\mu_j)(\mu_j^2 + B_k^2)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Значение вдавливающей силы  $P$  определяется из условия равновесия для индентора

$$P = \frac{4M(0)}{\lambda^2} \left\{ -\frac{2}{3R} L_N^{-1}(0) + \sum_{i=1}^N C_i (A_i^{-1} \lambda \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1}) - \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1})) + \sum_{k=1}^{\infty} L_N^{-1}(\lambda \mu_k) b_k (\mu_k^{-1} \sin \mu_k - \cos \mu_k) \right\} \quad (4)$$

При индентировании материалов с покрытием можно определить модуль упругости, актуальный для некоторой зоны контакта. Эту характеристику будем называть эффективным модулем или функцией жесткости неоднородного основания. При внедрении сферического штампа ее вид следующий:

$$S(a) = \frac{3P}{4a\delta} \frac{1}{1 - \nu^2}, \quad (5)$$

где  $a$  радиус зоны контакта,  $\delta$  перемещение индентора.

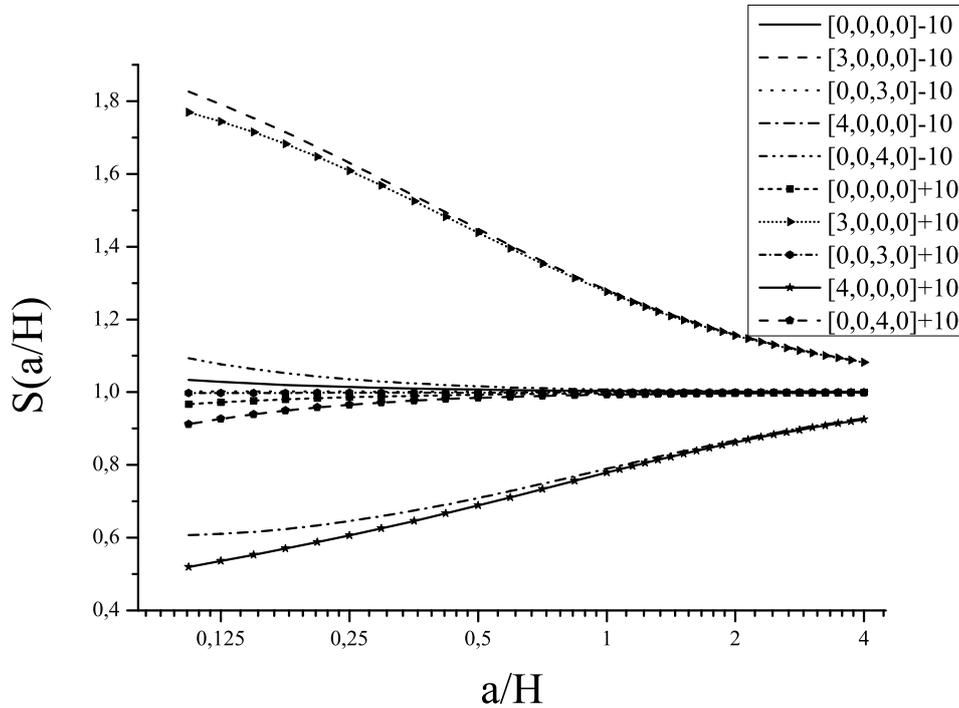


Рисунок 1 – Зависимость эффективного модуля основания от термомеханических характеристик и разности температуры штампа и полупространства

На рисунке 1 изображена зависимость функции жесткости от разности температуры штампа и основания. Обозначения кривых формируются следующим образом. Последовательно описывается характер изменения модуля Юнга, коэффициента Пуассона, коэффициента теплопроводности и коэффициента линейного расширения в покрытии, при этом предполагается, что: 0 значение характеристики в покрытии не отличаются от соответствующих значений в подложке. 3 значение характеристики на поверхности в 2 раза превышает значение в подложке и линейно убывает по всей толщине покрытия до значения в подложке 4 значение

характеристики на поверхности в 2 раза меньше значения в подложке и линейно возрастает по всей толщине покрытия до значения в подложке

Таким образом обозначение  $(0_0_0_0)$  соответствует однородному термоупругому полупространству. Кроме того, справа от скобок присутствует значение разности температур штампа и образца.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №15-07-05208, 16-07-00929 А, 15-38-20790, 15-07-05820, 14-08-92003, 14-07-00705, 14-07-00343).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Sakti Pada Barik, M. Kanoria, P.K. Chaudhuri*. Steady state thermoelastic contact problem in a functionally graded material // International Journal of Engineering Science. 2008. № 46. P. 775–789.
- [2] *Yong Hoon Jang, Hanbum Cho, J.R. Barber*. The thermoelastic Hertzian contact problem // International Journal of Solids and Structures. 2009. № 46. P. 4073–4078.
- [3] *Aizikovich, S. M.* Asymptotic solutions of contact problems of elasticity theory for media non-homogeneous with depth // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1982. № 46. P. 116–124.
- [4] *Айзикович С. М., Александров В. М., Васильев А. С., Кренив Л. И., Трубочник И. С.* Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. М.: Физматлит, 2011. 206 с.

**Aizikovich S. M., Krenev L. I.** *Non-isothermal indentation of continuously inhomogeneous half-space*. In the present paper the problem of the static axisymmetric thermal and mechanical action of the spherical stamp on an inhomogeneous layer on an elastic foundation is considered. The thermomechanical characteristics of the layer vary by its depth according the arbitrary defined laws. For the solution of the boundary problem the apparatus of Hankel integral transform is used. Using the asymptotic method the numerically-analytical approximate solution is constructed, the value of the corresponding heat flow and the surface displacement are defined as well as the distribution of contact stresses and displacements of the stamp at the known contact area.

# ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО СЛОИСТОГО ПРОСТРАНСТВА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ МОНЕТООБРАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

**Акопян В. Н.**

*Институт механики НАН Республики Армения, Ереван*

Изучению осесимметричного напряжённого состояния упругого составного пространства с межфазными дискообразными дефектами посвящено много работ. Из них отметим работы [1–5], которые непосредственно связаны с настоящей статьёй.

Здесь рассмотрено осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однородного слоистого пространства, полученного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоев одинаковой толщины, которое на плоскостях соединения слоев содержит периодическую систему круговых дискообразных параллельных трещин. Методом интегрального преобразования Ханкеля построены разрывные решения уравнений осесимметричной теории упругости для рассматриваемой задачи, на основе которых записана определяющая система интегральных уравнений с ядрами типа Вебера—Сони́на. При помощи операторов вращения определяющая система уравнений сведена к сингулярному интегральному уравнению второго рода, решение которого построено методом механических квадратур. Получена простая формула для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений.

**1. Постановка задачи и вывод разрывных решений.** Рассмотрим осесимметричное напряженное состояние кусочно-однородного упругого пространства, полученного при помощи соединения двух разнородных слоев толщины  $2h$  с коэффициентами Ламе  $\lambda_1, \mu_1$  и  $\lambda_2, \mu_2$  соответственно, отнесенного к цилиндрической системе координат  $Or\varphi z$ , на плоскостях стыка разнородных слоев  $z = 2nh$  ( $n \in Z$ ) которых имеется периодическая система одинаковых круговых дискообразных межфазных параллельных трещин радиуса  $a$ . Будем считать, что пространство деформируется под воздействием одинаковых нормальных нагрузок  $P_0(r)$ , действующих на берега трещин. Вследствие чего все срединные плоскости  $z = (2n + 1)h$  ( $n \in Z$ ) разнородных слоев являются плоскостями симметрии. Исходя из этого, поставленную задачу можно сформулировать как задачу для двухкомпонентного слоя, занимающего в пространстве область  $\Omega \{|z| \leq h; 0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ , на внешних плоскостях  $z = \pm h$  которого заданы условия симметрии, а на срединной плоскости  $z = 0$  имеется круговая дискообразная межфазная трещина радиуса  $a$ . Для вывода системы определяющих уравнений поставленной задачи, сначала запишем разрывные решения уравнений осесимметричной теории упругости для двухкомпонентного слоя на внешних плоскостях которого заданы условия симметрии, а на круге ( $0 \leq r \leq a$ ) плоскости стыка разнородных слоев функции напряжений непрерывны, а скачки радиальных и вертикальных составляющих смещений равны соответственно  $u(r)$ ,  $w(r)$ . Снабдив индексами 1 и 2 все величины, описывающие напряженно-деформированное

состояние верхнего и нижнего слоев соответственно, рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(1)}(r, h) = u_z^{(1)}(r, h) = 0 & (0 \leq r < \infty) \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, -h) = u_z^{(2)}(r, -h) = 0 & (0 \leq r < \infty) \\ u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 0) = u(r) & (0 \leq r < a) \\ u_z^{(1)}(r, 0) - u_z^{(2)}(r, 0) = w(r) & (0 \leq r < a) \\ u(r) = w(r) = 0 & (a \leq r < \infty) \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) - \sigma_z^{(2)}(r, 0) = 0 & (0 \leq r < \infty) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) - \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0 & (0 \leq r < \infty) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $u_r^{(j)}(r, z)$  и  $u_z^{(j)}(r, z)$  ( $j = 1, 2$ ) — радиальные и вертикальные составляющие векторов смещений точек слоев, каждое из которых в области своего определения удовлетворяет уравнениям Ламе, а  $\sigma_z^{(j)}(r, z)$  и  $\tau_{rz}^{(j)}(r, z)$  — компоненты нормальных и радиальных напряжений, действующих в соответствующих слоях.

Чтобы построить решение граничной задачи (1), представим компоненты смещений в виде интегралов Ханкеля:

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(r, z) &= \int_0^\infty [(A_j(s) + zB_j^*(s)) \operatorname{ch}(hs) + (B_j(s) + zA_j^*(s)) \operatorname{sh}(hs)] sJ_1(rs) ds \\ u_z^{(j)}(r, z) &= \int_0^\infty [(C_j(s) - zA_j^*(s)) \operatorname{ch}(hs) + (D_j(s) - zB_j^*(s)) \operatorname{sh}(hs)] sJ_0(rs) ds \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left( A_j^*(s) = \frac{s}{\varkappa_j} (A_j(s) + D_j(s)); \quad B_j^*(s) = \frac{s}{\varkappa_j} (B_j(s) + C_j(s)) \quad (j = 1, 2) \right)$$

где  $A_j(s)$ ,  $B_j(s)$ ,  $C_j(s)$  и  $D_j(s)$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, а  $\varkappa$  — известная постоянная Мусхелишвили. Тогда по закону Гука для напряжений получим выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(j)}(r, z) &= -2 \int_0^\infty \left\{ \left[ \vartheta_1^{(j)} A_j(s) - \vartheta_2^{(j)} D_j(s) + \mu_j z B_j^*(s) \right] \operatorname{ch}(hs) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \vartheta_2^{(j)} C_j(s) - \vartheta_1^{(j)} B_j(s) - \mu_j z A_j^*(s) \right] \operatorname{sh}(hs) \right\} s^2 J_1(rs) ds; \\ \tau_{rz}^{(j)}(r, z) &= -2 \int_0^\infty \left\{ \left[ \vartheta_2^{(j)} B_j(s) - \vartheta_1^{(j)} C_j(s) + \mu_j z A_j^*(s) \right] \operatorname{ch}(hs) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \vartheta_2^{(j)} A_j(s) - \vartheta_1^{(j)} D_j(s) + \mu_j z B_j^*(s) \right] \operatorname{sh}(hs) \right\} s^2 J_0(rs) ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\theta_1^{(j)} = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}$ ;  $\theta_2^{(j)} = \frac{\mu_j(\lambda_j + 2\mu_j)}{\lambda_j + 3\mu_j}$  ( $j = 1, 2$ ) а функции  $J_i(r)$  ( $i = 0, 1$ ) — известные функции Бесселя действительного аргумента.

Используя представления (2) и (3), удовлетворим условиям граничной задачи (1) и определим неизвестные коэффициенты  $A_j(s)$ ,  $B_j(s)$ ,  $C_j(s)$  и  $D_j(s)$  ( $j = 1, 2$ ) через трансформанты Ханкеля функции скачков смещений. Далее, подставляя значения коэффициентов в формулы (2) и (3), найдем компоненты напряжений и смещений в двухкомпонентном слое через скачки смещений. Приведём формулы для компонентов напряжений на плоскости стыка разнородных слоев, которые нам пригодятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned}\sigma_z^{(j)}(r, 0) &= \frac{b_2}{\Delta} L_{0,1}^2[u] + \frac{b_3}{\Delta} L_{0,0}^2[w] + L_{0,1}^{2(1,1)}[u] + L_{0,0}^{2(1,2)}[w]; \\ \tau_{rz}^{(j)}(r, 0) &= \frac{b_3}{\Delta} L_{1,1}^2[u] + \frac{b_2}{\Delta} L_{1,0}^2[w] + L_{1,1}^{2(2,1)}[u] + L_{1,0}^{2(2,2)}[w];\end{aligned}\quad (j = 1, 2) \quad (4)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}L_{m,n}^k[\varphi] &= \int_0^a W_{m,n}^k(r, \xi) \xi \varphi(\xi) d\xi; \quad W_{m,n}^k(r, \xi) = \int_0^\infty t^k J_m(tr) J_n(t\xi) dt \\ L_{m,n}^{k(i,j)}[\varphi] &= \int_0^a W_{m,n}^{k(i,j)}(r, \xi) \xi \varphi(\xi) d\xi; \quad W_{m,n}^{k(i,j)}(r, \xi) = \int_0^\infty K_{i,j}(t) t^k J_m(tr) J_n(t\xi) dt \\ b_0 &= \theta_2^{(1)} (\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}) - \theta_1^{(1)} (\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}); \quad b_1 = \theta_1^{(1)} (\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}) - \theta_2^{(1)} (\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}); \\ b_2 &= 2 (\theta_1^{(1)} b_0 + \theta_2^{(1)} b_1 - \theta_1^{(1)} \Delta); \quad b_3 = 2 (\theta_1^{(1)} b_1 + \theta_2^{(1)} b_0 - \theta_2^{(1)} \Delta); \\ \Delta &= \left[ (\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)})^2 - (\theta_1^{(2)} - \theta_1^{(1)})^2 \right],\end{aligned}$$

а функции  $K_{i,j}(t)$ , значения которых здесь не приводятся из-за их громоздкости, непрерывные, ограниченные и экспоненциально стремящиеся к нулю на бесконечности регулярные функции, зависящие от упругих характеристик материалов слоев. Вследствие этого ядра  $W_{m,n}^{k(i,j)}(r, \xi)$ -регулярные и ограниченные функции от обоих аргументов.

## 2. Кусочно-однородное, слоистое пространство с параллельными монетообразными трещинами

Перейдём к рассмотрению поставленной задачи, когда на плоскости стыка разнородных слоев имеется монетообразная трещина радиуса  $a$ , на берегах которой действуют одинаковые распределённые нормальные нагрузки величины  $P_0(r)$ . В этом случае на берегах трещины будут иметь место условия:

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) = -P_0(r); \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0. \end{cases} \quad (0 < r < a) \quad (5)$$

Используя соотношения (4), удовлетворим условиям (5). Получим:

$$\begin{cases} \frac{b_2}{\Delta} L_{0,1}^2[u] + \frac{b_3}{\Delta} L_{0,0}^2[w] + L_{0,1}^{2(1,1)}[u] + L_{0,0}^{2(1,2)}[w] = -P_0(r); \\ \frac{b_3}{\Delta} L_{1,1}^2[u] + \frac{b_2}{\Delta} L_{1,0}^2[w] + L_{1,1}^{2(2,1)}[u] + L_{1,0}^{2(2,2)}[w] = 0; \end{cases} \quad (6)$$

При этом имеют место условия непрерывности смещений  $u(a) = w(a) = 0$ . Используя интегральные представления функций Бесселя, введём функции [3–5]

$$u_*(t) = \frac{2t}{\pi} \int_t^a \frac{u(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}}; \quad w_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi w(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}}$$

и продолжим  $w_*(t)$  на интервал  $(-a, 0)$  чётным образом, а  $u_*(t)$  нечётным образом. Далее, применим к обеим частям первого уравнения (6) оператор  $I$ , а ко второму — оператор  $I_1$

$$I_1(\varphi(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - r^2}} \int_0^y \varphi(r) dr; \quad I(\varphi(x)) = \int_0^x \frac{\varphi(r) r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}}.$$

Тогда, после некоторых выкладок, приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\pi b_3}{2} w'_*(x) + \frac{b_2}{2} \int_{-a}^a \left( \frac{u'_*(t)}{t-x} + R_{1,1}(t, x) u'_*(t) + R_{1,2}(t, x) w'_*(t) \right) dt = \Delta \sigma_0(x) \\ \frac{\pi b_3}{2} u'_*(x) - \frac{b_2}{2} \int_{-a}^a \left( \frac{w'_*(t)}{t-x} + R_{2,1}(t, x) u'_*(t) + R_{2,2}(t, x) w'_*(t) \right) dt = -\Delta c_* \end{cases} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma_0(x) = I[P_0(r)]; \quad c_* = \frac{\pi b_3}{2\Delta} u'_*(0) + \frac{b_2}{2\Delta} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t} dt$$

а ядра  $R_{i,j}(t, x)$ -регулярные функции. Теперь, введя в рассмотрение комплексные комбинации смещений  $\varphi(x) = u'_*(ax) + iw'_*(ax)$ , систему (7) сформулируем на интервале  $(-1, 1)$  и перепишем в более простом виде:

$$\varphi(x) - \frac{a_*}{i\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 Q_1(t, x) \varphi(t) dt + \int_{-1}^1 Q_2(t, x) \bar{\varphi}(t) dt = f_1(x) \quad (8)$$

где

$$a_* = \frac{b_2}{b_3}; \quad f_1(x) = \frac{2\Delta i}{\pi b_3} [\sigma_0(x) + ic_*];$$

$Q_j(t, x)$  ( $j = 1, 2$ ) — линейные комбинации функций  $R_{i,j}(t, x)$ , а черточка над функцией  $\varphi(x)$  означает комплексно-сопряжённую ей величину. Нетрудно установить, что концевые точки интервала  $(-1; 1)$  являются точками автоматической ограниченности [6] функции  $\varphi(x)$  и её можно представить в виде:

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) (1+x)^{i\beta} (1-x)^{-i\beta} \quad \left( \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \varkappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \varkappa_2 \mu_1}; \quad j = 1, 2 \right) \quad (9)$$

где  $\varphi^*(x)$  — непрерывная функция, ограниченная вплоть до концов интервала  $[-1, 1]$ .

Далее, подставляя представление  $\varphi(x)$  из (9) в (8) и в условие существования ограниченных решений в концевых точках интервала интегрирования [6], строится решение (8) методом механических квадратур [7]. После определения функции  $\varphi(x)$ , комплексный коэффициент интенсивности разрушающих напряжений на окружности  $r = a$  можно определить по формуле:

$$K_I(a) + iK_{II}(a) = -\sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{ib_3\varphi_*(1)\Gamma(1-i\beta)}{\Delta \operatorname{ch}(\pi\beta)\Gamma(1/2-i\beta)}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Эрдоган Ф. Распределение напряжений в связанных разнородных материалах, содержащих круглые и кольцеобразные трещины // Прикладная механика. 1965. № 4, С. 127–135.
- [2] Willis J. R. The penny-shaped crack on an interface // Quart J. Mech. and Appl. Math. 1972. № 25(3). P. 367–385.
- [3] Попов Г. Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения // В сб.: «Современные проблемы механики и авиации», посвященном И. Ф. Образцову. 1980. С. 156–162.
- [4] Попов Г. Я. Избранные труды. Т. 1. 2007. 440 с.
- [5] Акопян В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Издательство Гитутюн НАН РА, Ереван. 2014. 322 с.
- [6] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
- [7] Саакян А. В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью // Известия НАН Армении, Механика. 2000. Т. 53. № 3. С. 12–19.

**Hakobyan V. N.** *Axis-symmetrical stress state of piece-wise homogeneous, layered space with parallel penny-shaped cracks*. In present paper the axis-symmetrical stress state of piece-wise, layered space, formed by alternately junction of two heterogeneous layers with same thickness, which contains the periodical system of circular penny-shaped parallel cracks in junction planes is considered. The discontinuous solutions for equations of axis-symmetrical theory of elasticity for stated problem is built by the method of Hankel integral transform. On the basis of obtained solutions the governing system of integral equations with Weber-Sonin kernels is written. Using rotation operator the governing system of equations is reduced to the singular integral equation of second kind. The solution of last one is built by the method of mechanical quadratures. A simple formula to determine the stress intensity factor is obtained.

# ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ

Бабешко В. А.<sup>1</sup>, Евдокимова О. В.<sup>1</sup>, Бабешко О. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кубанский государственный университет, Краснодар

<sup>2</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Рассматривается проблема оценки прочностных свойств объектов типа подземных сооружений, и материалов с поперечной арматурой. Граничная задача сведена к системе алгебраических уравнений.

**1. Введение.** Рассматривается совокупность параллельных подземных сооружений как блочная структура, состоящая из верхнего линейно упругого слоя толщиной  $H_1$  и пласта толщины  $h$ , моделируемого пластиной Кирхгофа.

Пласт, содержащий добываемые полезные ископаемые, лежит на слое, механические характеристики среды которого грунтоподобные и позволяют моделировать его постелью Винклера. Предполагается, что толщина  $h$  пласта много меньше  $H_1$  что имеет место в реальных условиях добычи многих полезных ископаемых.

Расположим систему координат  $ox_1x_2x_3$  таким образом, что плоскость  $ox_1x_2$  совпадает со срединной плоскостью пластины, а ось  $ox_3$  направлена строго вверх. Считаем, что вдоль оси  $ox_1$ , перпендикулярно оси  $ox_2$ , расположено  $N$  протяженных, параллельных между собой штольней, которые считаются бесконечными. Штольни находятся в рудном пласте и ширина каждой из них равна  $b_{2n+1} - b_{2n}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , где  $(b_{2n}, b_{2n+1})$  — координаты на оси  $ox_2$  штольни с номером  $2n$ .

Пласт сверху накрыт верхним деформируемым слоем и лежит на основании Винклера, для которого связь между напряжениями  $t(x_1, x_2)$  и перемещениями  $u_{32}(x_1, x_2)$  верхней границы основания задается соотношением

$$u_{32}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1}vt(x_1, x_2), \quad \varepsilon_6^{-1}v > 0.$$

Здесь  $v$  — коэффициент постели Винклера.

Области между штольнями с координатами  $\{b_{2n-1}, b_{2n}\}$  шириной,  $b_{2n} - b_{2n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $b_1 = -\infty$ ,  $b_{2N} = \infty$  являются опорами, имеющими номера  $2n - 1$ . Допускается, что верхний упругий слой со свободной от напряжений верхней границей, с плотностью материала  $\rho$  вертикально воздействует сверху на пласт напряжением  $q_0 = \rho gH_1$ , где  $g$  — ускорение свободного падения, вызывая пренебрежимо малые касательные напряжения в сравнении с нормальными.

**2. Формулировка задачи.** Уравнение пластин Кирхгофа, описывающих поведение пласта, в том числе опорных зон, которые должны быть достаточно протяженными для удержания высокого давления верхнего слоя, имеют вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$

$$\begin{aligned}
 M_b &= -D_{b1} \left( \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H_1^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H_1^3}, \\
 Q_b &= -D_{b2} \left( \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = f_{4b}(\partial\Omega_b), \\
 u_{3b} &= f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H_1 \partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b), \\
 D_b &= \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H_1^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H_1}{\mu}.
 \end{aligned}$$

Здесь для опор, сформированных из фрагментов пласта между штольнями, введено условное обозначение индексом  $b$  которому в будущем будет приданы текущие номера. Опоры занимают области  $\Omega_b$  с границами  $\partial\Omega_b$ , при вертикальных статических воздействиях напряжением  $g_{3b}$  сверху и  $t_{3b}$  снизу.

Используются общепринятые обозначения механических параметров в выбранной системе координат:  $M_b$  и  $Q_b$  — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат  $x_1 o x_2$ ;  $h_b$  — толщины пластин,  $H_1$  — размерная толщина верхнего слоя. Обозначения заимствованы из [1, 2].  $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$  — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Перемещение нижней границы верхнего слоя происходит за счет веса верхнего слоя и описывается соотношением [3–5]

$$\begin{aligned}
 u_{31}(x_1, x_2) &= K_{31} g = \varepsilon_6^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{31}(x_1, -\xi_1, x_2 - \xi_2) [g(\xi_1, \xi_2) - g_0] d\xi_1 d\xi_2, \\
 k_{31}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{31}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \\
 G(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2.
 \end{aligned}$$

Здесь  $g(\xi, \eta)$  — воздействия на нижнюю границу верхнего слоя со стороны пласта, то есть контактные напряжения, действующие на верхний пласт от опор.

Функция  $K(\alpha_1, \alpha_2)$ , называемая символом интегрального уравнения, представляет собой для линейно-упругого слоя мероморфную функцию двух комплексных переменных. Полюса функции по одному из комплексных переменных  $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$  при фиксированном вещественном втором переменном являются дискретными комплексными числами, не лежащими на вещественной оси в статических задачах. Воздействие со стороны пласта на верхнюю границу нижнего слоя обозначается  $t(\xi_1, \xi_2)$ , вертикальное перемещение этой границы при принятых предположениях есть  $u_{32}(x_1, x_2)$ .

**3. Свойства блочных элементов пласта.** В основе решения граничной задачи лежит метод блочного элемента в сочетании с факторизационными подходами [1–5]. Следуя им, функциональные уравнения граничной задачи для каждой

опоры можно представить в виде [1, 2]

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} = - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}), \quad b = \lambda, r$$

Здесь  $\omega_b$  — участвующие в представлении внешние формы, имеющие вид

$$\omega_b = e^{i\langle \alpha, x \rangle} \left\{ - \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right] dx_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \right\}, \quad b = \lambda, r.$$

Приняв во внимание наличие  $N + 1$  опоры, функциональное уравнение можно записать в виде интегрального уравнения [3–5]

$$\mathbf{K}g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \sum_{n=1}^N g_{2n-1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\ = \sum_{n=1}^N f_{2n-1}(x_1, x_2) + \sum_{n=2}^{N-1} \phi_{2n}(x_1, x_2), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) e^{ii(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2,$$

$$f_{2n-1}(x_1, x_2) \in \Omega_{2n-1}(b_{2n-1} \leq x_2 \leq b_{2n}, |x_1| \leq \infty, n = 0, 1, \dots, N),$$

$$\phi_{2n}(x_1, x_2) \in \Omega_{2n}(b_{2n} \leq x_2 \leq b_{2n+1}, |x_1| \leq \infty),$$

$$f_1(x_1, x_2) \in \Omega_0(-\infty = b_1 \leq x_2 \leq b_2, |x_1| \leq \infty),$$

$$f_{2N-1}(x_1, x_2) \in \Omega_{2N}(b_{2N-1} \leq x_2 \leq \infty, |x_1| \leq \infty),$$

$$\phi_0(x_1, x_2) = \phi_{2N}(x_1, x_2) = 0.$$

Здесь  $\phi_{2n}(x, y)$  — новые неизвестные.

Для его исследования и решения применим метод факторизации, разработанный в [3–5]. Применяя метод факторизации в варианте работ [3–5], интегральное уравнение сводим к решению системы одномерных интегральных уравнений с вполне непрерывным оператором в пространстве непрерывных с весом функций на всей оси.

$$X_{2p-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) + \{R(\alpha_1, \alpha_2)X_{2p-3}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2(p-1)})}\}^+ - \\ - \{R(\alpha_1, \alpha_2)X_{2p}^+(\alpha)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2p})}\}^+ = \{\Psi_2(\alpha_1, \alpha_2)\}^+,$$

$$X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2) - \{R(\alpha_1, \alpha_2)X_{2p-3}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2(p-1)})}\}^- + \\ + \{R(\alpha_1, \alpha_2)X_{2p}^+(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2p})}\}^- = -\{\Psi_2(\alpha_1, \alpha_2)\}^-,$$

$$X_{2p-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) + \{R^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)X_{2p+1}^+(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2p+1})}\}^- - \\ - \{R^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2p-1})}\}^- = \{\Psi_1(\alpha_1, \alpha_2)\}^-,$$

$$X_{2p}^+(\alpha_1, \alpha_2) + \{R^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)X_{2p+1}^+(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2p+1})}\}^+ - \\ - \{R^{-1}X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2p-1})}\}^+ = -\{\Psi_1(\alpha_1, \alpha_2)\}^+, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$X_{2N+1}^+(\alpha_1, \alpha_2) = X_{-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) = X_{2N}^+(\alpha_1, \alpha_2) = X_0^-(\alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

$$R(\alpha_1, \alpha_2) = K_+(\alpha_1, \alpha_2)K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Эти интегральные уравнения с помощью вычисления вычетов сводятся к системе линейных алгебраических уравнений, которые имеют экспоненциально убывающие коэффициенты и для расчетов достаточно ограничиваться небольшим числом членов. Определив неизвестные  $X_{2p-1}^-(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2)$ , для нахождения напряжений  $g_{2p-1}(x_1, x_2)$ , действующих по всей длине опоры, и определения отвисания кровли  $\phi_{2p}(x_1, x_2)$  между опорами  $2p-1$  и  $2p+1$  достаточно вычислить интегралы

$$g_{2p-1}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1} [X_{2p-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) - X_{2p-3}^-(\alpha_1, \alpha_2)] K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\phi_{2p}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1} [X_{2p}^-(\alpha_1, \alpha_2) - X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2)] K_-(\alpha_1, \alpha_2).$$

**4. Заключение.** Разработанный метод исследования напряженно-деформированного состояния зон произвольного числа параллельных штольной разной ширины для случая штолен может достаточно просто переноситься на случаи подобных изделий из иных материалов и других масштабов. Заметим, что локальное состояние штолен при добыче полезных ископаемых изучалось во многих работах, например, в [6]. Условия локализации, позволяющие исследовать влияние глобального фактора на напряженно-деформированное состояние в рассматриваемых блочных структурах, строятся с использованием подхода, изложенного в [7].

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2016 г. проект (0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404, 15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Федоренко А. Г., Шестопалов В. Л. К проблеме покрытий с трещинами в наноматериалах и сейсмологии // МГТТ. 2013. № 5. С. 39–45.
- [2] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. 2016. Т. 466. № 6. С. 664–669.
- [3] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [4] Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [5] Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
- [6] Баренблатт Г. И., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1955. № 11. С. 73–82.
- [7] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О «вирусной» теории некоторых аномальных природных явлений // ДАН. 2012. Т. 447. № 1. С. 33–37.

**Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.** *The application of the block element method in some problems.* The block element method is used for the estimation of the stable properties of the underground constructions and the materials with the cross frames. The boundary value problem have been reduced to the system of the algebraic equations.

# ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ОХЛАЖДЕНИИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Батищев В. А.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассчитана бифуркация осесимметричного стационарного течения несжимаемой жидкости в горизонтальном слое конечной толщины. Слой ограничен снизу твердой стенкой, а сверху свободной недеформируемой границей, на которой задано неравномерное распределение температуры. Расчеты проведены на основе уравнений движения жидкости в приближении Обербека–Буссинеска. Найдено точное решение краевой задачи для квадратичной зависимости поверхностной температуры от радиальной координаты. Показано, что при локальном охлаждении свободной границы и при наличии внешнего потока жидкости в результате бифуркации возникает вращение жидкости в тонком пограничном слое вблизи свободной поверхности. В этом случае потоки тепла движутся в охлажденную область. При локальном нагреве границы вращение не возникает.

**1. Введение.** Нелинейные пограничные слои, возникающие вблизи свободной границы, могут быть вызваны различными причинами, в том числе термокапиллярным эффектом Марангони, наличием примеси на свободной границе, ветровыми нагрузками и др. В однородной жидкости пограничный слой вызван воздействием поверхностных касательных напряжений. В неоднородной жидкости возникает иная ситуация. Нелинейный пограничный слой может сформироваться как при наличии поверхностных касательных напряжений, так и при их отсутствии. Это связано с обратным влиянием поля температур на поле скоростей внутри слоя жидкости. Ниже приведены результаты расчетов термогравитационного осесимметричного пограничного слоя вблизи свободной границы без учета поверхностных касательных напряжений. На свободной границе жидкость либо локально охлаждается, либо нагревается. В первом случае, в зависимости от величины скорости внешнего потока, возможны режимы течений жидкости как без вращения, так и с вращением в тонком пограничном слое. Во втором случае вращающиеся режимы не найдены. Нелинейные пограничные слои вблизи свободной границы изучались в работах [1–6]. Факт возникновения вращения при неравномерном нагреве свободной границы обнаружен в работе [4]. В случае однородной жидкости это установлено в [5, 6].

**2. Математическая модель.** Изучается стационарное осесимметричное течение неоднородной жидкости в горизонтальном слое толщиной  $h$ , который ограничен сверху свободной поверхностью  $\Gamma$ , а снизу горизонтальной стенкой. Диффузионные коэффициенты вязкости  $\nu$  и температуропроводности  $\chi$  считаются малыми. Движение жидкости вызвано неравномерным распределением температуры вдоль свободной поверхности, причем рассматриваются два случая. В одном случае свободная граница локально охлаждается вблизи оси симметрии, а во втором — нагревается. Течение неоднородной теплопроводной жидкости изучается на основе уравнений движения в приближении Обербека–Буссинеска

$$(\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{g} \beta T,$$

$$\mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

Здесь  $\mathbf{v} = (\nu_r, \nu_\theta, \nu_z)$  — вектор скорости,  $r, \theta, z$  — цилиндрические координаты,  $p$  — давление,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ ,  $g$  — ускорение свободного падения. Введем параметр  $T_*$ , который обозначает постоянную среднюю температуру слоя жидкости. Переменная  $T$  означает температуру жидкости, которая отсчитывается от параметра  $T_*$ . Параметром  $\beta$  обозначим коэффициент теплового расширения жидкости. Осевая симметрия означает, что температура, давление и вектор скорости не зависят от окружной координаты  $\theta$ . На свободной границе  $\Gamma$  выполняются динамические условия для нормальных и касательных напряжений, кинематическое условие, а также задана температура  $T_\Gamma$ .

$$p = 2\nu\rho\mathbf{n}\Pi\mathbf{n} - \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \mathbf{v}\mathbf{n} = 0$$

$$2\nu\rho(\Pi\mathbf{n} - (\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n}) = 0, T = T_\Gamma, (r, z) \in \Gamma$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Считаем, что атмосферное давление на свободной поверхности постоянно  $p_* = \text{const}$ . Термокапиллярным эффектом пренебрегаем, поэтому полагаем  $\sigma = \text{const}$ . Параметры  $k_1, k_2$  обозначают главные кривизны свободной поверхности.  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma$ ,  $\Pi$  — тензор скоростей деформации.

На твердой стенке выполняется условие прилипания  $\mathbf{v} = 0$  и задана постоянная температура  $T$ .

Рассмотрим случай, когда температура свободной границы  $T_\Gamma$  в окрестности оси симметрии зависит от радиальной координаты по квадратичному закону  $T_\Gamma = 0.5\tau T_* (r^2/h^2 - \alpha)$ . Здесь  $\tau$  и  $\alpha$  безразмерные параметры, причем  $\alpha > 0$ . Параметр  $\tau$  пропорционален градиенту температуры вдоль свободной границы и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В случае  $\tau > 0$  жидкость на свободной поверхности охлаждается вблизи оси симметрии, причем температура  $T_\Gamma$  растет при удалении от оси симметрии. В этих условиях возможно возникновение вращения жидкости в тонком слое вблизи свободной границы. При  $\tau < 0$  свободная граница локально нагрета вблизи оси симметрии. Вращательный режим не возникает.

Начало системы координат поместим на свободную поверхность. Введем новую поперечную координату  $s$  по формуле  $s = z/h$ . Отметим, что уравнение твердой стенки представимо в виде  $z = -h$ . Решение уравнений движения жидкости представим в форме

$$\nu_r = rF'(s)\nu h^{-2}, \nu_z = -2\nu h^{-1}F(s), \nu_\theta = rG(s)\nu h^{-2}$$

$$T = T_* h^{-2} (0.5r^2 T_1(s) + h^2 T_2(s))$$

$$p = -\rho\nu^2 h^{-4} (0.5r^2 p_1(s) + h^2 p_2(s))$$

Последние формулы описывают термогравитационное течение жидкости в горизонтальном слое только в окрестности оси симметрии  $Oz$  и не распространяются на случай больших значений радиальной координаты. Ниже будет показано, что этому решению удовлетворяет горизонтальная свободная граница с уравнением  $z = 0$ .

Введем параметр  $\varepsilon$  по формуле  $\varepsilon^2 = \nu^2 / (g\beta T_* h^3)$ . Отметим, что параметр  $\varepsilon$  является малым для конечных значений параметра  $h$ .

Подставляя формулы для полей скорости, температуры и давления в уравнения Обербека—Буссинеска и в краевые условия, выводим краевую задачу для неизвестных функций  $F, G, T_1, T_2, p_1, p_2$ . Используя преобразования  $F(s) = f(s)/\varepsilon$ ,  $G(s) = G_c(s)/\varepsilon$ , получаем краевую задачу, с малым параметром перед старшими производными

$$\begin{aligned} \varepsilon f^{(4)} &= -2(f f''' + G_c G'_c) + T_1, \varepsilon G_c'' = 2(f' G_c - f G'_c), \\ \varepsilon T_1'' &= 2Pr(T_1 f' - f T_1'), \varepsilon T_2'' = -2Pr f T_2' - 2\varepsilon T_1, \\ f = 0, f'' &= 0, G_c' = 0, T_1 = \tau, T_2 = -\alpha\tau/2 (s = 0), \\ f = f' = G_c &= T_1 = T_2 = 0 (s = -1) \end{aligned}$$

Здесь  $Pr = \nu/\chi$  — число Прандтля. В расчетах полагаем  $Pr = 7$ .

**3. Метод пограничного слоя.** Малый параметр перед старшими производными в уравнениях краевой задачи означает, что в рассматриваемом случае вблизи свободной поверхности формируется тонкий пограничный слой. Вне этого слоя в главном приближении возникает внешнее невязкое течение жидкости. Рассмотрим случай, когда скорость внешнего потока имеет такой же порядок, как и скорость в пограничном слое. Оценки показывают, что радиальная и окружная компоненты скорости в пограничном слое имеют одинаковый порядок  $O(\varepsilon^{1/5})$ . Порядок осевой компоненты скорости и порядки компонент вектора скорости внешнего течения жидкости равны  $O(\varepsilon^{3/5})$ . Порядок температуры конечен  $O(1)$ . Толщина пограничного слоя имеет порядок  $O(\varepsilon^{2/5})$ . Функции  $f, T_1, T_2, G_c$  представим в виде асимптотических разложений

$$f(s) = \varepsilon^{1/5} f_0(s) + \varepsilon^{3/5} (H(\eta) + f_1(s)) + O(\varepsilon), G_c = \varepsilon^{1/5} G_0(\eta) + \dots$$

$$T_1 = T_{11}(\eta) + \varepsilon^{2/5} (T_{12}(\eta) + T_{10}(s)) + \dots, T_2 = T_{21}(\eta) + \varepsilon^{2/5} T_{22}(\eta) + \dots,$$

Здесь  $\eta = -s/\varepsilon^{-2/5}$ . Функции  $H', T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}, G_0$ , зависящие от переменной  $\eta$ , определены в пограничном слое и исчезают при выходе из этого слоя, кроме функции  $H(\eta)$ , которая стремится к константе. Условие  $G_c \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow +\infty$  означает, что жидкость вращается только в пограничном слое, причем вне этого слоя вращение отсутствует. Функции  $f_0(s), f_1(s)$  определены во всей области, пропорциональны осевой компоненте скорости и описывают внешнее течение жидкости без вращения. Функцию  $f_0(s)$  находим в виде  $f_0 = Us(s+1)$ . Здесь параметр  $U$  пропорционален скорости внешнего потока на свободной границе.

Применяя второй итерационный процесс метода пограничного слоя, приходим к уравнениям пограничного слоя

$$\begin{aligned} H^{(4)}(\eta) &= 2H'''(H - \eta U) + 2G_0 G_0' + T_{11}, \\ T_{11}'' &= 2Pr((H - \eta U) T_{11}' - (H' - U) T_{11}), \end{aligned}$$

$$G_0'' = 2((H - \eta U) G_0' - (H' - U) G_0)$$

Приведем краевые условия

$$H = H'' = G_0' = 0, T_{11} = \tau(\eta = 0), H' = H'' = G_0 = T_{11} = T_{21} = 0(\eta = +\infty)$$

**4. Результаты численных расчетов.** Приведем результаты расчетов краевой задачи для уравнений пограничного слоя при  $\tau = \pm 0.75$ . Все режимы течений жидкости разделим на два типа — основные и вторичные. Основным режимам соответствует течение без вращения. Вторичным режимам соответствуют течения жидкости с вращением. Отметим, что вращательные режимы возникают в результате бифуркации основных решений.

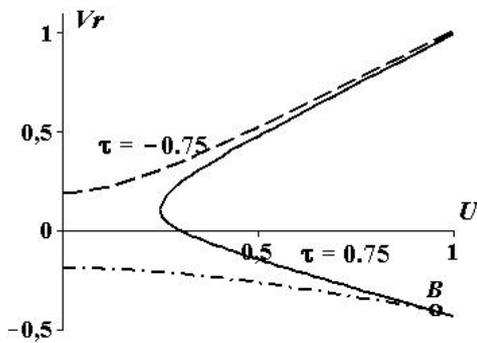


Рисунок 1

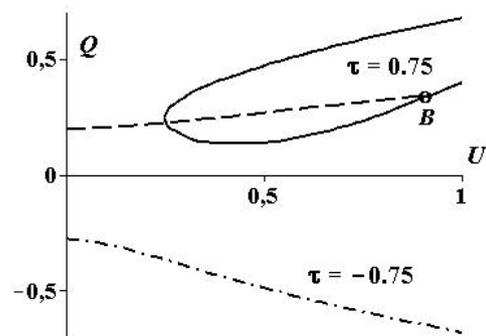


Рисунок 2

На рис. 1 изображено распределение амплитуды радиальной компоненты скорости точек свободной границы в зависимости от скорости внешнего потока  $U$ . Пунктирной линии соответствует режим без вращения при локальном нагреве свободной границы для  $\tau = -0.75$ . В этом случае каждому значению параметра  $U$  соответствует одно решение, амплитуда которого монотонно растет с ростом скорости  $U$ . При локальном охлаждении свободной границы для  $\tau > 0$  автомодельные режимы без вращения существуют не при всех значениях параметра  $U$ . Сплошной линии на рис. 1 соответствует параметр  $\tau = 0.75$ . При  $U < U_*$  режимов без вращения не обнаружено. При  $U > U_*$  для каждого значения параметра  $U$  найдено по два различных режима, а при  $U = U_*$  обнаружено только одно решение. Отметим, что  $U_* = 0.24887$ , причем этому значению соответствует «вершина» сплошной кривой на рисунке 1. Штрих-пунктирной кривой на рис. 1 соответствуют два режима с вращением. Отметим, что эти режимы отличаются между собой только направлением вращения, а радиальная компонента скорости одна и та же. Точкой  $B$  на рис. 1 обозначена точка бифуркации.

Обозначим через  $Q$  амплитуду поперечной компоненты теплового потока на свободной границе. На рис. 2 изображено изменение величины  $Q$  в зависимости от скорости внешнего потока для  $\tau = \pm 0.75$  и  $r = 0.5$ . При локальном нагреве свободной границы поперечный поток тепла отрицателен, а при охлаждении положителен. Течению жидкости без вращения соответствуют две линии: сплошная

кривая  $\tau = 0.75$  и штрих-пунктирная — для  $\tau = -0.75$ . Пунктирная кривая соответствует вращательным режимам, которые ответвляются от основных режимов в точке бифуркации  $B$ . Итак, численные расчеты показывают, что вращение жидкости возникает только при локальном охлаждении свободной границы. Жидкость вращается только в тонком пограничном слое, вне которого вращение отсутствует.

Координаты точек бифуркации рассчитаны при численном интегрировании краевой задачи на собственные значения. Уравнение бифуркационной кривой получено аналитически в виде степенной зависимости от скорости внешнего потока. В окрестности точек бифуркации построена асимптотика вращательных режимов. Получено уравнение разветвления в первом приближении, коэффициенты которого найдены численно.

**Заключение.** В работе показано, что при локальном охлаждении свободной границы жидкости малой вязкости может возникать вращательный режим течения жидкости в тонком термогравитационном пограничном слое вблизи этой границы. Этот результат может объяснить одну из причин возникновения торнадо в атмосфере вблизи границы раздела фаз.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Napolitano L. G.* Marangoni boundary layers // Proc. III European Symp. on Material Sci. in Space. Grenoble. 1979. P. 313–315.
- [2] *Пухначев В. В.* Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1061–1064.
- [3] *Шкадов В. Я.* К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 3. С. 133–137.
- [4] *Батищев В. А., Хорошунова Е. В.* Возникновение вращательных режимов при термокапиллярном течении неоднородной жидкости в слое // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. № 4. С. 560–568.
- [5] *Батищев В. А.* Автомодельные решения, описывающие нестационарные термокапиллярные течения жидкости // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. № 6. С. 1003–1009.
- [6] *Батищев В. А.* Ветвление автомодельных решений, описывающих термокапиллярные течения жидкости в тонком слое // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 3. С. 137–143.

**Batishchev V. A.** *The appearance of the liquid rotation at a local cooling of the free boundary.* It is shown that the local cooling of the free boundary can occur rotational mode of motion of the liquid in a thin thermo-gravitational boundary layer near this surface.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛАСТОТОНОМЕТРИИ ГЛАЗА

**Бауэр С. М., Боденкова Е. О.**

*Санкт-Петербургский государственный университет*

Исследуется эластотонометрия глаза. Особое внимание уделяется анализу причин, по которым данные эластотонометрии могут иметь патологию. Измерение ВГД тонометром Маклакова моделируется контактными задачами в пакете Ansys. Материалы задаются как трансверсально-изотропные, роговица рассматривается как неоднородная оболочка. Проводится анализ влияния различных параметров роговицы и склеры на тонометрическое давление и поведение эластокривой.

## **1. Введение**

Существуют различные импрессионные и аппланационные методы измерения тонометрического давления. Например, золотым стандартом тонометрии считается тонометр Гольдмана. Также были разработаны бесконтактные и портативные тонометры. Но существует много работ, в которых обсуждается чувствительность тонометров после различных операций по коррекции зрения. Их авторы приходят к выводу, что показатели ВГД, полученные современными методами очень чувствительны к толщине роговицы. Поэтому, несмотря на то, что современные методы измерения ВГД удобны, не требуют анестезии и исключают риск инфицирования, после кераторефракционных операций используется аппланационный тонометр Маклакова, разработанный еще в 1884 г. Он остается самым точным.

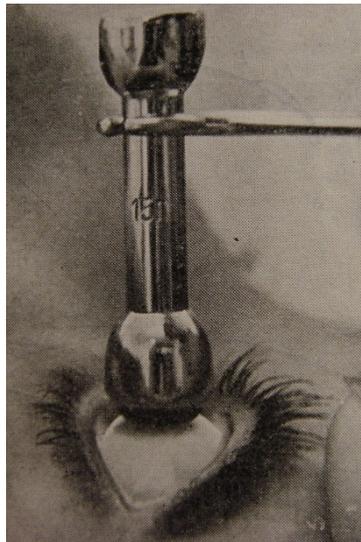


Рисунок 1 – Измерение ВГД по методу Маклакова

При измерении ВГД этим тонометром используются грузики с плоским основанием, которые опускают на роговицу глаза. Чем больше площадь соприкосновения грузика и роговицы глаза, тем меньше давление внутри глазного яблока.

Для эластотонометрии применяют набор тонометров Маклакова весом 5; 7,5; 10 и 15 г. С помощью этих тонометров в порядке возрастания их веса производят подряд четыре измерения внутриглазного давления. На основе этих данных строят кривую, которая называется эластокривой. Форма нормальной кривой близка к прямой линии. При нормальном состоянии глаза ее начало не превышает 21 мм рт. ст., а максимальное значение не должно превышать 30 мм рт. ст. Однако в некоторых случаях кривая начинается выше 21 мм рт. ст. и имеет изломы, что свидетельствует о патологии глаза. Особое внимание уделяется анализу причин, по которым данные эластотонометрии могут иметь патологию.

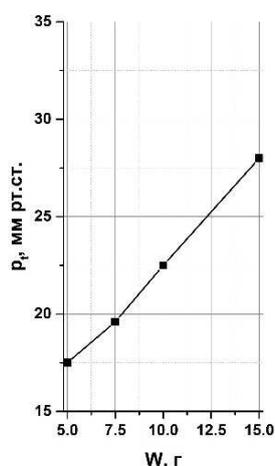


Рисунок 2 – Нормальная эластотонометрическая кривая

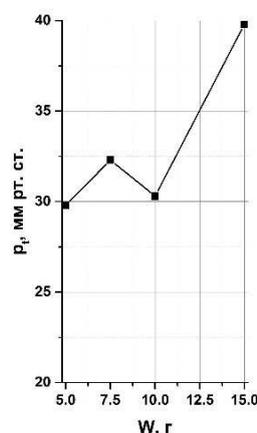


Рисунок 3 – Патологическая эластотонометрическая кривая

## 2. Постановка задачи

В работе рассматриваются математические модели измерения тонометрического давления тонометром Маклакова [1, 2]. В первой аналитической модели корнеосклеральная оболочка глаза представляется как сопряженные сферические сегменты роговицы и склеры. Предполагается, что до нагружения глаз заполнен несжимаемой жидкостью с давлением  $p_0$ . То есть учитывается только геометрия глаза, неоднородность материала и жесткость роговицы на изгиб не учитываются. Однако, экспериментальные исследования свидетельствуют о том, что материал роговицы, как и материал склеры, отличается биомеханической анизотропией и неоднородностью. Склера — трансверсально-изотропный материал, роговица — ортотропный. При патологии неоднородность роговицы возрастает, наблюдается ослабление вблизи склеры. Например, при таких заболеваниях, как краевая дистрофия роговицы или дистрофия роговицы краевая эктатическая.

В связи с этим измерение ВГД тонометром Маклакова моделируется контактными задачами в пакете Ansys. Корнеосклеральная оболочка глаза также моделируется сопряженными сферическими сегментами с разными упругими свойствами. Материалы задаются как трансверсально-изотропные, но роговица рассматривается как неоднородная оболочка.

Таблица 1 – Модули упругости роговицы

$E_\theta = E_\varphi = 1 \text{ МПа}$	$E_r = 0.01 \text{ МПа}$
$\nu_{r\varphi} = \nu_{r\theta} = 0.01$	$\nu_{\theta\varphi} = 0.449$
$G_{r\varphi} = G_{r\theta} = 0.029 \text{ МПа}$	$G_{\theta\varphi} = 0.214 \text{ МПа}$

Таблица 2 – Модули упругости склеры

$E_\theta = E_\varphi = 3 \text{ МПа}$	$E_r = 0.03 \text{ МПа}$
$\nu_{r\varphi} = \nu_{r\theta} = 0.01$	$\nu_{\theta\varphi} = 0.449$
$G_{r\varphi} = G_{r\theta} = 0.087 \text{ МПа}$	$G_{\theta\varphi} = 0.6 \text{ МПа}$

На первом шаге прикладывается внутреннее давление, на следующих шагах прикладывается сила  $F = mg$ , где  $m$  — масса груза,  $g$  — ускорение свободного падения. Последовательно к штампу прикладываются силы (как в эластотонметрии), равные 5 г (0,05 Н), 7.5 г (0,075 Н), 10 г (0,1 Н) и 15 г (0,15 Н), и фиксируется площадь контакта.

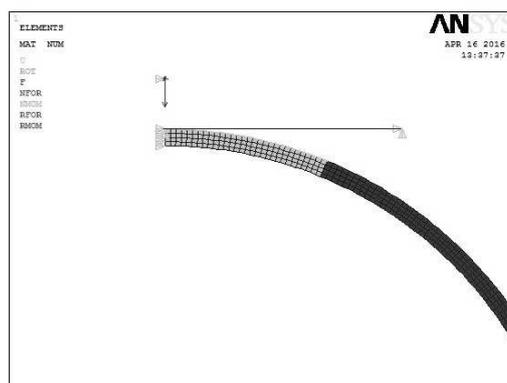


Рисунок 4 – Создание контактной пары «поверхность — поверхность»

Проводится анализ влияния различных параметров роговицы и склеры на тонометрическое давление и поведение эластокривой.

### 3. Влияние геометрических параметров на тонометрическое давление

Во-первых, исследовалось влияние геометрии глаза на тонометрическое давление. Этот вопрос актуален, так как в связи с распространением глазных болезней, всё чаще можно встретить эллипсоидную форму глаза (при миопии и гиперметропии). Также радиус кривизны роговицы может увеличиться после кераторефракционной операции.

Было получено, что при увеличении радиуса кривизны роговицы, площадь контакта глаза и тонометра также увеличивается, а тонометрическое давление убывает. Таким образом изменение формы и размера глаза влияет на поведение эластокривой.

### 4. Влияние жесткостей склеры и роговицы на тонометрическое давление

Далее изучалось влияние жесткостей склеры и роговицы на тонометрическое давление. Жесткости склеры и роговицы могут увеличиваться при глаукоме, поэтому в работе варьировались тангенциальные модули упругости (Таблица 3). При определенных параметрах получены зависимости тонометрического давления от массы груза, при которых в кривой, характеризующей эластонометрию, появляется пологий участок, либо излом.

**5. Влияние неоднородности роговицы на тонометрическое давление**

Кроме того, изучалось влияние неоднородности роговицы на тонометрическое давление. Как упоминалось ранее, неоднородность роговицы может увеличиться при развитии таких заболеваний, как краевая дистрофия роговицы или дистрофия роговицы краевая эктатическая. Эти болезни характеризуются развитием мелкоочечных помутнений в роговице и врастанием в нее кровеносных сосудов с последующим истончением. Данное явление моделировалось с помощью добавления мягкой вставки разных размеров в роговицу. Модули упругости вставки:  $E_\theta = E_\varphi = 0.3$  МПа. Значения тангенциальных модулей упругости роговицы и склеры варьировались в тех же пределах (Таблица 3).

Таблица 3 – Тангенциальные модули упругости склеры и роговицы

Склера: $E_\theta = E_\varphi$ , МПа	3	5	10	15	20	30
Роговица: $E_\theta = E_\varphi$ , МПа	0.5	1	3	5		

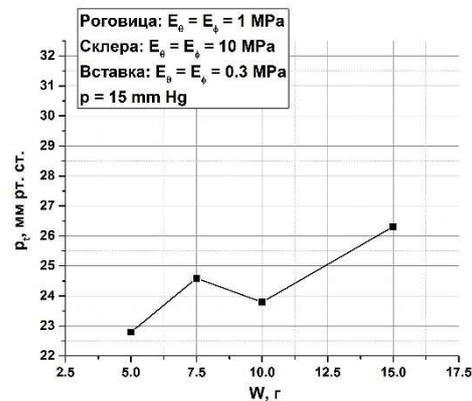
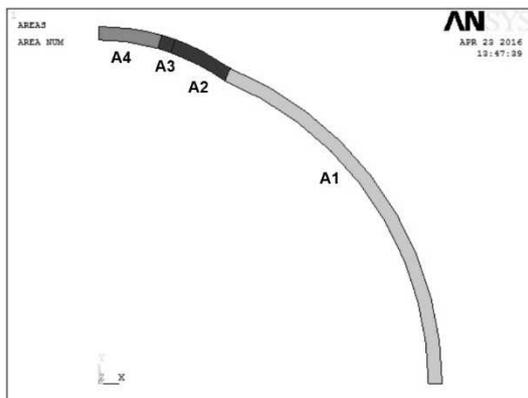


Рисунок 5 – Математическая модель глаза с мягкой вставкой в роговице (площадь A3) среднего размера. Зависимость тонометрического давления от массы груза для данной модели

Во всех случаях появляется излом в зависимости тонометрического давления от нагрузки. При уменьшении размера вставки на последнем шаге нагружения происходит большой скачок давления. Действительно, когда груз достигает конца вставки, площадь контакта растет медленно, и тонометрическое давление сильно возрастает.

Таким образом, представленная модель подтверждает, что отклонения в эластокиривой Кальфа может быть вызвано патологией роговицы.

## 6. Результаты

Полученные результаты показывают, что на тонометрическое давление влияют как параметры роговицы, так и склеры. Параметры склеры особенно влияют при грузах тонометра больше 5 г. Изломы эластокривой могут быть связаны с ужесточением склеры, которое может происходить при глаукоме. Также это может происходить из-за патологий роговицы: в случае, когда роговица становится особенно слабой около склеры, например, при краевой эктатической дистрофии роговицы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №15-01-06311.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бауэр С. М. Качанов А. Б. Семенов Б. Н. Слесорайтите Е. / О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении ВГД аппланационными методами. // Биомеханика глаза. 2007: сб. тр. конф. — М., 2007. С. 119–124.
- [2] Романова А. А. К построению модели деформации решетчатой пластины диска зрительного нерва. // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2007–2008. С. 110–116.
- [3] Иомдина Е. Н. Бауэр С. М. Котляр К. Е. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения / Под редакцией В.В. Нероева. М.: Реал Тайм, 2015. 208 с.
- [4] Нестеров А. П. Бунин Ф. Я. Канцельсон Л. А. Внутриглазное давление. Физиология и патология. М.: Наука, 1974. 381 с.
- [5] Ljubimova D. / Biomechanics of the Human Eye and Intraocular Pressure Measurements. Doctoral Thesis in Mechanics. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2009. 200 p.
- [6] Бауэр С. М. Любимов Г. А. Товстик П. Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 1. С. 24–39.

**Bauer S. M., Bodenkova E. O.** *Modeling of elastotonomtry of an eye.* Elastotonomtry of a human eye and particularly the causes of pathologies are studied. Measurement of IOP with the Maklakoff tonometer is considered as a contact problem and simulated numerically with software package Ansys. Materials are assumed to be transversely isotropic, the cornea is treated as a non-uniform shell. The influence of various parameters of the cornea and sclera on tonometric pressure and dependence of elastotonometric pressure on a load are analyzed.

# РАЗВИТИЕ КОНСТРУКЦИЙ МЕМБРАННЫХ ПРЕДОХРАНИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И МЕТОДОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Беликов Н. В.<sup>1</sup>, Какурин А. М.<sup>2</sup>, Юдин А. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup> Научно-исследовательская и производственно-внедренческая  
фирма «Тензор», Ростов-на-Дону

Представлена конструкция и механизм работы мембранного предохранительного устройства с хлопающей предохранительной мембраной. Повышенная безопасность срабатывания устройства обеспечивается безосколочным разрушением мембраны.

## 1. Назначение предохранительных мембран.

Мембранные предохранительные устройства (МПУ) предназначены для защиты объектов технологического оборудования (сосудов, трубопроводов) от опасных перегрузок избыточным давлением, создаваемых рабочими средами.

МПУ с разрывными мембранами применяются на жидких и газообразных средах и работают на разрыв под давлением, действующим на её поверхность. МПУ с хлопающей куполообразной мембраной срабатывают на потерю устойчивости (хлопок) под давлением, действующим на выпуклую поверхность. Теряя устойчивость, мембрана либо разрезается на ножевых лезвиях, либо разрывается по предварительно ослабленному сечению.

Одним из ужесточающих требований для современных конструкций МПУ является обеспечение разрушения мембраны без образования осколков. Ниже представлен такой запатентованный вариант и некоторые аналоги.

## 2. Обзор аналогов.

Известно выполнение выгнутых предохранительных разрывных дисков с ослаблением на их поверхности. Линии ослабления или линии разрыва, как правило, представляют собой перекрещивающиеся надрезы или окружное углубление на вогнутой поверхности диска, определяющие зону разрыва. Предохранительный разрывной диск [1] с полученной механической обработкой линией разрыва содержит выгнутую часть и ограничивающую фланцевую зону, окружающую выгнутую часть. Диск с перекрещивающимися надрезами образует четыре лепестка, которые выгибаются наружу при разрыве диска. В результате этого также предотвращается разделение лепестков на части.

Разрушаемая мембрана [2] выполнена с утолщением в центральной части. По периметру утолщения выполнена канавка в виде неполного кольца с прямолинейными концевыми участками, образующими гибкую радиальную перемычку в периферийной части диска. На радиусе прохождения кольцевой канавки дополнительно выполнено не менее одной гибкой радиальной перемычки, образованной прямолинейными концевыми участками. Перемычки распределены равномерно. Дополнительные прямолинейные канавки соединяют кольцевые канавки друг

с другом через центр диска. При разрушении мембраны образуется несколько одинаковых частей, каждая из которых прогибается по своей радиальной перемычке и зависит на ней, не образуя осколков. Однако наличие кольцевых и дополнительных прямолинейных канавок для упорядочения процесса разрушения мембраны не обеспечивает надежность безосколочного раскрытия мембраны из-за неоднородности микроструктуры металла, влияющей на концентрацию напряжений в канавках.

Устройство [3] содержит четыре треугольных ножевых сегмента, расположенных под прямым углом друг к другу, имеющих заостренные кромки. После срабатывания устройства отделившаяся часть мембраны под действием инерционных сил уносится потоком рабочей среды в систему, что в ряде случаев может привести к выходу из строя защищаемого оборудования.

В МПУ [4] надежность срабатывания повышена за счет полного открытия мембраны. Куполообразная мембрана зажата между фланцами. К фланцу с вогнутой стороны мембраны закреплен разрушающий элемент, выполненный в виде пересекающихся вдоль продольной оси четырех плоских ножей. Периферийные точки ножей расположены в плоскости разъема на окружности расточки фланцев. Режущие кромки ножей выполнены в виде боковых сторон и меньшего основания трапеции. Точка пересечения периферийной стороны трапеции с меньшим основанием расположена между плоскостью разъема и поверхностью обратного прогиба мембраны. Точка пересечения другой стороны трапеции с её меньшим основанием расположена в плоскости разъема. Периферийные боковые стороны трапеции обеспечивают разрезание периферийной части, но с образованием осколков.

Проблема исключения образования осколков при разрушении мембраны решалась в продукции компании BS&B Safety Systems, Inc. US путем разрыва мембраны по предварительно ослабленному сечению с использованием удерживающего шарнира, расположенного вне зоны ослабленного сечения [5]. Это также не позволяет обеспечить надежность безосколочного раскрытия мембраны из-за неоднородностей микроструктуры металла.

Наиболее близким к нашей конструкции является МПУ [6]. Устройство содержит хлопающую мембрану, зажатую кольцевой частью между двумя фланцами. Имеется режущее средство крестообразной формы с четырьмя плоскими ножами. Лопастей ножей жестко закреплены сварным соединением на внутренней стенке верхнего зажимного фланца. При потере устойчивости мембрана схлопывается и разрезается ножами на четыре лепестка. Под воздействием газодинамической струи из-за высокой турбулентности газового потока лепестки отрываются по кромке зажима. Опасность осколков в том, что они могут повредить, засорить трубопровод и даже воспламенить среду, особенно в местах изгиба трубопровода.

Аналогичная описанной выше конструкция МПУ (ООО «Лаборатория мембранных предохранительных устройств» (Москва) имеет точность срабатывания  $\pm 5 - 10\%$  в рабочей газовой среде [7]. Испытания такой конструкции, проведенные нами, показали образование осколков при разрезании сработавшей мембраны четырьмя ножами. Кроме того, известные МПУ с ножами является одноразовыми. После срабатывания хлопающей мембраны они утилизируются.

### 3. Основные меры обеспечения безосколочного срабатывания МПУ.

Безосколочность срабатывания в разработанном МПУ обеспечивается повышением прочности сцепления разрезанных лепестков хлопающей мембраны по линии зажима кольцевой части. Разрезание хлопающей мембраны при её прогибе, по крайней мере, на шесть лепестков приводит к уменьшению кривизны участков сцепления лепестков по линии зажима кольцевой части мембраны и, как следствие, к уменьшению напряжения и повышению прочности сцепления. Режущим кромкам ножей придана пилообразная форма, что увеличивает давление разрезания хлопающей мембраны на лепестки при её срабатывании.

Дополнительным техническим результатом является возможность многообразного использования зажимных фланцев при замене сварного соединения ножей на разборное крепление.

Как показали проведённые эксперименты, шесть ножей с кромками пилообразной формы обеспечивают при срабатывании эффективное разрезание мембраны на шесть лепестков. Лепестки отклоняются от центральной оси и удерживаются по линии зажима кольцевой части мембраны без образования осколков. Таким образом, увеличение количества ножей повышает надёжность безосколочного срабатывания мембраны.

### 4. Описание конструкции.

Мембранное предохранительное устройство показано на рисунке 1. Оно содержит хлопающую мембрану 1, выполненную из листового проката. Кольцевая часть 2 хлопающей мембраны 1 по окружности зажата крепёжными элементами (на чертеже не показаны) между верхним зажимным фланцем 3 и нижним зажимным фланцем 4, в которых выполнены крепёжные отверстия 5 и 6.

В нижнем зажимном фланце 4 выполнена кольцевая проточка 7. Напротив вогнутой части хлопающей мембраны 1 на расстоянии прогиба мембраны при её срабатывании под воздействием расчетного критического давления расположено режущее средство, содержащее, по крайней мере, шесть ножей, расположенных радиально вокруг центральной оси (рисунок 2). Каждый нож выполнен в форме прямоугольного треугольника, больший катет которого имеет режущую кромку пилообразной формы. Другой катет снабжен двумя прямоугольными выступами для крепления в кольцевой проточке 7 нижнего зажимного фланца 4 и в соответствующем пазу стопорного прижимного кольца. В нём выполнены пазы (по числу ножей) и крепёжные отверстия на одной оси с крепёжными отверстиями 5, 6 в верхнем и нижнем зажимных фланцах 3, 4 (рисунок 1). При сборке МПУ нож выступом 14 вставляют в проточку 7, а выступом 15 — в паз стопорного прижимного кольца (рисунок 3). Это выполняется для каждого ножа.

При повышении давления до критического, хлопающая мембрана теряет устойчивость, схлопывается и под дополнительным воздействием газодинамической струи эффективно разрезается ножами на шесть лепестков, рисунок 4. Лепестки отклоняются от центральной оси МПУ и удерживаются по кромке зажима кольцевой части хлопающей мембраны.

Хлопающая мембрана изготовлена на установке, разработанной авторами [8]. В оснастке установки имеется шток с грузом. Он поднимается струбциной относительно плоскости ленточной заготовки на высоту, меньшую заданной высоты

купола мембраны. Под воздействием сжатого воздуха купол мембраны соприкасается с контактным диском и поднимает груз на заданную высоту. Высота определяется оптоэлектронным датчиком положения, который управляет пороговым элементом. Изменением величины груза и высоты подъема купола мембраны под воздействием груза формируется мембрана с требуемым значением критического давления.

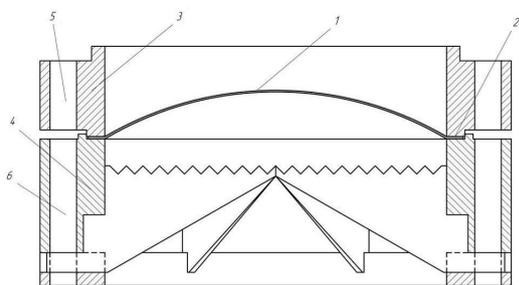


Рисунок 1

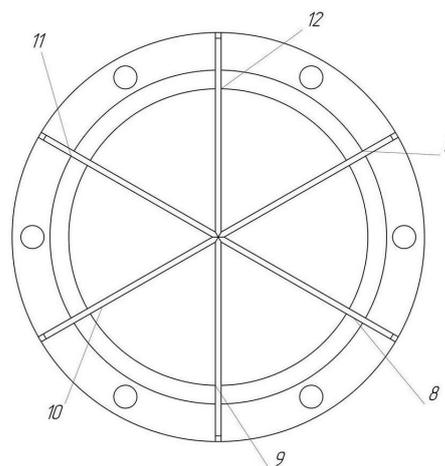


Рисунок 2

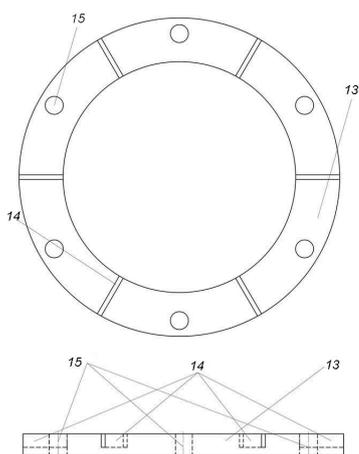


Рисунок 3



Рисунок 4

Используемая хлопающая мембрана имеет следующие основные характеристики:

- точность срабатывания 2–4%;
- диапазон срабатывания 1–50 кГ/см;
- диапазон размеров 25–350 мм.

Все процессы изготовления, прогнозирования давления срабатывания, циклические, температурные и контрольные разрушающие испытания выполняются под управлением автоматизированного компьютерного диагностического комплекса.

Результаты лабораторных испытаний разработанного МПУ показали соответствие требуемым параметрам. Режущие кромки ножей выдерживают несколько срабатываний. Их замена возможна благодаря разборной конструкции мембранного узла. Это обеспечивает многоразовое использование зажимных дисков и приводит к экономии расходов на эксплуатацию МПУ. Изготовлена техническая документация, устройство готово к использованию.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке темы № 1879 базовой части № 213.01-11/2014-29 госзадания № 2014/174.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] RU 2507428 С2, 6 МПК F16K 17/16, опубл. 20.12.2014, Файк Корпорейшн, (US).
- [2] RU 2317462 С1, 6 МПК F16K 17/16, опубл. 20.02.2008.
- [3] US 4394926, 3 МПК F16K 17/40, опубл. 26.07.1983, BS&BSafety Systems,Inc., US.
- [4] RU 1601447 А1, 5МПК F16K 17/16, опубл. 23.10. 1990.
- [5] US 5167337, 6 МПК F16K 17/16 , 01.12.1992, BS&BSafety Systems,Inc., US.
- [6] Предохранительные мембраны в сравнении. Хлопающие и универсальные мембраны. Конструкция с ножом, тип ВТ–УКВ,IG–УКВ–LS, Табл. 1. Rembe GmbH SAFETY+CONTROL. The Chemical Journal, июнь-июль 2011.
- [7] Мембраны хлопающие (МХ). Каталог. Основные характеристики. ООО «Лаборатория мембранных предохранительных устройств», Москва.
- [8] RU 2353456 6МПК В21D22/10, опубл. 27.04.2009.

**Belikov N. V., Kakurin A. M., Yudin A. S.** *The development of membrane safety devices designs and methods of the experiment.* The design and operation of membrane safety devices with bursting discs are presented. Increased safety of operation of the device is ensured by shatterproof destruction of the membrane.

# ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СОСТАВНЫХ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИНАХ

Белубекян М. В., Саноян Ю. Г.

*Институт механики НАН Республики Армения, Ереван*

В работе исследованы интерфейсные изгибные колебания, состоящей из двух частей, составной прямоугольной пластины. Края пластины шарнирно закреплены. Для частных случаев исследованы условия существования локализованных колебаний, а так же рассчитаны формы и частоты колебаний в зависимости от физических свойств и размеров составной пластины.

Существование краевых изгибных колебаний в окрестности свободного края в полубесконечной пластине было установлено в работе [1]. Исследования локализованных колебаний пластин с другими краевыми условиями и с применением уточненной теории имеется в работах [2, 3]. Интерфейсные поперечные колебания, бегущих вдоль линии контакта двух полубесконечных, жестко связанных пластин, представлены в работах [4, 5, 6]. К настоящему времени изучение локализованных колебаний ограничивается исследованиями условий их существования в бесконечных, полубесконечных либо неограничено протяженных в одном направлении пластин. В этой работе предпринята попытка исследования форм колебаний и физических условий их существования для пластин конечных размеров. Пластина длиной  $a$ , шириной  $b$  и толщиной  $h$  расположена срединной плоскостью в координатной плоскости  $z = 0$  (рис. 1). Ось  $y$  лежит в плоскости разделяющей пластины на части. В рамках теории Кирхгофа изгиба тонких пластин уравнения,

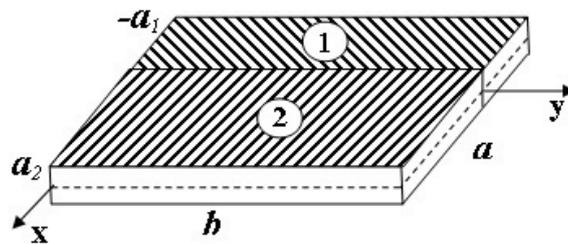


Рисунок 1 – Составная пластина в прямоугольной системе координат.

описывающие прогибы частей составной пластины  $w_i$  ( $i = 1, 2$ ), имеют следующий вид

$$D_1 \Delta^2 w_1 + \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0, -a_1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq b, \quad (1)$$

$$D_2 \Delta^2 w_2 + \rho_2 h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0, 0 \leq x \leq a_2, 0 \leq y \leq b, \quad (2)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\rho_i$ ,  $D_i$  — плотности материалов и изгибных жесткостей частей пластины,  $\nu_i$  — коэффициенты Пуассона. Условия шарнирного закрепления

пластины состоят в равенстве нулю перемещений и изгибающих моментов на ее краях

$$\begin{aligned} w_1 = 0, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, x = -a_1, \\ w_2 = 0, \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0, x = a_2, w_i = 0, \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = 0, y = 0, b, \end{aligned} \quad (3)$$

На стыке частей пластины приравняем перемещения, производные перемещений по перменной  $x$ , изгибающие моменты и перерезывающие силы

$$\begin{aligned} w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2 - \nu_1) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2 - \nu_2) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2}, \quad \text{при } x = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы уравнений (1) в перечисленных выше работах были выполнены для полубесконечных, бесконечных пластин либо для пластин, дисперсионные уравнения которых имели решение в замкнутом виде. Решение однородных уравнений (1), удовлетворяющих краевым условиям (3), представим в следующем виде

$$w_1(x, y) = e^{i\omega t} \left( A_1 \frac{\text{sh}(\lambda_n(x + a_1)p_{11})}{\text{sh}(\lambda_n a_1 p_{11})} + C_1 \frac{\text{sh}(\lambda_n(x + a_1)p_{12})}{\text{sh}(\lambda_n a_1 p_{12})} \right) \sin(\lambda_n y), \quad (5a)$$

$$w_2(x, y) = e^{i\omega t} \left( A_2 \frac{\text{sh}(\lambda_n(x - a_2)p_{21})}{\text{sh}(\lambda_n a_2 p_{21})} + C_2 \frac{\text{sh}(\lambda_n(x - a_2)p_{22})}{\text{sh}(\lambda_n a_2 p_{22})} \right) \sin(\lambda_n y), \quad (5b)$$

где:  $\omega$  — частота колебаний

$$p_{11} = \sqrt{1 - \eta_1}, p_{12} = \sqrt{1 + \eta_1}, p_{21} = \sqrt{1 - \eta_1 k}, p_{22} = \sqrt{1 + \eta_1 k}, \lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \quad (6)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_n^4 D_1} \omega^2}, \eta_2 = \eta_1 k, \mu = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \gamma = \frac{D_2}{D_1}, k = \frac{\mu}{\gamma} \quad (7)$$

Подставляя (5) в условия (4), и обозначив  $\alpha_1 = \lambda_n a_1, \alpha_2 = \lambda_n a_2$ , получим систему линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными  $A_2, C_2, A_1, C_1$

$$\begin{cases} A_2 + C_2 + A_1 + C_1 = 0, \\ A_2 \gamma (p_{21}^2 - \nu_2) + C_2 \gamma (p_{22}^2 - \nu_2) + A_1 (p_{11}^2 - \nu_1) + C_1 (p_{12}^2 - \nu_2) = 0, \\ A_2 \gamma (p_{21}^2 - \nu_2) + C_2 \gamma (p_{22}^2 - \nu_2) + A_1 (p_{11}^2 - \nu_1) + C_1 (p_{12}^2 - \nu_2) = 0, \\ A_2 \gamma p_{21} (p_{21}^2 - 2 + \nu_2) \text{cth}(\alpha_2 p_{21}) + C_2 \gamma p_{22} (p_{22}^2 - 2 + \nu_2) \text{cth}(\alpha_2 p_{22}) - \\ - A_1 p_{11} (p_{11}^2 - 2 + \nu_1) \text{cth}(\alpha_1 p_{11}) - C_1 p_{12} (p_{12}^2 - 2 + \nu_1) \text{cth}(\alpha_1 p_{12}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Приравнявая нулю определитель системы (8) и учитывая  $\eta_2$  из (7), получим дисперсионное уравнение для  $\eta_1$ . Для составной пластины с одинаковыми физическими значениями параметров дисперсионное уравнение сводится к известному уравнению частот для шарнирно опертой пластины

$$\sin(\lambda_n a \sqrt{1 - \eta_1}) = 0 \quad (9)$$

При этих условиях существование интерфейсной волны невозможно. В большинстве остальных случаев дисперсионное уравнение невозможно свести к явному виду и, поэтому, исследование условий существования волн представляет трудную задачу. Для существования интерфейсных колебаний необходимо, чтобы  $\eta_1$  и  $\eta_2$  имели вещественные значения и были меньше единицы. Рассмотрим случай, когда жесткость пластины 2 намного больше жесткости пластины 1,  $D_2 \gg D_1$  или  $\gamma \rightarrow \infty$ . Тогда последние два уравнения (8) преобразуются в уравнения с двумя неизвестными  $A_2$  и  $C_2$

$$\begin{cases} A_2(p_{21}^2 - \nu_2) + C_2(p_{22}^2 - \nu_2) = 0 \\ A_2 p_{21}(p_{21}^2 - 2 + \nu_2) \operatorname{ch}(\alpha_2 p_{21}) \operatorname{sh}(\alpha_2 p_{22}) + C_2 p_{22}(p_{22}^2 - 2 + \nu_2) \operatorname{ch}(\alpha_2 p_{22}) \operatorname{sh}(\alpha_2 p_{21}) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом условие существования интерфейсных колебаний свелось к условию существования корня детерминанта однородной системы уравнений (10) относительно неизвестной  $\eta_1$  и условиям  $0 < \eta_i < 1$

$$p_{22}(p_{21}^2 - \nu_2)(p_{22}^2 - 2 + \nu_2) \operatorname{th}(\alpha_2 p_{21}) - p_{21}(p_{22}^2 - \nu_2)(p_{21}^2 - 2 + \nu_2) \operatorname{th}(\alpha_2 p_{22}). \quad (11)$$

Рассмотрим пластину состоящую из двух частей с равными сторонами  $a_1 = a_2$ . Найдем значения  $a_2$ , при которых  $\eta_2 < 1$ . Нетрудно проверить, что уравнение (11) имеет корень  $\eta_2 = 1$  ( $p_{21} = 0$ ), который приводит к тривиальному решению. Разделим (11) на  $p_{21}$ , и устремляя  $\eta_2$  к единице, в пределе получим

$$\sqrt{2}\nu_2^2\alpha_2 + (2 - \nu_2)^2 \operatorname{th}(\sqrt{2}\alpha_2) = 0 \quad (12)$$

Если уравнение (12) имеет решением критическое значение  $\alpha_{2*}$ , тогда при  $\alpha_2 > \alpha_{2*}$  уравнение (11) имеет решение  $\eta_2 < 1$  (т.е. интерфейсная волна существует). В приближении  $\operatorname{th}(\sqrt{2}\alpha_2) \approx 1$  из (11) получим

$$\alpha_{2*} \approx \frac{(2 - \nu_2)^2}{\nu_2^2 \sqrt{2}}, a_2 > \frac{(2 - \nu_2)^2}{\nu_2^2 \sqrt{2} \lambda_n} \quad (13)$$

Для вычисления формы изгибных колебаний необходимо определить корень  $\eta_1$  уравнения (11), при заданных значениях  $k$ ,  $\alpha_2$ ,  $\nu_2$ . Затем для произвольного значения  $C_2$  найдем из первого уравнения системы (10) постоянную  $A_2$

$$A_2 = -C_2 \frac{p_{22}^2 - \nu_2 \operatorname{cth}(\alpha_2 p_{21})}{p_{21}^2 - \nu_2 \operatorname{cth}(\alpha_2 p_{22})} \quad (14)$$

Подставляя полученное значение  $A_2$  в первые два уравнения однородной системы (8) получим обыкновенную систему уравнений с неизвестными  $A_1$ ,  $C_1$  в виде

$$\begin{cases} A_1 + C_1 = \xi_1 C_2, \\ A_1 p_{11} \operatorname{cth}(\alpha_1 p_{11}) + C_1 p_{12} \operatorname{cth}(\alpha_1 p_{12}) = \xi_2 C_2, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\xi_1 = \frac{p_{22}^2 - 1}{p_{21}^2 - 1} - 1$ ,  $\xi_2 = p_{22} \operatorname{cth}(\alpha_2 p_{22}) - \frac{p_{22}^2 - 1}{p_{21}^2 - 1} p_{21} \operatorname{cth}(\alpha_2 p_{21})$ . Рассмотрим влияние коэффициентов Пуассона на изгибные формы колебания пластин. Для начала рассчитаем формы для удлиненных пластин с  $a_1 = a_2 = 20$ ,  $b = 1$ ,  $\gamma = 100000$ ,  $k = 1$ ,  $n = 5$

в зависимости от  $\nu_1$  и  $\nu_2 = 0.5 - \nu_1$ . На рис. 2 представлены формы колебаний при  $\nu_1 = 0$  и  $\nu_1 = 0.45$ . Структура формы изгибной волны лучше видна на двумерном графике  $W(x, 0)$  представленном на рис. 3. На этом графике критическая кривая 3 с  $\nu_1 = 0.4094$ , для которой  $\eta_1$  и  $\eta_2$  равны единице, состоит из прямых линий. Эти линии разделяют гармонические колебания (состоящих из ветвей вогнутых вверх) от интерфейсных колебаний (вогнутых вниз). А интерфейсные колебания постепенно с уменьшение  $\nu_1$  локализуются вдоль линии стыка частей пластины. Затухания в частях пластины отличаются незначительно несмотря на то, что изгибная жесткость второй части ее значительно больше первой. Быстрое, скачкообразное увеличение амплитуды колебаний при  $x = 0$ , при выделении этой области, на самом деле имеет плавный характер.

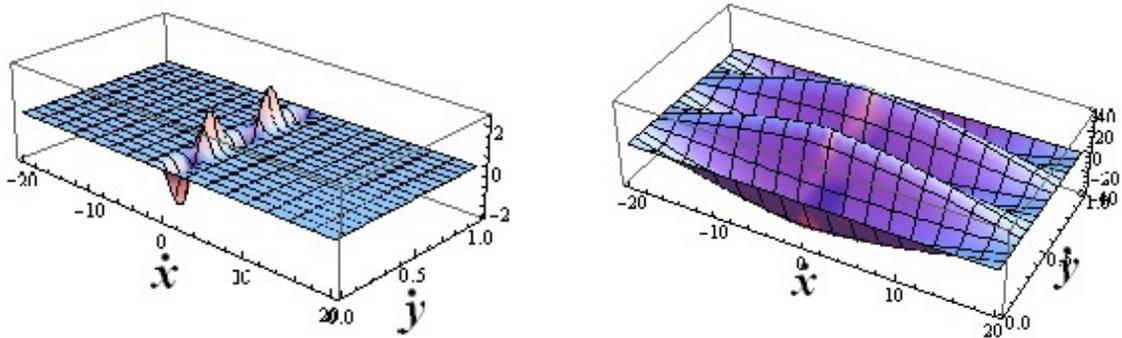


Рисунок 2 – Формы изгибных колебаний при  $\nu_1 = 0$  и  $\nu_1 = 0.45$ .

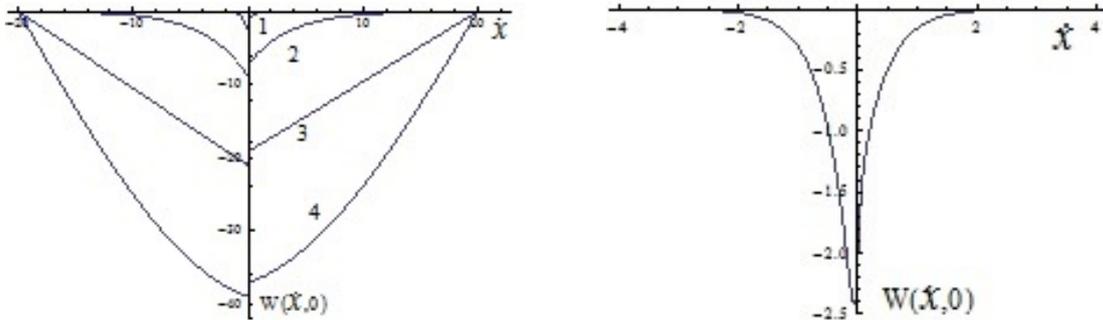


Рисунок 3 – Слева — формы колебаний при  $\nu_1 = 0(1), 0.3(2), 0.4094(3)$  и  $0.45(4)$ . Справа — при  $\nu_1 = 0$  в увеличенном масштабе

Рассмотрим теперь случай, когда свойства частей пластины отличаются только изгибными жесткостями:  $\gamma \neq 1$ . Установим влияние длины  $a_1$  на интерфейсные колебания пластинок. На рис. 4 представлен график зависимости величины  $\eta_1$  от отношения изгибных жесткостей при значениях относительных длин частей пластины 5, 10, 20, построенный согласно дисперсионному уравнению. Для областей кривых, в которых  $0.579434 < \gamma < 1.7259$  (1),  $0.315484 < \gamma < 3.16974$  (2),  $0.166808 < \gamma < 5.994899$  (3) форма изгибных колебаний в каждой части пластины близка к синусоидальной. Вне этих областей при  $\eta_1 < 1$  колебания имеют затухающий характер и с увеличением  $\gamma$  становятся локализованными.

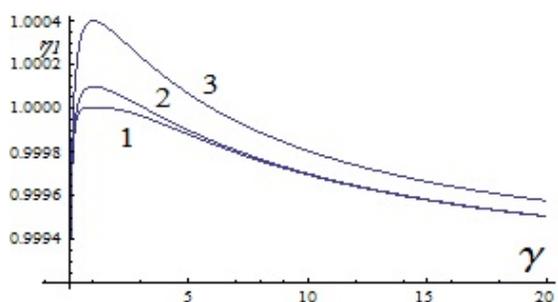


Рисунок 4 – Зависимость критических значений  $\eta_1$  от  $\gamma$  при  $a_1 = 40(1), 10(2), 5(3)$ .

**Заключение.** Получено решение задачи о колебаниях состоящей из двух частей шарнирно закрепленной пластины. Для больших значений отношения жесткости второй части пластины к жесткости первой получены аналитические формулы для расчета форм изгибных колебаний пластин и найдены условия существования интерфейсных волн от соотношения длин.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коненков Ю. К. Об изгибных волнах рэлеевского типа // Акустический журнал. 1960. № 6(1). С. 124–126.
- [2] Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах. Проблемы механики деформируемого твердого тела // Институт механики НАН РА Армении. 1997. С. 79–96.
- [3] Белубекян М. В. Учет поперечных сдвигов в задаче изгибных колебаний пластинки, локализованных вдоль свободной кромки // Сб. Оптимальное управление и прочность механических систем. Ереван. 2002. С. 130–133.
- [4] Зильберглейт А. С. Сулова И. Б. Контактные волны в тонких пластинах // Акустический журнал. 1983. № 29(2). С. 1186–1191.
- [5] Каплунов Ю. Д. Косович Е. Л. Мухомодьяров Р. Р. Сорокина О. В. / Явные модели распространения изгибных краевых и интерфейсных волн в тонких изотропных пластинах // Изв. Саратовского университета. Нов. Сер. 2013. № 13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1, ч. 1. С. 56–63.
- [6] Вильде М. В. Каплунов Ю. Д. Косович Л. Ю. / Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматгиз, 2010. 380 с.

**Belubekyan M. V., Sanoyan Yu. G.** *A interfacial wave vibration of freely supported compound plates.* Interfacial vibrations of a rectangular compound plate are investigated. The edges of the plates are freely supported. For special cases have been studied the conditions of existence of localized vibrations, and also the form and frequency of the vibrations depending on the physical properties and dimensions of the composite plate.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПАВ  
В ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
СТРУКТУРАХ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Белянкова Т. И.<sup>1,2</sup>, Ворович Е. И.<sup>3</sup>, Тукодова О. М.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>3</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

В работе представлены результаты исследований особенностей распространения поверхностных SH-волн в пьезоэлектрической структуре с преднапряженным функционально-градиентным покрытием, физические свойства которого меняются кусочно-непрерывным образом. Предполагается, что начально деформированное состояние структуры однородно и наводится за счет действия начальных механических напряжений. Исследования проводятся в лагранжевой системе координат, использованы линеаризованные уравнения теории электроупругости. Установлены закономерности изменения структуры поверхностного волнового поля в зависимости от характера покрытия, начальных механических воздействий, сочетания его геометрических и физических параметров.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача о распространении SH-волн, движущихся в направлении  $x_1$  по поверхности составной преднапряженной пьезоактивной среды. Составная среда представляет собой однородное полупространство  $x_2 \leq 0$ ,  $|x_1|$ ,  $|x_3| \leq \infty$  с неоднородным покрытием  $0 \leq x_2 \leq H$ , изменение свойств которого определено выражениями:

$$\rho^{(1)} = \rho_0 f_\rho^{(1)}(x_2), \quad c_{ij}^{(1)} = c_{ij}^0 f_c^{(1)}(x_2), \quad e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^0 f_e^{(1)}(x_2), \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^0 f_\varepsilon^{(1)}(x_2), \quad (1)$$

$\rho_0$ ,  $c_{ij}^0$ ,  $e_{ij}^0$ ,  $\varepsilon_{ij}^0$  — соответственно плотность и упругие модули «опорного» материала. Предполагается, что опорный материал покрытия и полупространства в естественном состоянии (ЕС) совпадают:  $\rho_0 = \rho_0^{(2)}$ ,  $c_{ij}^0 = c_{ij}^{0(2)}$ ,  $e_{ij}^0 = e_{ij}^{0(2)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^{0(2)}$  и  $f_\rho^{(2)} = f_c^{(2)} = f_e^{(2)} = f_\varepsilon^{(2)} = f^{(2)} = 1$ . В качестве материала полупространства использован пьезоэлектрик класса 6mm, ось симметрии которого направлена вдоль оси  $x_3$ . Векторы поляризации полупространства и покрытия либо совпадают ( $e_{15}^{0(1)} = e_{15}^{0(2)}$ ), либо противоположно направлены ( $e_{15}^{0(1)} = -e_{15}^{0(2)}$ ). Начально-деформированное состояние (НДС) составляющих структуры однородно и наводится за счет действия начальных механических напряжений, внешние начальные электрические воздействия отсутствуют [1–3]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T, \quad \mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad v_i = \text{const} \quad (2)$$

здесь  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-векторы точки среды в начально-деформированном и естественном состоянии, соответственно,  $v_i = 1 + \delta_i$ ,  $\delta_i$  — относительные удлинения волокон, направленных в естественной конфигурации вдоль осей, совпадающих с декартовыми координатами,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Исследования проводятся в лагранжевой (материальной) системе координат. Гармонические колебания вызваны действием удаленного источника, режим предполагается установившимся, динамический процесс удовлетворяет условиям:

$$u_1^{(n)} = u_2^{(n)} = 0, \quad \partial/\partial x_3 = 0, \quad u_k^{(n)} = u_k^{(n)}(x_1, x_2), \quad u_3^{(0)} = 0, \quad k = 3, 4, \quad n = 0, 1, 2 \quad (3)$$

индекс  $n = 0$  отвечает вакууму,  $n = 2$  — полупространству или  $n = 1$  — покрытию.

Постановка краевых задач, решение и результаты исследований приведены в безразмерных параметрах [1–3]:  $l' = l/h$ ,  $\rho^{(n)} = \rho^{(n)}/\rho_0^{(2)}$ ,  $c_{ij}^{(n)} = c_{ij}^{(n)}/c_{44}^{0(2)}$ ,  $e_{ij}^{(n)} = e_{ij}^{(n)}\xi/c_{44}^{0(2)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}\varepsilon^{(0)}\xi^2/c_{44}^{0(2)}$ ,  $\xi = 10^{10}B/m$ ,  $\varepsilon^{(0)}$  — диэлектрическая проницаемость вакуума. В работе использованы безразмерные частоты  $\kappa_2 = \omega h/V_S^{0(2)}$  и  $\kappa_{2e} = \omega h/V_{Se}^{0(2)}$ ,  $V_S^{0(2)}$  и  $V_{Se}^{0(2)}$  — скорости сдвиговой волны полупространства без учета и с учетом пьезоэлектрических свойств в ЕС. Далее штрихи опускаем.

В рамках принятых предположений задача о колебаниях составной преднапряженной электроупругой среды с учетом (2), (3) описывается уравнениями [1–3]:

$$\sum_{k=1}^2 \left[ \theta_{k33k}^{(n)} u_{3,kk}^{(n)} + \theta_{k34k}^{(n)} u_{4,kk}^{(n)} \right] + \sum_{k=3}^4 \theta_{23k2}^{(n)} u_{k,2}^{(n)} = \rho_0^{(n)} \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^2 \left[ \theta_{k43k}^{(n)} u_{3,kk}^{(n)} + \theta_{k44k}^{(n)} u_{4,kk}^{(n)} \right] + \sum_{k=3}^4 \theta_{24k2}^{(n)} u_{k,2}^{(n)} = 0, \quad \sum_{k=1}^2 u_{4,kk}^{(0)} = 0 \quad (5)$$

с граничными условиями для электрически свободной поверхности:

$$\Theta_{23}^{(1)} \Big|_{x_2=H} = 0, \quad \Delta_2^{(1)} \Big|_{x_2=H} = \Delta_2^{(0)} \Big|_{x_2=H}, \quad u_4^{(1)} \Big|_{x_2=H} = u_4^{(0)} \Big|_{x_2=H}, \quad (6)$$

для металлизированной поверхности:

$$\Theta_{23}^{(1)} \Big|_{x_2=H} = 0, \quad u_4^{(1)} \Big|_{x_2=H} = 0, \quad (7)$$

на границе раздела сред ( $x_2 = 0$ ):

$$\mathbf{u}^{e(1)} \Big|_{x_2=0} = \mathbf{u}^{e(2)} \Big|_{x_2=0}, \quad \Theta_{23}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = \Theta_{23}^{(2)} \Big|_{x_2=0}, \quad \Delta_2^{(1)} \Big|_{x_2=0} = \Delta_2^{(2)} \Big|_{x_2=0}, \quad (8)$$

на бесконечности:

$$\mathbf{u}^{e(2)} \Big|_{x_2 \rightarrow -\infty} \downarrow 0, \quad \mathbf{u}^{e(0)} \Big|_{x_2 \rightarrow \infty} \downarrow 0. \quad (9)$$

В формулах (4)–(9)  $\mathbf{u}^{e(n)} = \{u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}\}$  — расширенный вектор перемещений,  $\rho^{(n)}$  — плотность материала  $n$ -ой составляющей пьезоэлектрической структуры. Компоненты линеаризованных тензора напряжений  $\Theta^{(n)}$  и вектора индукции  $\Delta^{(n)}$  с учетом (2) имеют вид:

$$\Theta_{lk}^{(n)} = c_{lksp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)*} \varphi_{,p}^{(n)}, \quad \Delta_l^{(n)} = e_{lsp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} - \varepsilon_{lp}^{(n)*} \varphi_{,p}^{(n)} \quad (10)$$

$$c_{lksp}^{(n)*} = P_{lp}^{(n)} \delta_{ks} + \nu_k^{(n)} \nu_s^{(n)} c_{lksp}^{(n)\times}, \quad e_{lsp}^{(n)*} = \nu_s^{(n)} e_{lsp}^{(n)}, \quad \varepsilon_{lp}^{(n)*} = \delta_{lp} \varepsilon_0 \nu_1^{(n)} \nu_2^{(n)} \nu_3^{(n)} \left( \nu_l^{(n)} \right)^{-2} + \beta_{lp}^{(n)}$$

компоненты тензора Кирхгофа  $P_{lp}^{(n)}$ , а также упругие константы  $c_{lksp}^{(n)\times}$ , участвующие в (10), представляются производными термодинамического потенциала  $\chi$ , зависят как от свойств материала, так и от вида начального напряженного состояния среды [1–3],  $e_{lksp}^{(n)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(n)}$  — компоненты тензоров пьезоэлектрических модулей и диэлектрических проницаемостей. В (4)–(6) использованы обозначения [1–3].

В рамках настоящей работы различаем две задачи:

**задача I** — со свободной поверхностью, описывается уравнениями движения (4), (5) с граничными условиями (6), (8) и (9);

**задача II** — с металлизированной поверхностью, описывается уравнениями движения (4), (5) с граничными условиями (7)–(9).

**2. Дисперсионные свойства пьезоэлектрической структуры с покрытием.** Исследования проводились для пьезоэлектрической структуры на основе ZnO с параметрами [3]. Рассматривались «акустически однородные» среды с равным изменением параметров материала покрытия, т. е. с учетом (1) справедливы соотношения:

$$f_{\rho}^{(1)}(x_2) = f_c^{(1)}(x_2) = f_e^{(1)}(x_2) = f_{\varepsilon}^{(1)}(x_2) = f^{(1)}(x_2), \quad (11)$$

и «акустически неоднородные» среды:

$$f_{\rho}^{(1)}(x_2) \neq f^{(1)}(x_2), \quad f_c^{(1)}(x_2) = f_e^{(1)}(x_2) = f_{\varepsilon}^{(1)}(x_2) = f^{(1)}(x_2), \quad (12)$$

Изменение свойств покрытия полагалось кусочно-непрерывным:

$$f_s^{(1)}(x_2) = f_s^{(1k)} \Big|_{x_2 \in [h_k, h_{k+1}]}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (H = h_1 > h_2 > \dots > h_M = 0).$$

На рисунках 1–4 представлено изменение скорости ПАВ для структуры с двухслойным покрытием ( $M = 2$ ), параметры внешнего слоя совпадают с полупространством  $\gamma^1 = f^{(11)}/f^{(2)}$ , параметры внутреннего слоя моделируют мягкое или жесткое включение  $\gamma^2 = f^{(12)}/f^{(2)}$  с равной или различной интенсивностью изменения плотности  $\gamma_{\rho}^2 = f_{\rho}^{(12)}/f^{(2)}$ ,  $h_2 = 0.5H$ .

На рисунке 1 показано влияние жесткости внутреннего слоя на скорости ПАВ ( $V_F^{(1)}/V_{Se}^{0(2)}$ , где  $V_F = \kappa_2/\xi$ ,  $\xi$  — решение дисперсионного уравнения) для **задачи II**. Приведены частотные зависимости ПАВ для «акустически» однородной структуры (11) в ЕС при  $e_{15}^{0(1)} = e_{15}^{0(2)}$ . Цифрами 1, 2, 3, 4 отмечены кривые  $\gamma^2 = 1, 0.4, 0.2, 5$ ,  $\gamma^1 = 1$ .

На рисунке 2 показано влияние характера деформации при НДС  $1x_1$  (рисунки а, б) и  $1x_2$  (рисунки в, г) неоднородного покрытия на скорости ПАВ для **задачи II**. Здесь  $1x_i$  означает одноосное НДС вдоль оси  $x_i$ , т. е.  $P_{ii} = P$ ,  $P_{jj} = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ ). Цифры на рисунках отвечают неоднородностям покрытия (рисунки 1) в случае сжатия  $v = 0.97$  (рисунки а, в) и растяжения  $v = 1.03$  (рисунки б, г),  $\gamma^1 = 1$ ,  $e_{15}^{0(1)} = e_{15}^{0(2)}$ .

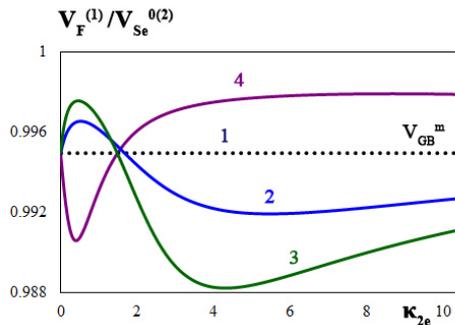


Рисунок 1 – Влияние жесткости внутреннего слоя на относительные фазовые скорости

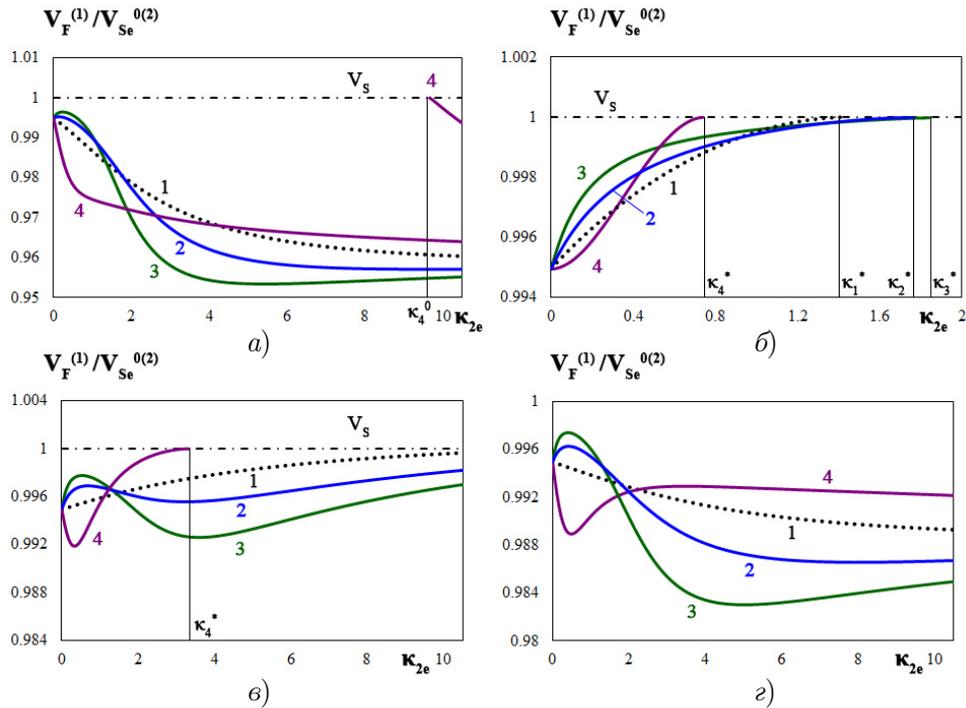


Рисунок 2 – Влияние характера НДС покрытия на относительные фазовые скорости

На рисунке 3 приведены частотные зависимости фазовых скоростей для **задач I** (сплошные линии) и **II** (штриховые линии) однородного  $\gamma^2 = 1$  (рисунок *a*) и неоднородного покрытия с мягким включением  $\gamma^2 = 0.4$  (рисунок *б*) при одноосных НДС в случае  $e_{15}^{0(1)} = -e_{15}^{0(2)}$ . Цифрами 1, 3 на рисунках отмечены НДС  $1x_1$  и  $1x_3$  ( $v = 1.03$ ), цифрой 2 – кривые с НДС  $1x_2$  ( $v = 0.97$ ).

Рисунок 4 иллюстрирует влияние величины деформации на скорости ПАВ при НДС  $1x_1$  в «акустически» неоднородном (12) покрытии с жестким внутренним включением ( $\gamma_\rho^2 = 4.99$ ,  $\gamma^2 = 5$ ). Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют деформациям  $v = 1, 1.001, 1.003, 1.03$ , цифрой 0 отмечена кривая «акустически» однородного покрытия с  $\gamma_\rho^2 = \gamma^2 = 5$  в ЕС.

Исследования показали, что влияние НДС как в случае «акустически» однородных, так и особенно в случае «акустически» неоднородных покрытий может

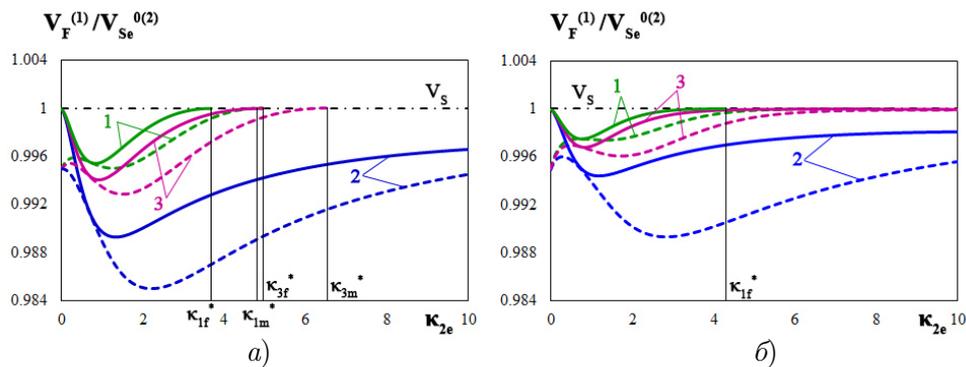


Рисунок 3 – Влияние одноосных НДС покрытия на скорости ПАВ

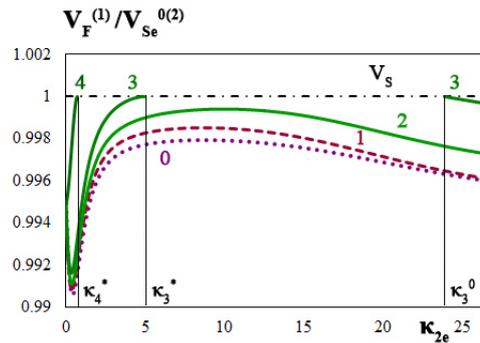


Рисунок 4 – Влияние величины деформации при одноосном НДС  $1x_1$  на скорости ПАВ.  $\gamma_\rho^2 = 4.99$ ,  $\gamma^2 = 5$ ,  $\gamma^1 = 1$ ,  $e_{15}^{0(1)} = e_{15}^{0(2)}$

приводить к существенным изменениям структуры поверхностного волнового поля. Наряду с изменением скорости ПАВ характерно изменение частот  $\kappa_m^*$  и  $\kappa_m^0$ , значение которых зависит как от соотношения геометрических и физических свойств покрытия, так и от вида, величины и характера начальных воздействий.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-08-06074, 14-08-01213, 16-01-00647).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009, 312 с.
- [2] Белянкова Т. И., Богомолов А. С., Ворович Е. И., Калинин В. В., Тукодова О. М. О возможности управления свойствами функционально-ориентированных сегнето-электрических гетероструктур // Вестник Южного научного центра РАН. 2015. Т. 11. № 3. С. 18–29.
- [3] Belyankova T. I., Kalinchuk V. V., Tukodova O. M. Peculiarities of the surface SH-waves propagation in the weakly inhomogeneous pre-stressed piezoelectric structures // Springer Proceedings in Physics. V. 175. Advanced Materials. Manufacturing, Physics. Mechanics and Applications. Springer, 2016. P. 413–429.

**Belyankova T. I., Vorovich E. I., Tukodova O. M.** *SAW propagation in prestressed piezoelectric structures with non-uniform coating.* The paper presents the results of studies of the surface SH-waves propagation in the piezoelectric structure with prestressed functionally graded coating, whose physical properties vary in a piecewise continuous manner. It is assumed that the initial deformed state of the structure is uniform and it is induced by the action of the initial mechanical stresses. The studies are carried out in the Lagrangian coordinate system, the linearized equations of electro-elasticity theory are used. The patterns of change in the structure of the surface wave field are established, depending on the nature of coating, the initial mechanical effects, and the combination of its geometric and physical parameters.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Богачев И. В.<sup>1</sup>, Дударев В. В.<sup>1,2</sup>, Лапина П. А.<sup>1</sup>, Недин Р. Д.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Владикавказский научный центр РАН

Представлена модель защемленной по контуру существенно неоднородной вязкоупругой круговой пластины с использованием гипотез Кирхгофа–Лява. Эффект затухания в вязкоупругом материале учитывается с применением модели стандартного вязкоупругого тела на основе теории комплексных модулей. Обратная задача заключается в идентификации функций мгновенного и длительного модулей пластины с использованием дополнительной информации о значениях функции прогиба на фиксированном радиусе в некотором частотном диапазоне. Разработан специальный итерационный метод на основе метода линеаризации для решения обратной задачи. Проведен набор вычислительных экспериментов по восстановлению монотонных и немонотонных функций мгновенного и длительного модулей.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания в цилиндрической системе координат  $r, \phi, z$  круглой неоднородной вязкоупругой [1] пластины радиуса  $R$  толщины  $H(r)$ , находящейся под действием нагрузки  $q(r)$ . Для моделирования вязкоупругого материала в рамках принципа соответствия заменим в постановке задачи функцию цилиндрической жесткости  $D(r) = \frac{E(r)H(r)^3}{12(1-\nu^2)}$  ( $E(r)$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона) комплексным модулем  $G(r, i\kappa) = \frac{i\omega g(r) + h(r)}{1 + i\omega}$ . Предположим, что комплексный модуль пластины  $G(r, i\kappa)$  является функцией радиальной координаты и частоты. В соответствии с моделью на значения функций  $g(r)$  и  $h(r)$  — мгновенного и длительного модуля накладываются следующие ограничения:  $0 < h(x) < g(x)$ .

Пластина моделируется на основе гипотез Кирхгофа [2], функции смещения представимы в виде

$$u_r = -z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_\phi = 0, \quad u_z = w, \quad (1)$$

где  $w$  — функция прогиба пластины.

Аналогично [3], запишем безразмерное уравнение колебаний пластины в виде:

$$\begin{aligned} (G(r, i\kappa)rw''(r, \kappa))'' - \left(\frac{G(r, i\kappa)w'(r, \kappa)}{r}\right)' - \\ - \nu(G(r, i\kappa)w''(r, \kappa))' + \nu(G(r, i\kappa)w'(r, \kappa))'' - \kappa^4rw(r, \kappa) - kq(r)r = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При записи уравнения использованы следующие безразмерные параметры и переменные  $r = R\tilde{r}$ ,  $w = R\tilde{w}$ ,  $H = H_0\tilde{H}$ ,  $g = g(R)\tilde{g}$ ,  $H_0 = H(R)$ ,

$\tilde{G}(r, i\kappa) = \frac{i\tau\kappa\tilde{g}(r) + \tilde{h}(r)}{1 + i\tau\kappa}$ ,  $\tau = n\sqrt{H_0/\rho R^2}$  (знак тильды в дальнейшем будем опускать),  $\kappa^4 = \rho\omega^2 R^4/H_0$  — безразмерный параметр, характеризующий частоту колебаний,  $k = qR^3/H_0$  — безразмерный коэффициент, характеризующий уровень нагружения.

Будем считать, что пластина жестко закреплена по краю. Граничные условия примут вид:

$$w(1, \kappa) = w'(1, \kappa) = 0. \quad (3)$$

В процессе вывода постановки возникают также дополнительные условия в нуле:

$$w'(0, \kappa) = 0. \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left( \frac{1}{r} w'(r, \kappa) \right)' = 0. \quad (5)$$

В качестве источника колебаний рассмотрим нагрузку, описываемую законом  $q(r) = q\delta(r - r_0)$ , где  $\delta(r)$  — функция Дирака.

В качестве дополнительной информации для постановки обратной задачи будем использовать измеренный прогиб пластины в некотором частотном диапазоне  $[\kappa_1, \kappa_2]$  при  $r = r_0$ :

$$w(r_0, \kappa) = f_\kappa(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (6)$$

**Обратная задача.** Определить неизвестные функции  $h(r)$ ,  $g(r)$ ,  $w(r, \kappa)$ , удовлетворяющие уравнениям и граничным условиям (2)–(5) по дополнительной информации (6).

Заметим, что сформулированная обратная задача в такой постановке является существенно нелинейной и требует специальных методов построения решения [4].

## 2. Итерационный метод решения обратной задачи

Следуя методу линеаризации, представим неизвестные функции в виде разложения по формальному параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} G(r, i\kappa) &= G_0(r, i\kappa) + \varepsilon G^1(r, i\kappa), \quad h(r) = h_0(r) + \varepsilon h^1(r), \\ g(r) &= g_0(r) + \varepsilon g^1(r), \quad w(r, \kappa) = w_0(r, \kappa) + \varepsilon w^1(r, \kappa). \end{aligned} \quad (7)$$

Приведем поэтапное описание разработанного итерационного процесса решения обратной.

Этап 1. Пусть известны  $n - 1$  приближения неизвестных функций  $h_{n-1}(r)$  и  $g_{n-1}(r)$ . По ним определяем соответствующую функцию прогиба  $w_{n-1}(r, \kappa)$  из решения краевой задачи (2)–(5). Данная краевая задача решается с помощью метода Галеркина [5]. В качестве базисных функций выбрана система линейно-независимых функций вида:

$$\phi_m(r) = (1 - r^2)^2 r^{2(m-1)}, \quad m = 1..N, \quad (8)$$

а неизвестная функция прогиба искалось в виде их линейной комбинации:

$$w(r, \kappa) = \sum_{m=1}^N C_m(\kappa) \phi_m(r). \quad (9)$$

Здесь  $C_m(\kappa)$  — комплексные коэффициенты разложения, зависящие от частотного параметра  $\kappa$ . При программной реализации метода Галеркина использовалось 20 базисных функций.

Этап 2. Затем поправки  $h^1(r)$ ,  $g^1(r)$  к искомым функциям определяются из выведенной системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (10), полученной подстановкой разложения (7) в исходную краевую задачу (2)–(5). Решение данной системы является некорректной задачей, поэтому был использован метод регуляризации А.Н. Тихонова [6].

$$\begin{cases} \int_0^1 [K_{11}h^1(\xi) + K_{12}g^1(\xi)] d\xi = qr_0 \operatorname{Re}(f_\kappa(\kappa) - w_0(r_0, \kappa)), \\ \int_0^1 [K_{21}h^1(\xi) + K_{22}g^1(\xi)] d\xi = qr_0 \operatorname{Re}(f_\kappa(\kappa) - w_0(r_0, \kappa)). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения:

$$K_{11} = \operatorname{Re}(K)R_{1c} + \operatorname{Im}(K)R_{3c}, \quad K_{12} = \operatorname{Re}(K)R_{2c} - \operatorname{Im}(K)R_{3c},$$

$$K_{21} = \operatorname{Im}(K)R_{1c} - \operatorname{Re}(K)R_{3c}, \quad K_{22} = \operatorname{Im}(K)R_{2c} + \operatorname{Re}(K)R_{3c},$$

$$K(r, \kappa) = r (w''_{n-1}(r, \kappa))^2 + \frac{1}{r} (w'_{n-1}(r, \kappa))^2 + 2\nu w''_{n-1}(r, \kappa) w'_{n-1}(r, \kappa)$$

$$R_{1j} = \frac{1}{1 + \tau^2 \kappa^2}, \quad R_{2j} = \frac{\tau^2 \kappa^2}{1 + \tau^2 \kappa^2}, \quad R_{3j} = \frac{\tau \kappa}{1 + \tau^2 \kappa^2}.$$

Этап 3. Поправки, найденные на 2-м этапе, дают следующие приближения искомым функциям:

$$h_n(r) = h_{n-1}(r) + h^1(r), \quad g_n(r) = g_{n-1}(r) + g^1(r). \quad (11)$$

После этапа 3 проверяются условия выхода из итерационного процесса: либо величина функционала невязки станет меньше некоторого заданного малого числа  $\varepsilon_0$ , либо число итераций превысит заданное значение  $N$ . При программной реализации построенного процесса выход из него осуществлялся по достижении величиной невязки значения, меньшего  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ , либо после  $N = 20$  итераций.

Примечание. При реализации данного итерационного процесса начальные приближения к восстанавливаемым функциям выбирались в классе линейных функций путем минимизации функционала невязки на компактном множестве априорной информации об ограниченности восстанавливаемых функций.

### 3. Вычислительные эксперименты

Были проведены вычислительные эксперименты по решению обратной задачи по восстановлению безразмерных функций  $h(r)$  и  $g(r)$  с помощью построенного итерационного процесса. На рисунках пунктирной линией показаны графики начальных приближений. Параметр, характеризующий время релаксации, полагался равным  $\tau = 0.1$ . На рисунках сплошной линией показаны графики искомым функций, точками — восстановленных.

Пример 1. Рассмотрен случай монотонных функций  $h(r) = 0.5 + 0.5r^2$ ,  $g(r) = 0.6 + 0.6r^2$ . Начальные приближения найдены в виде  $h(r) = 0.4 + 0.4r$ ,

$g(r) = 0.6 + 0.4r$ , частотный диапазон [3.2, 5.7]. Для реконструкции потребовалось 5 итераций. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 5%. На рисунке 1 представлены результаты восстановления.

Пример 2. Рассмотрен случай немонотонных функций  $h(r) = 0.5e^{-20(x-0.5)^2} + 0.5$ ,  $g(r) = 0.5e^{-20(x-0.5)^2} + 0.6$ . Начальные приближения найдены в виде  $h(r) = 0.75$ ,  $g(r) = 0.85$ , частотный диапазон [3.45, 5.85]. Для реконструкции потребовалось 9 итераций. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 6%. На рисунке 2 представлены результаты восстановления.

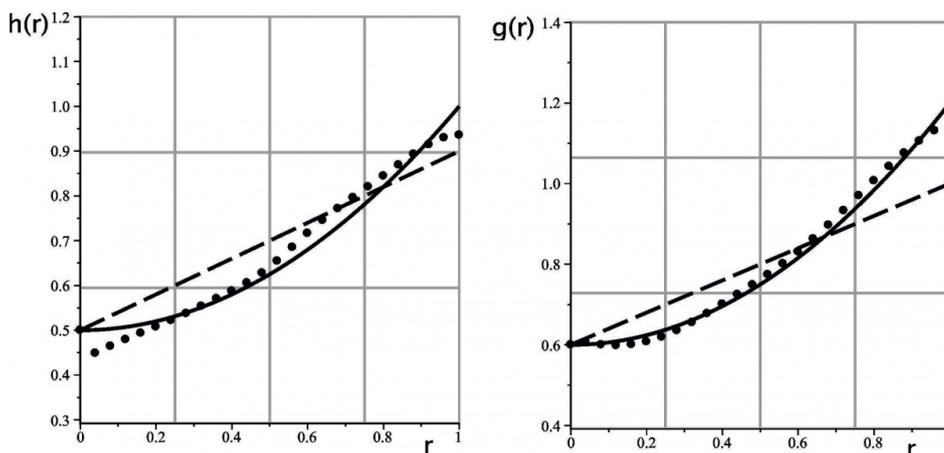


Рисунок 1 – Восстановление монотонных функций

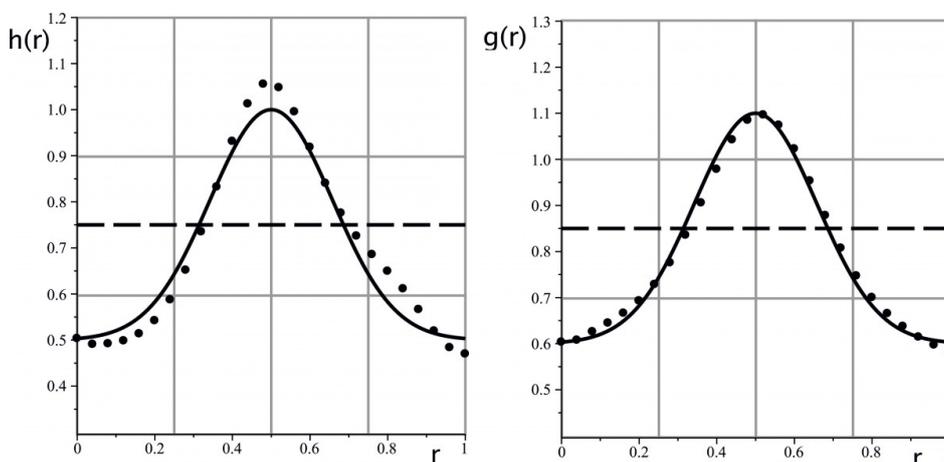


Рисунок 2 – Восстановление немонотонных функций

### Заключение

В процессе проведения вычислительных экспериментов установлено, что погрешность реконструкции для первой обратной задачи не превосходит 5%, для второй — 6%. Полученные результаты позволяют заключить, что разработанные методы решения обратных задач в обеих постановках достаточно эффективны и могут быть использованы при исследовании обратных задач идентификации неоднородных свойств вязкоупругих пластин.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-31-00144 мол-а, 16-38-60157 мол-а-дк и 16-01-00354 А) и Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кристенсен Р. Введение в механику композитов.—М.: Мир, 1974.— 338 с.
- [2] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
- [3] Богачев И. В., Ватульян А. О., Явруян О. В. Реконструкция жесткости неоднородной упругой пластины // Акустический журнал. 2016. Т. 62. № 3. С. 369–374.
- [4] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [5] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
- [6] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

**Bogachev I. V., Dudarev V. V., Lapina P. A., Nedin R. D.** *Identification of the mechanical characteristics of inhomogeneous viscoelastic plate.* The model of inhomogeneous viscoelastic circular plate clamped along the contour using the Kirchhoff hypotheses is presented. The effect of damping in the viscoelastic material is taken into account using a standard viscoelastic body model based on the theory of complex modules. The inverse problem consists of identifying the functions of instant and long plate modules with the information about the values of a function at a fixed bending radius of a certain frequency range. A special iterative method based on the linearization method for solving the inverse problem are offered. A set of computational experiments on the restoration of monotone and non-monotone functions of instant and long modules are presented.

# ПРОХОЖДЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ТРОЯКОПЕРИОДИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ ТВЕРДЫХ ШАРОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ВОЗМОЖНЫМИ ОТСЛОЕНИЯМИ ИХ ОТ УПРУГОЙ МАТРИЦЫ

**Боев Н. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В рамках геометрической теории дифракции разработан алгоритм решения задачи о прохождении плоской упругой продольной волны через тройкопериодическую систему твердых шаровых включений, находящихся в кубе, изготовленном из упругого материала, с возможными частичными отслоениями их от упругой матрицы. С одной из этих граней в куб вводится импульс с тональным заполнением несколькими периодами плоской высокочастотной, монохроматической продольной упругой волны, а на противоположной грани принимается прошедшая продольная волна. Плоская волна заменяется суперпозицией сферических волн. Телесный угол с вершиной в источнике сферической волны, направленный в сторону препятствий и стягивающийся полусферой делится на систему малых телесных углов, в каждом из которых выбирается соответствующий луч распространения продольной волны. Таким образом, проблема сводится к исследованию задачи коротковолновой дифракции упругих волн в локальной постановке.

**1. Введение.** Упругие среды со скоплениями твердых включений являются метаматериалами, динамические свойства которых в настоящее время интенсивно исследуются. Одной из практически важных задач для таких материалов является исследование прохождения импульса через периодические системы включений в плоском и пространственном случае, как в низкочастотном, так и в высокочастотном режиме колебаний. В двумерных задачах о прохождении акустических и упругих, в основном, низкочастотных волн через периодические системы препятствий аналитические и численные методы развиваются в работах [1–5] и ряде других работ. Аналогичным трехмерным задачам, в том числе и экспериментальным, посвящены работы [6–9]. Другие полезные ссылки можно найти в упомянутых работах.

**2. Постановка задачи.** В кубе, изготовленном из упругого материала, с ребром  $(2a + b)M + b$  находится тройкопериодическая система  $M^3$  абсолютно твердых шаров радиуса  $a$ , жестко сцепленных с матрицей, но с возможными их частичными отслоениями при его изготовлении. Куб отнесен к глобальной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , координатные оси которой исходят из одной вершины так, что куб находится в первом октаэдре. Минимальное удаление шаров от соответствующих граней равно  $b$ . В этой системе координат граничные сферические поверхности системы включений задаются уравнениями:

$$(x_1 - m_1(2a + b))^2 + (x_2 - m_2(2a + b))^2 + (x_3 - m_3(2a + b))^2 = a^2 \quad m_1, m_2, m_3 = \overline{1, M}$$

Будем рассматривать случай, когда при изготовлении куба образовались отслоения материала матрицы от некоторых частей  $S(m_1, m_2, m_3)$  соответствующих шаровых включений.

С одной из этих граней в куб вводится импульс с тональным заполнением 5–10 периодами плоской высокочастотной, монохроматической продольной упругой волны, а на противоположной грани принимается прошедшая продольная волна. Это обстоятельство позволяет рассчитать характеристики прошедшего импульса в режиме гармонических колебаний. В связи с тем, что импульс заполнен продольной волной, скорость распространения которой в упругом материале выше скорости распространения поперечной волны, то естественно первым на противоположной грани куба будет принят видоизмененный импульс, заполненный продольной волной. Задача состоит в том, чтобы вычислить на противоположной грани этот прошедший импульс и сравнить с введенным в куб импульсом.

**3. Метод решения.** Грань куба, на которую падает плоская волна, разбивается на  $N_2 \times N_2$  малых квадратов и плоская продольная упругая волна заменяется набором точечных источников сферических продольных волн, расположенных в центрах малых квадратов. Телесный угол с вершиной в источнике, направленный в сторону препятствий и стягивающийся полусферой делим на  $M_2 \times M_2$  малых телесных углов, в каждом из которых выбирается соответствующий луч распространения продольной волны. Таким образом, проблема сводится к исследованию задачи коротковолновой дифракции упругих волн в локальной постановке, решение которой включает в себя два этапа. На первом этапе решается геометрическая задача, на втором — механическая.

**4. Решение геометрической задачи.** Суммарное поле на грани приема распространяющихся упругих волн складывается из лучей, прошедших через систему шаров, которые могут быть трех типов: 1) лучи, прошедшие через систему препятствий без дифракции; 2) лучи, отразившиеся от системы включений или граней куба только один раз; 3) лучи, многократно отраженные от системы твердых препятствий и граней куба.

Лучи, прошедшие через систему шаров без дифракции, это лучи, которые распространяются от точечных источников сферических волн в горизонтальных слоях толщиной  $b$  между слоями препятствий.

В случае достаточного пологого падения луча на крайние препятствия, касающиеся верхней и нижних граничных плоскостей упругого слоя возможно однократное отражение продольной волны, после чего она попадает на грань приема.

При нахождении траектории многократно переотраженных лучей дифракционная картина достаточно сложная. Это связано с тем, что на граничных поверхностях шаровых включений и на гранях куба наряду с отражением продольной волны в продольную и поперечной волны в поперечную присутствует трансформация продольной волны в поперечную и поперечной в продольную. Однако при построении траектории прошедшего луча в точках зеркального отражения учитываются только отражения продольной волны в продольную. При этом учитываются только те продольные волны, направление которых образует острый угол с направлением распространения исходной плоской волны.

**5. Решение механической задачи.** В этой части решения задачи выписываются явные формулы в точке приема для перемещений для каждого из трех выделенных типов волн.

1. Для лучей, проходящих через куб без дифракции, в высокочастотном ре-

жиме колебаний в направлении падения луча  $\mathbf{q}$  перемещение в падающей волне в точке приема вычисляется по формуле:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{q}}^{(p)}(y) = Q_{\mathbf{q}} \mathbf{q} \frac{k_p^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k_p R_0}\right) \right], \quad R_0 = |x_0 - y| \quad (1)$$

где  $Q_{\mathbf{q}}$  — проекция сосредоточенной силы  $\mathbf{Q}$  в точке  $x_0$  на направление  $\mathbf{q}$ ,  $\rho$  — плотность,  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ляме,  $\omega$  — частота колебаний,  $k_p = \omega/c_p$ ,  $k_s = \omega/c_s$ ,  $c_p$ ,  $c_s$  — волновые числа и скорости продольной и поперечной волн.

2. В [10] получено явное выражение для перемещений в однократно отраженной вдоль луча  $x_0 - y^* - x$  упругой продольной волне от препятствия:

$$u_r^{(p)}(x) = \frac{B \times E \times V_{pp}(y^*) \exp \left\{ i \left[ k_p(L_0 + L) + \frac{\pi}{4}(\delta_2^{(pp)} + 2) \right] \right\}}{\sqrt{|(L_0 + L)^2 + 2L_0L(L_0 + L)(k_2 \sin^2 \alpha + k_1 \sin^2 \beta) \cos^{-1} \gamma + 4L_0^2 L^2 K|}} \quad (2)$$

$$B = \frac{Q_{\mathbf{q}} k_p^2}{4\pi\mu k_s^2}, \quad L_0 = |x_0 - y^*|, \quad L = |y^* - x|$$

Здесь  $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma\}$  — направление падения луча  $x_0 - y^*$  в локальной декартовой системе координат в точке зеркального отражения,  $k_1$ ,  $k_2$  — главные кривизны,  $K = k_1 k_2$  — гауссова кривизна,  $V_{pp}$  — коэффициент  $p$ - $p$  отражения.

3. Многократная дифракция высокочастотной продольной волны исследована в рамках интегрального представления. Основу формирования интегрального представления радиального перемещения в  $N$  раз переотраженной упругой продольной волне составляет модификация интегрального представления перемещений [11] в отраженной волне физической теории дифракции Кирхгофа, реализованная ранее при рассмотрении двумерного случая многократного отражения [12]. Если расположение граничных поверхностей скопления препятствий таково, что траектория луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - \dots - y_N^* - x_{N+1}$  приводит к  $p$ - $p$ - $p$ -...- $p$  отражению, то амплитуда радиального перемещения  $N$  раз отраженного луча в точке  $x_{N+1}$  относительно локальной сферической системы координат  $r, \Theta, \psi$  в точке  $y_N^*$  граничной поверхности представляется интегралом Сомильяны. Применяя для асимптотической оценки при  $k_p \rightarrow \infty$  дифракционного  $2N$  кратного интеграла Сомильяны метод многомерной ( $2N$ -кратной) стационарной фазы, получаем амплитуду радиального перемещения в  $N$  раз переотраженной  $p$ -волне.

$$u_r^{(p)}(x_{N+1}) = \frac{Q_{\mathbf{q}} k_p^2}{4\pi\mu k_s^2} \prod_{n=1}^N E_n \cos \gamma_n V_{pp}(y_n^*) \frac{\exp \left\{ i \left[ k_p \sum_{m=0}^N L_m + \frac{\pi}{4}(\delta_{2N}^{(p)} + 2N) \right] \right\}}{\prod_{m=0}^N L_m \sqrt{|\det(D_{2N}^{(p)})|}},$$

$$L_0 = |x_0 - y_1^*|, \quad L_{n-1} = |y_{n-1}^* - y_n^*|, \quad n = 2, \dots, N; \quad L_N = |y_N^* - x_{N+1}|, \quad (3)$$

где  $\delta_{2N}^{(p)} = \text{sign} D_{2N}^{(p)}$  — знак матрицы Гессе  $D_{2N}^{(p)} = (d_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, 2N$ , которая является ленточной (с шириной ленты равной семи) и симметричной  $d_{ij} = d_{ji}$  со следующими ненулевыми элементами  $d_{ij}$ ,  $i \leq j$ :

диагональные элементы:

$$\left\{ \begin{array}{c} d_{2n-1,2n-1} \\ d_{2n,2n} \end{array} \right\} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \alpha_n \\ \sin^2 \beta_n \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} k_1^{(n)} \\ k_2^{(n)} \end{array} \right\} \cos \gamma_n, \quad n = \overline{1, N}$$

внедиагональные элементы:

$$\begin{aligned} d_{2n-1,2n} &= -(L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \cos \alpha_n \cos \beta_n, & n &= \overline{1, N} \\ d_{2n-1,2n+1} &= L_n^{-1} (\cos \alpha_n \cos \alpha_{n+1} - (\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_{n+1})) & n &= \overline{1, N-1} \\ d_{2n-1,2n+2} &= L_n^{-1} (\cos \alpha_n \cos \beta_{n+1} - (\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_{n+1})) & n &= \overline{1, N-1} \\ d_{2n,2n+1} &= L_n^{-1} (\cos \beta_n \cos \alpha_{n+1} - (\mathbf{j}_n, \mathbf{i}_{n+1})) & n &= \overline{1, N-1} \\ d_{2n,2n+2} &= L_n^{-1} (\cos \beta_n \cos \beta_{n+1} - (\mathbf{j}_n, \mathbf{j}_{n+1})) & n &= \overline{1, N-1} \end{aligned}$$

Здесь  $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$  — главные кривизны,  $\{-\cos \alpha_n, -\cos \beta_n, -\cos \gamma_n\}$  — вектор, определяющий направление падения луча  $y_{n-1}^* - y_n^*$  в локальной декартовой системе координат в точке зеркального отражения  $y_n^*$ , базис которой  $(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n)$ ,  $V_{pp}(y_n^*)$  — коэффициенты отражения  $p$ -волны в точках зеркального отражения  $y_n^*$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Следуя [13] параметры  $E$  в (2) и  $E_n$  в (3) определяются так:  $E_n = +1$ , если  $y_n^*$  лежит на поверхности соответствующего шара в зоне жесткого сцепления с матрицей, и  $E_n = -1$ , если  $y_n^*$  лежит на части свободной поверхности  $S(m_1, m_2, m_3)$  соответствующего отслоения.

**6. Заключение.** В рамках ГТД разработан алгоритм численно-аналитического расчета характеристик в прошедшей высокочастотной продольной волне через троякопериодическую систему твердых шаровых препятствий с возможными частичными отслоениями включений от упругой матрицы. Получено аналитическое выражение главного члена асимптотики перемещений в точке приема многократно отраженной продольной волны, которое соответствует ГТД. При этом траектория луча представляет собой пространственную ломаную линию с вершинами в точках зеркального отражения от шаровых препятствий или граней куба и зон отслоений.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант № 15-19-10008.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Porter R., Evans D. V. Wave scattering by periodic arrays of breakwaters // Wave Motion. 1996. № 23. P. 95–120.
- [2] Scarpetta E., Sumbatyan M. A. On wave propagation in elastic solids with a doubly periodic array of cracks // Wave Motion. 1997. № 25. P. 61–72.
- [3] Scarpetta E., Sumbatyan M. A. On the oblique wave penetration in elastic solids with a doubly periodic array of cracks // Quart. Appl. Math. 2001. № 58(2). P. 239–250.

- [4] *Scarpetta E., Sumbatyan M. A.* Wave propagation through elastic solids with a periodic array of arbitrarily shaped defects // *Math. Comput. Model.* 2003. № 37(1/2). P. 19–28.
- [5] *Sumbatyan M. A.* Low-frequency penetration of acoustic waves through a periodic arbitrary shaped grating: the three-dimensional problem // *Wave Motion.* 1995. № 22. P. 133–144.
- [6] *Scarpetta E., Tibullo V.* Explicit results for scattering parameters in three-dimensional wave propagation through a doubly periodic system of arbitrary openings // *Acta Mech.* 2006. № 185. P. 1–9.
- [7] *Scarpetta E., Tibullo V.* On the three-dimensional wave propagation through cascading screens having a periodic system of arbitrary openings // *Int. J. Eng. Sci.* 2008. № 46. P. 105–118.
- [8] *Sumbatyan M. A., Remizov M. Y.* Low frequency penetration of elastic waves through a triple periodic array of cracks // *Springer Proc. Phys.* 2016. № 175. P. 459–474.
- [9] *Liu Z., Zhang X., Mao Y., Zhu Y., Yang Z., Chan C. T., Sheng P.* Locally Resonant Sonic Materials // *Science.* 2000. Vol. 289. P. 1734–1736.
- [10] *Pompei A., Sumbatyan M. A., Boyev N. V.* Reflection of high-frequency elastic waves from a non-plan boundary surface of the elastic medium // *J. Sound Vibr.* 2007. № 302. № 4–5. P. 925–935.
- [11] *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
- [12] *Sumbatyan M. A., Boyev N. V.* High-frequency diffraction by nonconvex obstacles // *J. Acoust. Soc. Am.* 1994. № 95(5) (part 1). P. 2347–2353.
- [13] *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.

**Boyev N. V.** *Propagation of the longitudinal wave through a triple-periodic system of solid spherical inclusions with their possible exfoliations from the elastic matrix.* In framework of the geometrical diffraction theory an algorithm is developed to solve the problem on the propagation of a plane longitudinal elastic wave through a triple-periodic system of spherical inclusions located in a cube made of elastic material, with possible particular exfoliations from the elastic matrix. An impulse is introduced from a certain face of this cube, which is filled with several periods of a plane high-frequency time-harmonic longitudinal elastic wave, and the through-transmitted longitudinal wave is received on the opposite cube's face. The plane wave is changed by a superposition of spherical waves. The spatial angle with the vertex placed in the wave source is directed to the obstacles is divided to a system of small spatial angles, with each of them containing a respective ray of the longitudinal wave propagation. Therefore, the problem is reduced to the short-wave propagation problem for the elastic waves in a local formulation.

# СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ЗВЕНЕ ВОЛНОВОДА МЕАНДРОВОЙ СТРУКТУРЫ С ИЗЛОМОМ ДУГООБРАЗНОЙ ФОРМЫ

Болнокин В. Е.<sup>1</sup>, Пачева М. Н.<sup>2</sup>, Сторожев В. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт машиноведения им. А. А. Благодирова РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Донецкий национальный университет*

Рассматривается численно-аналитическое решение граничной задачи о движении стационарных упругих волн сдвига по геометрически неоднородному слою с участком искривления, переориентирующим направление распространения за счет наличия структурных фрагментов с сечениями в виде кольцевых секторов полукруговой либо четвертькруговой угловой меры. Решение строится на базе концепции численно-аналитического метода частичных областей и предполагает выделение в продольном сечении волновода подобластей в виде двух полуполос, а также стыкующейся с ними подобласти в форме кольцевого сектора соответствующей угловой меры.

**1. Введение и постановка задачи.** Развитие численно-аналитических методологий расчета линий задержки информационных сигналов в акустоэлектронных устройствах связано, в частности, с разработкой и изучением круга моделей, описывающих распространение упругих волн сдвигового типа по однородному либо составному кусочно-однородному волноводу меандровой (змеевидной) геометрической структуры с различными вариантами геометрии участков искривления и излома [1–5]. Вопросы создания и применения теоретических численно-аналитических методик исследования волновых процессов в волноводах данного типа с минимизированным кругом упрощающих соответствующие модели предположений несмотря на повышенный уровень внимания к данной проблеме сохраняют свою актуальность и требуют дальнейшего анализа. В этой связи, представляемое исследование посвящено проблемам детализированного описания процессов трансформации волновых сигналов при прохождении участков искривления в структурах, образуемых двумя параллельно либо ортогонально ориентированными фрагментами волновода — полуслоями, соответственно сопрягаемыми с помощью структурных фрагментов кольцевого цилиндрического слоя с полукруглыми либо четвертькруговыми дугообразными сечениями.

Рассматриваются граничные задачи о движении стационарных упругих волн сдвига вдоль геометрически неоднородного слоя с участком изгиба, переориентирующим направление распространения на 90 либо на 180 градусов за счет наличия искривленных фрагментов волновода с сечениями в виде кольцевых секторов четвертькруговой либо полукруговой угловой меры. Сечения рассматриваемых волноводов в окрестности участков изгиба и способы введения в сечении локальных и глобальной координатных систем представлены на рис. 1.

Распространение исследуемых волн в подобластях сечения с прямолинейной и кольцевой геометрией соответственно описывается дифференциальными уравнениями

$$\mu D^2 u_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_3 = 0, \quad (1)$$

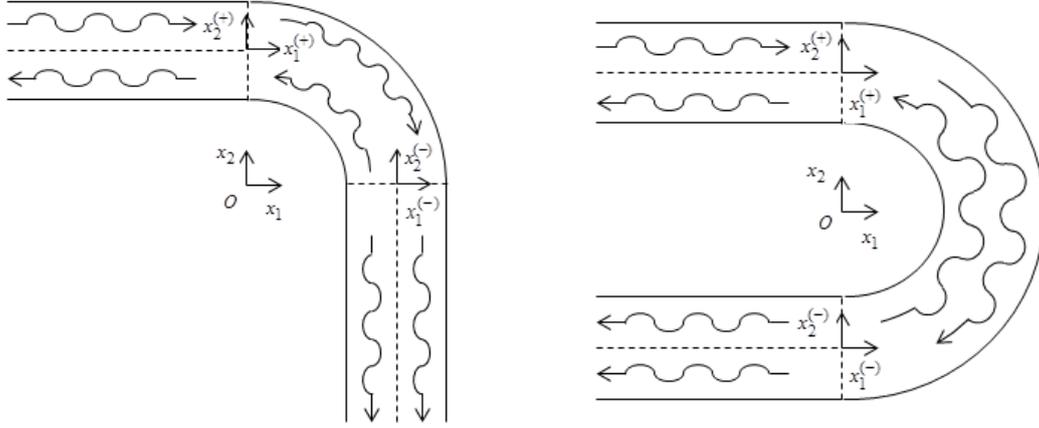


Рисунок 1 – Геометрия сечений волноводов в окрестности зоны изгиба

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad x_1 + ix_2 = re^{i\theta}.$$

Решение задачи применительно к волноводу, сечение которого содержит участок изгиба 180 градусов (рис. 1), строится на базе концепции численно-аналитического метода частичных областей и предполагает выделение в продольном сечении волновода подобластей в виде двух полуполос толщины  $2h$ , имеющих в во введенных локальных координатных системах описания

$$V_L^{(+)} = \{x_1^{(+)} \leq 0, -h \leq x_2^{(+)} \leq h\}, V_L^{(-)} = \{x_1^{(-)} \leq 0, -h \leq x_2^{(-)} \leq h\},$$

а также стыкующейся с ними подобласти в форме кольцевого сектора соответствующей угловой меры. Радиальная толщина кольцевого сектора и толщины полуполос полагаются равными, а внутренний радиус кольцевого сектора  $R$  является произвольной варьируемой величиной. В частности, для сечения волновода, содержащего участок изгиба 180 градусов (рис. 1), данная подобласть имеет описание

$$V_R = \{R \leq r \leq R + 2h, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Внешние грани участков в виде полуслоя, а также внутренняя и внешняя поверхности цилиндрического фрагмента полагаются жестко закрепленными либо свободными от напряжений, а на поверхностях контакта выделяемых составных частей волновода предполагается выполнение условий идеального механического сопряжения. Полагается также, что их глубины полуслоя  $V_L^{(+)}$  к границе его контакта с кольцевым сектором  $V_R$  движется падающая нормальная волна, имеющая в общем случае комбинированный тип по толщинной симметрии.

**2. Теоретическая методика решения задачи.** Для характеристик напряженности волновых полей в полубесконечных составляющих продольного сечения вводятся представления рядами с неопределенными коэффициентами по базисным множествам симметричных и антисимметричных нормальных волн сдвига для упругого слоя со свободными либо жестко закрепленными гранями в зависимости от задаваемого типа краевых условий на внешних границах рассматриваемого

МОГО ВОЛНОВОДА:

$$\begin{aligned}
u_3^{(+)}(x_1^{(+)}, x_3^{(+)}, t) &= \tilde{u}_3^{(+)} + \sum_{p=1}^{\infty} [a_p^{(+)} \cos \alpha_p^{(c)} x_3^{(+)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1^{(+)})) + \\
&+ b_p^{(+)} \sin \alpha_p^{(s)} x_3^{(+)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(s)} x_1^{(+)}))], \quad (2) \\
u_3^{(-)}(x_1^{(-)}, x_3^{(-)}, t) &= \sum_{p=1}^{\infty} [a_p^{(-)} \cos \alpha_p^{(c)} x_3^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1^{(-)})) + \\
&+ b_p^{(-)} \sin \alpha_p^{(s)} x_3^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(s)} x_1^{(-)}))],
\end{aligned}$$

где  $\tilde{u}_3^{(+)}$  — представление функции напряженности для падающей монохроматической сдвиговой волны с круговой частотой  $\omega$ ;  $a_p^{(+)}$ ,  $b_p^{(+)}$ ,  $a_p^{(-)}$ ,  $b_p^{(-)}$  — произвольные постоянные коэффициенты, подлежащие определению из функциональных краевых условий контакта выделенных составных частей волновода;  $\alpha_p^{(c)} = (2p - 1)\pi/2h$ ,  $\alpha_p^{(s)} = p\pi/h$  ( $p = \overline{1, \infty}$ ) — в случае волновода с закрепленными границами и  $\alpha_p^{(c)} = (p - 1)\pi/h$ ,  $\alpha_p^{(s)} = (2p - 1)\pi/2h$  ( $p = \overline{1, \infty}$ ) — в случае волновода со свободными границами;  $k_p^{(c)} = (\Omega^2 - (\alpha_p^{(c)})^2)^{1/2}$ ,  $k_p^{(s)} = (\Omega^2 - (\alpha_p^{(s)})^2)^{1/2}$ ,  $\Omega^2 = \rho\omega^2/\mu$ .

Для составляющей в виде фрагмента кольцевого цилиндрического слоя исходные представления волновых полей имеют форму разложений в ряды с неопределенными коэффициентами по базисным множествам нормальных волн сдвига, распространяющихся вдоль окружного направления в сечении протяженного полого цилиндра со свободными либо жестко закрепленными граничными поверхностями

$$\begin{aligned}
u_3^{(R)}(r, \theta, t) &= \sum_{p=1}^{\infty} [(a_p^{(R+)}) J_{k_p}(\Omega r) + b_p^{(R+)} Y_{k_p}(\Omega r) \exp(-i(\omega t + k_p \theta)) + \\
&+ (a_p^{(R-)}) J_{k_p}(\Omega r) + b_p^{(R-)} Y_{k_p}(\Omega r) \exp(-i(\omega t - k_p \theta))], \quad (3)
\end{aligned}$$

где  $k_p$  — корни дисперсионного уравнения

$$J_{k_p}(\Omega R) Y_{k_p}(\Omega(R + 2h)) - Y_{k_p}(\Omega R) J_{k_p}(\Omega(R + 2h)) = 0.$$

Представлениям (2)–(3) соответствуют выражения для контактных напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{(+)}(x_1^{(+)}, x_3^{(+)}, t) &= \mu \frac{\partial}{\partial x_3^{(+)}} \tilde{u}_3^{(+)} - i\mu \sum_{p=1}^{\infty} [k_p^{(c)} a_p^{(+)} \cos \alpha_p^{(c)} x_3^{(+)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1^{(+)})) + \\
&+ k_p^{(s)} b_p^{(+)} \sin \alpha_p^{(s)} x_3^{(+)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(s)} x_1^{(+)}))], \\
\sigma_{13}^{(-)}(x_1^{(-)}, x_3^{(-)}, t) &= -i\mu \sum_{p=1}^{\infty} [k_p^{(c)} a_p^{(-)} \cos \alpha_p^{(c)} x_3^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1^{(-)})) + \\
&+ k_p^{(s)} b_p^{(-)} \sin \alpha_p^{(s)} x_3^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(s)} x_1^{(-)}))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 3}^{(R)}(r, \theta, t) = & i \frac{\mu}{r} \sum_{p=1}^{\infty} [-k_p (a_p^{(R+)}) J_{k_p}(\Omega r) + b_p^{(R+)} Y_{k_p}(\Omega r)] \exp(-i(\omega t + k_p \theta)) + \\ & + k_p (a_p^{(R-)}) J_{k_p}(\Omega r) + b_p^{(R-)} Y_{k_p}(\Omega r) \exp(-i(\omega t - k_p \theta)). \end{aligned}$$

Полученные представления используются при формулировке функциональных краевых условиях на участках идеального механического контакта стыкующихся подобластей

$$u_3^{(+)}(0, x_3^{(+)}, t) = u_3^{(R)}(x_3^{(+)} + R + h, \pi/2, t), \quad (4)$$

$$\sigma_{13}^{(+)}(0, x_3^{(+)}, t) = \sigma_{\theta 3}^{(R)}(x_3^{(+)} + R + h, \pi/2, t), \quad x_3^{(+)} \in [-h, h];$$

$$u_3^{(-)}(0, x_3^{(-)}, t) = u_3^{(R)}(x_3^{(+)} + R + h, -\pi/2, t), \quad (5)$$

$$\sigma_{13}^{(-)}(0, x_3^{(-)}, t) = \sigma_{\theta 3}^{(R)}(x_3^{(-)} + R + h, -\pi/2, t), \quad x_3^{(-)} \in [-h, h].$$

На базе алгоритма алгебраизации функциональных краевых условий (4)–(5) с применением метода ортогональных рядов они приводятся к редуцированным системам линейных алгебраических уравнений порядка  $8N$  относительно коэффициентов введенных разложений, имеющих структуру

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^N [a_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(cuc+)} + b_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(cus+)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(cuRJ++)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(cuRY++)} + \\ & + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(cuRJ-+)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(cuRY-)}] = \zeta_j^{(cu+)} \quad (j = \overline{1, N}), \\ & \sum_{p=1}^N [a_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(suc+)} + b_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(sus+)} + a_p^{(R++)} \Delta_{jp}^{(suRJ++)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(suRY++)} + \\ & + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(suRJ-+)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(suRY-+)}] = \zeta_j^{(su+)} \quad (j = \overline{N+1, 2N}), \\ & \sum_{p=1}^{\infty} [a_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma c+)} + b_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma s+)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RJ++)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RY++)} + \\ & + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RJ-+)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RY-+)}] = \zeta_j^{(c\sigma+)} \quad (j = \overline{2N+1, 3N}), \\ & \sum_{p=1}^N [a_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma c+)} + b_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma s+)} + a_p^{(R++)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RJ++)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RY++)} + \\ & + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RJ-+)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RY-+)}] = \zeta_j^{(s\sigma+)} \quad (j = \overline{3N+1, 4N}), \\ & \sum_{p=1}^N [a_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(cuc-)} + b_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(cus-)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(cuRJ+-)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(cuRY+-)} + \\ & + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(cuRJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(cuRY--)}] = 0 \quad (j = \overline{4N+1, 5N}), \\ & \sum_{p=1}^N [a_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(suc-)} + b_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(sus-)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(suRJ+-)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(suRY+-)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(suRJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(suRY--)}] = 0 \quad (j = \overline{5N+1, 6N}), \\
& \sum_{p=1}^{\infty} [a_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma c-)} + b_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma s-)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RJ+-)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RY+-)} + \\
& \quad + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RY--)}] = 0 \quad (j = \overline{6N+1, 7N}), \\
& \sum_{p=1}^N [a_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma c-)} + b_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma s-)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RJ+-)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RY+-)} + \\
& \quad + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RY--)}] = 0 \quad (j = \overline{7N+1, 8N}).
\end{aligned}$$

Элементы блочно-ленточной матрицы системы имеют представления, получаемые в результате процедуры алгебраизации на основе метода ортогональных рядов с использованием системы функций  $\{\sin(n\pi x_3^{(\pm)}/h), \cos((n-1)\pi x_3^{(\pm)}/h)\}_{n=1}^{\infty}$ .

Представленная методика позволяет осуществить углубленный анализ эффектов прохождения гармонических и периодических импульсных сигналов по волноводу меандровой структуры с дугообразными соединениями звеньев и показала высокую эффективность при численной реализации.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бударагин Р. В., Радионов А. А. Метод расчета волноводов со сложным поперечным сечением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13. № 3. С. 23–25.
- [2] Бударагин Р. В., Радионов А. А., Титаренко А. А. Расчет плавных переходов в круглом экранированном волноводе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3. № 2. С. 27–30.
- [3] Бударагин Р. В., Темнов В. М. Дифракция на скачкообразном переходе в экранированном диэлектрическом волноводе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2004. Т. 7. № 4. С. 50–55.
- [4] Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 144 с.
- [5] Силлин Р. А. Периодические волноводы. М.: Фазис, 2002. 436 с.

**Bolnokin V. E., Pacheva M. N., Storozhev V. I.** *Shear waves in the rings waveguide structure meander with a break of arcuate shape.* A numerical and analytical solution of the boundary problem of motion of stationary elastic shear waves for geometrically non-uniform layer with a curved section, reorienting the direction of propagation due to the presence of structural fragments with sections in the form of circular sectors or semicircular angular measure are presented. The solution is built around the concept of numerical-analytical method of partial areas.

# ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МНОГОТОЧЕЧНОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПАНЕЛЕЙ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

**Бормотин К. С.**

*Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет*

Как известно, технологические решения при формообразовании изделий в режиме ползучести активно используются в процессах изготовления ответственных конструкций в отечественном и зарубежном авиастроении, так как обеспечивают детали более высокий остаточный прочностной ресурс и меньшую поврежденность.

В последнее время в качестве перспективного решения этой задачи рассматривается формование изделий из листов и панелей, с помощью реконфигурируемого стержневого пуансона (матрицы), позволяющего изменять форму заготовки.

Для построения дискретной модели и численного решения данной задачи используются методы теории вариационного исчисления. Обратные задачи формообразования в режиме ползучести на реконфигурируемой штыревой машине формулируются с помощью функционалов прямых и обратных экстремальных квазистатических задач формообразования деталей с учетом контактных условий с оснасткой. На основе вариационных уравнений разрабатывается итерационный метод поиска перемещений стержней матриц формблока, обеспечивающих заданную остаточную кривизну панели. Расчет данных задач проводится методом конечных элементов в системе MSC.Marc, дополненной пользовательскими подпрограммами. На примере формообразования панели двойной кривизны центроплановой части самолета показана сходимость итерационного метода.

Существующие способы формообразования крупногабаритных плит из высокопрочных сплавов, основанные на многоэтапных процессах формовки и/или штамповке в нескольких штампах, имеют ограничения по прессовому оборудованию, по габаритам и нагрузкам, а также высокую стоимость. В данной работе рассматривается многоточечное формообразование панелей с помощью реконфигурируемого устройства. Данное устройство формования включает штыревую оснастку, которая задает формирующую поверхность верхней и нижней матрицей. Матрицы образованы двумя системами соосно расположенных стержней. Для каждого стержня задается закон движения с помощью числового программного управления, что позволяет адаптировать оснастку для изготовления деталей различной конфигурации.

Таким образом, для формовки данной технологией с помощью штыревой оснастки необходимо знать закон перемещения каждого стержня, задающий упреждающую форму панели. Упреждающая форма панели должна обеспечивать заданную остаточную кривизну панели после освобождения ее. В связи с этим возникает обратная задача: необходимо определить перемещения стержней, создающих такую упреждающую кривизну панели, которая обеспечивает заданную остаточную форму панели после разгрузки.

Формулировка обратных задач формообразования в режиме ползучести приводится для случая бесконечно малых деформаций и упругой разгрузки. Полученные результаты могут быть легко обобщены на случаи геометрической и физической нелинейности [1–3]. Пусть  $V \subset R^3$  — ограниченная область с достаточно регулярной границей  $S$ . Контактная поверхность жестких тел (штампов) с деформируемым обозначается через  $S_c$  ( $S_c \subset S$ ). Обозначим через  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ ,  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$  — вектора текущих, остаточных перемещений деформируемого тела и вектора перемещений контактных тел,  $u, \tilde{u} \in [W_2^1(Q)]^3$ ,  $\bar{u} \in [W_2^1(Q_c)]^3$ ,  $Q = V \times [0 \leq t \leq T]$ ,  $Q_c = S_c \times [0 \leq t \leq T]$ . Точкой сверху обозначаются скорости перемещений  $\dot{u}$ ,  $\dot{\tilde{u}}$ ,  $\dot{\bar{u}}$ . Скалярное произведение в  $L_2(S)$  имеет вид  $(\cdot, \cdot)_S$ :  $(u, v)_S = \int_S \sum_{i=1}^3 u_i v_i dS$ . Обычно при учете контактных ограничений используется метод множителей Лагранжа или метод штрафа. Обратная задача кинематического формообразования контактными жесткими штампами формулируется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом

$$J(\dot{u}, \dot{\tilde{u}}, \dot{\bar{u}}) = \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\dot{\bar{u}} - \dot{\bar{u}}^*\|_{S_c}^2 + W_c + a(\dot{u}, \dot{u}) + a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^*\|_S^2, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0,$$

где

$$W_c = -(\dot{p}, \bar{u} - u)_{S_c} - (p, \dot{\bar{u}} - \dot{u})_{S_c} \quad (2)$$

либо

$$W_c = \int_{S_c} \left[ \frac{1}{\varepsilon_n} g_n \dot{g}_n + \frac{1}{\varepsilon_t} g_t \dot{g}_t \right] dS, \varepsilon_n > 0, \varepsilon_t > 0, \varepsilon_n \rightarrow 0, \varepsilon_t \rightarrow 0, \quad (3)$$

$\dot{\tilde{u}}^*$ ,  $\dot{\bar{u}}^*$  — заданные остаточные скорости перемещений тела и текущие контактные скорости перемещений в момент времени  $t$ ;  $t \in [0, T]$  — время деформирования тела под нагрузкой; для случая бесконечно малых деформаций потенциальные формы определяются в виде

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_V \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u}))}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u})} \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{v}) dV, \quad a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}}) = \int_V \frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{u}}))}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{u}})} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{v}}) dV,$$

$$W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}^c, \quad W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}^c \quad [4],$$

$c_{ijkl}$  — компоненты симметричного тензора упругих констант,  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$  — компоненты скоростей текущих и остаточных деформаций Грина-Лагранжа,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$  — компоненты скоростей деформаций ползучести,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}),$$

$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $p$  — вектор поверхностных контактных сил, действующих на  $S_c$ ,

$g_n = n \cdot (\bar{u} - u)$ ,  $\dot{g}_n = n \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{u})$  — нормальный перехлест (взаимное проникновение по нормали к границе  $S_c$ ) контактирующих частиц и его скорость,  $g_t = \tau \cdot (\bar{u} - u)$ ,

$\dot{g}_t = \tau \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{u})$  — касательный перехлест и его скорость,  $n$  — единичный вектор нормали к контактной поверхности,  $\tau$  — единичный касательный вектор к контактной поверхности.

Потенциалы (2), (3) в (1) для учета в квазистатических задачах представляют собой производные по  $t$  контактных потенциалов

$$W_c = -(p, \bar{u} - u)_{S_c}, \quad W_c = \int_{S_c} \left[ \frac{1}{2\varepsilon_n} g_n^2 + \frac{1}{2\varepsilon_t} g_t^2 \right] dS,$$

полученных наложением контактных условий на формулировку уравнений движения тел методом множителей Лагранжа и методом штрафных функций, соответственно, [4, 5] ( $n, \tau$  приняты постоянными). При рассмотрении обратной задачи с функционалом в виде (1) предполагается, что в рассматриваемый момент времени  $t$  имеется контакт жесткого штампа с деформируемым телом, иначе данные потенциалы не должны входить в функционал.

Посредством дискретизации вариационных принципов [4–6] задачи деформирования под нагрузкой и разгрузки, полученных из (1) при учете независимости  $\dot{u}$  и  $\dot{\bar{u}}$ , найдем систему линейных алгебраических уравнений двух задач

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(i-1)}, \quad {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{K}}^{(i-1)} \Delta \hat{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}^{(i-1)},$$

где  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{K}}^{(i-1)}$  — матрицы жесткости с включенными дополнительными элементами, образующимися от контактных ограничений,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(i-1)}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}^{(i-1)}$  — вектора внутренних и внешних сил. Верхние индексы  $t + \Delta t$  величины указывают на момент времени, для которого она вычисляется,  $(i - 1)$  — номер итерации при уточнении решения методом Ньютона–Рафсона. Решение следующего шага находится по формуле  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}$ . Решая первую задачу по заданным перемещениям находится деформированная модель с распределением напряжений и деформаций. Во второй задаче с известными начальными напряжениями и деформациями искомыми величинами являются перемещения разгрузки. После этого находятся остаточные узловые перемещения  $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{U}}$ .

Решение контактных задач методом множителей Лагранжа и методом штрафа вносит вычислительные трудности [4, 5]. В MSC.Marc имеется способ решения с непосредственным учетом контактных ограничений [7]. В этом случае матрица жесткости уже не будет включать нулевые элементы, как в методе множителей Лагранжа, и задача решается обычным образом. В случае возникновения контакта, например с жестким телом при скольжении, узлы деформируемого тела принимают перемещения узлов жесткого контактного тела [5, 7], т. е. контактные условия преобразуются в кинематические:  $\Delta u_{normal} = \Delta \bar{u} \cdot n$  на  $S_c$ . Контактные силы определяются из контактной задачи, сформулированной методом множителей Лагранжа для ограничений, но с известными уже перемещениями [5].

Предположим, что контактная поверхность существует и изменяется незначительно на всем промежутке времени деформирования панели, тогда рассматривается итерационный метод

$$\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k + \alpha^k (\tilde{u}^* - \tilde{u}^k). \quad (4)$$

С помощью данного метода решается задача определения перемещений стержней реконфигурируемой установки, создающих такую упреждающую кривизну панели, которая обеспечивает заданную остаточную форму панели после разгрузки. В качестве заданной формы панели взята панель двойной кривизны центроплановой части самолета. Заготовка имеет свойства материала АК4-1Т (алюминиевого сплава). Деформирование заготовки контактными жесткими телами осуществляется с учетом контактных условий проскальзывания без трения в стадии установившейся ползучести, которая задается законом Нортон.

В качестве начальных перемещений контактных тел  $\bar{u}_i^0$  (4) принимаются расстояния от жестких тел до поверхности с требуемой кривизной с учетом толщины заготовки. Остаточные перемещения в итерационном методе определяются в узлах деформируемого тела, ближайших к проекциям центральных точек контактных тел на поверхности заготовки. Итерационный метод реализован в системе MSC.Marc с помощью ряда пользовательских процедур. Для подготовки расчетной модели с заданными граничными условиями и определения проекций контактных тел применялись пользовательские программы, разработанные в MSC.Patran.

По расчетам задачи определения упреждающей формы панели для обеспечения заданной кривизны после разгрузки с помощью итерационного метода с разными постоянными коэффициентами обнаруживается согласование условий сходимости ( $0 < \alpha^k < 2$ ).

Разработанная формулировка обратных задач с помощью функционала (1), позволяет перейти к конечно-элементным уравнениям квазистатического деформирования тел с учетом контактных ограничений. Учет контактов в задачах формообразования панелей штампами повышает точность в определении технологических параметров при изготовлении деталей [8–12]. Построенный итерационный алгоритм дает возможность рассчитать закон движения стержней в реконфигурируемом устройстве при многоточечном формообразовании панелей.

Работа выполнена при финансовой поддержке совета по грантам Президента (МК-6127.2015.1), РФФИ (16-31-60038 мол\_a\_дк), Минобрнауки РФ по государственному заданию НИР № 909.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бормотин К. С. Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Вычислительные методы и программирование. 2013. № 14. С. 141–148.
- [2] Бормотин К. С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 13. С. 145–153.

- [3] *Бормотин К. С.* Численное моделирование задачи формообразования с контактными условиями в режиме пластичности и ползучести // Интернет-журнал «Науковедение». 2014. №20.
- [4] *Коробейников С. Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск.: Изд-во СО РАН, 2000.
- [5] *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Springer, Heidelberg, 2006.
- [6] *Bathe K.-J.* Finite element procedures. PRENTICE HALL, Upper Saddle River, 1982.
- [7] Marc: Advanced Nonlinear Simulation Solution, MSC.Software Corporation, 2016.
- [8] *Simon D., Kern L., Wagner J., Reinhart G.* A reconfigurable tooling system for producing plastic shields // Variety Management in Manufacturing. Proceedings of the 47th CIRP Conference on Manufacturing. 2014. P. 853–858.
- [9] *Wang W. W., Jia B. B., Yu J. B.* A new flexible sheet metal forming method and its stamping process // The 14th IFToMM World Congress. 2015. DOI: 10.6567/IFToMM.14TH.WC.PS20.006
- [10] *Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С.* Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51. №4. С. 155–165.
- [11] *Олейников А. И., Бормотин К. С.* Моделирование формообразования крыловых панелей в режиме ползучести с деформационным старением в решениях обратных задач // Ученые записки КнАГТУ. 2015. № II - 1(22). С. 5–12.
- [12] Патент РФ №2076010, В 21 D 11/20. Устройство для формообразования / Л.Л. Рублевский, О.В. Соснин, Б.В. Горев, М.И. Бондаренко — Бюл. Изобр. 1997. №9. С. 136.

**Bormotin K. S.** *The variation formulation of inverse multipoint forming panels problems in the creep mode.*

It is known that technology solutions of products forming in the creep mode are actively used in processes of responsible designs production in domestic and foreign aircraft industry as provide details higher residual strength a resource and smaller damage.

Recently as the perspective solution of this problem formation of products from sheets and panels, by means of the reconfigurable rod punches (matrix), allowing to change a procurement form, is considered.

For definition of discrete model and the numerical solution of this problem methods of the variations calculus theory are used. The inverse problems of a forming in the creep mode by the reconfigurable tool are formulated by means of functionalities of direct and the inverse extreme quasistatic problems of details forming taking into account contact conditions with the equipment. On the basis of the variation equations the iterative method of search of rods movements of the tool matrixes providing the set residual curvature of the panel is developed. Calculation of these problems is carried out by a finite-element method in the MSC.Marc system with added user subprogram's. On the example of a forming the double curvature panel of a center wing section part of the airplane the convergence of an iterative method is shown.

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОБРАБОТКЕ СИГНАЛА В ЗАДАЧАХ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ДЕФЕКТОСКОПИИ

**Бочарова О. В.<sup>1</sup>, Анджилович И. Е.<sup>2</sup> Седов А. В.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Предложен специальный подход обработки сигналов, позволяющий с большой эффективностью проводить идентификацию дефектов за счет контроля структуры и особенностей поверхностного волнового поля. Подход основан на использовании настраиваемого ортонормированного базиса.

В процессе производства и эксплуатации ответственных частей сложных механизмов важен постоянный контроль механической надёжности. В настоящее время при производстве инженерных конструкций широко используются современные композитные материалы, многослойные технологии. Скрытые неоднородности, возникающие как при производстве, так и при эксплуатации в условиях высоких нагрузок и вибраций могут привести к непоправимым последствиям. Создание методик оперативной отбраковки в стадии изготовления и своевременной замены уже используемого элемента всегда актуально. По этой причине задачи об определении дефектов различного типа достаточно давно изучаются в научной литературе [1–5].

Так, в работе [4] предложен метод, позволяющий вычислить размеры полости балки по двум собственным частотам изгибных колебаний, взятым из разных спектров. Изучена зависимость между значением собственной частоты и параметрами полости. В [5] представлен интегральный признак идентификации дефектов в элементах стержневых конструкций, позволяющий определять их наличие и местоположение, а также степень поврежденности.

В настоящей работе предлагается метод низкочастотной диагностики внутренних неоднородностей посредством анализа поверхностной волны, созданной ударным возмущением [6, 7]. Методика продемонстрирована в лабораторных условиях на упрощённых моделях сложных конструкций. В моделях имитировались искусственные дефекты (трещины, полости, включения). Анализировался характер изменения поведения поверхностной волны, в зависимости от характеристик дефекта.

В качестве модели использовалась алюминиевая балка квадратного сечения, установленная на двух опорах через виброизолирующие прокладки. Длина балки 490 мм, сечение —  $16 \times 16$  мм<sup>2</sup>.

Сигнал в исследуемой точке колебания контролируется калиброванным малогабаритным ИСР акселерометром фирмы PCB 352A24. Сигнал с акселерометра нормируется (запитывается и усиливается) предварительным ИСР усилителем ZETLAB 440. Аналоговые сигналы подаются на вход аналого-цифрового преобразователя L-Card E14-140, обрабатываются на компьютере программой PowerGraph и сохраняются для дальнейшей математической обработки.

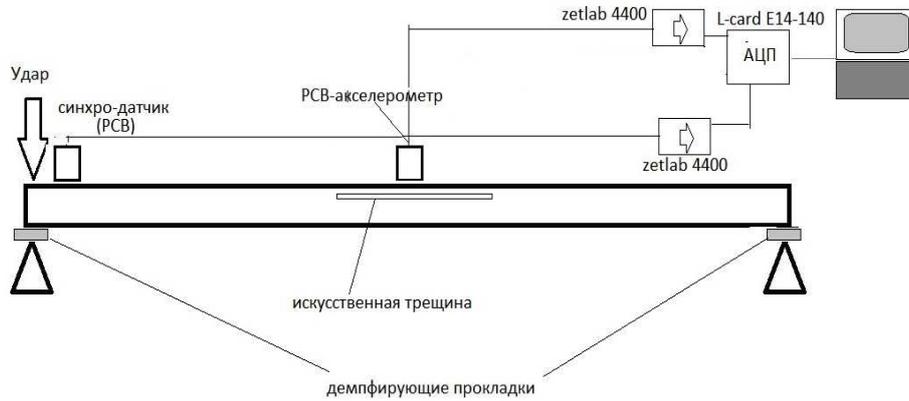


Рисунок 1 – Блок-схема эксперимента

Для синхронизации записи в зоне ударного возмущения расположен дополнительный акселерометр, дающий команду начала записи процесса (старт-триггер синхронизация). Само ударное возмущение производится электромагнитным ударным «молотком», обеспечивающим постоянство условий возмущения во всех сериях измерений.

Возникшие колебания  $f(t)$ ,  $t \in [0, T]$  фиксировались датчиком  $S$  в течение временного интервала  $T$ , достаточного для прихода отраженных волн от противоположного конца конструкции.

Распознавание типа дефекта по функциям отклика  $f(t)$  осуществлялось на основе использования построенных признаков пространств диагностики  $\xi$  [8].

Для отображения обобщенного топологического пространства  $\mathbf{C}$  функций  $f(t)$  в пространство  $\xi$  использовалось ортогональное гомеоморфное отображение, которое можно рассматривать, как обобщенное спектральное разложение функций  $f(t)$  по ортонормированным базисным функциям  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$  пространства  $\xi$  вида:

$$f_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_{i1} \xi_i(t),$$

$$(f_i(t) \in \mathbf{C}) \rightarrow ((w_{i1}, w_{i2}, \dots) \in \xi).$$

С учетом того, что функция  $f_i(t)$  представлена конечным числом измерений  $N$ , то есть  $f_i(t) \in \mathbf{R}^N$ , то последнее ортогональное преобразование может быть представлено как конечномерное в виде:

$$f_i(t) = w_0 + \sum_{i=1}^m w_{i1} \xi_i(t),$$

$$(f_i(t) \in \mathbf{R}^N) \rightarrow ((w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im}) \in \mathbf{R}^m)$$

График функции  $f_i(t)$  в соответствии с последним, преобразуется в  $m$ -мерный образ  $W_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im}) \in \mathbf{R}^m$ .

Особенностью указанного преобразования является адаптивность ортонормированного базиса  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$ , зависящего от типа преобразуемых функций  $f(t)$ . В частности, базис  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$  определяется, как результат решения комплекса оптимизационных задач:

Минимизация среднеквадратической ошибки воспроизведения функции  $f(t)$  при фиксированном числе  $m$  ортонормированных функций:

$$\Delta = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( f_i(k\Delta t) - \sum_{j=1}^m w_{ij} \xi_j(k\Delta t) - w_0 \right)^2}, \quad (1)$$

где  $M$  — объем обучающей выборки, а базисные функции ортонормированы:

$$(\xi_i, \xi_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Обеспечение наибольшей разнесенности образов в признаковом пространстве, соответствующих различным типам дефектов:

$$d^2(W_i, W_l) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{i, l = 1 \\ i \neq j}}^M \|W_i - W_l\|^2. \quad (3)$$

Для простоты графической и физической интерпретации дефектоскопию образцов будем осуществлять по образам  $W_i = (w_{i1}, w_{i2}) \in \mathbf{R}^2$  в двумерном признаковом пространстве. Как показали исследования, указанная размерность признакового пространства достаточна для проведения качественной диагностики образцов.

Был проведен эксперимент по исследованию влияния глубины залегания дефекта на возможности идентификации.

На рисунке 2 приводится результат построения признакового диагностического пространства и расположения образов для случаев балки без дефектов и балок, ослабленных трещиной длиной 60 мм, с различной глубиной залегания. На рисунке показаны кластеры (выделены эллипсами) для балки без дефектов, балки с глубиной залегания трещины 3 мм, балки с глубиной залегания трещины 12 мм.

Внутри кластеров расположены образы функций откликов (помечены звездочками) для различных образцов. Для достоверности измерений для каждого варианта дефекта было проведено несколько измерений. Серия измерений демонстрирует достаточно высокую степень повторяемости.

Параллельно был проведен вычислительный эксперимент. Были исследованы особенности динамического процесса на поверхности прямоугольного образца, выполненного из низкоскоростного материала, ослабленного дефектом в форме цилиндрической полости или цилиндрического включения диаметра  $D$  и заглубленным от поверхности на величину  $h$ . Диаметр дефекта, равно как и глубина его залегания варьировались. Длина образца 960 мм, сечение —  $50 \times 50$  мм<sup>2</sup>. Поверхностные колебания в образце возбуждались кратковременным силовым воздействием  $F$  на одном из концов. Для расчета волнового поля на поверхности параллелепипеда, ослабленного наличием дефекта, был применен конечно элементный

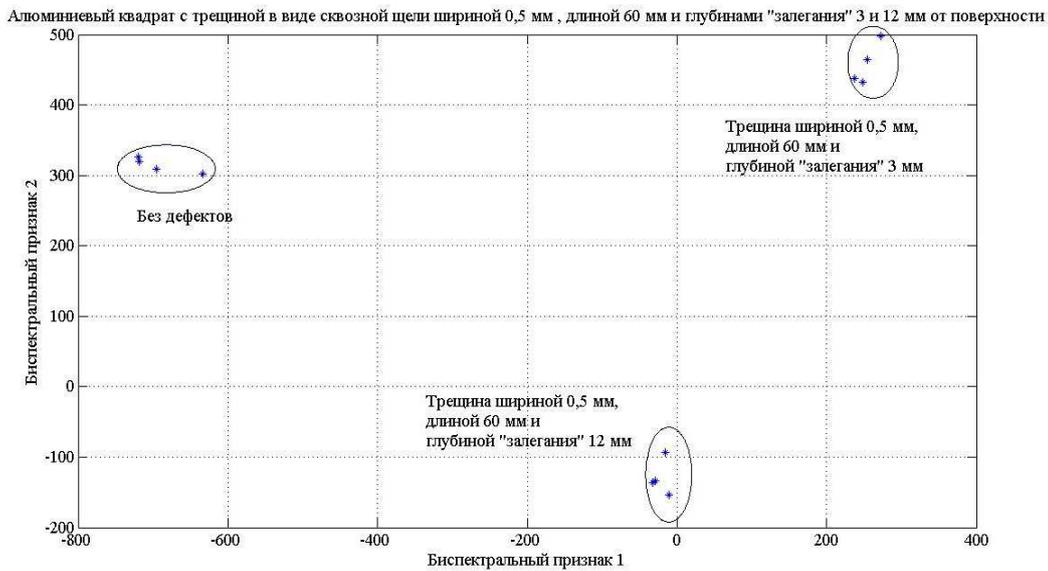


Рисунок 2 – Расположение образов в пространстве распознавания для балки, ослабленной трещиной с различной глубиной залегания.

пакет ANSYS с использованием командного языка APDL. Возбуждение волнового поля осуществлялось импульсом в виде «ступеньки» длительностью 50 мкс.

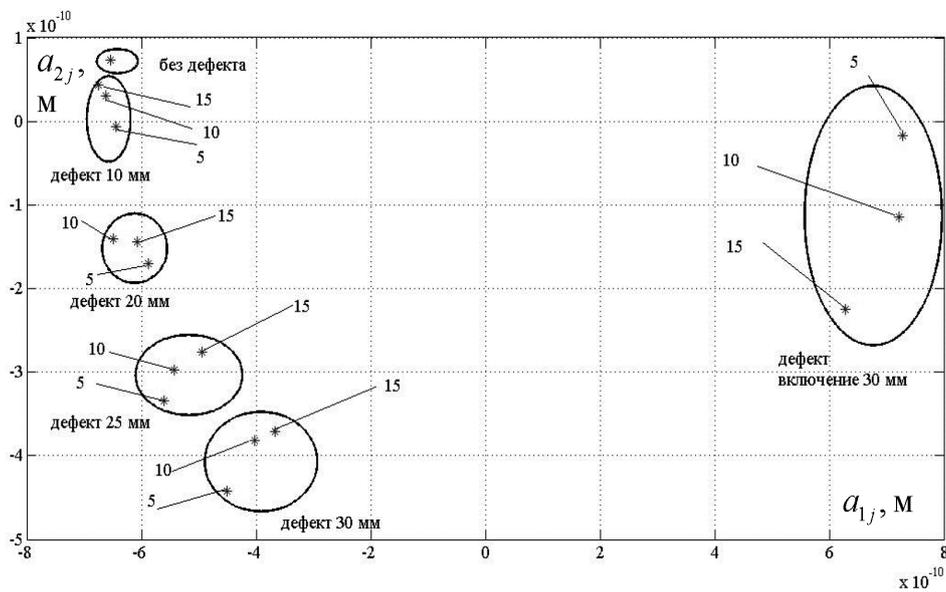


Рисунок 3 – Расположение образов в пространстве распознавания для различных типов дефектов, размеров дефектов и заглублений.

Была исследована возможность выявления дефектов типа «полость» и «включение» при изменении их диаметров  $D$ . Исследовано влияния глубины залегания  $h$  дефекта на возможности дефектоскопии.

Результат построения признакового диагностического пространства и распо-

жения образов приводится на рисунке 3, на котором показаны кластеры (выделены эллипсами) для дефектов различного типа и разного диаметра  $D$ . Внутри кластеров расположены образы функций откликов (помечены звездочками) для разных величин заглубления  $h$ .

Как показали результаты экспериментов, имеет место четкое распределение образов в пространстве распознавания в зависимости от характеристик дефекта. Это подтверждает эффективность предложенного подхода к обработке сигналов при решении задач определения скрытых дефектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 14-08-01213, 16-08-00802).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ланге Ю. В. Акустические низкочастотные методы контроля и средств неразрушающего контроля многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 276 с.
- [2] Неразрушающие методы контроля / Под ред. В. Я. Кершенбаума. М., 1992. 254 с.
- [3] Методы неразрушающих испытаний / Под ред. Р. Шарпа. М.: Мир, 1972. 494 с.
- [4] Ахтямов А. М., Каримов А. Р. Диагностирование полости в призматической балке // Дефектоскопия. 2013. № 3. С. 15–20.
- [5] Акопьян В. А., Черпаков А. В., Рожков Е. В., Соловьев А. Н. Интегральный диагностический признак идентификации повреждений в элементах стержневых конструкций // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 50–56.
- [6] Бочарова О. В., Анджилович И. Е., Ворович Е. И. К проблеме исследования поверхностных волновых полей с помощью тонкопленочных сегнетоэлектрических датчиков // Вестник Южного научного центра РАН. 2015. Т. 11. № 1. С. 30–35.
- [7] Белянкова Т. И., Бочарова О. В., Анджилович И. Е., Калинин В. В. О возможности мониторинга состояния неоднородных сред // Труды Южного научного центра РАН. Т. 6. 2016. С. 139–154.
- [8] Седов А. В. Моделирование объектов с дискретно-распределенными параметрами: декомпозиционный подход. М.: Наука, 2010. 438 с.

**Bocharova O. V., Andjiovich I. E., Sedov A. V.** *On one approach to signal processing in problems of low-frequency defectoscopy.* Special signal processing approach allowing to carry out identification of defects by controlling the structure and characteristics of the surface wave field with great efficiency, is proposed. The approach is based on the use of custom orthonormal basis.

# СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

**Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В.**

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

В работе представлено численное решение задачи о пространственных колебаниях одной или нескольких параллельно расположенных прямоугольных упругих пластин, находящихся в контакте с неподвижной вязкой жидкостью. Приведены результаты вычислений собственных частот, форм колебаний и декремента затухания, полученные при различных граничных условиях и высоте слоя жидкости. Продемонстрировано, что для рассмотренных конфигураций вязкость оказывает существенное влияние на декремент затухания в отличие от частот колебаний.

**1. Введение.** В динамике тонкостенных конструкций наряду с частотами и формами колебаний практический интерес представляет изучение демпфирующих характеристик системы. В случае гидроупругого взаимодействия они могут также определяться вязкостными свойствами жидкой среды. За последнее время в многочисленных численно-аналитических и численных исследованиях был осуществлён анализ пластин и оболочек, имеющих разнообразные конструктивные особенности и выполненных из различных материалов. При этом в подавляющем большинстве работ использовалась модель идеальной жидкости, в которой демпфирование не принималось во внимание. В данной статье предпринята попытка численного решения задачи о пространственных колебаниях одной или нескольких параллельно расположенных прямоугольных упругих пластин, взаимодействующих с неподвижной вязкой жидкостью.

**2. Разрешающие соотношения и численная реализация.** Рассматривается содержащий жидкость призматический контейнер длиной  $a$ , шириной  $b$ , высотой  $H$ , который имеет абсолютно жёсткие стенки, а сверху и снизу (или только сверху) ограничен упругими прямоугольными пластинами толщиной  $h$ . Безвихревое возмущённое движение вязкой жидкости описывается в рамках акустического приближения в терминах потенциала скоростей  $\phi$  [1]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left( c^2 + \frac{4\nu}{3} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \phi, \quad (1)$$

где  $c$ ,  $\nu$  — скорость звука и кинематическая вязкость жидкости.

Напряжения в сжимаемой вязкой жидкости, выраженные через потенциал, определяются соотношением

$$\sigma_{ij}^f = - \left( \rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2\mu \nabla^2 \phi \right) \delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = \overline{x, y, z}, \quad (2)$$

где  $\mu$  и  $\rho_f$  — коэффициент динамической вязкости и плотность жидкости,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

На границе упругой конструкции и жидкости  $S_\sigma$  задаётся условие равенства нормальных скоростей и нормальных напряжений

$$\dot{w} = v_n, \quad \sigma_{nn}^s = \sigma_{nn}^f, \quad (3)$$

где  $w$  — нормальная составляющая вектора перемещений пластины,  $v_n$  — скорость жидкости в направлении нормали к плоскости  $S_\sigma$ ,  $\sigma_{nn}^s$ ,  $\sigma_{nn}^f$  — нормальные напряжения упругой конструкции и жидкости на границе контакта.

Для малых перемещений вектор нормали к поверхности  $S_\sigma$  незначительно отклоняется от вертикальной координаты  $z$ , поэтому в контексте теории пластин граничные условия (3) примут вид

$$\dot{w} = \partial\phi/\partial z, \quad p_w \equiv \sigma_{nn}^s = -\rho_f \frac{\partial\phi}{\partial t} + 2\mu\nabla^2\phi. \quad (4,5)$$

Здесь выражение (4) представляет собой условие непроницаемости, а (5) — аналог уравнения Бернулли.

На границе жидкости с жёсткой стенкой  $S_w$  задаётся условие

$$\partial\phi/\partial n = 0. \quad (6)$$

Малые деформации, возникающие в пластине в результате гидродинамического взаимодействия, определяются с помощью теории, основанной на гипотезах Тимошенко [2]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + z\tilde{\mathbf{k}}, \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \{\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0, \gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x, \theta_y \right\}^T, \\ \tilde{\mathbf{k}} &= \{\varepsilon_{xx}^1, \varepsilon_{yy}^1, \varepsilon_{xy}^1, 0, 0\}^T = \left\{ \frac{\partial\theta_x}{\partial x}, \frac{\partial\theta_y}{\partial y}, \frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}, 0, 0 \right\}^T, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — перемещения точек срединной поверхности в направлении соответствующих осей системы координат  $(x, y, z)$ ,  $\theta_x$  и  $\theta_y$  — углы поворота нормали вокруг осей  $y$  и  $x$ .

Физические соотношения, связывающие вектор усилий и моментов  $\mathbf{T}$  и вектор деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , в матричном виде имеют вид

$$\mathbf{T} = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y\}^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (8)$$

Для изотропного материала коэффициенты, входящие в матрицу жёсткостей  $\mathbf{D}$ , определяются известным образом.

Математическая постановка задачи динамики пластин основывается на вариационном принципе возможных перемещений, в который включается выражение для давления (5) и работа сил инерции. В матричной форме он может быть записан для каждой из пластин следующим образом

$$\int_{S_s} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dS + \int_{V_s} \rho_s \delta\mathbf{d}^T \ddot{\mathbf{d}} dV - \int_{S_\sigma} \delta\mathbf{d}^T \mathbf{P} dS, \quad \mathbf{P} = \{0, 0, p_w, 0, 0\}^T, \quad (9)$$

где  $\rho_s$  — плотность материала пластины,  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{P}$  — вектора обобщённых перемещений и поверхностных нагрузок, точками обозначена производная по времени.

Слабая формулировка конечно-элементной постановки задачи динамики жидкости основывается на применении метода Бубнова—Галёркина к волновому уравнению (1) совместно с граничными условиями (4) и (6). Полученные разрешающие соотношения записываются в матричном виде как

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{f}} + \mathbf{C}_f^{\nu} \dot{\mathbf{f}} + \mathbf{K}_f \mathbf{f} + \mathbf{M}_f^{\nu} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{w}} = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}{c^2} dV, \quad \mathbf{C}_f = - \sum_{m_{\sigma}} \int_{S_{\sigma}} \mathbf{F}^T \mathbf{N}^w dS, \quad \mathbf{C}_f^{\nu} = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{4\nu \Phi}{3c^2} dV,$$

$$\mathbf{K}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \Phi dV, \quad \mathbf{M}_f^{\nu} = - \sum_{m_{\sigma}} \int_{S_{\sigma}} \frac{4\nu \mathbf{F}^T \mathbf{N}^w}{3c^2} dS, \quad \Phi = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}.$$

Здесь:  $m_f, m_{\sigma}$  — число конечных элементов, на которые разбиваются область жидкости  $V_f$  и граница  $S_{\sigma}$ ;  $\mathbf{f}$  — вектор узловых значений потенциала возмущённых скоростей  $\phi$ ;  $\mathbf{F}, \mathbf{N}^w$  — функции формы для потенциала возмущённых скоростей и нормальной составляющей  $w$  вектора перемещений пластин.

Применяя известные процедуры метода конечных элементов к вариационному уравнению (9) с учётом (7) и (8), получим для каждой из пластин

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_s \mathbf{d} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{f}} + \mathbf{K}_s^{\nu} \mathbf{f} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_s = \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad \mathbf{C}_s = \sum_{m_{\sigma}} \int_{S_{\sigma}} \rho_f \mathbf{F}^T \mathbf{N}^w dS,$$

$$\mathbf{K}_s^{\nu} = \sum_{m_{\sigma}} \int_{S_{\sigma}} 2\mu (\mathbf{N}^w)^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) dS.$$

Здесь:  $m_s$  — число конечных элементов, на которые разбивается поверхность пластины;  $\mathbf{N}$  — функции формы конечного элемента;  $\mathbf{B}$  — матрица связи деформаций с узловыми перемещениями и углами поворота.

Задача исследования динамического поведения двух параллельных упругих пластин, взаимодействующих с содержащейся между ними сжимаемой вязкой жидкостью, сводится к совместному решению систем уравнений (10) и (11)

$$\mathbf{M} \{ \ddot{\mathbf{d}}_1 \quad \ddot{\mathbf{f}} \quad \ddot{\mathbf{d}}_2 \}^T + \mathbf{C} \{ \dot{\mathbf{d}}_1 \quad \dot{\mathbf{f}} \quad \dot{\mathbf{d}}_2 \}^T + \mathbf{K} \{ \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{f} \quad \mathbf{d}_2 \}^T = 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{s_1} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{f_1}^{\nu} & \mathbf{M}_f & \mathbf{M}_{f_2}^{\nu} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{s_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{s_1} & 0 \\ \mathbf{C}_{f_1} & \mathbf{C}_f^{\nu} & \mathbf{C}_{f_2} \\ 0 & \mathbf{C}_{s_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{s_1} & \mathbf{K}_{s_1}^{\nu} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_f & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{s_2}^{\nu} & \mathbf{K}_{s_2} \end{bmatrix}.$$

Представляя возмущённое движение в виде  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{f}, \mathbf{d}_2) = (\bar{\mathbf{d}}_1, \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{d}}_2) \exp(\lambda t)$ , где  $\bar{\mathbf{d}}_1, \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{d}}_2$  — функции координат, а  $\lambda = \delta + i\omega$  — характеристический показатель, из (12) получим обобщённую задачу на собственные значения для несимметричных матриц удвоенной размерности

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = 0, \quad (13)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица,  $\mathbf{x} = \{ \bar{\mathbf{d}} \ \bar{\mathbf{f}} \}^T$ .

Вычисление комплексных собственных значений уравнения (13) осуществляется с использованием процедур ARPACK, в основе которых лежит неявно перезапускаемый метод Арнольди.

**3. Численные примеры.** С целью выявления новых закономерностей динамических характеристик пластин, взаимодействующих с вязкой жидкостью ( $\nu = 1.004 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ), была проведена серия вычислительных экспериментов.

Для кинематических граничных условий, задаваемых на краях пластин, введены следующие обозначения:  $C$  — жёсткое закрепление ( $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z$ ),  $F$  — свободный край. При указании заданной комбинации граничных условий перечисление ведётся по часовой стрелке, начиная с левого края. Исследование собственных колебаний пластин, взаимодействующих с идеальной жидкостью, было выполнено авторами ранее в работе [3]. Полученные с использованием новой модели результаты подтверждают известный факт о том, что вязкость жидкости не влияет на частоту колебаний. В связи с этим, приведённые на рисунке 1, *a* кривые полностью совпадают с опубликованными в [3]. Зависимость низшей собственной частоты колебаний одиночной пластины от высоты слоя жидкости носит асимптотический характер. Однако для параметра  $\delta$ , характеризующего демпфирование системы, аналогичная особенность свойственна в меньшей степени (см. рисунок 1, *б*) и определяется условиями закрепления.

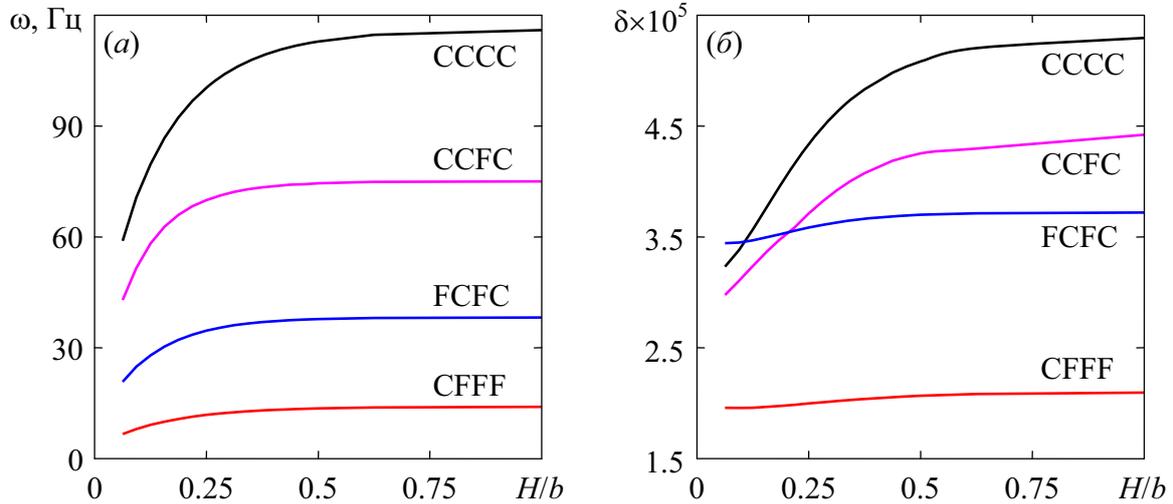


Рисунок 1 – Графики изменений низших собственных частот колебаний  $\omega$  (а) и демпфирования  $\delta$  (б) от высоты слоя жидкости  $H$  для пластин с различными комбинациями граничных условий

В результате анализа двух параллельных пластин было выявлено, что зависимость какой-либо фиксированной частоты в спектре и её демпфирования от отношения  $H/b$  носит сильно выраженный немонотонный характер и может иметь изломы, вызванные сменой формы колебаний. В качестве примера на рисунке 2, *a*

показано, что нижней собственной частоте  $\omega_1$  на рассмотренном интервале  $H/b$  соответствует две формы колебаний  $(1, 0)$  и  $(0, 0)$ . Здесь через  $(n, m)$  обозначено число узловых линий в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$ . Рисунок 2,б демонстрирует поведение параметра  $\delta$  при смене формы колебаний частоты  $\omega_2$  в окрестности точки  $H/b = 0.265$ . Видно, что демпфирование в этот момент испытывает скачкообразное изменение.

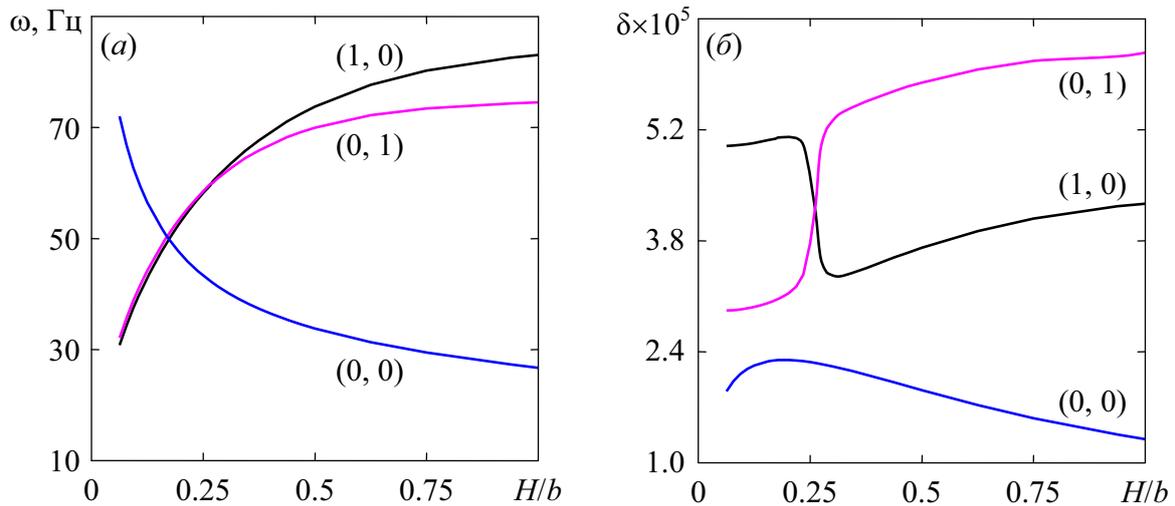


Рисунок 2 – Зависимости собственных частот колебаний  $\omega$  (а) и демпфирования  $\delta$  (б) от высоты слоя жидкости (ССФС)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-41-590646) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук МК-6167.2015.1.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Joseph D. D. Viscous potential flow // J. Fluid Mech. 2003. V. 479. P. 191–197.
- [2] Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
- [3] Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Effect of boundary conditions on the hydroelastic vibrations of two parallel plates // Solid State Phenomena. 2016. V. 243. P. 51–58.

**Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V.** *Natural vibrations of rectangular plates, interacting with a viscous fluid.* This paper presents a numerical solution of the problem of spatial vibrations of one or two parallel rectangular elastic plates containing a quiescent viscous fluid between them. The results of the calculation of natural frequencies, mode shapes and damping rate obtained under various boundary conditions and fluid layer height has been presented. It has been shown that for the considered configurations the viscosity of fluid significantly affects on the damping rate as opposed to the natural frequencies.

# РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ БИНГАМА—ИЛЬЮШИНА В ПЛОСКОМ КОНФУЗОРЕ

Бураго Н. Г.

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Рассматриваются нестационарные течения вязкопластической несжимаемой среды Бингама—Ильюшина в плоском конфузоре. Подробности истории вопроса и обзор можно найти в [1–5]. Отметим, что в большинстве работ решение получается приближенными полуаналитическими методами с использованием упрощающих предположений. Получение численных решений на основе полных исходных уравнений представляет интерес во-первых для сравнений с аналитическими решениями, а во-вторых для исследования задач со сложной геометрией и возможных вариаций исходной формулировки. Возможности такого подхода показаны на примерах расчета методом конечных элементов.

**1. Основные уравнения.** Для расчета определяющие соотношения среды Бингама—Ильюшина были модифицированы с тем, чтобы получать решение сквозным счетом и для вязко-пластического, и для жесткого состояний среды:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{g}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu \mathbf{e}', \quad \mu = \mu_0(1 + (\varepsilon + (2\mu_0 e_{II}/\tau_s - 1)_+)^{-1})$$

$$\mathbf{e}' = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2, \quad e_{II} = \sqrt{\mathbf{e}' : \mathbf{e}'}$$

где новизна имеется в формуле для коэффициента вязкости  $\mu$ , в которую введен малый безразмерный параметр  $\varepsilon$ , позволяющий заменить бесконечное значение вязкости в жесткой области большим, но конечным значением  $\mu = \mu_0(1 + 1/\varepsilon)$  при  $2\mu_0 e_{II} < \tau_s$ . Принято обозначение  $(a)_+ = aH(a)$ , где  $H$  — функция Хевисайда. Конечно, такая регуляризация оригинальных соотношений не является единственно возможной, но она проста и работает хорошо. Обозначения традиционны, штрихи отмечают девиаторы напряжений и скоростей деформаций. Начальные и граничные условия оговариваются далее при описании примеров.

**2. Метод решения.** Нетрудно видеть, что благодаря принятому выражению для коэффициента вязкости расчет сводится к обычной начально-краевой задаче для система уравнений Навье — Стокса. Задача решается в скоростях. Несжимаемость учтена методом штрафных функций. Для этого давление ищется в виде  $p = -\rho c^2 t_0 \nabla \cdot \mathbf{u}$ , где  $\rho c^2 t_0$  — коэффициент штрафа,  $c \gg |\mathbf{u}|$  — фиктивная скорость звука,  $t_0$  — постоянная, имеющая размерность времени. Скорости аппроксимируются кусочно-линейными функциями на нерегулярной сетке треугольных конечных элементов. Применяемая схема МКЭ аналогична двухслойным центрально-разностным схемам. Конвективные члены аппроксимированы явно. Для устойчивости в уравнения вводится искусственная вязкость, при этом физическая вязкость уменьшается по методу экспоненциальной подгонки А. А. Самарского, шаг

по времени ограничен условием Куранта  $\Delta t < \beta h / |\mathbf{u}|$ , где  $h$  — радиус окрестности сеточного шаблона,  $\beta$  — коэффициент запаса. Коэффициент штрафа выбирается так, чтобы фиктивная скорость звука была примерно на порядок больше максимальной скорости в области течения (фиктивное число Маха примерно 0.1).

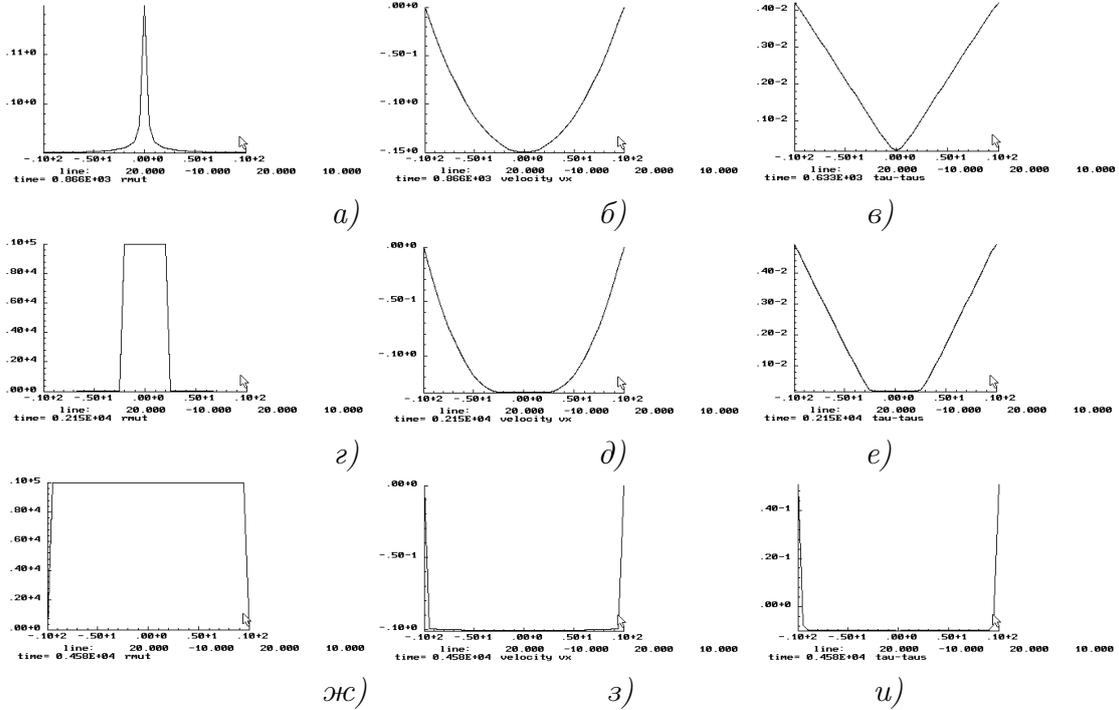


Рис.1. Распределение вязкости (а,г,ж), горизонтальной скорости ( б,д,з) и интенсивности напряжений (в,е,и) во входном сечении ( $x = 20$ ) при  $\tau_s = 10^{-6}$  (а,б,в), при  $\tau_s = 5 \cdot 10^{-5}$  (г,д,е) и при  $\tau_s = 10^{-2}$  (ж,з,и).



Рис.2. Распределение горизонтальной скорости  $u_x$  во входном сечении в моменты, когда она достигает максимальных значений в колебательном режиме.

**3. Результаты.** Для проверки была рассмотрена задача о стационарном плоском течении Пуазейля (рис. 1–2). В области течения  $V = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 20, -10 \leq y \leq 10\}$  приняты следующие исходные данные  $Q = \int_{-10}^{10} u_x dy = 2$ ,  $\mu_0 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\rho = 1$ . Для  $\tau_s = 10^{-6}$  вязкость почти всюду равна невозмущенному значению и решение для скорости практически совпадает с аналитическим решением Пуазейля для постоянной вязкости (см. Рис. 1а, 1б, 1в). По мере увеличения значения  $\tau_s$  зона повышенного значения вязкости разрастается (см. Рис. 1г, 1д, 1е). Для  $\tau_s = 10^{-2}$  решение еще остается стационарным и показано на Рис. 1а, 1б, 1в.

Для значений  $\tau_s = 3 \cdot 10^{-2}$  и больших решение становится нестационарным и колебательным с модами течения, показанными на рис. 2, где видны типичные

профили скорости  $u_x$  для моментов времени, отвечающих достижению приграничными скоростями максимальных значений. То есть, поток локализуется поочередно то у одной стенки, то у другой, при этом у противоположной стенки возникает возвратное течение.

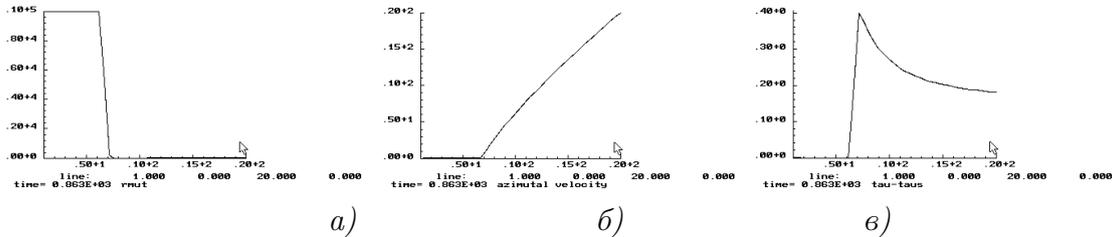


Рис. 3. Радиальное распределение коэффициента вязкости (а), азимутальной скорости (б) и интенсивности вязких напряжений (в) для течения Куэтта в случае среды Бингама—Ильюшина.

Образование зоны жесткого состояния жидкости Бингама—Ильюшина наблюдается в задаче о течения Куэтта. Расчет выполнен для случая неподвижного внутреннего цилиндра (радиуса 1) и вращающегося с азимутальной скоростью  $v_\theta = 1$  внешнего цилиндра (радиуса 20). Для  $\mu_0 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\tau_s = 10^{-3}$  в решении около внутреннего цилиндра видна область с высоким значением коэффициента вязкости (см. Рис. 3).

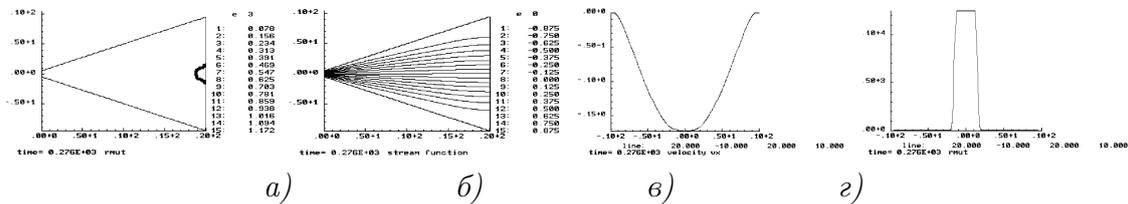


Рис. 4. Число Рейнольдса  $Re = Q/\mu_0 = 160$ . Изолинии вязкости а) и функция тока б), графики горизонтальной скорости в) и вязкости г) по входному сечению  $x = 20$ .

Основной интерес работы был сосредоточен на задаче о течении в плоском конфузоре, которое и приводится ниже. Геометрия конфузора показана на Рис. 4а. На стенках конфузора реализованы условия прилипания, Расход задавался неизменным во времени (путем задания на стенках значений функции тока), начальное распределение скоростей отвечало установившемуся безвихревому потоку с невозмущенным значением вязкости  $\mu = \mu_0$ , плотность полагалась равной 1. На входе и на выходе ставились мягкие граничные условия продолжения решения за границу области решения.

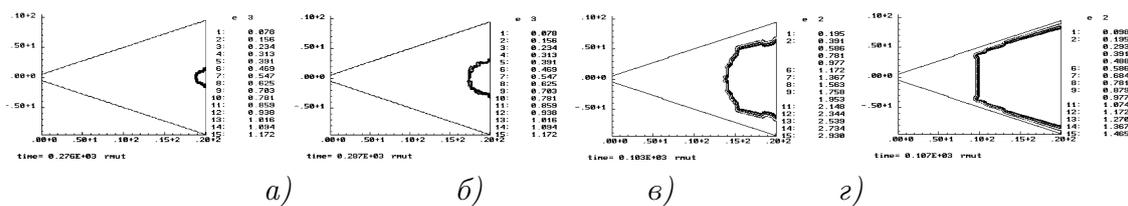


Рис. 5. Влияние числа Рейнольдса на зону жесткого состояния: а) 160, б) 320, в) 640, г) 1280.

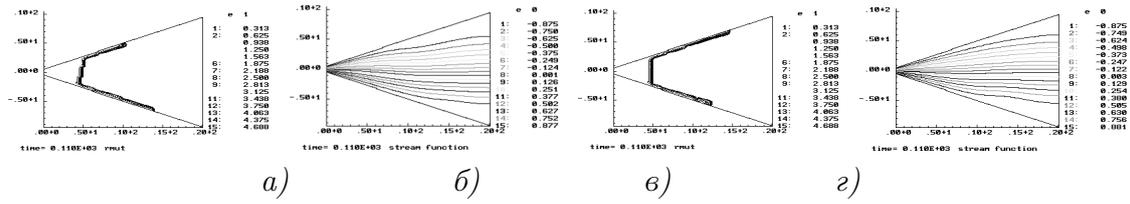


Рис. 6. Колебания конфигурации зон жесткого состояния и линий тока для  $Re = 4000$



Рис. 7. История горизонтальной скорости в точке  $x = 10, y = 4$  для  $Re = 4000$  и в точке  $x = 5, y = 2$  для  $Re = 40000$ .

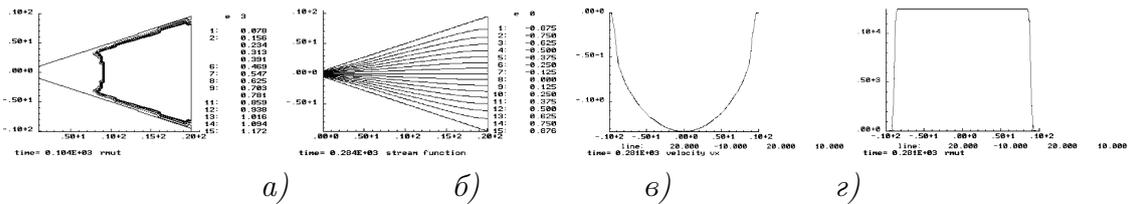


Рис. 8. Влияние предела текучести, равного здесь  $\tau_0 = 0.001$  (сравнение с Рис. 4 для  $\tau_0 = 0.0001$ ), показаны изолинии коэффициента вязкости (а) и функции тока (б), распределение горизонтальной скорости (в) и коэффициента вязкости (г) по входному сечению  $x = 20$ .

**Влияние числа Рейнольдса.** Для  $\tau_0 = 0.0001, \alpha = \pi/8, \varepsilon = 10^{-5}, Re = Q/\mu_0 = 160$  ( $\alpha$  — угол между стенками конфузора и осью абсцисс) решение показано на Рис. 4. Поток направлен справа налево. В середине входного сечения (Рис. 4а) видна небольшая зона жестко-пластического состояния, в которой значения коэффициента вязкости повышены. С ростом числа Рейнольдса растет и зона жестко-пластического состояния (см. Рис. 5). При дальнейшем росте чисел Рейнольдса течение принимает нестационарный характер и локализуется у стенок конфузора. При этом рассматриваемая среда в центральной части конфузора переходит в «жесткое» состояние с высоким значением коэффициента вязкости. Например, при  $Re = 4000$  имеем нестационарный колебательный режим, для которого на Рис. 6 показаны «противофазные» состояния «жесткой» зоны и изолиний функции тока. Развитие нестационарного режима течения во времени видно на Рис. 7, где показана история горизонтальной скорости в характерных точках области течения.

**Влияние «предела текучести»  $\tau_0$ .** С ростом параметра  $\tau_0$ , как и в задаче Пуазейля, наблюдается очень быстрое распространение зоны повышенной вязкости. Например, для варианта, показанного на рис. 4, увеличим предел текучести до  $\tau_0 = 0.001, (\alpha = \pi/8, \varepsilon = 10^{-5}, Re = Q/\mu_0 = 160)$ , тогда зона жесткопластического состояния распространится от входного сечения на значительную часть области

решения (см. Рис. 8) Отметим, что показанные численные решения качественно согласуются с приближенными аналитическими решениями, полученными в [2–5].

Автор благодарит Л. Д. Акуленко и С. В. Нестерова за приобщение к данной проблеме и ценные консультации. Работа поддержана грантами РФФИ № 15-08-02392, № 14-01-00741 и программой РАН ОЭММПУ-12.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Георгиевский Д. В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 176 с.
- [2] Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакишев С. А., Нестеров С. В. Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 1. С. 44–48.
- [3] Климов Д. М., Нестеров С. В., Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакишев С. А. Течение вязкопластической среды с малым пределом текучести в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 1. С. 37–41.
- [4] Георгиевский Д. В. Некоторые неоднородные задачи вязкопластичности: жёсткие зоны и устойчивость // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 61–78.
- [5] Климов Д. М., Нестеров С. В., Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакишев С. А. Вязкопластическое течение в конфузоре // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. 2001. Спецвыпуск. С. 89–92.

**Burago N. G.** *Calculation of unsteady flow of Bingham-Ilyushin' viscoplastic incompressible medium in flat confusor.* Paper is devoted to calculation of non-stationary flow of Bingham-Ilyushin' incompressible visco-plastic medium in flat confusor. In most of studies such calculations are realized using semi-analytical methods and simplified problem statement. The presence of simplifying assumptions puts questions about their physical adequacy, therefore obtaining numerical solutions based on the original equations is of interest for comparison with analytical solutions on the one hand and, on the other hand, for the study of problems with complex geometries and for testing possible variations of the original equations. The possibilities of such approach are demonstrated by the examples of viscoplastic flows using finite element method.

# НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Бураго Н. Г.<sup>1</sup>, Никитин И. С.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

<sup>2</sup>Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

Во многих технических устройствах используются элементы конструкций в виде цилиндров переменной толщины. Определение упругого напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндров необходимо для получения оценки квазистатической или циклической (усталостной) прочности. В настоящее время, как правило, для расчета НДС применяются конечно-элементные пакеты программ [1–4]. Часто границы цилиндров содержат малые периодические по окружной координате отклонения от окружности. Тогда напряжения можно быстро и экономно рассчитать методами теории возмущений (разложением по малому параметру) [5], уменьшая размерность задачи и сводя двумерную или даже трехмерную задачу теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [6–8]. В настоящей работе малый параметр характеризует изменение радиуса цилиндра в зависимости от окружной координаты. По окружной координате решение представлено рядами Фурье с коэффициентами, зависящими от радиальной координаты. Для коэффициентов Фурье нулевого и первого приближений выведены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые затем были решены аналитическим или численно-аналитическим методом.

**1. Постановка и геометрия задачи.** Рассматривается задача о квазистатическом напряженно-деформированном состоянии бесконечно длинного толстого цилиндра переменной толщины под действием внутреннего давления. Двумерная система уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат имеет вид (плоское деформированное состояние)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} = 0$$

Напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{r\vartheta}$  связаны с деформациями законом Гука

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}$$

Связь деформаций и смещений  $u_r$ ,  $u_\vartheta$  имеет вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе. В дальнейшем используются безразмерные переменные: напряжения отнесены к  $\lambda + 2\mu$ , координаты  $r$ ,  $z$  отнесены к характерному внутреннему радиусу  $a$ . Пусть внешний контур цилиндра является

окружностью радиуса  $b$  (Рис. 1) и свободен от напряжений:  $\sigma_{nn} = 0$ ,  $\sigma_{n\tau} = 0$ . Пусть форма внутреннего контура близка к окружности радиуса  $a$  и описывается уравнением  $r = a + \varepsilon g(\vartheta)$  или, в безразмерном виде,  $r = 1 + \varepsilon g(\vartheta)$ . Внутренняя граница цилиндра нагружена давлением  $P_a$ :  $\sigma_{nn} = -P_a$ ,  $\sigma_{n\tau} = 0$ .

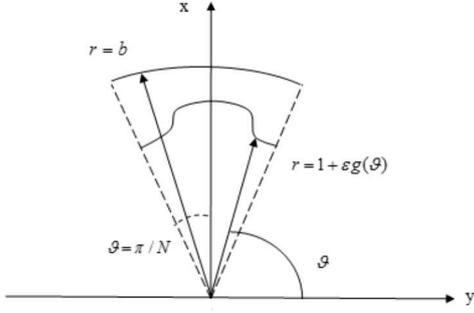


Рис. 1.

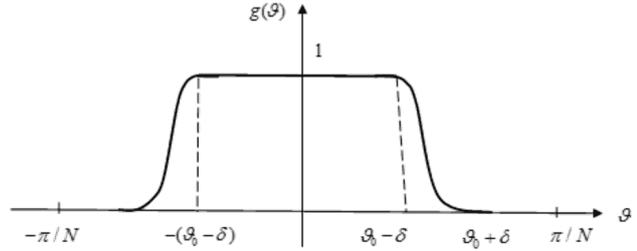


Рис. 2.

Пусть  $\varepsilon \ll 1$  малый параметр, функция  $g(\vartheta)$  определена при  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$  и является периодической с периодом  $-\pi/N \leq \vartheta \leq \pi/N$  (Рис. 2):

$$0 \leq |\vartheta| \leq \vartheta_0 - \delta : \quad g(\vartheta) = 1$$

$$\vartheta_0 - \delta < |\vartheta| \leq \vartheta_0 + \delta : \quad g(\vartheta) = \left( 1 - \sin \left( \frac{\pi(\vartheta - \vartheta_0)}{2\delta} \right) \right) / 2$$

$$\vartheta_0 + \delta < |\vartheta| \leq \pi/N : \quad g(\vartheta) = 0$$

Разложения в ряд Фурье этой функции и ее производной имеют вид:

$$g(\vartheta) = g_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos(kN\vartheta), \quad g'(\vartheta) = - \sum_{k=1}^{\infty} g_k kN \sin(kN\vartheta)$$

$$g_k = \frac{\sin(kN\vartheta_0)}{k} \frac{\pi/2}{(\pi/2 + kN\delta)} \frac{\sin(\pi/2 - kN\delta)}{(\pi/2 - kN\delta)}$$

Легко видны переходы при  $k \rightarrow 0$  и  $kN\delta \rightarrow \pi/2$ . При  $k = 0$  имеем  $g_0 = 2N\vartheta_0/\pi$ . Нормальные и касательные напряжения на внутреннем контуре имеют вид  $\sigma_{nn} = \sigma_{ij}n_i n_j$  и  $\sigma_{n\tau}^2 = |\sigma_{ij}n_j|^2 - |\sigma_{ij}n_i n_j|^2$ .

**2. Асимптотический анализ.** Решение ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру  $\varepsilon \ll 1$ :

$$\sigma(r, \vartheta) = \sigma_0(r) + \varepsilon \sigma_1(r, \vartheta), \quad s(r, \vartheta) = s_0(r) + \varepsilon s_1(r, \vartheta), \quad \tau(r, \vartheta) = \varepsilon \tau_1(r, \vartheta)$$

$$u(r, \vartheta) = u_0(r) + \varepsilon u_1(r, \vartheta), \quad v(r, \vartheta) = \varepsilon v_1(r, \vartheta)$$

где обозначено  $\sigma = \sigma_{rr}$ ,  $s = \sigma_{\vartheta\vartheta}$ ,  $\tau = \sigma_{r\vartheta} \Sigma = \sigma_{zz}$ ,  $u_r = u$ ,  $u_\vartheta = v$ . Отсюда следует

$$\sigma|_{r=1+\varepsilon g} = \sigma|_{r=1} + \varepsilon g \sigma'|_{r=1}, \quad s|_{r=1+\varepsilon g} = s|_{r=1} + \varepsilon g s'|_{r=1}, \quad \tau|_{r=1+\varepsilon g} = \tau|_{r=1} + \varepsilon g \tau'|_{r=1}$$

$$\sigma_{nn}|_{r=1+\varepsilon g} = \sigma_0 + \varepsilon(\sigma_1 + g\sigma'_0) + O(\varepsilon^2), \quad \sigma_{n\tau}^2|_{r=1+\varepsilon g} = \varepsilon^2(\tau_1 + g'(s_0 - \sigma_0))^2 + o(\varepsilon^2)$$

Для нулевого приближения (при  $\varepsilon = 0$ ) решение определяется формулами [9]:

$$\sigma_0(r) = -\frac{P_a}{(b^2 - 1)} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad s_0(r) = \frac{P_a}{(b^2 - 1)} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right)$$

Для первого приближения задача имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_1 - s_1}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_1}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_1}{r} = 0, \quad \sigma_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} + \lambda \frac{u_1}{r}$$

$$s_1 = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_1}{r}, \quad \tau_1 = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \right)$$

$$\sigma_1|_{r=1} = -\sigma'_0|_{r=1}g(\vartheta), \quad \tau_1|_{r=1} = -(s_0 - \sigma_0)|_{r=1}g'(\vartheta), \quad \sigma_1|_{r=b} = 0, \quad \tau_1|_{r=b} = 0$$

Разложения искомых функций в ряды Фурье имеют вид:

$$\sigma_1(r, \vartheta) = \frac{\sigma_{10}(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{1k}(r) \cos(kN\vartheta), \quad s_1(r, \vartheta) = \frac{s_{10}(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{1k}(r) \cos(kN\vartheta)$$

$$u_1(r, \vartheta) = \frac{u_{10}(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}(r) \cos(kN\vartheta)$$

$$\tau_1(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{1k}(r) \sin(kN\vartheta), \quad v_1(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}(r) \sin(kN\vartheta)$$

Для коэффициентов Фурье выведены обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d\sigma_{1k}}{dr} + (1 - \bar{\lambda}) \frac{\sigma_{1k}}{r} + \frac{n\tau_{1k}}{r} - (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{(u_{1k} + nv_{1k})}{r^2} = 0$$

$$\frac{d\tau_{1k}}{dr} + \frac{2\tau_{1k}}{r} - \bar{\lambda} \frac{n\sigma_{1k}}{r} - (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{n(u_{1k} + nv_{1k})}{r^2} = 0$$

$$\frac{du_{1k}}{dr} + \bar{\lambda} \frac{u_{1k}}{r} + \bar{\lambda} \frac{nv_{1k}}{r} - \sigma_{1k} = 0, \quad \frac{dv_{1k}}{dr} - \frac{v_{1k}}{r} - \frac{nu_{1k}}{r} - \frac{\tau_{1k}}{\bar{\mu}} = 0$$

с граничными условиями

$$\sigma_{1k}|_{r=1} = \Sigma_{1k}, \quad \tau_{1k}|_{r=1} = T_{1k}, \quad \sigma_{1k}|_{r=b} = 0, \quad \tau_{1k}|_{r=b} = 0$$

Для краткости приняты обозначения  $n = kN$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda/(\lambda + 2\mu)$ ,  $\bar{\mu} = \mu/(\lambda + 2\mu)$ . Общее решение этой системы было найдено в виде суммы четырех фундаментальных степенных решений с показателями  $\gamma_l$ ,  $\gamma_{1,2} = \pm(n + 1)$ ,  $\gamma_{3,4} = \pm(n - 1)$ :

$$\sigma_{1k} = \sum_{l=1,4} \sigma_{kl} r^{\gamma_l}, \quad \tau_{1k} = \sum_{l=1,4} \tau_{kl} r^{\gamma_l}, \quad u_{1k} = \sum_{l=1,4} u_{kl} r^{\gamma_l}, \quad v_{1k} = \sum_{l=1,4} v_{kl} r^{\gamma_l}$$

Для коэффициентов  $\sigma_{kl}$ ,  $\tau_{kl}$ ,  $u_{kl}$ ,  $v_{kl}$  получены аналитические выражения. Приведем окончательную формулу, например, для касательного напряжения:

$$\tau(r, \vartheta) = \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left( \frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{n(n+1)}{r^n} \right) \sin(kN\vartheta)$$

**3. Примеры расчетов.** Приняты такие исходные данные:  $N = 12$ ,  $b = 1.33$ ,  $\vartheta_0 = 0.653\pi/N = 0.171$ ,  $\pi/N = 0.262$ ,  $\delta = 0.163\vartheta_0 = 0.028$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta_0 - \delta = 0.143$ ,  $\vartheta_2 = \vartheta_0 + \delta = 0.199$ ,  $P_a = 0.001$ . На рис. 3–6 для сектора  $0 \leq |\vartheta| \leq \pi/N$  и  $1. \leq r \leq 1.33$  показаны линии уровня для  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $s$  и  $\sqrt{I_2}$ , где  $I_2 = ((\sigma - s)^2 + (\sigma - \Sigma)^2 + (s - \Sigma)^2 + 6\tau^2) / 6$ . В окрестности линии излома внутреннего контура хорошо видна зона концентрации напряжений. Результаты для случая, когда внутренняя поверхность цилиндра представлена чистой косинусоидой при  $N = 12$  показаны на рис. 7–8. Эта форма соответствует значениям параметров  $\vartheta_0 = \pi/(2N)$ ,  $\delta = \vartheta_0$ . Результаты при  $N = 24$  показаны на рис. 9–10.

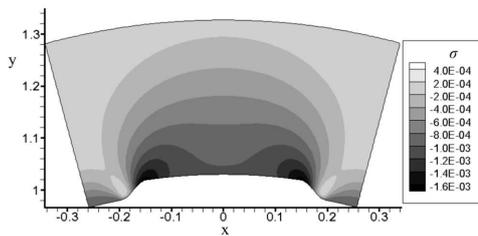


Рис. 3.

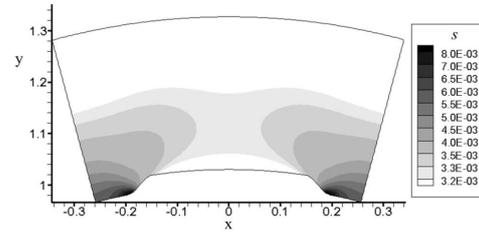


Рис. 4.

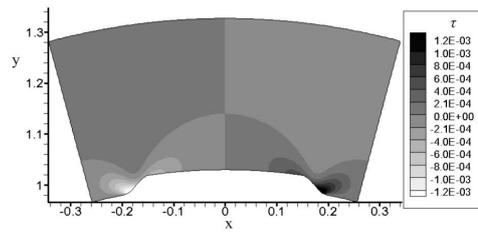


Рис. 5.

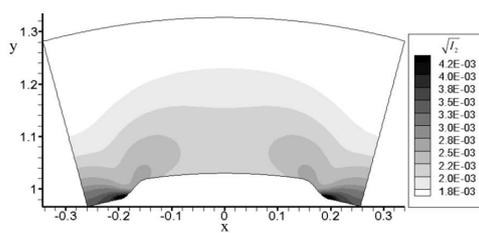


Рис. 6.

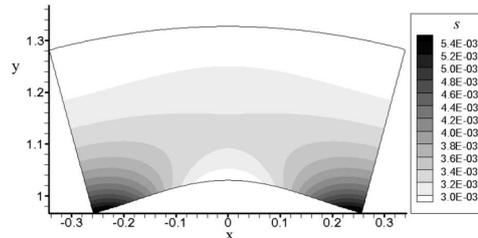


Рис. 7.

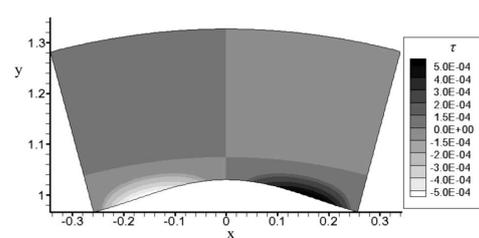


Рис. 8.

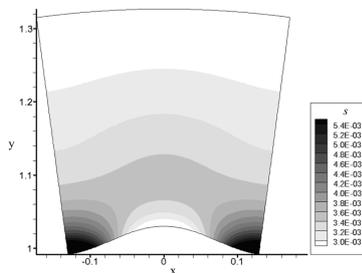


Рис. 9.

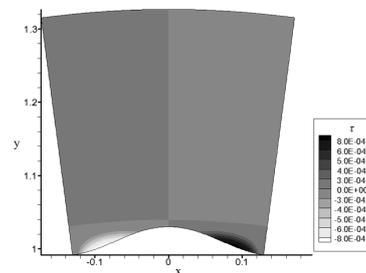


Рис. 10.

Во всех случаях особый интерес представляют компоненты касательных напряжений  $\tau$  и их максимальный уровень в зонах резкого изменения кривизны внутреннего контура. Зная эти значения и запас прочности материала, можно

оценить допустимый уровень внутреннего давления на внутреннюю поверхность цилиндра. Предложенный метод позволяет сделать это быстро и экономно.

Работа поддержана грантами РФФИ № 15-08-02392, № 14-01-00741 и программой РАН ОЭММПУ-12.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бураго Н. Г., Кужуджанов В. Н. Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет программ АСТРА. В кн. Вычислительная механика твердого деформируемого тела. М.: Наука. 1991. С. 78–122.
- [2] Алямовский А. А., Собачкин А. А., Одинцов Е. В., Харитонович А. И., Пономарев Н. Б. SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике. СПб.: БХВ-Петербург. 2006.
- [3] Бураго Н. Г., Журавлев А. Б., Никитин И. С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22–33.
- [4] Иноземцев А. А., Нихамкин М. А., Сандрацкий В. Л. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. М.: Машиностроение. 2008. 204 с.
- [5] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535 с.
- [6] Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение. 1978. 247 с.
- [7] Бураго Н. Г., Никитин И. С., Юшковский П. А. Долговечность дисков переменной толщины с учетом анизотропии усталостных свойств // Известия РАН. МТТ. 2015. № 5. С. 84–98.
- [8] Бураго Н. Г., Никитин И. С., Юшковский П. А. Численно-аналитический метод расчета колебаний упругого диска переменной толщины. Актуальные проблемы механики. 50 лет ИПМех РАН им. А. Ю. Ишлинского. Сборник статей. М.: Академиздатцентр «Наука». 2015. С. 489–497.
- [9] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.

**Burago N. G., Nikitin I. S.** *Asymmetrical deformation of elastic cylinder of variable thickness.* Elastic deformations of the cylinder of variable thickness under internal pressure have been calculated analytically by using perturbation method and Fourier series. Special attention was paid to the cases of practical interest, when circular cylinder has the inner boundary that slightly differs from a circle.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИСКАЖЕНИЙ В ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ, СОЗДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ СТЕРЕОЛИТОГРАФИИ

**Бычков П. С., Сайфутдинов Ю. Н.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

В работе развивается экспериментальная методика определения технологических искажений изделий, получаемых методом стереолитографической 3D печати. Для определения искажений создаваемого 3D объекта, вызванных технологической усадкой полимера при его солидификации, используется метод голографической интерферометрии. Исследования искажений производятся на объектах трех классов: трехмерных телах без мелкомасштабной детализации (пример — куб), тонкостенных телах (пример — полый куб с тонкими стенками) и телах с фрактальной структурой (пример — конечная итерация губки Менгера).

Стереолитографический процесс представляет собой последовательность циклов нанесения тонких слоев жидкого полимера и его отверждения под действием ультрафиолетового излучения, причем технология изготовления предполагает дополимеризацию уже принявшего окончательную форму изделия [1, 2]. 3D стереолитография теоретически позволяют изготавливать детали сколь угодно сложной геометрической формы, однако техническая реализация этого процесса сопряжена с технологическими проблемами, существенно снижающими качество, точность и повторяемость изделий.

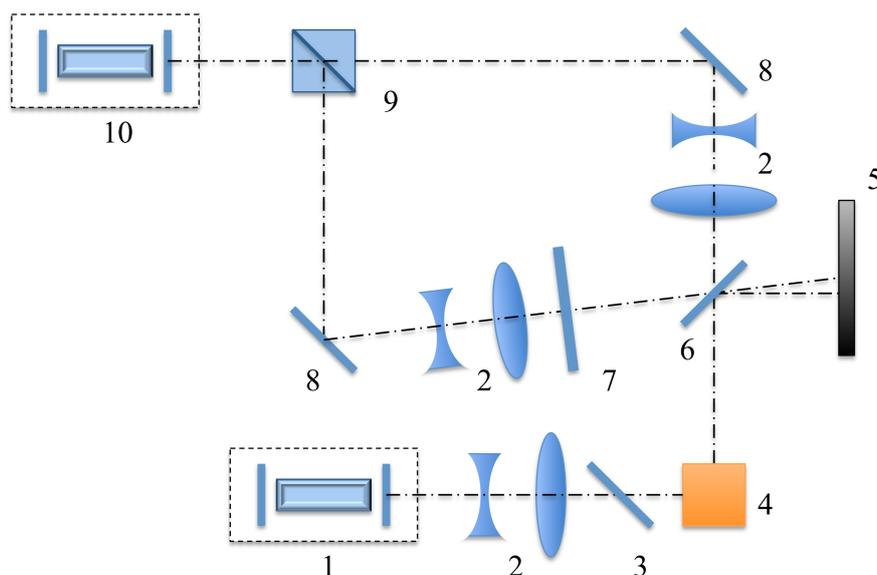


Рисунок 1 – Принципиальная схема установки

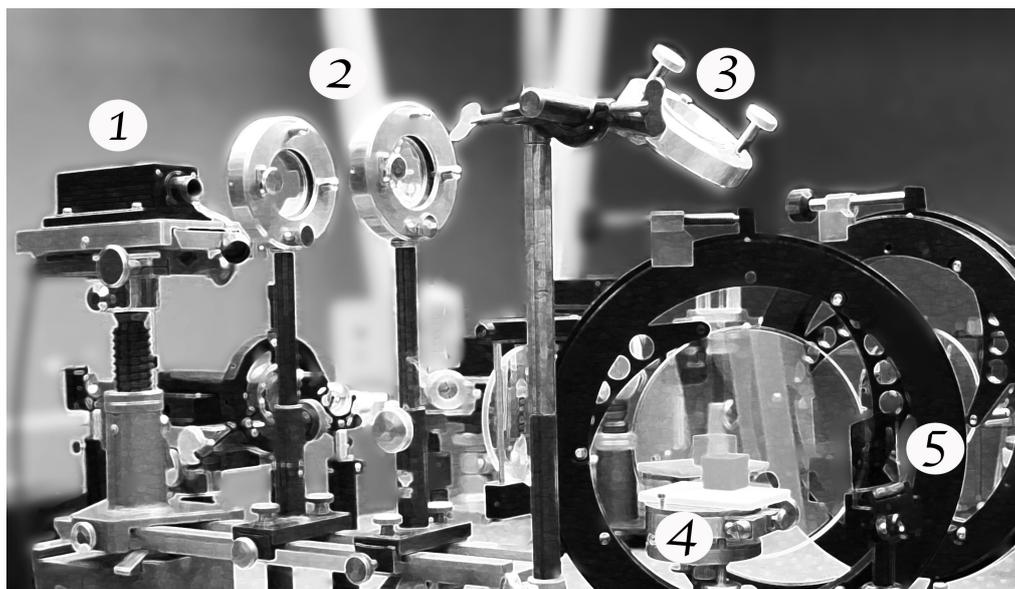


Рисунок 2 – Фотография установки

Одна из таких проблем — искажения финальной формы, вызванные усадкой при солидификации материала. При изготовлении тонкостенных деталей эти искажения могут существенно превосходить заданную точность. Один из способов уменьшения искажений — их компенсация начальными искажениями, учитываемыми в проекте [3, 4].

Образно говоря, для изготовления геометрически правильного тела, например, куба, следует передать в технологическую машину цифровую модель тела сложной формы, такую, что её отличия от куба компенсировались бы искажениями, возникающими при солидификации в ходе процесса. Компенсирующие [5, 6] искажения могут быть определены из решения обратной задачи механики растущих тел, но для формулировки этой задачи необходимо иметь экспериментальные данные о характере искажений слоистой структуры, получаемой в ходе технологического процесса. В статье предлагается соответствующая экспериментальная методика. Она, в отличие от известных методик, позволяет наблюдать в реальном времени эволюцию перемещений поверхности создаваемого объекта, что дает более детальную информацию для идентификации математической модели в сравнении с методиками, в которых определяются смещения конечного числа реперных точек [7].

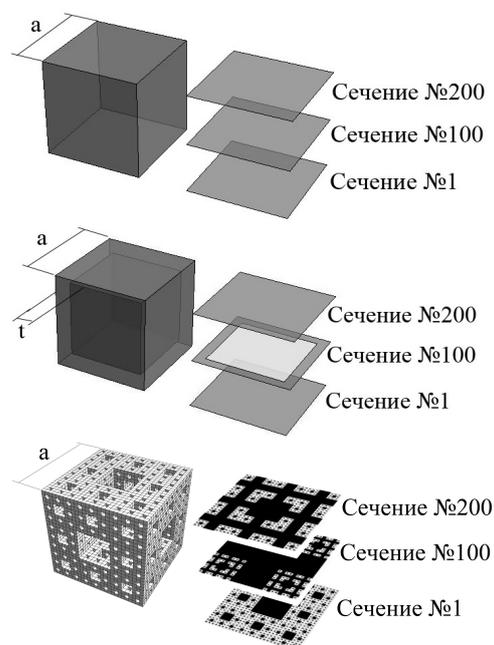


Рисунок 3 – Схематическое изображение исследуемых объектов

В рамках предлагаемой методики экспериментальное определение поля перемещений поверхности создаваемого тела осуществляется методом голографической интерферометрии. Измерения проводятся в ходе процесса финальной полимеризации. Используется схема Лейта — Упатниекса в режиме реального времени, что позволяет получить динамическую картину для полос вторичной интерференции и по ним восстановить процесс эволюции искажений границы тела. Принципиальная схема измерительной установки приведена на рис. 1, а изображение ее реализации — на рис. 2. Цифрами на рисунках обозначены: 1 — лазер для полимеризации; 2 — коллимирующая система; 3 — зеркало, переводящее горизонтальный луч засветки в вертикальный; 4 — исследуемый объект; 5 — фотопластина; 6 — полупрозрачное зеркало; 7 — поляризатор; 8 — зеркало; 9 — делительный кубик; 10 — лазер для голографии. В измерительной части схемы используется лазер с мощностью излучения 250 мВт и длиной волны 532 нм, а в солидифицирующей — лазер с мощностью излучения 100 мВт и длиной волны 405 нм. Для регистрации

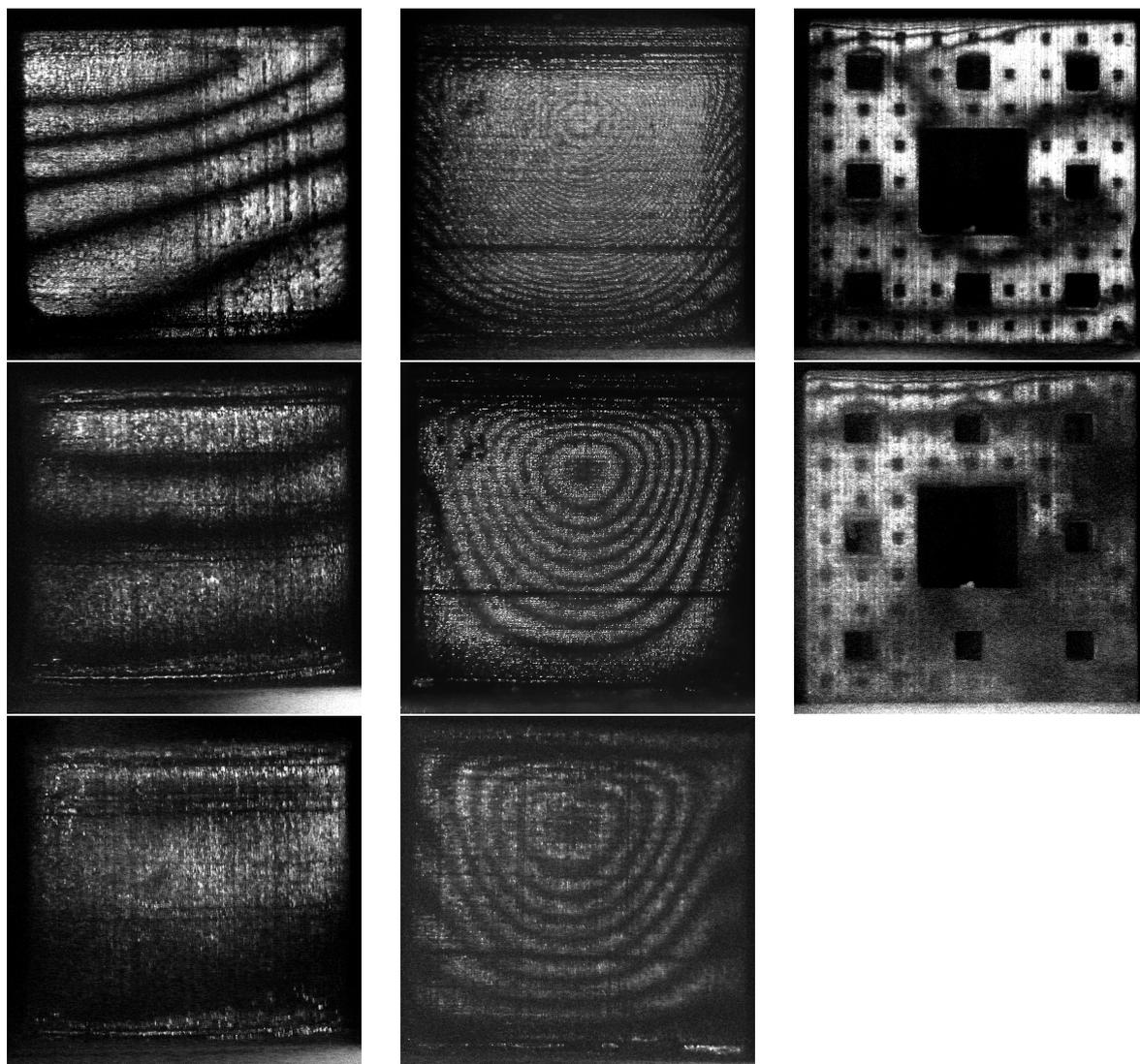


Рисунок 4 – Картины интерференции исследуемых объектов

голограмм используются фотопластины высокого разрешения ВРП-М.

В качестве изучаемых объектов использовались сплошной куб (простое трехмерное тело), полый куб с тонкими стенками (тонкостенный объект) и четвертая итерация фрактального тела — губка Менгера (объект сложной формы). Эти объекты изготавливались на 3D принтере из фотополимера. В принтере использовался DLP (Digital Light Processing) процесс. Основа жидкого полимера — диглицидовый эфир бисфенола, 4-акрилоилморфоин, три(пропиленгликоль) диакрилат. Схематическое изображение исследуемых объектов приведены на рис. 3. Размер  $a$  выбирался равным 20 мм для полого и сплошного кубов и 24,3 мм для губки Менгера. Размер  $t$  равен 2 мм. После послойного нанесения и первичной солидификации полимера созданные объекты закреплялись на виброизолированном оптическом столе на шероховатой поверхности, запрещающую перемещение нижней части границы, после чего производилась экспозиция, фиксирующая отчетную конфигурацию. Далее воспроизводился технологический процесс финальной полимеризации (воздействие ультрафиолетового излучения) и на CCD камеру фиксировалась эволюция полос вторичной интерференции, характеризующей эволюцию искажений поверхности тела. На рис. 4 приведены картины полос вторичной интерференции (наложение восстановленного по отчетной голограмме волнового фронта на актуальный волновой фронт, отраженный от деформированного объекта). Темные полосы соответствуют приращениям смещений по нормали к видимой грани объекта на величину  $\lambda/2 = 266$  нм и образуют семейство изолиний поверхности искажений. Строкам таблицы соответствуют времени засветки: по 2 с для кубов и 4 с для губки Менгера. Столбцам таблицы отвечают классы объектов. Заметим, что наибольшие искажения наблюдаются у полого куба (представителя класса тонкостенных тел.)

Авторы выражают благодарность А. В. Манжирову за плодотворные обсуждения работы и С. А. Лычеву за помощь в эксперименте. Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ № 14-01-00741 и № 15-08-06330.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] it Ed. Bartolo. Stereolithography. Materials, Processes and Applications. Springer, 2011. 340 p.
- [2] it Dr. Ian Gibson, Dr. David W. Rosen, Dr. Brent Stucker. Additive Manufacturing Technologies. 3D Printing, Rapid Prototyping, and Direct Digital Manufacturing. Springer, 2015. 498 p.
- [3] it Qiang Huang, Jizhe Zhang, Arman Sabbaghi and Tirthankar Dasgupta. Optimal offline compensation of shape shrinkage for three-dimensional printing processes // IIE Transactions. 2015. Volume 47. P. 431–441.

- [4] it Lu Lu, Jian Zheng, Sandipan Mishra. A Layer-To-Layer Model and Feedback Control of Ink-Jet 3-D Printing 2015. Volume: 20. P. 1056–1068
- [5] it Лычев С. А., Манжиров А. В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 585–604.
- [6] it Sergei A. Lychev, Alexander V. Manzhirov, and Pavel S. Bychkov Discrete and Continuous Growth of Deformable Cylinder // Transactions on Engineering Technologies: World Congress on Engineering 2014 (Springer Netherlands) 2015. С. 239–254.
- [7] it Amit S. Jariwala, Robert E. Schwerzel, Michael Werve and David W. Rosen Two-Dimensional Real-Time Interferometric Monitoring System for Exposure Controlled Projection Lithography // ASME/ISCIE 2012 International Symposium on Flexible Automation. 2012. P. 457–464

**Bychkov P. S., Saifutdinov Yu. N.** *Experimental procedure for determining technological distortion in the bodies of complex shape created by way of stereolithography.* In this paper develops the experimental method of determining the technological distortion of products, which are obtained by 3D printing. The holographic interferometry method is used to determine the distortion, which are due to shrinkage of the polymer. The research of distortions produced for the three classes of objects: three-dimensional bodies without details (example – the cube), thin-walled bodies ( example – a hollow cube with thin walls) and bodies with a fractal structure (example – the final iteration of the Menger sponge).

# О РЕКОНСТРУКЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ

**Васильев Л. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Задача по определению характеристик твердых тел по дополнительным данным об амплитудах смещений или резонансным значениям в последние годы все чаще привлекает внимание исследователей. Особый интерес из этих задач вызывают те, которые связанные с определением параметров, входящих в граничные условия и характеризующих взаимодействие исследуемого тела с окружающими телами. В представленной далее работе исследуется задача об определении параметров граничных условий в вязкоупругой балке. Представлен новый подход к решению обратной задачи о реконструкции параметров опирания неоднородной вязкоупругой балки с вязкоупругими связями на правом конце и жестким закреплением на левом конце, на основе анализа амплитуды и сдвига фазы смещения в двух точках на фиксированной частоте. Применён принцип соответствия для составления дифференциального уравнения колебаний на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Приведен способ сведения задачи к каноническому виду. Составлены вспомогательные задачи Коши для численного решения как прямой, так и обратной задачи методом пристрелки. В рамках представленной модели проведены вычислительные эксперименты по восстановлению 4 параметров, характеризующих вязкоупругие связи в краевых условиях. Проведена оценка влияния зашумления входных данных на реконструкцию искомых параметров. Отмечено, что представленный способ позволяет восстанавливать параметры в граничных условиях с достаточно высокой точностью.

**1. Введение.** Задачи об определении характеристик твердых тел по дополнительным данным об амплитудах смещений или резонансным значениям в последние годы все чаще привлекает внимание специалистов. Среди этого класса задач наиболее разработанным является класс граничных обратных задач по реконструкции параметров в граничных условиях. В реальных конструкциях часто характер закрепления на некоторой части границы оказывается отличным от канонического и моделируется некоторой упругой или вязкоупругой связью, причем для расчетов на прочность и колебания которой необходимо определить характеристики этой связи. Среди методов, позволяющих оценить характеристики упругих систем, следует в первую очередь отметить акустические; в [1, 2] изложены теоретические основы низкочастотных акустических методов контроля. Отметим, что подобная задача для упругой балки с постоянной жесткостью была рассмотрена ранее [3–5], причем в этом случае можно выписать аналитическое решение, например через функции Крылова, соответственно составить частотное уравнение в явном виде и далее на основе анализа аналитических зависимостей определять искомые параметры на основе данных о нескольких резонансных частотах. В случае переменной жесткости анализировать аналитические зависимости при произвольных законах неоднородности не представляется возможным в виду их отсутствия, однако можно реализовать построение численного решения с любой

степенью точности на основе введения некоторых специальных задач Коши, порожденных исходной краевой задачей. В то же время вопрос об эффективности реконструкции параметров опирания при наличии затухания остается открытым. В настоящей работе представлен метод восстановления параметров закрепления вязкоупругого стержня с переменной жесткостью, жестко закрепленного на левом конце и имеющего вязкоупругие связи на другом конце при известных смещениях, заданных (измеренных) в двух точках. Применен принцип соответствия для составления дифференциального уравнения собственных колебаний на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Представлен способ сведения задачи к каноническому виду. Составлены вспомогательные задачи Коши для численного решения как прямой, так и обратной задачи методом пристрелки. Разработан эффективный способ их реконструкции, представлены результаты вычислительных экспериментов.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим колебания неоднородной вязкоупругой балки длины  $L$ . Будем считать, что левый конец балки закреплён, а правый — оперт, причем опора имеет вязкоупругие свойства. Для общего случая уравнение колебаний упругой балки переменной жесткости имеет вид[6]:

$$(E(x)Jy''(x))'' - \rho F\omega^2 y(x) = q \quad (1)$$

где  $q$  — распределенная нагрузка. Для изучения колебаний балки из вязкоупругого материала будем использовать модель стандартного вязкоупругого тела[7], для которого определяющее соотношение имеет вид

$$n\dot{\sigma} + \sigma = En\dot{\varepsilon} + H\varepsilon \quad (2)$$

где  $E$  — мгновенный модуль упругости,  $H$  — длительный модуль упругости,  $n$  — время релаксации,  $\sigma$  — напряжение,  $\varepsilon$  — деформация. Будем использовать принцип соответствия[7], согласно которому для изучения колебаний балки из вязкоупругого материала в уравнении (1) необходимо заменить модуль упругости комплексной функцией частоты координаты аналогично [8]. Вводя безразмерный параметр

$$k^4 = \frac{\rho_0 F_0 l^4}{G_0} \omega^2$$

и выражая  $\omega$

$$\omega = \frac{k^2}{l^2} \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0 F_0}}$$

( $G_0$  — характерная жесткость,  $\rho_0$  — характерная плотность материала,  $F_0$  — характерная площадь поперечного сечения), получим, что в силу принципа соответствия необходимо заменить  $E(x)$  на динамический модуль:

$$G_0 f(\xi, k) = G_0 \frac{h(\xi) + ik^2 c g(\xi)}{1 + ik^2 c}$$

где  $h(\xi) = \frac{H(\xi)}{G_0}$ ,  $g(\xi) = \frac{E(\xi)}{G_0}$ ,  $k^2 c = n\omega$ ,  $\xi = \frac{x}{l}$  — безразмерная координата, причем  $g(\xi) > h(\xi)$ . Тогда аналог уравнения (1) для вязкоупругого случая имеет вид:

$$(f(\xi, k)y''(\xi))'' - k^4 y(\xi) = q_0 \quad (3)$$

где  $q_0 = \frac{q}{G_0}$ . Вязкоупругую связь на конце  $\xi = 1$  будем характеризовать 4 параметрами вязкоупругости. Тогда граничные условия для уравнения (3) примут вид:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ f(1, k)y''(1, k) - F_1(k)y'(1, k) = 0 \\ (f(1, k)y''(1, k))' + F_2(k)y(1, k) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

где  $F_1(k)$  и  $F_2(k)$  — комплексные функции вида

$$F_i(k) = \frac{\beta_i(1 + ick^2q_i)}{1 + ick^2}$$

$\beta_i, q_i, c$  — параметры вязкоупругости (далее считаем параметр  $c$  заданным). Для решения краевой задачи (3), (4) используем метод стрельбы[9]. Приведем (3) к каноническому виду:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{y_3}{f(\xi, k)} \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = k^4y_1 + q_0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y_1(0, k) = 0 \\ y_2(0, k) = 0 \\ f(1, k)y_3(1, k) - F_1(k)y_2(1, k) = 0 \\ f(1, k)'y_4(1, k) + F_2(k)y_1(1, k) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Решение краевой задачи (5), (6) получается путем формирования линейной комбинации решений с разными начальными условиями:

$$y = y^0 + y^1c_1 + y^2c_2 \quad (7)$$

Здесь  $y_0$  — есть частное решение неоднородной задачи (6) с начальными условиями

$$y_1^0(0) = 0, y_2^0(0) = 0, y_3^0(0) = 0, y_4^0(0) = 0$$

$y_1$  и  $y_2$  — есть решения вспомогательных задач Коши для системы (6) при  $q_0 = 0$  с начальными условиями

$$1) y_1^1(0) = 0, y_2^1(0) = 0, y_3^1(0) = 0, y_4^1(0) = 1$$

$$2) y_1^2(0) = 0, y_2^2(0) = 0, y_3^2(0) = 1, y_4^2(0) = 0$$

Удовлетворяя граничным условиям исходной задачи, получим, что  $c_1$  и  $c_2$  определяются из решения следующей алгебраической системы:

$$\begin{cases} f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2) = 0 \\ f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

**3. Восстановление параметров вязкоупругости.** Поставим обратную задачу по восстановлению 4 параметров вязкоупругости. Для этого необходимо знать амплитуды, измеренные в двух точках балки на одной частоте; в этом случае составим систему из двух уравнений относительно амплитуд.

$$\begin{cases} A_1 = y_1^0(\xi_1) + c_1 y_1^1(\xi_1) + c_2 y_1^2(\xi_1) \\ A_2 = y_1^0(\xi_2) + c_1 y_1^1(\xi_2) + c_2 y_1^2(\xi_2) \end{cases} \quad (9)$$

Решая (9) относительно  $c_1$  и  $c_2$  и подставляя полученные соотношения в (8), необходимо разделить уравнения в системе на мнимую и вещественную части и получить систему уравнений, линейно зависящих от искомых параметров вязкоупругости

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2)) = 0 \\ \operatorname{Im}(f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2)) = 0 \\ \operatorname{Re}(f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2)) = 0 \\ \operatorname{Im}(f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2)) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

В таблице 1 представлены результаты при известных функциях  $h_1(\xi) = \xi^2 + 0.4$ ,  $g(\xi) = 1.5 + \xi$ ,  $c = 0.5$ .

Таблица 1 – результаты реконструкции

$k$		2.65	2.66	2.79	3.05
Комплексное смещение, $\times 10^{-2}$	$\xi = 0.5$	-2.68-8.37i	-5.13-27.20i	-7.81-36.31i	-29.68-46.78i
	$\xi = 1$	-8.65-61.34i	-16.52-91.39i	-26.32-125.49i	-106.42-168.97i
Заданные	$\beta_1$	5	8	10	40
	$\beta_2$	3	4	11	15
	$q_1$	2	1.1	1.1	1.1
	$q_2$	1.2	1.2	1.2	1.2
Реконструкция	$\beta_1$	5.0484	8.0713	10.0031	29.8107
	$\beta_2$	2.9703	3.9504	10.9974	15.8742
	$q_1$	1.9769	1.08797	1.1008	1.1051
	$q_2$	1.2158	1.2185	1.1980	1.1509

#### 4. Заключение.

Представлен новый способ оценки упругости опор балок переменной жесткости в упругом и вязкоупругом случаях по резонансным частотам. Получен метод восстановления параметров податливости опоры для различных типов неоднородности балки при известном резонансном значении и соответствующих ему амплитудах с достаточной точностью.

Автор благодарит А. О. Ватульяна за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Углов А. Л. Ерофеев В. И. Смирнов А. Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 279 с.
- [2] Глаголевский Б. А., Москаленко И. Б. Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении. Л.: Машиностроение, 1977. 203 с.
- [3] Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
- [4] Ахтямов А. М. Муфтахов А. В.. Ахтямова А. А. Об определении закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки., 2013. Вып 3. С. 114–129.
- [5] Ватульян А. О. Васильев Л. В. Об определении параметров упругого закрепления неоднородной балки // Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2015. Выпуск 3. С. 14–20.
- [6] Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
- [7] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 340 с.
- [8] Богачев И. В. Ватульян А. О. Обратные коэффициентные задачи для диссипативных операторов и идентификация свойств вязкоупругих материалов // Владикавказский математический журнал, 2012. Т. 14, вып. 3. С. 31–44.
- [9] Калиткин Н. Н. Численные методы. Изд. 2. С-П.: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.

**Vasiliev L. V.** *About reconstruction parameters of fixing inhomogeneous viscoelastic beams.* The task of defining characteristics of solids by additional data on displacements amplitudes or resonance frequencies have been increasingly attracting the attention of researchers in recent years. Among the tasks of this type, the problems associated with definition of parameters describing boundary conditions and characterizing an interaction of the study body with the surrounding bodies are of particular interest. In this paper we investigate the problem of determining the parameters of the boundary conditions in a beam. We propose a new approach to solving the inverse problem of a reconstruction of the bearing parameters of an inhomogeneous viscoelastic beam with viscoelastic bonds on the right end and being fixed at the left end on the basis of the analysis of the amplitude and shift phase of the displacement at two points at a fixed frequency. We have used the principle of conformity to derive the differential equation of oscillations on the basis of the standard model of a viscoelastic body. We present a way of reduction of the original problem to the canonical form. We have formulated the auxiliary Cauchy problems for a numerical solution of both direct and inverse problem by the false position method. Within the framework of the present model, we have performed the computational experiments to restore 4 parameters characterizing the viscoelastic bonds in the boundary conditions. It is revealed that the method proposed for the reconstruction of the unknown parameters can be employed in order to their restoration in the boundary conditions with high accuracy.

# О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛ

**Ватульян А. О.<sup>1,2</sup>, Кондратьев В. С.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Владикавказский научный центр РАН*

Рассмотрены радиальные колебания цилиндрических пьезоэлектрических структур, в качестве примера изучена задача о радиальных колебаниях кругового пьезокерамического цилиндра, у которого физические характеристики заданы функциями от радиальной координаты. Определены резонансные значения и собственные формы радиальных колебаний для неоднородного пьезокерамического цилиндра при различных типах неоднородности. Проанализирована зависимость резонансных частот и собственных форм колебаний от законов изменения физических характеристик материала.

## **1. Введение.**

В настоящее время значительный практический интерес представляют изделия из функционально-градиентных материалов, в том числе пьезоэлектрических, свойства которых меняются в зависимости от координат. Исследование колебаний неоднородных пьезокерамических тел требует совершенствования методов расчета амплитудно-частотных характеристик, причем правильный расчет невозможен без определения законов изменения физических характеристик. Неоднородность физических свойств пьезоматериалов возникает как на этапе поляризации, так и на стадии эксплуатации устройств.

Изучению задач такого типа, с учетом того, что физические свойства материала в цилиндрических структурах заданы функциями одной из координат, в последнее время посвящено значительное число публикаций.

В исследованиях [1, 2] демонстрируемые примеры показывают значительное влияние неоднородности материала, авторы использовали степенные функции для моделирования законов изменения физических характеристик. В статье [3] рассмотрены радиальные колебания функционально-градиентных пьезоэлектрических преобразователей. Результаты показывают, что неоднородность материала значительно влияет на резонансные частоты, что следует учитывать при проектировании устройств.

В настоящем исследовании представлен подход, позволяющий изучать колебания широко распространенных цилиндрических структур, в качестве примера рассмотрена задача о радиальных колебаниях кругового пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией, причем физические характеристики (упругие модули и пьезоэлектрические характеристики) являются функциями радиальной координаты.

## **2. Постановка задачи.**

Рассмотрим задачу о радиальных колебаниях сплошного кругового неоднородного пьезокерамического цилиндра радиуса  $a$ , с радиальной поляризацией. Электроды на поверхности цилиндра отсутствуют, колебания возбуждаются механической нагрузкой на его боковой поверхности.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho\omega^2 u_r = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r}D_r = 0 \quad (2)$$

Граничные условия:

$$D_r(a) = 0, \sigma_r(a) = p \quad (3)$$

Уравнения состояния имеют вид:

$$\sigma_{rr} = c_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{13} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11} \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (5)$$

$$D_r = -\varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_{31} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{\partial u_r}{r} \quad (6)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала;  $\omega$  — частота;  $u_r$  — радиальная составляющая вектора смещения,  $D_r$  — радиальная составляющая вектора электрической индукции,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  — компоненты тензора напряжений,  $c_{13}$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{33}$  — модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле,  $e_{31}$ ,  $e_{33}$  — пьезоэлектрические постоянные,  $\varepsilon_{33}$  — диэлектрическая проницаемость при постоянных деформациях,  $\varphi$  — электрический потенциал. Интегрируя уравнение (6) из уравнения электростатики (2) получим, что  $D_r = \frac{A_1}{r}$ . В силу граничного условия (3) следует, что  $A_1=0$ . Из основных уравнений электроупругости (1)–(2), путем исключения компоненты электрического потенциала, была получена каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Осуществим процедуру обезразмеривания, введем следующие безразмерные характеристики:  $\zeta = ar$ ,  $T = \sigma_r/C_{33}^*$ ,  $U = u_r/a$ ,  $C_{13}^* = c_{13} + e_{33}e_{31}/\varepsilon_{33}$ ,  $C_{33}^* = c_{33} + e_{33}^2/\varepsilon_{33}$ ,  $C_{11}^* = c_{11} + e_{31}^2/\varepsilon_{33}$ ,  $\varkappa^2 = \rho\omega^2 a^2/C_{33}^*$ .

Введем обозначения  $\gamma_1 = C_{13}^*/C_{33}^*$ ,  $\gamma_2 = C_{11}^*/C_{33}^*$ .

Относительно безразмерных переменных - радиального смещения  $U(\zeta)$  и радиального напряжения  $T(\zeta)$  система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dU(\zeta)}{d\zeta} = T(\zeta) - \frac{1}{\zeta}\gamma_1 U(\zeta) \\ \frac{dT(\zeta)}{d\zeta} = -\frac{1}{\zeta}(1 - \gamma_1)T(\zeta) + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma_2 - \gamma_1^2 - \varkappa^2\zeta^2)U(\zeta) \end{cases} \quad (7)$$

Безразмерное граничное условие соответствует нагружению на боковой поверхности:

$$T(1) = 1 \quad (8)$$

Отметим, что при постоянных характеристиках решение краевой задачи строится явно через цилиндрические функции, причем условия ограниченности в нуле позволяет строить однозначное решение. В случае переменных характеристик решение строится численно, и необходимо формулировать дополнительное граничное условие в нуле, либо при значении  $\zeta = \zeta_0$ , достаточно близком к нулю. В настоящей работе расчеты проведены при условии  $T(\zeta_0) = 0$ , где  $\zeta_0 = 10^{-3}$ .

### 3. Численные результаты.

Используемый в настоящей работе алгоритм нахождения резонансных значений был протестирован для однородного цилиндра. При постоянных характеристиках первое резонансное значение, полученное с помощью метода пристрелки, равно  $\varkappa = 2.056$ , второе равно  $\varkappa = 5.351$ , а третье  $\varkappa = 8.525$ . Данные значения совпадают с корнями трансцендентного уравнения, которое записывается явно через функции Бесселя, что свидетельствует о достоверности предложенного подхода. Расчеты выполнялись для пьезокерамики PZT-4 [4].

Проведены расчеты для различных законов неоднородности (непрерывные и разрывные законы). Результаты вычислительных экспериментов демонстрируются для следующих законов изменения физических характеристик материала:

$$\text{Закон 1. } \gamma_1(\varsigma) = 1 - 0,5\varsigma^2, \gamma_2(\varsigma) = 1 + 0,5\varsigma^2. \quad (9)$$

$$\text{Закон 2. } \gamma_1(\varsigma) = 1 - \sin(\varsigma), \gamma_2(\varsigma) = 1 + 0,5\varsigma^2. \quad (10)$$

$$\text{Закон 3. } \gamma_1(\varsigma) = 1 + 0,5\varsigma^2, \gamma_2(\varsigma) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varsigma \leq 0.2 \\ 1, & 0.2 < \varsigma \leq 0.4 \\ 0, & 0.4 < \varsigma \leq 0.8 \\ 0.5, & 0.8 < \varsigma \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

Таблица 1 – Резонансные значения для законов неоднородности

Закон неоднородности	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$
1	1.598	5.008	7.454
2	2.668	5.766	8.898
3	0.289	3.081	6.883

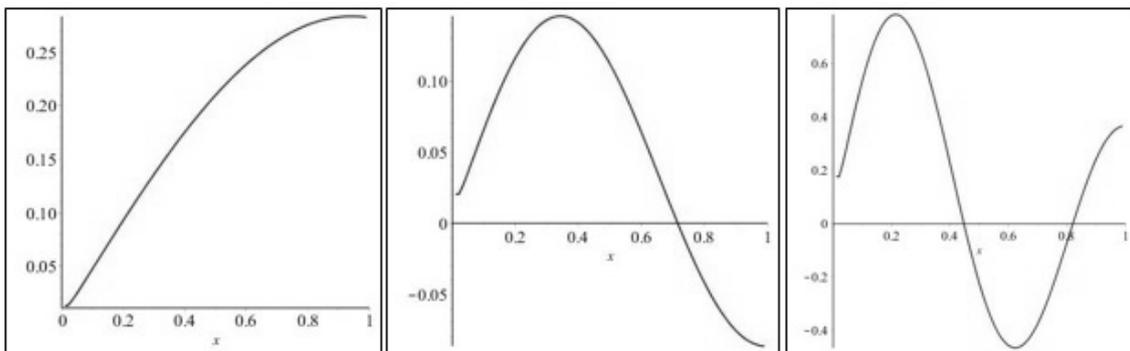


Рисунок 1 – Нормированные формы колебаний цилиндра для закона неоднородности (9)

#### 4. Обратная задача о реконструкции законов неоднородности.

Реконструкция законов неоднородности была осуществлена на основе информации о значениях безразмерных функций радиального смещения и радиального напряжения в некотором наборе точек [5].

##### Пример 1.

По известным значениям функций  $U(\zeta)$ ,  $T(\zeta)$ , необходимо восстановить функции  $\gamma_1(\zeta)$ ,  $\gamma_2(\zeta)$  для закона неоднородности (9). Из первого уравнения системы (7), получена формула для нахождения  $\gamma_1(\zeta)$ :

$$\gamma_1(\zeta) = \zeta \left( \frac{T(\zeta) - U'(\zeta)}{U(\zeta)} \right) \quad (12)$$

Подставив (12) во второе уравнение системы (7), получим формулу для  $\gamma_2(\zeta)$ . Результаты восстановления функций (9) представлены на рис. 2.

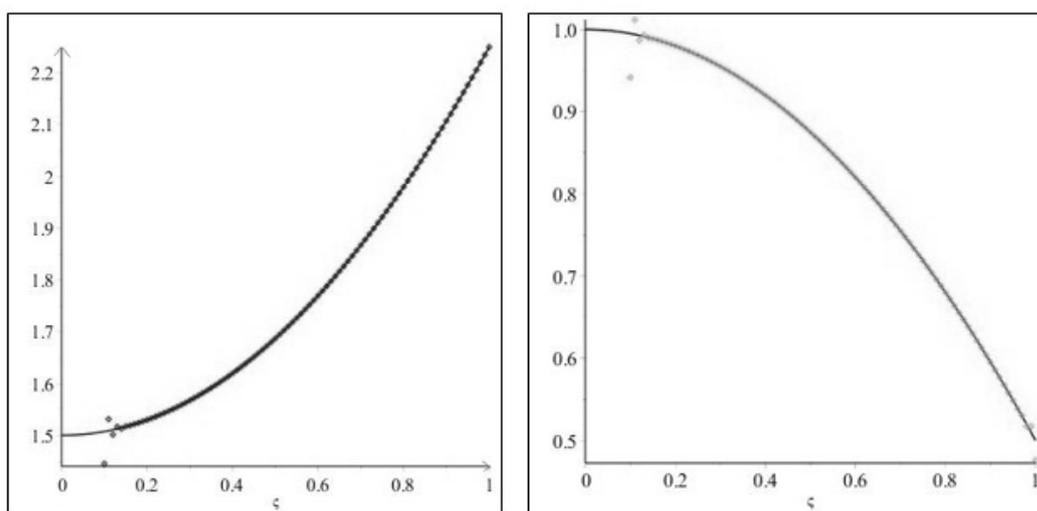


Рисунок 2 – Восстановление функций  $\gamma_1(\zeta)$  и  $\gamma_2(\zeta)$  для закона неоднородности (9)

##### Пример 2.

По известным значениям функции  $U(\zeta)$ , определить для закона (11) функцию  $\gamma_2(\zeta)$ . Результаты реконструкции показаны на рис. 3.

Для нахождения значений производных  $U(\zeta)$ ,  $T(\zeta)$  использованы кубические сплайны.

На всех рисунках сплошной линией изображен искомый закон изменения, точками — результаты численного восстановления. Исследования показали достаточную степень точности реконструкции всюду, кроме областей, близких к началу координат и в местах разрыва кусочно-постоянной функции  $\gamma_2(\zeta)$ , в случае закона неоднородности (11).

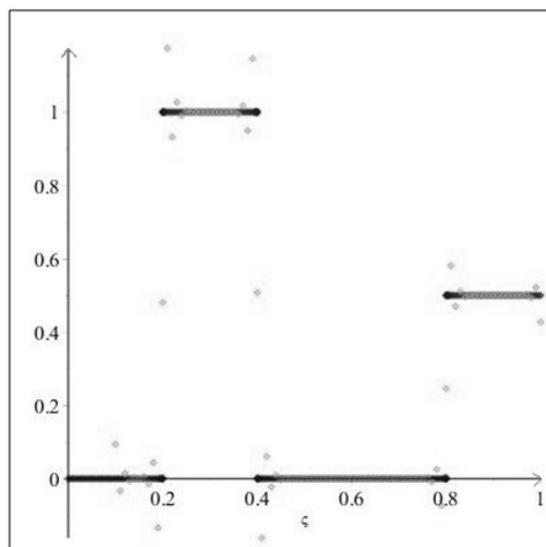


Рисунок 3 – Восстановление функции  $\gamma_2(\zeta)$  для закона неоднородности (11)

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 16-01-00354).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Dai H. L., Fu Y. M., Yang J. H.* Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder and sphere // *Acta Mech. Sin.* 2007. P. 55–63.
- [2] *Hong-Liang Dai, Li Hong, Yi-Ming Fu, Xia Xiao* Analytical solution for electromagnetoelastothermoelastic behaviors of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder // *Applied Mathematical Modelling.* 2010. P. 343–357.
- [3] *Wang H. M., Luo D. S.* Exact analysis of radial vibration of functionally graded piezoelectric ring transducers resting on elastic foundation // *Applied Mathematical Modelling.* 2016. P. 2549–2559.
- [4] *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
- [5] *Ватульян А. О., Соловьев А. Н.* Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов н/Д: Изд-во Южного федерального университета, 2009. 176 с.

**Vatulyan A. O., Kondratev V. S.** *On vibrations of inhomogeneous piezoceramic bodies.* In this paper the vibrations of piezoceramic cylinder is observed. The physical characteristics are assumed to be functions of the radial coordinate. Calculations the dependence of resonance frequencies and natural modes of vibrations on the inhomogeneous properties of the cylinder are received.

# О НЕКОТОРЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Ватульян А. О.<sup>1,2</sup>, Плотников Д. К.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Владикавказский научный центр РАН

В настоящей работе обсуждены два способа построения приближенных решений для контактной задачи о вдавливании параболоида в неоднородную упругую полосу, жестко сцепленную с недеформированным основанием.

Первый способ основан на вариационной постановке и введении гипотез о структуре полей перемещений в полосе. На основе вариационного принципа Лагранжа решена вспомогательная задача о действии нормальной нагрузки на границе неоднородной полосы. Построена система двух дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, позволяющая связать смещение поверхности полосы и нормальную нагрузку. В случае постоянных коэффициентов можно получить решение контактной задачи о вдавливании параболоида в неоднородную полосу и построить характерные зависимости сила-внедрение и сила-размеры площадки контакта.

Второй метод решения контактной задачи для неоднородной полосы основан на проекционном методе. Представлен способ приближенного построения функции Грина на основе метода Галеркина, позволяющий получить рациональные приближения символа ядра, построить распределение контактных напряжений и зависимость сила-внедрение.

Проведен сравнительный анализ двух методов решения контактной задачи.

**1. Введение** В последние годы задачи об определении физических свойств твердых тел играют большую роль при оценке локальных и интегральных свойств функционально-градиентных тел и биологических тканей. Одним из наиболее часто используемых методов идентификации является контактный способ оценки податливости упругого тела или фрагмента ткани.

Отметим, что наиболее подходящей моделью, позволяющей оценивать характеристики контактного взаимодействия, является модель слоя, при этом отметим большой вклад ростовской школы механики в развитие методов решения контактных задач для полосы и слоя — И. И. Воровича, В. М. Александрова, В. А. Бабешко, А. В. Белокопя, Ю. А. Устинова и их учеников [1–3].

**2. Постановка задачи.** Пусть симметричный гладкий недеформируемый штамп вдавливается в верхнюю границу упругой неоднородной полосы  $V$  ( $|x_1| < \infty$ ,  $0 \leq x_3 \leq h$ ) силой  $P$ . Предполагается, что силы трения между штампом и полосой отсутствуют. Вне штампа полоса не загружена. Под действием силы  $P$  штамп смещается по оси  $x_3$  на величину  $\delta$ .

Будем считать, что коэффициенты Ляме  $\lambda$  и  $\mu$  зависят от вертикальной координаты  $x_3$ :

$$\lambda = \lambda(x_3), \quad \mu = \mu(x_3), \quad x_3 \in [0, h]$$

и представляют собой ограниченные положительные функции.

Используем уравнения равновесия плоской задачи теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} &= 0, \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Связь между напряжениями и перемещениями определяется законом Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)) u_{1,1} + \lambda(x_3) u_{3,3}, \\ \sigma_{33} &= \lambda(x_3) u_{1,1} + (\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)) u_{3,3}, \\ \sigma_{13} &= \mu(x_3) (u_{1,3} + u_{3,1}).\end{aligned}\quad (2)$$

Нижнюю границу полосы предполагаем жестко заземленной. Граничные условия для данной задачи имеют вид

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad |x_1| > a, \quad u_3(x_1, h) = \delta - \frac{1}{2R} x_1^2, \quad |x_1| \leq a. \quad (4)$$

**3. Первый способ исследования.** Обезразмерим задачу, введя новые переменные и параметры:

$$\begin{aligned}\eta &= x_1/h, \quad \xi = x_3/h, \quad \lambda = \mu_0 f_1(\xi), \quad \mu = \mu_0 f_2(\xi), \\ \hat{u}_i &= u_i/h, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\mu_0, \quad i, j = 1, 3, \\ \beta &= a/h, \quad \delta_* = \delta/h, \quad r = R/h, \quad \mu_0 = \max_{\xi \in [0,1]} \mu(\xi h).\end{aligned}\quad (5)$$

Примем следующие гипотезы относительно компонент перемещений, полагая  $\tilde{u}_1 = \xi u$ ,  $\tilde{u}_3 = \xi w$ . Компоненты тензоров деформаций и напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \xi u', \quad \varepsilon_{33} = w, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} (u + \xi w'), \\ \hat{\sigma}_{11} &= (f_1 + 2f_2) \xi u' + f_1 w, \quad \hat{\sigma}_{33} = (f_1 + 2f_2) w + f_1 \xi u', \\ \hat{\sigma}_{13} &= f_2 (u + \xi w'),\end{aligned}\quad (6)$$

здесь штрих означает производную по  $\eta$ .

Используем для построения модели контактного взаимодействия вариационный подход. Запишем функционал потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_S \hat{p}_i \hat{u}_i dS, \quad \hat{p}_i = p_i/\mu_0. \quad (7)$$

Найдем первую вариацию функционала (7). Приравнявая нулю коэффициенты при  $\delta u$  и  $\delta w$ , получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно смещений на верхней границе полосы.

$$\begin{aligned}-(A_{11}u')' - (A_{12}w)' + A_{21}w' + A_{10}u &= 0, \\ A_{12}u' - (A_{21}u)' - (A_{22}w)' + A_{20}w - q &= 0,\end{aligned}\quad (8)$$

где  $q$  — безразмерное нормальное напряжение на верхней грани, коэффициенты  $A_{ij}$  определяются формулами

$$\begin{aligned}A_{11} &= \int_0^1 (f_1 + 2f_2) \xi^2 d\xi, \quad A_{10} = \int_0^1 f_2 d\xi, \quad A_{12} = \int_0^1 f_1 \xi d\xi, \\ A_{21} &= \int_0^1 f_2 \xi d\xi, \quad A_{22} = \int_0^1 f_2 \xi^2 d\xi, \quad A_{20} = \int_0^1 (f_1 + 2f_2) d\xi.\end{aligned}\quad (9)$$

Система (8) в случае постоянных коэффициентов допускает решение с помощью преобразования Фурье и позволяет получить соотношение между трансформантами

$$\tilde{w} = K(\alpha)\tilde{q}, \quad (10)$$

где  $K(\alpha)$  — передаточная функция вида

$$K(\alpha) = \frac{a_0 + a_1\alpha^2}{b_0 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha^4}, \quad (11)$$

и приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_0 &= A_{10}, & a_1 &= A_{11}, & b_0 &= A_{10}A_{20}, \\ b_1 &= A_{10}A_{22} + A_{11}A_{20} - (A_{12} - A_{21})^2, & b_2 &= A_{11}A_{22}. \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразуя (10) к виду  $(b_0 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha^4)\tilde{w} = (a_0 + a_1\alpha^2)\tilde{q}$  и переходя от трансформант Фурье к исходным функциям  $w$  и  $q$  аналогично [2], получим операторное уравнение четвертого порядка, связывающее смещения и напряжения в области контакта

$$b_2w^{IV} - b_1w'' + b_0w = -a_1q'' + a_0q. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) должно удовлетворять следующим условиям:

$$w \rightarrow 0 \quad (|\eta| \rightarrow \infty), \quad q = 0 \quad (|\eta| > \beta), \quad w = \delta_* - \frac{1}{2r}\eta^2 \quad (|\eta| \leq \beta). \quad (14)$$

При  $|\eta| > \beta$  найдем

$$w = C_1e^{-\lambda_1\eta} + C_2e^{-\lambda_2\eta}, \quad \lambda_{1,2} = \left[ \frac{1}{2b_2} \left( b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Решая уравнение (13) при  $|\eta| \leq \beta$ , получим

$$q = C_3ch(k\eta) + \frac{1}{a_0^2} \left[ \left( b_0 \left( -\frac{1}{2r}\eta^2 + \delta_* \right) + \frac{b_1}{r} \right) a_0 - \frac{1}{r} a_1 b_0 \right], \quad k^2 = \frac{a_0}{a_1}. \quad (16)$$

Неизвестные константы интегрирования  $C_1, C_2, C_3$ , а также связь между зоной контакта  $\beta$  и внедрением штампа  $\delta_*$  найдем из условий стыковки на границе зоны контакта  $\eta = \beta$  аналогично [2]:

$$q(\beta) = 0, \quad w(\beta) = \delta_* - \frac{1}{2r}\beta^2, \quad w'(\beta) = -\frac{\beta}{r}, \quad w'''(\beta) = 0.$$

Наконец, используя условие статики  $P_* = \int_{-\beta}^{\beta} q_* d\eta$ , найдем связь между безразмерной силой  $P_*$ , действующей на штамп, и внедрением штампа  $\delta_*$ .

**4. Второй способ исследования.** Рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения (1) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\eta, 0) &= \tilde{u}_3(\eta, 0) = 0, \\ \tilde{\sigma}_{13}(\eta, 1) &= 0, \quad \tilde{\sigma}_{33}(\eta, 1) = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя преобразования Фурье по переменной  $\eta$  и обозначая  $v_1 = i\tilde{v}_1$ ,  $v_3 = \tilde{u}_3$ ,  $t_1 = i\tilde{\sigma}_{13}$ ,  $t_3 = \tilde{\sigma}_{33}$ , получим каноническую систему уравнений относительно  $v_1, v_3, t_1, t_3$  (штрих означает дифференцирование по  $\xi$ ):

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{f_2} t_1 - \alpha v_3, \\ v_3' &= \frac{1}{f_1 + 2f_2} (t_3 + \alpha f_1 v_1), \end{aligned} \quad (18)$$

$$t_1' = \frac{1}{f_1 + 2f_2} (4\alpha^2 f_2 (f_1 + f_2) v_1 - \alpha f_1 t_3),$$

$$t_3' = \alpha t_1,$$

$$v_1(0) = 0, \quad v_3(0) = 0, \quad t_1(1) = 0, \quad t_3(1) = 1. \quad (19)$$

Краевая задача для канонической системы (18) имеет переменные коэффициенты, ее решение в случае произвольных законов изменения  $f_1$  и  $f_2$  может быть построено только численно. Обычный способ отыскания связи между  $v_3$  и  $t_3$  состоит в фиксации  $\alpha$  и решении краевой задачи методом пристрелки [3]. Этот этап предполагает далее аппроксимацию искомой передаточной функции некоторыми функциями, сохраняющими асимптотическое поведение при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \infty$ .

Для решения краевой задачи (18)–(19) применим метод Галеркина. Приближенные решения будем искать в виде:

$$v_1 = \xi U_1, \quad v_3 = \xi V_1, \quad t_1 = (1 - \xi) T_1, \quad t_3 = 1 + (1 - \xi) Q_1. \quad (20)$$

Требуя равенства нулю средних значений невязок, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов  $U_1, V_1, T_1, Q_1$ , содержащих параметр  $\alpha$ . Решая эту систему, находим, что

$$v_3(\alpha, 1) = K_0(\alpha), \quad (21)$$

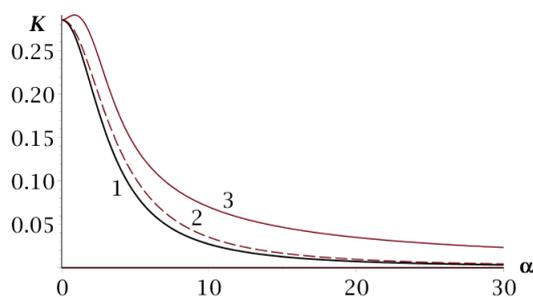
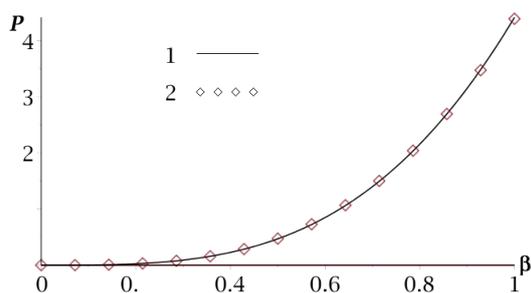
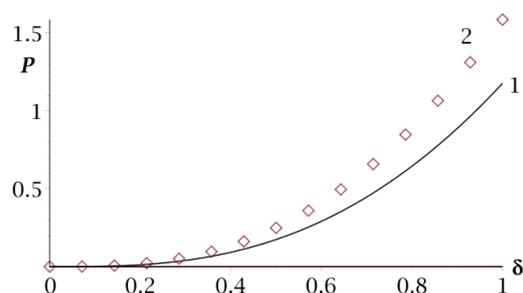
где  $K_0(\alpha)$  — передаточная функция, имеющая ту же структуру (11), что и  $K(\alpha)$ .

Дальнейшее решение контактной задачи аналогично решению, представленному в пункте 3.

**5. Результаты.** Ниже приведены некоторые результаты решения контактной задачи вышеизложенными методами.

На рисунке 1 изображена функция  $K(\alpha)$  для постоянных значений параметров Ляме.  $f_1 = \frac{2\nu}{1-2\nu}$ ,  $f_2 = 1$ ,  $\nu = 0.3$ . Кривые 1 и 2 изображают передаточные функции для первого и второго способов исследования соответственно. Кривая 3 соответствует точному аналитическому решению для однородной полосы [1].

На рисунках 2 и 3 изображены зависимости силы  $P_*$  от размеров площадки контакта  $\beta$  и величины внедрения штампа  $\delta_*$ . Кривыми 1 и 2 изображены зависимости для первого и второго способов исследования соответственно. Вычисления выполнены для законов неоднородности  $f_1 = 1 + \xi^2$ ,  $f_2 = 1 + \frac{1}{2}\xi^2$ .

Рисунок 1 –  $K(\alpha)$ Рисунок 2 –  $P_*(\beta)$ Рисунок 3 –  $P_*(\delta_*)$ 

Работа выполнена при частичной поддержке РФФ (проект 16-17-10217).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [2] Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
- [3] Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконов А. В., Кренев Л. И., Трубочик И. С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 240 с.

**Vatulyan A. O., Plotnikov D. K.** *On some contact problems for inhomogeneous elastic bodies.* Two techniques to solve the contact problem for a punch indenting a inhomogeneous elastic strip are discussed. The first technique is based on variational formulation of the problem. The second technique involves the Galerkin method. A comparative analysis of the two methods is presented.

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОВЕРХНОСТИ

**Вильде М. В.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Предложен асимптотический метод, позволяющий построить приближенное решение, описывающее цилиндрическую поверхностную волну в случае, когда на поверхности запрещено перемещение в радиальном направлении. Особенностью данной волны является зависимость скорости от радиальной координаты, что не позволяет построить нетривиальное решение для неё с помощью стандартной процедуры, приводящей к уравнениям Бесселя. Предложенный метод представляет собой развитие метода ВКБ и позволяет определить неизвестную переменную скорость волны путем построения фазовой функции и приближенно описать амплитуду колебаний путем построения амплитудной функции.

С математической точки зрения вопрос о существовании поверхностной волны сводится к построению нетривиального решения соответствующей однородной краевой задачи. Впервые такого рода решение было построено Рэлеем в работе [1]. Волна Рэля существует только в случае свободной поверхности, однако в недавних работах [2, 3] было показано, что плоская трехмерная поверхностная волна, представляющая собой обобщение решения Рэля на трехмерную задачу в декартовой системе координат, существует не только в случае свободной поверхности, но и в случае, когда на поверхности запрещено перемещение в одном из касательных направлений. С точки зрения исследования краевых резонансных явлений в оболочках представляет интерес изучение вопроса о существовании цилиндрической поверхностной волны в случае, когда на поверхности запрещено перемещение в радиальном или окружном направлении. Однако попытка обобщить решение из работ [2, 3] на цилиндрическую систему координат сталкивается с математическими трудностями, связанными с тем, что классический прием, сводящий построение частных интегралов уравнений движения к решению уравнения Бесселя, в данном случае не проходит. Из-за расходящегося характера волны угол между направлением распространения волны и направлением запрещенного перемещения является функцией радиальной координаты, из чего следует, что и скорость волны является функцией радиальной координаты. Однако при сведении уравнений движения к уравнениям Бесселя заранее предполагается постоянство этой скорости. В данном докладе предложен асимптотический метод, позволяющий построить асимптотическое приближение решения, описывающего цилиндрическую поверхностную волну в случае смешанных граничных условий на поверхности.

Рассмотрим гармонические колебания упругого полупространства, занимающего в цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$  область,  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z < \infty$ . Представим вектор перемещения в виде

$$u = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi, \quad (1)$$

где  $\varphi$ ,  $\psi$  — упругие потенциалы Ламе, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta\varphi + \kappa^2\omega^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + \omega^2\psi = 0, \quad (2)$$

$\kappa = \sqrt{(1-2\nu)(2(1-\nu))^{-1}}$ ,  $\omega$  — круговая частота (колебания происходят по закону  $e^{i\omega t}$ , временной множитель далее опущен),  $\Delta$  — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. Пространственные переменные в данной работе нормированы на некоторый характерный размер  $R$ , время — на величину  $\frac{R}{c_2}$ , где  $c_2$  — скорость волны сдвига. Представление (1) дополняется условием  $\operatorname{div}\psi = 0$ . На поверхности  $z = 0$  ставятся смешанные граничные условия вида

$$\sigma_z = 0, \quad u_r = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0. \quad (3)$$

Отделим переменную  $\theta$  по формулам

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, z) &= \varphi^0(r, z) \cos p\theta, & \psi_r(r, \theta, z) &= \psi_r^0(r, z) \sin p\theta, \\ \psi_\theta(r, \theta, z) &= \psi_\theta^0(r, z) \cos p\theta, & \psi_z(r, \theta, z) &= \psi_z^0(r, z) \sin p\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения для функций  $\varphi^0$ ,  $\psi_1^0 = \psi_r^0 + \psi_\theta^0$ ,  $\psi_2^0 = \psi_r^0 - \psi_\theta^0$ ,  $\psi_z^0$  могут быть записаны в виде одного уравнения вида

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} - \frac{(p+d)^2}{r^2} f_0 + \kappa_0^2 \omega^2 f_0 + \frac{1}{4r^2} f_0 = 0, \quad d = 1, -1, \quad \kappa_0 = 1, \kappa \quad (5)$$

где  $f(r, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_0(r, z)$ ,  $f = \{\varphi^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_z^0\}$ . Введем большой параметр  $\chi \gg 1$ , и положим  $p = \chi p_*$ ,  $\omega = \chi \omega_*$  (звездочки в дальнейшем будут опускаться). Построим асимптотическое разложение интеграла уравнения (5), затухающего при удалении от поверхности  $z = 0$ , используя метод, являющийся развитием метода ВКБ. Примем дополнительно условие  $z \sim \chi^{-1}$ , то есть ограничимся некоторой областью вблизи поверхности. При таком условии асимптотическое разложение затухающего интеграла может быть построено в виде

$$\begin{aligned} f_0(r, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \chi^{-k} [G_{0,k}(r) + iG_{1,k}(r)z + i\chi G_{2,k}(r)z^2 + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \chi^{n-2} g_{n,k}(r)z^n] e^{i\chi \int_a^r \gamma(r) dr} e^{-\chi k_0(r)z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты разложения и параметры  $\gamma(r)$ ,  $k_0(r)$  считаются функциями порядка 1. Подставляя (6) в (5) и приравнявая нулю коэффициент при  $\chi^2$ , находим

$$k_0(r) = \sqrt{\gamma^2(r) + \frac{p^2}{r^2} - \kappa_0^2 \omega^2}. \quad (7)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} G_{1,k}(r) &= \frac{\gamma(r)}{k_0(r)} G'_{0,k}(r) + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma(r)}{k_0(r)} \right)' G_{0,k}(r) + i \frac{pd}{r^2 k_0(r)} G_{0,k}(r), \\ G_{2,k}(r) &= -\frac{\gamma(r) k_0'(r)}{2k_0(r)} G_{0,k}(r), \end{aligned} \quad (8)$$

остальные коэффициенты разложения (6) также выражаются в квадратурах. Функции  $G_{0,k}(r)$  и параметр  $\gamma(r)$  при этом остаются произвольными, что обеспечивает возможность удовлетворения граничным условиям.

Используя полученное асимптотическое разложение и ограничиваясь двумя старшими членами, запишем решения уравнений для потенциалов в виде

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= [\Phi^0(r) + i\Phi_1(r)z + i\chi\Phi_2(r)z^2 + O(\chi^2)] e^{i\chi \int_a^r \gamma(r) dr} e^{-\chi k_1(r)z} \cos p\theta, \\ \psi_{r,0} &= [\Psi_r^0(r) + i\Psi_{r,1}(r)z + i\chi\Psi_{r,2}(r)z^2 + O(\chi^2)] e^{i\chi \int_a^r \gamma(r) dr} e^{-\chi k_2(r)z} \sin p\theta \\ \psi_{\theta,0} &= [\Psi_\theta^0(r) + i\Psi_{\theta,1}(r)z + i\chi\Psi_{\theta,2}(r)z^2 + O(\chi^2)] e^{i\chi \int_a^r \gamma(r) dr} e^{-\chi k_2(r)z} \cos p\theta, \\ \psi_{z,0} &= [\Psi_z^0(r) + i\Psi_{z,1}(r)z + i\chi\Psi_{z,2}(r)z^2 + O(\chi^2)] e^{i\chi \int_a^r \gamma(r) dr} e^{-\chi k_2(r)z} \sin p\theta,\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$k_1(r) = \sqrt{\gamma^2(r) + \frac{p^2}{r^2} - \kappa^2\omega^2}, \quad k_2(r) = \sqrt{\gamma^2(r) + \frac{p^2}{r^2} - \omega^2}. \quad (10)$$

Функции  $\gamma(r)$ ,  $\Phi^0(r)$ ,  $\Psi_z^0(r)$ ,  $\Psi_r^0(r)$ ,  $\Psi_\theta^0(r)$  произвольны. Подставляя (9) в выражения для перемещений и напряжений через потенциалы и в граничные условия (3), получим, с учетом условия замыкания, четыре соотношения для четырех неизвестных функций. Выражая из трех соотношений функции  $\Phi^0(r)$ ,  $\Psi_r^0(r)$ ,  $\Psi_\theta^0(r)$  через  $\Psi_z^0(r)$  и подставляя все в четвертое соотношение, приходим к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{i}{k_2(r)\gamma(r)} \left[ 2\frac{p^2}{r^2}k_1(r)k_2(r) - \left(\frac{p^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{2}\right) \left(\gamma^2(r) + 2\frac{p^2}{r^2} - \omega^2\right) - \frac{p^2}{r^2}\gamma^2(r) \right] \Psi_z^0(r) + \\ + \chi^{-1} \left[ S_0^{(1)}(r) (\Psi_z^0(r))' + S_0^{(2)}(r)\Psi_z^0(r) \right] + O(\chi^{-2}) = 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Из условия существования нетривиального решения

$$\frac{2p^2}{r^2}k_1(r)k_2(r) - \left(\frac{p^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{2}\right) \left(\gamma^2(r) + 2\frac{p^2}{r^2} - \omega^2\right) - \frac{p^2}{r^2}\gamma^2(r) = 0 \quad (12)$$

определяется фазовая функция  $\gamma(r)$ . Амплитудная функция определяется из уравнения

$$S_0^{(1)}(r) (\Psi_z^0(r))' + S_0^{(2)}(r)\Psi_z^0(r) = 0, \quad (13)$$

но не приводится здесь по причине громоздкости. Запишем (11) как уравнение для функции  $\gamma_1(r) = \sqrt{\gamma^2(r) + \frac{p^2}{r^2}}$  и решим его:

$$\gamma_1(r) = \sqrt{\frac{\frac{7p^2}{r^2}\omega^2 - 4(1 - 2\kappa^2)\frac{p^4}{r^4} - \omega^4 + \frac{4p^3}{r^3}\sqrt{(1 - 2\kappa^2)^2\frac{p^2}{r^2} + (1 - \kappa^2)\omega^2}}{\frac{8p^2}{r^2} - \omega^2}}. \quad (14)$$

Введем скорость волны по формуле  $c_a(r) = \frac{\omega}{\gamma_1(r)}$ . Имеем:

$$c_a(r) = \frac{\omega r}{p} \frac{\sqrt{8 - \frac{\omega^2 r^2}{p^2}}}{\sqrt{\frac{7\omega^2 r^2}{p^2} - 4(1 - 2\kappa^2) - \frac{\omega^4 r^4}{p^4} + 4\sqrt{(1 - 2\kappa^2)^2 + (1 - \kappa^2)\frac{\omega^2 r^2}{p^2}}}}. \quad (15)$$

Формула (13) определяет асимптотическое приближение искомой переменной скорости поверхностной волны. Его анализ показывает, что при  $r \rightarrow \infty$  скорость  $c_a(r)$  стремится к единице, т. е., с учетом принятой нормировки, к скорости волны сдвига. Это соответствует зависимости скорости плоской трехмерной поверхностной волны от угла распространения, полученной в [3]. Полученное решение применимо после точки поворота, положение которой определяется соотношением  $\gamma_1 = \frac{p}{r_*} \Rightarrow r_* = \frac{c_R p}{\omega}$ . Заметим, что  $c_a(r_*) = c_R$ , где  $c_R$  — скорость волны Рэлея. Поведение решения в окрестности и до точки поворота требует дополнительного исследования.

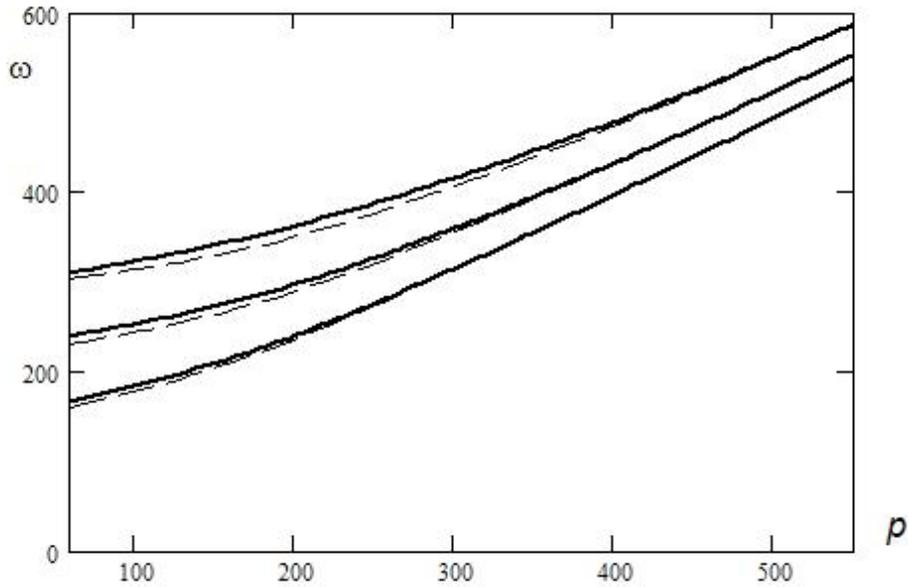


Рисунок 1 – Сравнение численных и асимптотических значений резонансных частот

В работе [4] показано, что, используя стоячую форму найденной волны, можно приближенно описать краевые резонансные явления в полубесконечном полумесяце цилиндра. Приближенная формула для частот, полученная в работе [4], имеет вид

$$\omega_n = p \sqrt{c_R^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4 \eta^2 p^2} \vartheta(c_R^2)}, \tag{16}$$

где

$$\vartheta(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{1 - f'(\alpha)}, \quad f(\alpha) = \alpha \frac{8 - \alpha}{7\alpha - 4(1 - 2\kappa^2) - \alpha^2 + 4\sqrt{(1 - 2\kappa^2)^2 + (1 - \kappa^2)\alpha}}. \tag{17}$$

Величина  $\vartheta(c_R^2)$  зависит только от коэффициента Пуассона и изменяется в пределах от 0.894 до 0.930.

На рисунке 1 асимптотика (14) сопоставляется с результатами численного определения резонансных частот по методике, описанной в [5] и не содержащей ника-

ких предварительных предположений о существовании изучаемой волны и связанных с ней резонансов. Сплошные линии соответствуют численному решению, штриховые — асимптотике.

Хорошее совпадение численного и асимптотического решений и сам факт существования резонансных частот в полубесконечном полом цилиндре при данных граничных условиях подтверждает правильность представленного в данной работе асимптотического разложения.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, госзадание № 2014/203.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Rayleigh J.* On waves propagated along the surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.
- [2] *Белубекян В. М., Белубекян М. В.* Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея // Докл. НАН Армении. 2005. Т.105, № 4. С. 362–368.
- [3] *Ардашишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю.* Трехмерная поверхностная волна в полупространстве и кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на поверхности распространения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. Т. 37, № 4. С. 53–64.
- [4] *Вильде М. В.* Кромочные волны высшего порядка в полом цилиндре со смешанными граничными условиями на торце // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20 — 24 августа 2015 г.) Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 752–754 (CD-ROM).
- [5] *Ардашишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю.* Трехмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4(26). С. 109–124.

**Wilde M.V.** *Asymptotic approximation for the cylindrical surface wave in elastic half-space with mixed boundary conditions on its surface.* An asymptotic method is proposed to derive the approximate solution for a cylindrical surface wave in the case of the surface fixed in the radial direction. The special feature of this wave is the dependence of its velocity upon the radial coordinate. This feature does not allow to derive a non-trivial solution by means of the usual procedure which leads to Bessel's equations. The proposed method is developed as a generalization of WKB-method. It allows to obtain the unknown velocity function by means of the phase function and to describe approximately the amplitude of vibrations by means of the amplitude function.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА НА ДИСПЕРСИЮ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ

Вильде М. В., Сергеева Н. В.

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Рассматривается распространение гармонических волн в бесконечном сплошном вязкоупругом круговом цилиндре. Для описания свойств материала используются две модели: модель стандартного вязкоупругого тела и наследственно-упругая модель Работнова. Выведены дисперсионные уравнения для случаев осесимметричных продольно-радиальных и крутильных колебаний при условии отсутствия напряжений на границе. Получены численные и асимптотические решения дисперсионных уравнений и проведен их сравнительный анализ. Изучено влияние параметров наследственной упругости на поведение дисперсионных кривых.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим распространение гармонических волн в бесконечном сплошном круговом цилиндре радиуса  $R$  в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ . Динамическое напряженно-деформированное состояние цилиндра описывается уравнениями движения, записанными в цилиндрической системе координат, и уравнениями состояния для наследственно-упругого материала

$$\begin{aligned} \tilde{E} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \sigma_{rr} - \tilde{\nu}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), & \frac{1}{r} \tilde{E} \left( u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) &= \sigma_{\varphi\varphi} - \tilde{\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}), \\ \tilde{E} \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \sigma_{zz} - \tilde{\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), & \frac{1}{2} \tilde{E} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right) \right) &= (1 + \tilde{\nu}) \sigma_{r\varphi}, \\ \frac{1}{2} \tilde{E} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) &= (1 + \tilde{\nu}) \sigma_{rz}, & \frac{1}{2} \tilde{E} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) &= (1 + \tilde{\nu}) \sigma_{\varphi z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{zz}$  — компоненты тензора напряжений,  $u_r, u_\varphi, u_z$  — компоненты вектора перемещений,  $\rho$  — плотность материала,  $t$  — время,  $\tilde{E}, \tilde{\nu}$  — интегральные операторы, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E(1 - \Gamma^*), & \tilde{\nu} &= \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \Gamma^*, \\ \Gamma^* f(t) &= k \int_{-\infty}^t \Theta_\alpha(-\beta, t - \tau) f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

$E, \nu$  — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона,  $\alpha, k, \beta$  — параметры материала.

В качестве ядра интегрального оператора будем использовать дробно-экспоненциальную функцию Работнова [1]

$$\Theta_\alpha(-\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))},$$

где  $\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} \exp(-y) dy$  — гамма-функция.

Рассмотрим две модели: I — модель стандартного вязкоупругого тела ( $\alpha = 0$ ), II — наследственно-упругая модель ( $\alpha = -\frac{1}{2}$ ).

Решение для перемещений  $\bar{u}$  будем искать в виде

$$\bar{u} = (\text{grad}\Phi + \text{rot}\bar{\Pi}) \exp(i\omega t), \quad (3)$$

где  $\Phi, \bar{\Pi}$  — потенциалы,  $\omega$  — частота.

С учетом (2) и (3) уравнения состояния (1) можно переписать, заменив  $\tilde{E}$  на  $EE^F$ , а  $\tilde{\nu}$  — на  $\nu^F$ , где

$$E^F = 1 - \frac{k}{\beta + (i\omega)^{1+\alpha}}, \quad \nu^F = \nu + \frac{1-2\nu}{2} \frac{k}{\beta + (i\omega)^{1+\alpha}}.$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad t_* = \frac{tc_2}{R} \quad (4)$$

и безразмерные величины

$$u_\eta^* = \frac{u_\eta}{R}, \quad \sigma_{\eta\gamma}^* = \frac{\sigma_{\eta\gamma}}{E}, \quad \beta_* = \sqrt{\frac{R}{c_2}} \beta, \quad k_* = \sqrt{\frac{R}{c_2}} k, \quad \omega_* = \frac{R}{c_2} \omega, \quad (5)$$

где  $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$ ,  $\eta, \gamma = r, \varphi, z$ . В дальнейшем звездочки опускаем.

Выражая напряжения через перемещения из полученных уравнений состояния и подставляя их в уравнения движения, с учетом (4) и (5), получаем уравнения движения в перемещениях

$$\nabla^2 \bar{u} + (k_F^{-2} - 1) \text{grad} \text{div} \bar{u} - \Omega^2 \bar{u} = 0,$$

где

$$k_F^{-2} = \frac{2-2\nu^F}{1-2\nu^F}, \quad \Omega^2 = \omega^2 \frac{1+\nu^F}{(1+\nu)E^F}.$$

Граничные условия на лицевой поверхности имеют вид  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0$ .

Рассмотрим осесимметричную задачу. В случае продольно-радиальных колебаний потенциалы  $\Phi$  и  $\bar{\Pi}$  возьмем в виде

$$\Phi = A_1 J_0(a\xi) \exp(i\tilde{\chi}\zeta), \quad H_\varphi = A_2 J_1(b\xi) \exp(i\tilde{\chi}\zeta), \quad H_r = H_z = 0,$$

где  $i\tilde{\chi} = -\delta - i\chi$ ,  $\chi$  — волновое число;  $\delta > 0$  — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты  $\zeta$ ,  $a^2 = k_F^2 \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$ ,  $b^2 = \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$ ,  $J_0(\cdot)$ ,  $J_1(\cdot)$  — функции Бесселя,  $A_1, A_2$  — неизвестные постоянные. В случае крутильных колебаний

$$H_z = A_3 J_0(b\xi) \exp(i\tilde{\chi}\zeta), \quad \Phi = H_r = H_\varphi = 0,$$

где  $A_3$  — неизвестная постоянная.

После стандартной процедуры получим дисперсионное уравнение для случая продольно–радиальных колебаний в виде

$$(\Omega^2 - 2\tilde{\chi}^2)^2 J_0(a)J_1(b) + 4\tilde{\chi}^2 abJ_0(b)J_1(a) - 2\Omega^2 aJ_1(a)J_1(b) = 0, \quad (6)$$

а для случая крутильных колебаний в виде

$$bJ_0(b) - 2J_1(b) = 0. \quad (7)$$

**3. Асимптотики корней дисперсионных уравнений.** Асимптотики корней дисперсионных уравнений (6), (7) в окрестности нулевой частоты будем искать в виде разложения в ряд по степеням  $\omega^{1+\alpha}$ . В случае продольно–радиальных колебаний асимптотики для фундаментальной моды будут иметь вид:

$$\tilde{\chi}_1^{s(I)} = c_{11}^{s(I)}\omega + id_{12}^{s(I)}\omega^2 + c_{13}^{s(I)}\omega^3 + O(\omega^4), \quad (8)$$

$$\tilde{\chi}_1^{s(II)} = c_{12}^{s(II)}\omega + \left(c_{13}^{s(II)} + id_{13}^{s(II)}\right)\omega^{\frac{3}{2}} + \left(c_{14}^{s(II)} + id_{14}^{s(II)}\right)\omega^2 + O\left(\omega^{\frac{5}{2}}\right), \quad (9)$$

где  $c_{11}^{s(I)} = c_{12}^{s(II)} = \sqrt{\frac{\beta}{2(1+\nu)(\beta-k)}}$ ,  $d_{12}^{s(I)}$ ,  $c_{13}^{s(I)}$ ,  $c_{13}^{s(II)}$ ,  $d_{13}^{s(II)}$ ,  $c_{14}^{s(II)}$ ,  $d_{14}^{s(II)}$  – коэффициенты, зависящие от параметров материала  $k$ ,  $\nu$ ,  $\beta$ .

Асимптотики корней дисперсионного уравнения (6) для мод с номерами  $n = 2, 3, \dots$  будут иметь вид

$$\tilde{\chi}_n^{s(I,II)} = \frac{1}{2} \ln(4\pi(n-1)) + i\pi(n-1) + O\left(\omega, \omega^{\frac{1}{2}}\right), \quad (10)$$

Для случая крутильных колебаний асимптотики получены в виде

$$\tilde{\chi}_1^{t(I)} = c_{11}^{t(I)}\omega + id_{12}^{t(I)}\omega^2 + c_{13}^{t(I)}\omega^3 + O(\omega^4), \quad (11)$$

$$\tilde{\chi}_1^{t(II)} = c_{12}^{t(II)}\omega + \left(c_{13}^{t(II)} + id_{13}^{t(II)}\right)\omega^{\frac{3}{2}} + O(\omega^2), \quad (12)$$

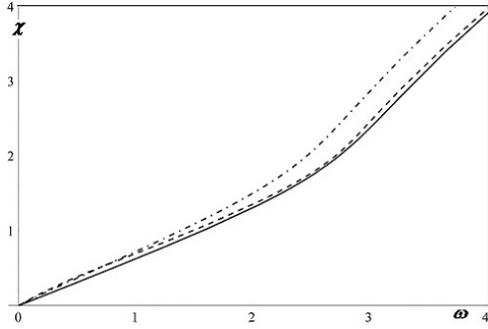
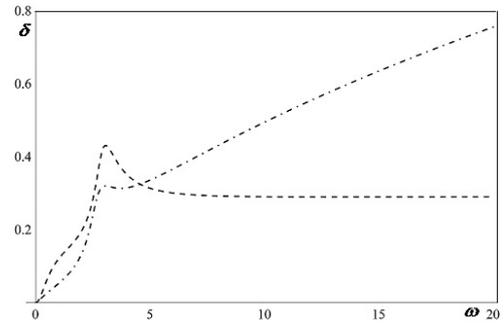
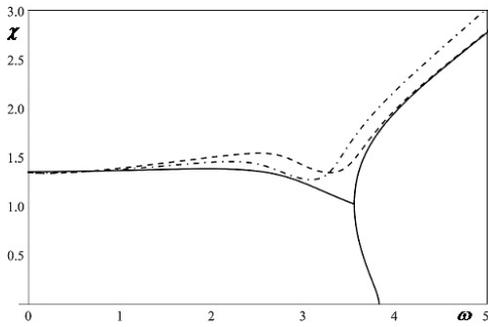
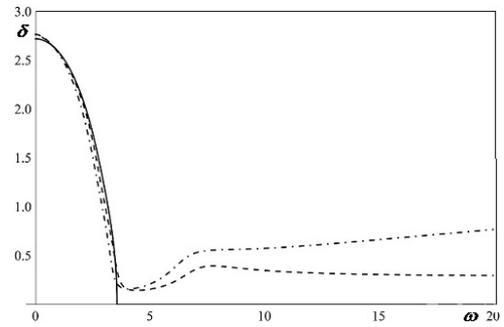
$$\tilde{\chi}_n^{t(I,II)} = o(1) + i\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) + O\left(\omega, \omega^{\frac{1}{2}}\right), \quad (13)$$

где  $c_{11}^{t(I)} = c_{12}^{t(II)} = \sqrt{\frac{2\beta(1+\nu) + k(1-2\nu)}{2(1+\nu)(\beta-k)}}$ ,  $d_{12}^{t(I)} = -\frac{3kc_{11}^{t(I)}}{2(\beta-k)(2\beta(1+\nu) + k(1-2\nu))}$ ,

$c_{13}^{t(II)} = d_{13}^{t(II)} = -\frac{3\sqrt{2}kc_{12}^{t(II)}}{4(\beta-k)(2\beta(1+\nu) + k(1-2\nu))}$ ,  $c_{13}^{t(I)}$  – коэффициент, зависящий от параметров материала  $k$ ,  $\nu$ ,  $\beta$ ,  $n = 2, 3, \dots$

Как видно из (8), (9), (11), (12), (10) и (13), первые коэффициенты разложения совпадают, а поскольку они вносят наибольший вклад в решение, то можно считать, что при малых значениях частот между моделями практически нет различий. Аналогичные результаты дают численные решения дисперсионных уравнений (6), (7), которые представлены на рисунках 1–4.

На рисунках 1, 3 представлены проекции дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$  для случая продольно–радиальных колебаний для различных моделей

Рисунок 1 – Проекция дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$ Рисунок 2 – Проекция дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \delta)$ Рисунок 3 – Проекция дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$ Рисунок 4 – Проекция дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \delta)$ 

для первой и второй мод соответственно при  $\nu = 0.3$ ,  $k = 0.5$ ,  $\beta = 1$ . Пунктирная линия соответствует модели стандартного вязкоупругого тела, штрихпунктирная — наследственно-упругой модели, сплошная — упругой модели. На рисунках 2, 4 представлены проекции дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \delta)$  для тех же мод.

Анализ численных решений показывает, что в окрестности частот записания упругого волновода [2] дисперсионные кривые для случая наследственно-упругого тела характеризуются более значительным отклонением от упругого случая, чем дисперсионные кривые для модели стандартного вязкоупругого тела.

Асимптотики корней дисперсионного уравнения (6) при  $\omega \rightarrow \infty$  имеют вид

$$\tilde{\chi}_1^{s(\infty, I)} = c_{11}^{s(\infty, I)} \omega + id_{10}^{s(\infty, I)} + c_{1,-1}^{s(\infty, I)} \frac{1}{\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad (14)$$

$$\tilde{\chi}_1^{s(\infty, II)} = c_{12}^{s(\infty, II)} \omega + \left(c_{11}^{s(\infty, II)} + id_{11}^{s(\infty, II)}\right) \sqrt{\omega} + id_{10}^{s(\infty, II)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right), \quad (15)$$

где  $c_{11}^{s(\infty, I)} = c_{12}^{s(\infty, II)} = \frac{1}{c_R} = \frac{1}{6} \sqrt{3(p + 12q)^{\frac{1}{3}} - \frac{48(-1 + \nu - \nu^2)}{(p + 12q)^{\frac{1}{3}}} - 12\nu + 24}$ ,

$p = 44 - 12\nu + 96\nu^2 - 64\nu^3$ ,  $q = \sqrt{-15 + 78\nu - 111\nu^2 + 144\nu^3 - 96\nu^4}$ ,  $c_R$  — скорость волны Релея,  $c_{11}^{s(\infty, II)}$ ,  $d_{11}^{s(\infty, II)}$ ,  $d_{10}^{s(\infty, II)}$ ,  $c_{1,-1}^{s(\infty, I)}$  — коэффициенты, зависящие от

параметров материала  $k, \beta, \nu$ ,

$$\tilde{\chi}_n^{s(\infty, I)} = \omega - i \frac{3k}{4(1+\nu)} - \left( \frac{3k(\beta-k)}{4(1+\nu)} + \frac{b_n^2}{2} - \frac{9k^2}{32(1+\nu)^2} \right) \frac{1}{\omega} + O(\omega^{-2}), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_n^{s(\infty, II)} = & \omega + \frac{3\sqrt{2}k}{8(1+\nu)} (1-i)\sqrt{\omega} + i \frac{3k}{4} \left( \frac{\beta-k}{1+\nu} + \frac{3k}{8(1+\nu)^2} \right) - \frac{3\sqrt{2}k}{8} \times \\ & \times \left( \frac{(\beta-k)^2}{1+\nu} - \frac{3k(\beta-k)}{4(1+\nu)^2} + \frac{9k^2}{32(1+\nu)^3} \right) (1+i) \frac{1}{\sqrt{\omega}} + \left( \frac{3k(\beta-k)^3}{4(1+\nu)} - \right. \\ & \left. - \frac{b_n^2}{2} + \frac{27k^2(\beta-k)^2}{32(1+\nu)^2} + \frac{81k^3(\beta-k)}{128(1+\nu)^3} + \frac{405k^4}{2048(1+\nu)^4} \right) \frac{1}{\omega} + O(\omega^{-\frac{3}{2}}), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $b_n$  — корни уравнения  $J_1(b_n) = 0, n = 2, 3, \dots$

Асимптотики корней дисперсионного уравнения (7) для больших значений частот также имеют вид (16), (17), но теперь  $b_n$  — корни уравнения

$$b_n J_0(b_n) - 2J_1(b_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сравнительный анализ асимптотик показывает, что действительная часть для больших значений частот при различных значениях  $\alpha$  имеет порядок  $O(\omega)$ , а мнимая часть имеет порядок  $O(\omega^{-\alpha})$ . Таким образом, для модели стандартного вязкоупругого тела поведение мнимой части волновой постоянной с ростом  $\omega$  качественно отличается от модели наследственно-упругого тела: в первом случае мнимая часть практически не зависит от частоты, а во втором — растет пропорционально  $\sqrt{\omega}$ . В поведении действительной части также имеются различия: разность между значениями волнового числа для вязкоупругого и для упругого волновода в случае стандартного вязкоупругого тела имеет порядок  $\omega^{-1}$ , а в случае наследственно-упругого тела —  $\sqrt{\omega}$ .

Полученные результаты могут быть использованы для выбора модели вязкоупругого тела, наиболее подходящей для описания экспериментальных данных.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Работнов Ю. И. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
- [2] Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. Думка, 1981. 284 с.

**Wilde M. V., Sergeeva N. V.** *The asymptotic analysis of the influence of viscoelastic material properties on the dispersion of harmonic waves in a solid cylinder.* The propagation of harmonic waves in infinite solid circular cylinder is considered. The models of standard viscoelastic body and viscoelastic Rabotnov model are investigated. For the axisymmetric problem the dispersion equations are derived for cases longitudinal-radial and torsion oscillations. The numerical and asymptotic solutions of the dispersion equations for different values of frequency are obtained. The comparative analysis the numerical and asymptotic solutions is carried out. The influence of viscoelastic parameters on the behavior of the dispersion curves is analysed.

# СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗИ УРОВНЯ АБЕРРАЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И СФЕРИЧЕСКОГО КОМПОНЕНТА РЕФРАКЦИИ

Воронкова Е. Б.<sup>1</sup>, Еременко А. А.<sup>1</sup>, Корников В. В.<sup>1</sup>,  
Качанов А. Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>2</sup>Филиал МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С. Н. Федорова,  
Санкт-Петербург  
v.kornikov@spbu.ru

В данной работе проводится статистическое исследование зависимости между сферическим показателем глаза и абберрациями высших порядков. Показано, что абберрации высших порядков присущи глазам и с эмметропией, и с аметропиями, но несколько возрастают при средней и высшей степени миопии.

**1. Введение.** Острота зрения человека в первую очередь зависит от трех факторов: разрешающей способности сетчатки, дифракции света в области зрачка и от погрешностей оптической системы глаза — так называемых абберраций [1, 2].

Абберрации возникают вследствие искажения световых лучей при прохождении через функциональные структуры глаза (слезную пленку, роговицу, хрусталик и т. п.). К возникновению или усилению абберраций могут приводить различные изменения описанных структур и заболевания глаза, такие как катаракта, недостаточность слезной пленки при синдроме сухого глаза, рубцы на роговице после операций и другие [1].

Абберрации делятся на хроматические и геометрические (монохроматические). Среди последних различают абберрации низших порядков (близорукость, дальнорукость и астигматизм) и высших порядков. Абберрации высших порядков (RV OPD HO) составляют 15% от общего числа абберраций, они ухудшают зрение и проявляются как нечеткость изображения, блики вокруг источников света, двоение. К ним относят астигматизм косых пучков, кривизну поля, дистрофию, нерегулярные абберрации. Наибольший интерес представляют: сферическая абберрация, кома, дисторсия. Количественной характеристикой оптического качества изображения является среднеквадратичное значение ошибок отклонения реального волнового фронта от идеального [1, 2]. Абберрации волнового фронта описываются полиномами Цернике. Исследование абберраций высших порядков является важным, поскольку оно расширяет возможности как диагностики, так и эффективного лечения большинства офтальмологических болезней [2].

**2. Материалы и методы.** В данной работе проводится исследование зависимости между сферическим показателем глаза  $S$  и абберрациями высших порядков RV OPD HO. Данные по 385 глазам были получены из Санкт-Петербургского филиала ФГАУ «МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С. Н. Федорова». Для каждого из глаз определялись следующие показатели:

- $S$  — сферический компонент рефракции глаза,
- PVD OPD — уровень тотальных, то есть всех абберраций,

- PVD OPD HO — уровень aberrаций высших порядков,
- коэффициенты разложения полиномов Цернике третьего и четвертого порядков, характеризующие величину aberrации.

По сферическому показателю все глаза были разделены на семь групп в зависимости от степени миопии или гиперметропии: глаза с миопией слабой (МСлСт), средней (МСрСт) и высшей степени (МВСт), глаза с эметропией, то есть здоровые глаза (Эм), глаза с гиперметропией слабой (ГмСлСт), средней (ГмСрСт) и высшей степени (ГмВСт). Количество глаз в каждой из групп приведено в таблице 1.

Таблица 1 – Численность групп глаз

	МСлСт	МСрСт	МВСт	Эм	ГмСлСт	ГмСрСт	ГмВСт
Кол-во глаз	77	123	58	22	19	28	31

**3. Результаты и обсуждение.** Проводилось сравнение групп по показателю PV OPD HO. Так как величина aberrаций высших порядков не подчиняется нормальному распределению, для сравнения групп были использованы непараметрические критерии [3]. Во всех рассматриваемых группах, за исключением последней, с помощью рангового коэффициента корреляции Спирмена, была выявлена статистически значимая, слабая обратная зависимость между S и PV OPD HO. Представляет интерес то, что в следующих группах при попарном сравнении не было выявлено статистически значимых различий:

- группы глаз с миопией слабой, средней и высшей степени;
- группы глаз с эметропией, гиперметропией слабой, средней и высшей степени.

Оценить зависимость величины aberrаций высших порядков от сферического компонента рефракции можно с помощью рисунка 1.

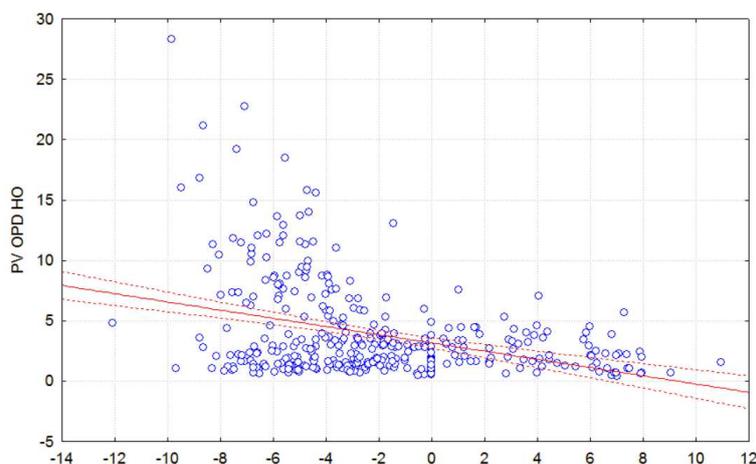


Рисунок 1 – Зависимость PV OPD HO от S

Представляет интерес определение различий между представленными выше семью группами глаз. Для этого можно воспользоваться непараметрическим критерием Крускала — Уоллиса [3].

Значение критерия Крускала — Уоллиса, вычисленное по имеющимся данным, равно  $H = 31.14$ . Критическое значение  $\chi_{cr}^2$  при уровне значимости  $\alpha = 0.01$  и числе степеней свободы  $k = 6$  равно 16.81. Получили  $H > \chi_{cr}^2$ , следовательно нулевая гипотеза об отсутствии различий между группами отвергается на 1% уровне значимости [3].

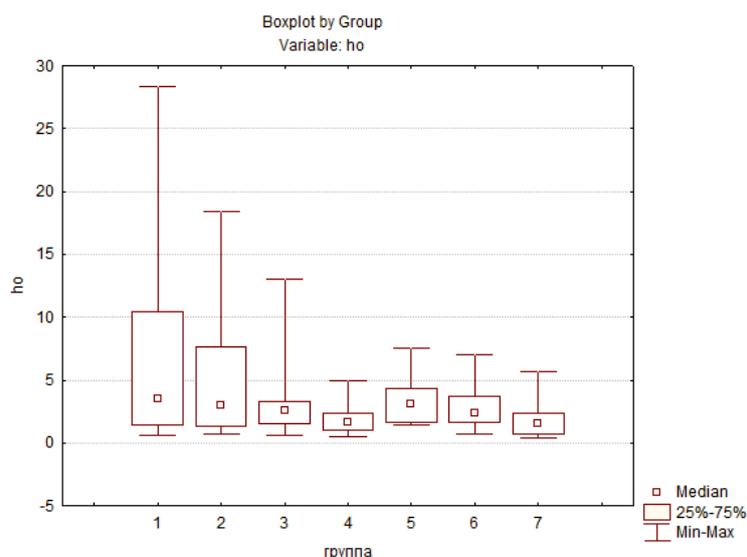


Рисунок 2 – Диаграмма размаха PV OPD HO среди групп: 1. МВСт; 2. МСрСт; 3. МСлСт; 4. Эм; 5. ГмСлСт; 6. ГмСрСт; 7. ГмВСт

Для того, чтобы узнать, между какими именно группами имеются различия, был использован метод множественного сравнения — непараметрический критерий Данна [3]. Результаты подсчетов для каждой пары групп представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Значение критерия Данна  $Q$  для различных групп глаз

Название групп	Q	Название групп	Q	Название групп	Q
МСлСт и МСрСт	1.96	ГмСрСт и ГмВСт	2.01	МВСт и ГмСрСт	1.77
МСлСт и МВСт	2.58	МСрСт и Эм	3.39	МВСт и ГмВСт	4.18
МСлСт и Эм	2.07	МСрСт и ГмСлСт	0.05	Эм и ГмСлСт	2.55
МСлСт и ГмСлСт	1.16	МСрСт и ГмСрСт	1.16	Эм и ГмСрСт	1.9
МСлСт и ГмСрСт	0.19	МСрСт и ГмВСт	3.81	Эм и ГмВСт	0.07
МСлСт и ГмВСт	2.26	МВСт и Эм	3.79	ГмСлСт и ГмСрСт	0.86
МСрСт и МВСт	1.03	МВСт и ГмСлСт	0.57	ГмСлСт и ГмВСт	2.67

Критическое значение при уровне значимости  $\alpha = 0.05$  равно  $Q_{cr} = 3.038$  [3]. Нулевая гипотеза об отсутствии различий принимается во всех парах групп за исключением четырех:

- Миопия средней степени и гиперметропия высшей степени,
- Миопия высшей степени и эметропия,
- Миопия высшей степени и гиперметропия высшей степени,
- Миопия средней степени и эметропия.

Представляет интерес то, что в следующих группах при попарном сравнении не было выявлено статистически значимых различий:

- Группы глаз с миопией слабой, средней и высшей степени;
- Группы глаз с эметропией, гиперметропией слабой, средней и высшей степени.

С целью выявления нелинейной зависимости между сферическим компонентом рефракции и уровнем аберраций высших порядков был проведен регрессионный анализ для следующих блоков групп:

- Группы глаз с миопией слабой, средней и высшей степени;
- Группы глаз с гиперметропией слабой, средней и высшей степени.

Для первого блока была использована нелинейная полиномиальная регрессия, а именно парабола второй степени, описываемая уравнением  $y = ax^2 + bx + c + \varepsilon$ , где  $a, b, c$  — оценки параметров регрессионной модели,  $\varepsilon$  — ошибка наблюдений. В результате была получена следующая регрессионная модель:  $PV\ O\ P\ D\ H\ O = 0.037S^2 - 0.379S + 1.995$  (рисунок 3). При этом коэффициент множественной корреляции равен 0.36, коэффициент детерминации равен 0.13, а скорректированный коэффициент множественной корреляции 0.12.

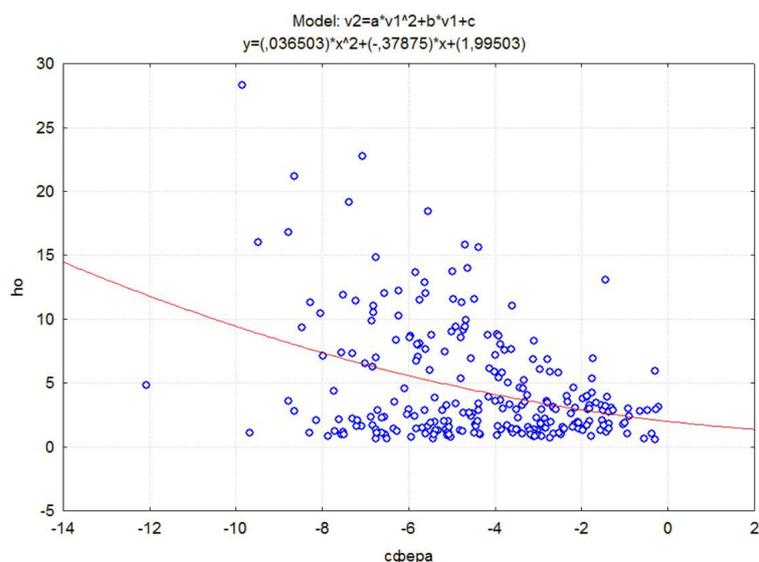


Рисунок 3 – Регрессионная модель для групп глаз с миопией

Для второго блока была использована следующая модель  $y = \ln x + bx + c$ . Была получена следующая регрессионная модель:  $PV\ O\ P\ D\ H\ O = 0.455 \ln S -$

$-0.34S + 3.403$  (рисунок 4). При этом коэффициент множественной корреляции равен 0.35, коэффициент детерминации равен 0.12, а скорректированный коэффициент множественной корреляции 0.098.

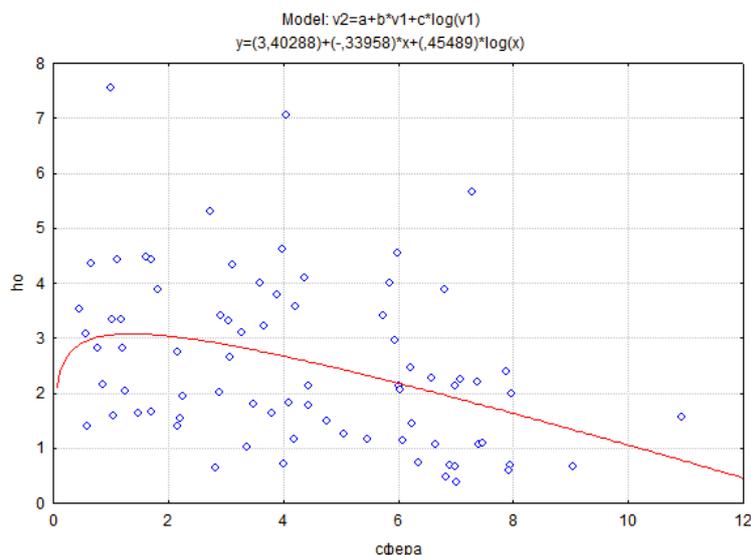


Рисунок 4 – Регрессионная модель для групп глаз с гиперметропией

Проведенные исследования говорят о том, что аберрации высших порядков присущи глазам и с эмметропией, и с аметропиями, но несколько возрастают при средней и высшей степени миопии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01- 06311.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аветисов С. Э. Шелудченко В. М. Нужно ли нам супер-зрение? Аберрации глаза // Клиническая физиология зрения. Москва, 2006. С. 488–501.
- [2] Балашевич Л. И., Качанов А. Б., Бауэр С. М., Зимин Б. А. Аберрометрия при эмметропии и аномалиях рефракции // Биомеханика глаза. Сборник трудов конференции. Москва, 2005. С. 202–203.
- [3] Гланц С. Медико-биологическая статистика. М.: Практика, 1998. 459 с.

**Voronkova E. B., Eremenko A. A., Kornikov V. V., Kachanov A. B.** *Statistical analysis of the correlation between the higher-order aberrations and spherical refractive errors.* Statistical review of the relationship between spherical refractive errors and the higher-order aberrations is presented in the present work. It is shown that the higher-order aberrations are specific both for the emmetropic eyes and ametropic eyes. An amount of the higher-order aberration increases for the eyes with moderate and high degree of myopia.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КОНТРОЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ БЕСКОНТАКТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Ерёмин А. А.,  
Мякишева О. А.

*Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар*

В работе рассматривается взаимодействие сферических волн, возбуждаемых точечным источником, с упругой пластиной, погруженной в акустическую жидкость. На основе полученных интегральных и асимптотических представлений для отраженного и прошедшего волнового поля анализируется осредненное за период колебаний распространение волновой энергии в гармоническом волновом поле, возбуждаемым заданным источником, находящимся на различных расстояниях от образцов с различными упругими свойствами.

1. Неразрушающее определение физико-механических характеристик материалов и контроль за их изменением в процессе эксплуатации применяются для раннего выявления негативных изменений (деградации) их свойств и предотвращения тем самым внезапного катастрофического разрушения объектов ответственного назначения, таких как изделия аэрокосмической и атомной промышленности, мосты, трубопроводы и др. В настоящее время для этой цели все шире используются бегущие волны, параметры распространения которых однозначно определяются геометрией и упругими свойствами инспектируемой тонкостенной конструкции. При этом вместо традиционных ультразвуковых зондов, перемещение которых вдоль всей поверхности не всегда возможно технологически, используются бесконтактные преобразователи (air-coupled transducers), регистрирующие акустические сигналы, переизлучаемые бегущими волнами в окружающую среду (воздух или жидкость) в процессе их распространения вдоль образца. Необходимым этапом разработки и настройки указанных систем неразрушающего контроля является создание математических и компьютерных моделей, адекватно описывающих процесс возбуждения, распространения и регистрации волн в связной системе источник — образец, погруженный в окружающую среду — бесконтактный сенсор.

Данная статья является продолжением работы [1], в которой были получены интегральные представления для исходного поля источника и для отраженного и прошедшего волнового поля. Также на основе метода стационарной фазы и теории вычетов были выведены асимптотические представления для объемных и поверхностных волн в дальней зоне.

2. Рассматриваются установившиеся гармонические колебания  $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ ,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  упругой пластины толщины  $h$ , погруженной в акустическую среду (далее гармонический множитель  $e^{-i\omega t}$  опущен). Колебания пластины описываются полной системой уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — модули упругости,  $\rho$  — плотность пластины.

Давление  $p(\mathbf{x})$  в акустической жидкости, в которую погружена пластина, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + \kappa_0^2 p = \begin{cases} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), & z \geq 0 \\ 0, & z \leq -h, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\kappa_0 = \omega/c_0$  — волновое число,  $c_0$  — скорость звука. Дельта-функция Дирака моделирует точечный источник, расположенный в точке  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, d)$ . Сферические волны, излучаемые точечным источником, задаются классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца

$$p_0 = -\frac{1}{4\pi R} e^{i\kappa_0 R}, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|. \quad (3)$$

Предполагается, что поле давлений  $p(\mathbf{x})$  и вертикальная компонента смещений  $u_z = \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}$  непрерывны на границах раздела сред  $z = 0$  и  $z = -h$ :

$$[p] = 0, [u_z] = 0. \quad (4)$$

Квадратными скобками обозначен скачок соответствующей функции на поверхностях  $z = 0$  и  $z = -h$ :  $[f] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(z - \varepsilon) - f(z + \varepsilon))$ . Постановку задачи замыкают условия излучения на бесконечности, вытекающие из принципа предельного поглощения [2].

С помощью преобразования Фурье по горизонтальным координатам  $x$  и  $y$  искомого поле давления  $p_{sc}$  в акустической среде можно выразить в виде двукратного интеграла:

$$p_{sc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} P_{sc}(\boldsymbol{\alpha}, z) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (5)$$

в котором Фурье-символ акустического давления  $P_{sc} = P_{sc}^\pm$  (плюс для  $z \geq 0$  и минус для  $z \leq -h$ , соответственно) выражается через функцию Грина  $G_{sc}(\boldsymbol{\alpha}, z)$  и нагрузку  $P_0 = \mathcal{F}_{xy}[p_0]$ . Контуры интегрирования  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  идут вдоль вещественных осей комплексных плоскостей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , обходя вещественные полюса  $\zeta_n$  подынтегральных функций в соответствии с принципом предельного поглощения. Здесь и далее используются обозначения работы [1].

**3.** При построении асимптотики интеграла (5) необходимо учитывать, что если подынтегральная функция  $P_{sc}$  имеет хотя бы один полюс  $\zeta$ , близкий к вещественной оси ( $|\operatorname{Re}\zeta| < \kappa_0$ ), то существуют направления  $\psi$ , для которых асимптотика, построенная методом стационарной фазы, неприменима, так как происходит сближение двух особенностей: стационарной точки и полюса [3]. В таком случае функция  $P_{sc}$  представляется в виде суммы гладкой функции  $\hat{P}_{sc}$  и набора элементарных функций с особенностями в  $\zeta_n$ :

$$P_{sc}(\alpha) = \hat{P}_{sc}(\alpha) + \sum_{n=1}^N \frac{P_{sc,n}}{\alpha - \zeta_n}, \quad P_{sc,n} = \operatorname{res} P_{sc}|_{\alpha=\zeta_n}.$$

Соответственно, отраженное поле представимо в виде

$$p_{sc} = \hat{p}_{sc} + \sum_{n=1}^N p_{sc,n} \quad (6)$$

Асимптотика  $\hat{p}_{sc}$  строится методом стационарной фазы для гладких подынтегральных функций. Асимптотика слагаемых  $p_{sc,n}$  определяется на основе асимптотических представлений для эталонных осциллирующих интегралов с почти вещественной полярной особенностью [3, 4].

4. Среднее за период колебаний изменение количества энергии  $E$  в объеме с поверхностью  $S$  определяется интегрированием осредненной плотности потока энергии  $e_s$  по этой поверхности [5]. В частности, количество энергии  $E_0$ , излучаемое точечным источником, может быть получено путем интегрирования  $e_s$  по сфере  $S_R$  радиуса  $R$  с центром в точке его расположения. В силу закона сохранения энергии значение  $E_0$  остается постоянным при любом значении  $R$ . Данный факт использовался для контроля полученных численных результатов. Энергия источника складывается из энергии точечного источника в безграничной акустической среде  $E_\infty$  и добавочного слагаемого  $E_{sc}$ , возникающего за счет отражения поля источника от пластины:

$$E_0 = E_\infty + E_{sc}, \quad E_\infty = \frac{1}{8\pi\rho_0c_0}, \quad E_{sc} = \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im}[p_{sc}^+(\mathbf{x}_0)].$$

Энергия отраженных волн  $E^-$  получается интегрированием  $e_s$  по верхней полусфере  $S^+$  радиуса  $\kappa_0 R \gg 1$ :  $0 \leq \psi < \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , а интегрированием по нижней полусфере  $S^-$  радиуса  $\kappa_0 R \gg 1$ :  $\pi/2 < \psi \leq 2\pi$  определяется количество энергии прошедших волн  $E^+$ . В соответствии с этим, коэффициенты отражения и прохождения определяются их отношением к общей мощности источника:  $\kappa^- = E^-/E_0$  и  $\kappa^+ = E^+/E_0$ .

5. Ниже приводятся численные примеры для различных образцов пластин, погруженных в акустическую жидкость. В качестве примера, демонстрирующего необходимость учета сближения полюса и стационарной точки для построения асимптотики объемных волн в дальней зоне, рассматривается модельная задача взаимодействия сферических волн с более жестким акустическим слоем, погруженным в акустическую жидкость. На Рис. 1 показаны графики для прошедшего поля  $p_{sc}$ : а) зависимость от частоты в направлении строго вниз ( $\psi = 0$ ); б) зависимость от угла  $\psi$  при фиксированной частоте  $\omega = 5$ . Графики акустического давления  $p_{sc}$  для однородной и многослойной пластины, погруженной в акустическую жидкость, приведены в работе [1].

Здесь и далее все результаты приводятся в безразмерном виде, в котором все линейные размеры отнесены к толщине пластины  $h$ , а скорости и плотности — к  $c_s$  и  $\rho$  для упругой среды; безразмерная круговая частота  $\omega = 2\pi fh/c_s$ , где  $f$  — размерная частота. В численных примерах зафиксированы следующие безразмерные параметры: упругая среда:  $c_p = 1.87$ ,  $c_s = 1$ ,  $\rho = 1$ ; мягкая упругая среда:  $c_p = 0.0097$ ,  $c_s = 0.0039$ ,  $\rho = 0.152$ ; акустическая жидкость:  $c_0 = 0.48$ ,  $\rho_0 = 0.127$ ; жесткая акустическая среда:  $c_p = 1$  и  $\rho = 1$ . Трехслойная пластина состоит из двух упругих слоев толщины  $h_1 = h_3 = 0.4$  и мягкой упругой прослойки толщины

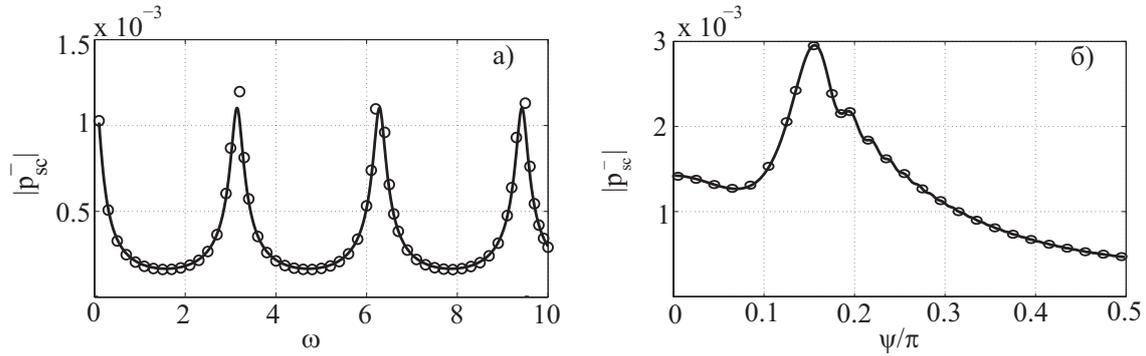


Рисунок 1 – Давление  $p_{sc}^-$ : сплошная линия — интеграл; маркеры — асимптотика

$h_2 = 0.2$ , толщина такой пластины  $h = h_1 + h_2 + h_3 = 1$  такая же, как и у однородной. Отметим, что в размерных величинах, упругая среда соответствует стали, мягкая упругая среда — клею, а акустическая жидкость — воде.

Ниже приводятся результаты анализа энергетических характеристик волнового поля для однородной и трехслойной пластины, погруженной в акустическую жидкость. На Рис. 2 изображена частотная зависимость количества энергии  $E$ , уходящей от источника через поверхности сфер радиуса  $R = 0.1, 10$  и  $100$ . Источник расположен на расстоянии  $d = 2$  от пластины. Расчеты показывают, что при всех  $R$  количество энергии, проходящей через эти поверхности, не меняется, т. е. баланс энергии сохраняется. С появлением мягкой прослойки в пластине, энергия волнового поля, возбуждаемого точечным источником, меняется только на низких частотах  $\omega < 0.5$ , т. е. наличие мягкой прослойки практически не влияет на суммарную энергию, отдаваемую источником в среду, но на некоторых частотах появляются резонансные пики.

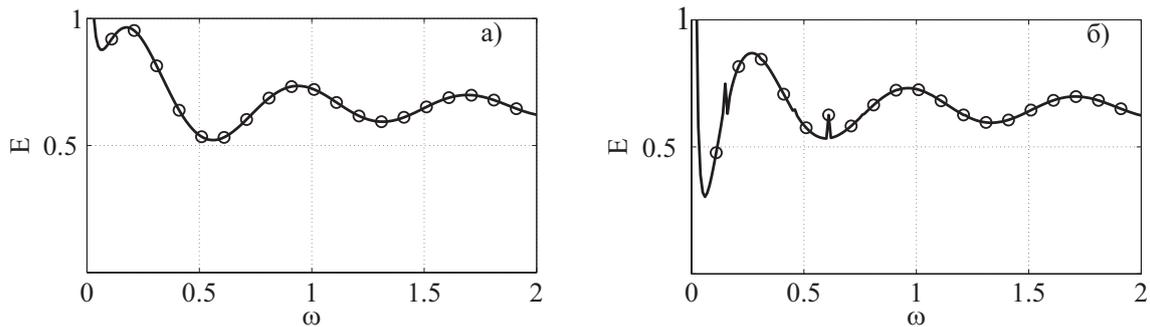


Рисунок 2 – Мощность источника  $E_0$  (сплошная линия) и энергия  $E$  (маркеры), уносимая через сферу радиуса  $R = 0.1, 10$  и  $100$ : а) однородная пластина; б) трехслойная пластина

Далее для этих же пластин приводятся частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения  $\kappa^-$  и  $\kappa^+$  при разных  $d = 2, 5, 10$  (Рис. 3). При  $\omega > 1$  коэффициенты стабилизируются и  $\kappa^+ > \kappa^-$ .

**7.** На основе ранее полученных интегральных и асимптотических представлений для волновых полей, возбуждаемых точечным источником в акустической среде, содержащей упругую пластину, разработаны компьютерные модели для

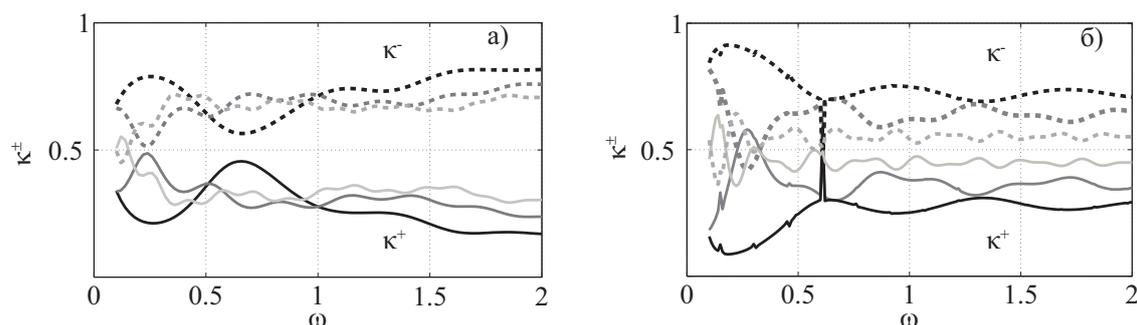


Рисунок 3 – Коэффициенты отражения и прохождения  $\kappa^-$  и  $\kappa^+$  при разных  $d$ : а) однородная пластина; б) трехслойная пластина (черные линии —  $d = 2$ , темно-серые линии —  $d = 5$  и светло-серые линии —  $d = 10$ )

расчета волновых полей отраженных и прошедших волн. Проведен анализ энергетических характеристик в зависимости от расположения источника относительно пластины и ее строения.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.189.2014К), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-41-230769) и научного фонда G-RISC (проект № М-2016b-6).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Glushkov E. V., Glushkova N. V., Miakisheva O. A.* The interaction of sound and ultrasound waves with multilayered elastic plates immersed in acoustic fluid // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2015. P. 107-111.
- [2] *Свейшиков А. Г.* Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 345–347.
- [3] *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
- [4] *Фоменко С. И.* Асимптотика волновых полей в слоистом скважинном волноводе // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2007. № 4. С. 54–62.
- [5] *Умов Н. А.* Уравнения движения энергии в телах. Избранные сочинения М.-Л.: Гостехиздат, 1950. С. 151–226.

**Glushkov E. V., Glushlova N. V., Eremin A. A., Miakisheva O. A.** *Definition and control of the characteristic changes of laminated plates based on non-contact measurement of wave fields.* The interaction of acoustic waves generated by a point source with an elastic plate immersed in an acoustic fluid is considered. Based on integral and asymptotic representations for reflected and transmitted wave fields the derived solutions enable quantitative analysis of time-averaged wave energy fluxes excited by a source located at different distances from the samples with different elastic properties.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН В СТРУКТУРАХ С ЛОКАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ НА ОСНОВЕ ГИБРИДНОЙ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ

**Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А.**

*Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар*

Предлагается численно-аналитическая схема решения задач дифракции бегущих волн на препятствиях, локализованных в слоистых волноводах различной природы (акустические, упругие, электромагнитные и т. д.). Схема основана на получении с помощью стандартного конечно-элементного пакета набора численных решений в локальной области, включающей зону неоднородности, с определенными граничными условиями, которые играют затем роль базиса для искомого решения в этой области. Во внешней полубесконечной области аналитическое решение ищется в виде разложения по нормальным модам. Неизвестные коэффициенты разложения решения во внутренней и внешней областях определяются из условий сшивания решений, полученных во внешних и внутренних областях. Его эффективность иллюстрируется примерами сопоставления с полуаналитическими решениями для задач дифракции на горизонтальных препятствиях.

## **1. Введение.**

Задача о дифракции упругих, акустических или электромагнитных волн на локальных препятствиях в слоистых волноводах является классической вычислительной задачей. Актуальность разработки эффективных методов её решения растёт с увеличением числа практически важных приложений в приборостроении, акустоэлектронике, геофизике, гидроакустике, медицинской томографии, электронной микроскопии и др. Прямое конечно-элементное или конечно-разностное (МКЭ/МКР) моделирование процессов распространения и дифракции бегущих волн в протяженных структурах с локальными неоднородностями сопряжено с большими вычислительными затратами, связанными с необходимостью сеточной аппроксимации больших областей, а также с проблемами строгого учета условий излучения на бесконечность.

Для решения проблем учета условий излучения на бесконечности в пакетах МКЭ вводятся специальные поглощающие граничные условия (ПГУ). Одним из наиболее эффективных способов введения ПГУ является построение специальных примыкающих поглощающих слоев, называемых идеально согласованными слоями (perfectly matched layer — PML). Понятие идеально согласованного слоя было предложено Ж. Беренже [1] в приложении к уравнению Максвелла, а позже формулировка PML была перенесена и на другие волновые уравнения.

При моделировании распространения бегущих волн в протяженных областях использование МКЭ приводит к значительным вычислительным затратам, связанным с их сеточной аппроксимацией, требующей большого количества конечных элементов. С другой стороны, для протяженных участков волновода, не содержащих препятствий, нет принципиальной необходимости в сеточной аппроксимации,

так как для них имеется аналитическое представление решения в виде бегущих и экспоненциально затухающих волн (нормальных мод с вещественными и комплексными волновыми числами). Одним из естественных подходов к преодолению указанных трудностей является сопряжение явного аналитического представления волнового поля во внешней однородной среде с численным решением для ограниченной области, содержащей препятствия [2]. При этом для получения решения в локальной внутренней области представляется заманчивым использовать стандартные МКЭ или МКР пакеты с широким диапазоном применимости в отношении размера, формы и неоднородности, моделируемых объектов.

В настоящей работе предлагается численно-аналитическая схема, основанная на получении с помощью стандартного конечно-элементного пакета набора численных решений в локальной области с определенными граничными условиями, которые играют затем роль базиса для искомого решения в этой области. Во внешней полубесконечной области используется аналитическое представление решения в виде разложения по нормальным модам. Коэффициенты разложения определяются из условий сшивания решений, полученных во внутренней и внешней областях. Данный подход реализован в среде Fortran — Comsol — Matlab. Его эффективность иллюстрируется примерами сопоставления с полуаналитическими решениями для задач дифракции на горизонтальных препятствиях, которые сводятся к интегральному уравнению Винера—Хопфа с последующей дискретизацией по методу Галеркина. Проводится также сопоставление с МКЭ решениями для ограниченных областей с поглощающими граничными условиями на искусственно введенных боковых торцах, показывающее существенное снижение вычислительных затрат и повышение точности численного решения. Кроме того, в рамках данной схемы корректно учитываются условия излучения на бесконечность, а через найденные коэффициенты разложения решения во внешней области по нормальным модам естественным образом определяются коэффициенты отражения и прохождения бегущих волн для препятствий произвольного вида.

## 2. Математическая модель.

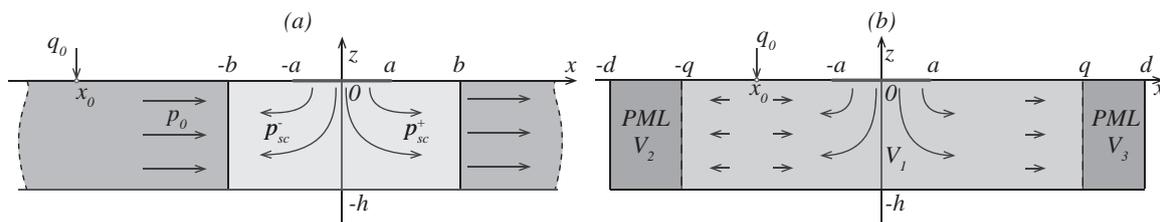


Рисунок 1 – Геометрия задачи для гибридного подхода (а) и для МКЭ с идеально согласованными слоями (б).

В настоящее время предлагаемая численно-аналитическая схема реализована как для скалярного волнового уравнения (акустическая среда, оптика, электромагнитные колебания), так и в векторном случае (упругий слой). В данной статье общая схема дается на примере акустического волновода с горизонтальным препятствием или, что эквивалентно задаче об антиплоских колебаниях (распространение SH волн).

Бегущие волны в акустическом волноводе толщины  $h$  возбуждаются точечной гармонической нагрузкой  $q_0$ , расположенной в точке  $x_0$ . На нижнюю границу  $z = -h$   $-\infty < x < \infty$  накладывается условие равенства нулю давления  $p$ , на верхнюю границу  $z = 0$   $-\infty < x < \infty$  — условие равенства нулю производной по нормали к поверхности слоя. Препятствие моделируется условием  $p = 0$ , заданным на отрезке  $x \in [-a, a]$  поверхности  $z = 0$  (рисунок 1 (а)).

$$\Delta p + \kappa^2 p = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z}|_{z=0} = q_0(x) = p_0 \delta(x - x_0), & |x| > a, \\ p|_{z=0} = 0, & |x| \leq a, \\ p|_{z=-h} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\kappa = \omega/c$ ,  $\omega$  — круговая частота,  $c$  — скорость звука,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. В силу линейности краевой задачи множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и далее опущен.

Решение сформулированной краевой задачи (1) можно представить в виде суммы двух полей: поля источника  $p_0$  и рассеянного волнового поля  $p_{sc}$ , которое представлено в виде суммы мод с неизвестными коэффициентами  $c_n^\pm$ :

$$p(x, z) = p_0(x, z) + p_{sc}(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ a_n(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & x > a, \\ p_0(x, z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- a_n(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & x < a, \end{cases} \quad (2)$$

$$p_0(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_0 a_n(z) e^{\pm i\zeta_n(x-x_0)}, \quad a_n(z) = \frac{i}{\zeta_n h} \cos(b_n z), \quad b_n = \frac{1}{h} \left( -\frac{\pi}{2} + \pi n \right),$$

где  $a_n(z)$  — собственные формы нормальных мод,  $\zeta_n = \sqrt{\kappa^2 - b_n^2}$  — волновые числа. Наибольший вклад в сумму (2) вносят слагаемые с вещественными волновыми числами  $\zeta_n$ , слагаемые с комплексными  $\zeta_n$  — экспоненциально убывают с увеличением расстояния от препятствия. Исходя из экспоненциального затухания членов ряда (2), его можно ограничить конечным числом слагаемых  $N$ , обеспечивая при этом требуемую точность для всех  $x$ , расположенных на расстоянии большем некоторого порогового значения  $b > a$  от начала координат (рисунок 1 (а)). Внутри области  $|x| < b$  решение ищется в виде разложения с таким же числом базисных функций  $2N + 1$ , как и членов усеченного ряда (2), и с теми же неизвестными коэффициентами:

$$p_F(x, z) = p_{F,0}(x, z) + \sum_{n=1}^N [c_n^+ p_{F,n}^+(x, z) + c_n^- p_{F,n}^-(x, z)]. \quad (3)$$

В качестве базисных функций  $p_{F,0}(x, z)$  и  $p_{F,n}^\pm(x, z)$  берутся конечно-элементные решения задач с граничными условиями, автоматически обеспечивающими непрерывность  $p(x, z)$  на линиях стыковки  $x = \pm b$  разложений (2) и (3) в прямоугольной области  $D = \{(x, z) | x \in [-b, b], z \in [-h, 0]\}$  (рисунок 1 (а)). На горизонтальных границах условия для всех трех случаев остаются неизменными и совпадают с условиями краевой задачи (1). На вертикальных границах условия принимают вид

$$\begin{aligned} p_{F,0}(-b, z) &= p_0(b, z), & p_{F,n}^-(-b, z) &= a_n(b, z) e^{i\zeta_n(b-a)}, & p_{F,n}^+(-b, z) &= 0, \\ p_{F,0}(b, z) &= 0, & p_{F,n}^-(b, z) &= 0, & p_{F,n}^+(b, z) &= a_n(b, z) e^{i\zeta_n(b-a)}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение вида (3) совпадает с (2) на вертикальных границах  $x = \pm b$ . Для определения неизвестных коэффициентов  $c_n^\pm$  используется условие непрерывности производной по  $x$ , которое приводит к следующим равенствам на вертикальных границах  $x = \pm b$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N c_n^+ \frac{\partial p_{F,n}^+(-b,z)}{\partial x} + c_n^- \left( \frac{\partial p_{F,n}^-(-b,z)}{\partial x} + i\zeta_n a_n(z) e^{i\zeta_n(b-a)} \right) &= \frac{\partial p_0(-b,z)}{\partial x} - \frac{\partial p_{F,0}(-b,z)}{\partial x}, \\ \sum_{n=1}^N c_n^+ \left( \frac{\partial p_{F,n}^+(-b,z)}{\partial x} - i\zeta_n a_n(z) e^{i\zeta_n(b-a)} \right) + c_n^- \frac{\partial p_{F,n}^-(-b,z)}{\partial x} &= -\frac{\partial p_{F,0}(-b,z)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Скалярно умножая уравнения (4) на  $\cos(b_m z)$ ,  $m = 1, \dots, N$ , приходим к системе  $2N$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $c_n^\pm$ . Число  $N$  определяется требуемой точностью и величиной  $b$ . В силу экспоненциального затухания слагаемых с комплексными волновыми числами, обычно достаточно удерживать все моды с вещественными  $\zeta_n$  и пару мод с комплексными. Решив данную систему, получаем локальное конечно-элементное решение вида (3) и глобальное аналитическое решение вида (2).

### 3. Численные результаты.

Для проверки правильности работы гибридной схемы сопоставлялись коэффициенты прохождения и отражения бегущих волн, полученные в рамках гибридной схемы, со значениями, полученными на основе решения интегрального уравнения Винера-Хопфа (полуаналитическая модель), а также с результатами МКЭ расчетов с использованием РМЛ на торцах выделенной ограниченной области  $|x| < d$  (рисунок 1 (b)).

Полуаналитическое решение строится путем разбиения исходной краевой задачи (1) на две, одна из которых описывает волновое поле от источника, другая рассеянное волновое от препятствия. Исходя из условия равенства нулю давления при  $x \in [-a; a]$  строится интегральное уравнение Винера-Хопфа относительно неизвестной нормальной производной давления в этой области с его последующим решением по методу Галеркина.

Осредненное за период колебаний  $T = 2\pi/\omega$  количество энергии  $E$ , переносимое волнами в поле гармонических колебаний  $pe^{-i\omega t}$  через поперечное сечение слоя, определяется через интегрирования нормальной компоненты вектор плотности энергии Умова. Проведены расчеты энергии, переносимой волнами влево от источника  $E^-$ , вправо  $E^+$  и общей энергии  $E_0$ , поступающей от источника. Коэффициенты прохождения-отражения, определяемые как  $\kappa^+ = E^+/E_0$ ,  $\kappa^- = E^-/E_0$ . На рисунках 2 (a) и 2 (b) приводятся значения коэффициентов прохождения и отражения  $\kappa$  для всех трех моделей в зависимости от круговой частоты  $\omega$ . При численной реализации использовались следующие значения безразмерных параметров: толщина слоя  $h = 1$ , скорость звука  $c = 1$ , нагрузка приложена в точке  $x_0 = -5$ , полуширина неоднородности  $a = 1$ , полуширина волновода для гибридной схемы —  $b = 4$ , для МКЭ с поглощающими граничными условиями  $q = 8$ .

В данном примере наблюдается практически полное совпадение результатов всех трех методов в одномодовом и двумодовом диапазоне (рисунок 2 (a)). В целом же гибридная схема более точна по сравнению с МКЭ-РМЛ, что связано в первую очередь с меньшим числом КЭ, требуемых для достижения той же точ-

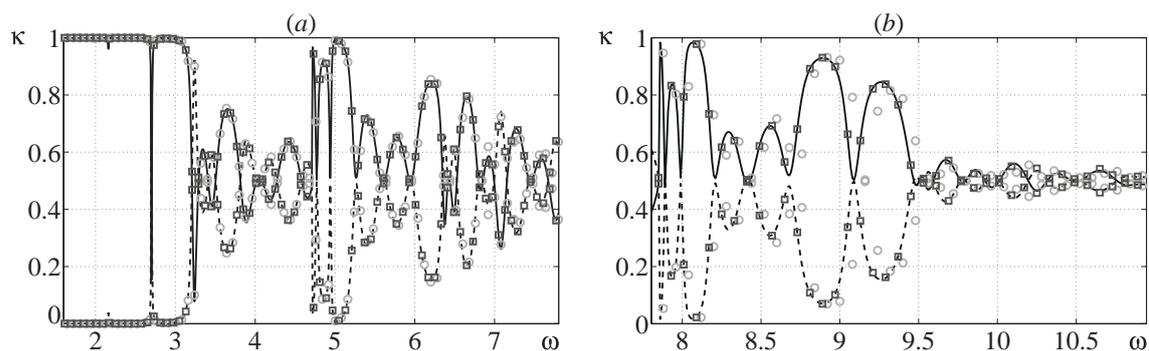


Рисунок 2 – Коэффициенты отражения (сплошная линия) и прохождения (пунктирная линия) для аналитического решения в одномодовом, двумодовом (а) и трехмодовом (b) диапазоне. Круглые и квадратные маркеры — значения коэффициентов для МКЭ с PML и гибридной схемы соответственно.

ности. В трехмодовом диапазоне проявляется некоторое расхождение МКЭ с гибридным и полуаналитическим решением, т. к. уменьшается длина волны и зафиксированного числа КЭ становится недостаточно для аппроксимации волнового поля (рисунок 2 (b)).

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.189.2014К) и РФФИ (проект № 16-41-230769).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Berenger J.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *Journal of Computational Physics*. 1994 № 114 (2). P. 185–200.
- [2] *Shen Y., Giurgiutiu V.* Combined analytical FEM approach for efficient simulation of Lamb wave damage detection // *Ultrasonics*. 2016. № 88. P. 1–15.

**Glushkov E. V., Glushkova N. V., Evdokimov A. A.** *Numerical-analytical scheme for the simulation of guided wave propagation in structures with local inhomogeneities.* A hybrid numerical-analytical scheme for acoustic waveguides with local obstacles is proposed. As a part of this scheme, a set of numerical solutions is built for interior area with irregularity using standard finite element packages. In outer semi-infinite area analytical solution is constructed as a sum of normal modes. The unknown expansion coefficients are obtained from the continuity conditions at the docking boundaries.

# АЛГОРИТМ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВИХРЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Говорухин В. Н.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В докладе представлен алгоритм анализа динамики вихревых конфигураций на плоскости, основанный на бессеточных подходах к решению уравнений движения невязкой несжимаемой жидкости. Каждый временной шаг алгоритма включает: расчет нестационарных вихревых течений жидкости; анализ структуры конфигурации с помощью эвристических критериев; визуализация распределения маркированных частиц и завихренности; построение линий тока частиц; вычисление поля локальных показателей Ляпунова.

Для изучения многих сложных течений жидкости необходимо ясное понимание механизмов взаимодействия вихрей, возможность оценки качественных и количественных характеристик вихревых конфигураций, что требует разработки соответствующих численных методов. Возникает необходимость разработки вычислительного инструмента для анализа конфигураций жидкости, позволяющего идентифицировать качественное изменение структуры течений во времени, характеристик массопереноса. В докладе на основе метода вихрей в ячейках представлен возможный алгоритм изучения динамики, структуры и взаимодействия плоских вихревых конфигураций жидкости.

**1. Математическая постановка задачи.** Рассматривается математическая модель динамики невязкой вращающейся жидкости в терминах функции тока  $\psi$  и потенциальной завихренности  $\omega$  [1]

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad (1)$$

$$\omega = -\Delta\psi + \Lambda^2\psi - \frac{1}{2}\gamma r^2. \quad (2)$$

Здесь нижний символ означает дифференцирование по переменной. Второе уравнение связывает сохраняемую величину  $\omega$  и функцию тока  $\psi$ . Предполагается, что параметр Кориолиса вблизи полюса представлен в виде  $f(r) = f_0 - \frac{1}{2}\gamma r^2 + O(r^4)$ , где  $\gamma = const$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — полярный радиус,  $\Lambda^2 = f_0^2/gh = const$ ,  $g$  — гравитационное ускорение,  $h$  — толщина слоя жидкости. При  $\Lambda = \gamma = 0$  получаем уравнения Эйлера динамики идеальной несжимаемой жидкости.

Скорость жидкости  $\mathbf{v} = (v^{(x)}, v^{(y)})$  связано с функцией тока соотношениями

$$v^{(x)} = -\psi_y, \quad v^{(y)} = \psi_x \quad (3)$$

В докладе рассматривается квадратная область течения

$$A = \left\{ (x, y) : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2} \right\}, \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\psi|_{\partial A} = 0. \quad (5)$$

Для завихренности задано условие в начальный момент времени:

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y) \quad (6)$$

Предполагается, что начальная вихревая конфигурация

$$\omega_0(x, y) = \sum_{k=1}^K \omega^{(k)}(x, y) \quad (7)$$

состоит из набора  $K$  вихрей, каждый из которых имеет распределение завихренности  $\omega_0^{(k)}(x, y)$  и заполняет односвязную область  $S^{(k)}$ . Функции  $\omega_0^{(k)}(x, y)$  принимают значения одного знака внутри  $S^{(k)}$ , и тождественно равны нулю вне  $S^{(k)}$ . Области  $S^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, K$  не пересекаются. При росте  $t > 0$  вихри перемещаются и деформируются (сохраняя площади  $S^{(k)}$ ), изменяются функции распределения завихренности  $\omega^{(k)}(x, y)$ , но значения завихренности сохраняются в частицах, как и суммарная завихренность всей вихревой конфигурации, что следует из (1).

**2. Описание алгоритма.** Для решения нестационарной задачи (1)–(2) используется вариант метода вихрей в ячейках, который для замкнутых и проточных областях подробно описан в статьях [2, 3], а для периодических граничных условий предложен в докладе Филимоновой А. и Говорухина В. в данном сборнике. С его помощью рассчитывается динамика (траектории) жидких частиц, причем в начальный момент времени частицы могут быть расположены как в узлах регулярной сетки, так и случайно распределены. В каждый момент времени строится кусочная аппроксимация поля завихренности  $\omega(x, y)$ , аппроксимация функции тока  $\psi(x, y) \approx \sum_{i=1}^m \psi_i(t) \phi_i(x, y)$  в виде отрезка ряда Фурье. Здесь  $\psi_i(t)$  — коэффициенты разложения, которые на каждом шаге по времени находятся как решение уравнения (1) методом Галеркина, а  $\phi_i(x, y)$  — базисные функции. Это позволяет эффективно реализовать все остальные стадии алгоритма, кратко описанные в этом разделе.

**2.1. Эвристический анализ структуры вихревой конфигурации.** Для эвристической оценки пространственных структур часто эффективным оказывается анализ модельных систем, например, системы точечных вихрей во многих случаях адекватно описывают динамику распределенных вихрей [4].

Каждому распределенному вихрю  $\{\omega^{(k)}(x, y), S^{(k)}\}$  можно поставить в соответствие точечный вихрь с интенсивностью  $\Omega^{(k)} = \int_{S^{(k)}} \omega^{(k)}(x, y) dS$  расположенный в точке с координатами (центр завихренности)

$$x^{(k)} = \frac{1}{\Omega^{(k)}} \int_{S^{(k)}} x \omega^{(k)}(x, y) dS, \quad y^{(k)} = \frac{1}{\Omega^{(k)}} \int_{S^{(k)}} y \omega^{(k)}(x, y) dS. \quad (8)$$

Для описания структуры распределенной вихревой конфигурации будем использовать  $(x^{(k)}, y^{(k)}, \Omega^{(k)})$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Вихревую конфигурацию будем считать эвристически структурно устойчивой, если топологическая структура соответствующей системы центров завихренности вида (8) сохраняется на всех временах расчета  $t \in [0, T]$ . Основываясь на известных теоретических и экспериментальных закономерностях вихревой динамики [4, 5], для эвристического анализа структуры вихревой конфигурации во времени будем использовать две величины: расстояние

$d_{l,m}$  между центрами завихренности вихрей с номерами  $l$  и  $m$ , и знаки ориентации троек вихрей  $\theta_{k,l,m}$  вида

$$\theta_{1,2,3} = \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} & 1 \\ x^{(2)} & y^{(2)} & 1 \\ x^{(3)} & y^{(3)} & 1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

Выполнение в некоторый момент времени условия  $d_{l,m} \ll D_c$  или изменение знака  $\theta_{k,l,m}$  будем интерпретировать как качественное изменение вихревой структуры.

Схема метода вихрей в ячейках позволяет реализовать эвристический анализ структуры вихревой конфигурации. В начальный момент времени каждому распределенному вихрю поставим в соответствие множество  $N^{(k)}$ , содержащее номера  $j$  частиц  $x_j$ , принадлежащих области  $S^{(k)}$ . Положение центров завихренности (8) на каждом временном шаге оцениваются выражениями

$$x^{(k)} \approx \bar{x}^{(k)} = \frac{\sum_{j \in N^{(k)}} x_j \omega_j}{\sum_{j \in N^{(k)}} \omega_j}, \quad y^{(k)} \approx \bar{y}^{(k)} = \frac{\sum_{j \in N^{(k)}} y_j \omega_j}{\sum_{j \in N^{(k)}} \omega_j} \quad (10)$$

Предполагается, что  $N$  выбрано так, что каждое из множеств  $N^{(k)}$  содержит количество частиц достаточное для оценки (10).

**2.2. Локальные показатели Ляпунова.** При анализе течений жидкости, когерентных структур, рассматриваются показатели на конечных промежутках времени, т.е. локальные показатели Ляпунова (ЛПЛ). Величина локальных показателей Ляпунова зависит от начальных точек траекторий, времени интегрирования, и характеризуют локальные свойства потока. При реализации метода анализа вихревых структур использовался вариант алгоритма вычисления ЛПЛ, описанный в статье [6]. Для реализации алгоритма часть из  $N$  частиц должны располагаться в узлах равномерной сетки в начальный момент времени. Применение метода вихрей в ячейках с таким начальными положением частиц позволяет аппроксимировать поле ЛПЛ для всех  $T$ . Построенные поля ЛПЛ изображаются ниже на рисунке, где чем темнее оттенок серого, тем больше ЛПЛ, чему соответствует большее перемешивание начального распределения частиц.

**2.3. Маркированные частицы и фазовый портрет.** Используя полученные множества  $N^{(k)}$  поставим в соответствие частицам каждого вихря свой 'цвет', что позволит отслеживать их перемешивание с течением времени. Имея, в результате применения метода частиц, непрерывную во всей области течения аппроксимацию функции тока отрезком ряда Фурье, без значительных усилий можно построить в каждый момент времени  $t$  фазовый портрет, порождаемый  $\psi(x, y)$ . В реализованном алгоритме для этого используется анализ системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^m \psi_i(t) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}, \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau} = - \sum_{i=1}^m \psi_i(t) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}$$

**3. Пример использования алгоритма.** Изучим динамику вихревой конфигурации в начальный момент времени состоящей из двухвихревых пятен с распре-

делением завихренности

$$\omega_I(x_c, y_c) = \begin{cases} K e^{-5((x-x_c)^2+(y-y_c)^2)}, & \sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2} \leq \frac{9}{10} \\ 0, & \sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2} > \frac{9}{10} \end{cases} \quad (11)$$

Коэффициент  $K$  вычислялся так, чтобы суммарная интенсивность вихревого пятна равнялась единице, для (11)  $K \approx 1.6195 \dots$  В представленной ниже расчетах (6) состоит из двух вихревых пятен вида (11) и расположенных симметрично относительно центра координат:

$$\omega_0(x, y) = \omega_I\left(-1 - \frac{d}{2}, 0\right) + \omega_I\left(1 + \frac{d}{2}, 0\right) \quad (12)$$

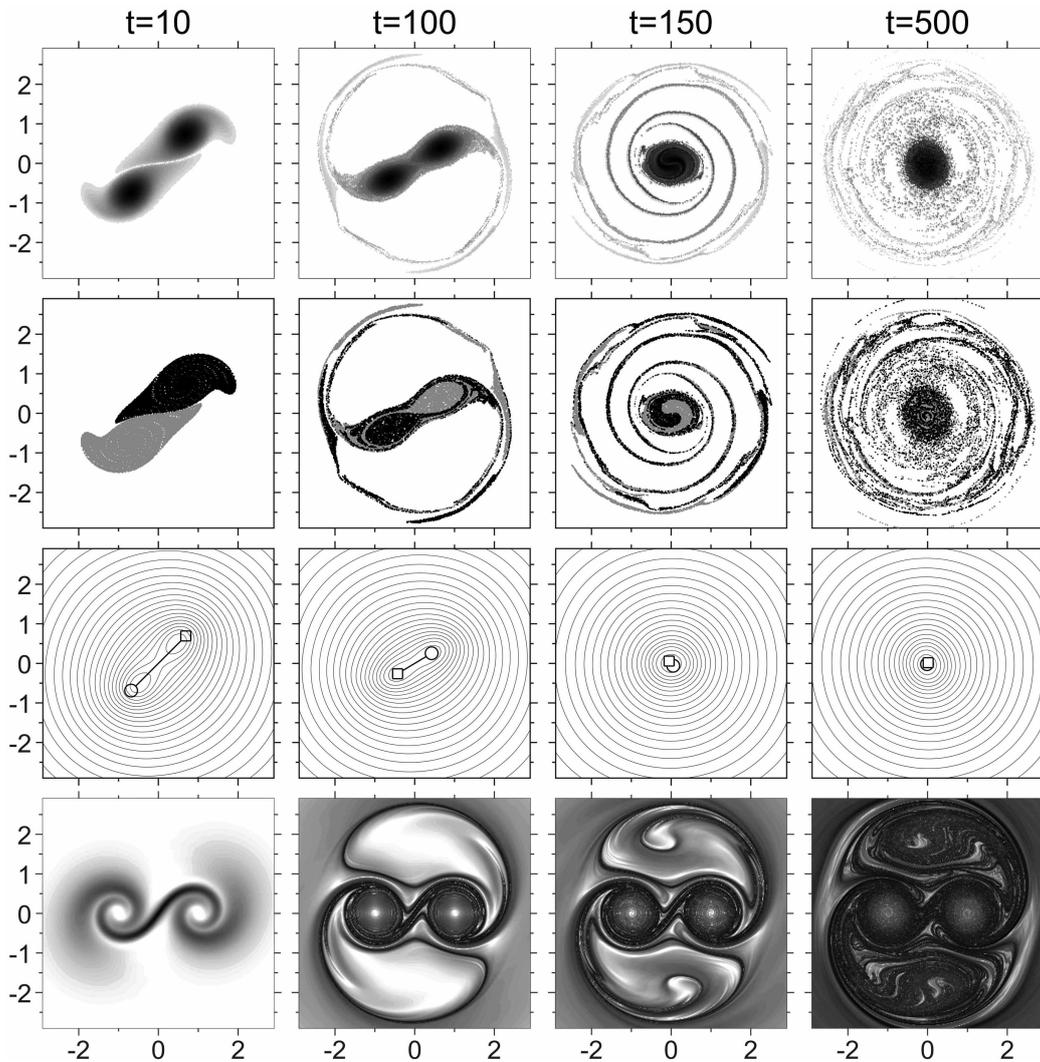


Рисунок 1 – Динамика взаимодействия двух вихрей (12) при  $\gamma = 0$ . На рисунке для различных моментов времени  $t$  изображены (сверху вниз): распределение завихренности, распределение маркированных частиц, линии тока частиц и центры завихренности вихрей, распределение локальных показателей Ляпунова.

При больших  $d$  пятна вращаются вокруг центра завихренности конфигурации, причем, чем  $d$  больше, тем меньше скорость вращения. Форма вихревых пятен деформируется, начинается процесс филаментации. При уменьшении  $d$  скорость вращения конфигурации растет, а вихри начинают обмениваться филаментами. При  $d$  меньше некоторого критического значения вихревые пятна начинают перемешиваться, см. рис. 1. Расстояние между ними сокращается, т. е.  $d_{1,2} \rightarrow 0$  при росте  $t$ , и при  $t \approx 120$  выполняется условие  $d_{1,2} < D_c = 0.1$ , что сигнализирует о качественном изменении вихревой структуры. Распределения ЛПЛ и маркированных частиц демонстрирует тот факт, что на начальных этапах развития вихревой конфигурации наиболее активный перенос происходит в окрестности ядер двух начальных вихрей, см. рис. 1,  $t = 10$ . При  $t = 100$ , сохраняются две не перемешанные зоны, ограниченные узкими зонами быстрого перемешивания. После начала процессов активного взаимодействия вихревых пятен при  $t > 100$  области сильного перемешивания растут, и в конце расчета большая часть начальной конфигурации практически полностью перемешана, см. рис. 1,  $t = 150, 500$ .

Работа поддержана грантом РФФИ, код проекта 14-01-00470.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Педлоски Д. Геофизическая гидродинамика. Т.1,2. М:Мир, 1984.
- [2] Говорухин В. Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 6. С. 1133–1147.
- [3] Govorukhin V. N. A Meshfree Method for the Analysis of Planar Flows of Inviscid Fluids // Meshfree Methods for Partial Differential Equations VI / edited by M. Griebel, M. A. Schweitzer. Springer Berlin Heidelberg, 2013. Vol. 89 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering. P. 171–180.
- [4] Ламб Г. Гидродинамика. М., Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1947.
- [5] Dritschel D. G. A general theory for two-dimensional vortex interactions // Journal of Fluid Mechanics. 1995. Vol. 293. P. 269–303.
- [6] Shadden S., Lekien F., Marsden J. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2005. Vol. 212, № 3-4. P. 271–304.

**Govorukhin V. N.** *The algorithm for dynamics analysis of vortex configurations*. The algorithm for dynamics analysis of vortex configurations on the plane based on the meshfree approaches to the solution of the equations of the movement of inviscid incompressible fluid is presented. Each time step of an algorithm includes: calculation of non-steady vortex flow of fluid; the analysis of structure of a configuration by means of heuristic criteria; a visualization of distribution of the marked particles and a vorticity; phase portrait of velocity field; a calculation of the field of local Lyapunov exponents.

# ПРОХОЖДЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНЫЕ ВОЛНОВОДЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИ И СТОХАСТИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПЛАНАРНЫМИ ОТСЛОЕНИЯМИ

Голуб М. В., Дорошенко О. В.

*Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар*

Приводится модификация метода граничных интегральных уравнений для описания прохождения упругих волн через многослойные структуры с периодическим распределением отслоений. Строится решение для случая одиночной трещины, которое используется при моделировании стохастического распределения дефектов. Обсуждаются результаты сравнения стохастического и периодического распределения с гексагональной расстановкой круговых микротрещин.

## 1. Введение.

В ходе производства и/или последующей эксплуатации многослойных материалов возможно возникновение дефектов, первой стадией которых являются отслоения, причем наиболее вероятным местом их появлением являются интерфейсы. Также со временем возможно ослабление адгезии слоев, что ведет к более быстрому переходу от микродефектов к существенным повреждениям [1]. Для определения повреждений различных типов могут быть использованы ультразвуковые методы. В работе рассматриваются колебания многослойных упругих волноводов с распределением отслоений. С использованием метода граничных интегральных уравнений решение может быть найдено численно для отслоений произвольного вида [2] и в некоторых случаях полуаналитически, например, для круговой трещины в области низких частот. В качестве граничных условий используются условия пружинного типа, которые являются более общими, чем условия на раскрытой трещине. В работе приводятся две модели: с периодическим и стохастическим распределением отслоений на интерфейсе. Для косоугольной расстановки трещин произвольной формы возможно численное решение с использованием вариационно-разностного подхода [2]. Найденное ранее полуаналитическое решение для стохастически распределенных круговых микроповреждений [3] сравнивается с решением для гексагонального распределения круговых трещин [4].

## 2. Постановка задачи.

Рассматривается многослойный упругий волновод  $V = \bigcup V_l$ . Каждый из  $N_l$  слоёв  $V_l = \{|x_1|, |x_2| < \infty, z_{l-1} \leq x_3 \leq z_l\}$  с границами  $S_{l-1} = \{x_3 = z_{l-1}\}$  и  $S_l = \{x_3 = z_l\}$  предполагается упругим с заданными постоянными упругими константами Ламе  $\lambda_l$  и  $\mu_l$  и плотностью материала  $\rho_l$ . Толщины всего многослойного пакета и отдельных слоёв обозначается  $H$  и  $h_l$  соответственно. Слоистый материал расположен между полупространствами, т. е.  $z_0 = -\infty$  и  $z_{N_l} = \infty$ .

На одной из внутренних границ  $S_l$  расположено периодическое или стохастическое распределение отслоений  $\Omega_j$  произвольной формы. Декартова система координат  $\{x_1, x_2, x_3\}$  выбирается таким образом, чтобы поврежденный планарный

интерфейс лежал в плоскости  $x_1 O x_2$ . Для описания отслоения в области  $\Omega_j$  задаются граничные условия пружинного типа, связывающие вектор  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ , составленный из нормальных и касательных напряжений, со скачками перемещений на отслоениях  $[\mathbf{u}](\mathbf{x})$ :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{u}](\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\kappa}$  — трёхмерная диагональная матрица жёсткости. При небольшой отклейке диагональные элементы  $\kappa_{ii}$  имеют большие значения, а при значениях жёсткости  $\kappa_{ii} = 0$  рассматривается раскрытая трещина с нулевыми напряжениями.

Учёт влияния неидеального контакта или ослабления адгезии межслойных интерфейсов также возможен путём использования граничных условий пружинного типа в виде

$$[\boldsymbol{\tau}](\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varsigma}_l \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}](\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_l \cap \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \right). \quad (2)$$

Форма записи в уравнении (2) отлична от (1) в связи с тем, что практический интерес представляют лишь те ситуации, когда  $\kappa_{ii} < \infty$  и  $\boldsymbol{\varsigma} \ll 1$  (при  $\boldsymbol{\varsigma} = 0$  имеет непрерывность перемещений, что означает идеальный контакт между слоями).

В качестве падающего поля рассматривается плоская волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$ , падающая под углами  $\theta_1^{\text{in}}, \theta_2^{\text{in}}$  к интерфейсной плоскости  $S_l$ .

### 3. Интегральное уравнение для одиночного отслоения.

Поскольку решение для множественных отслоений в многослойном пакете, может быть построено с частичным использованием схемы решения в случае одиночного отслоения, то сначала описывается схема вывода и решения интегрального уравнения для одиночного отслоения. Общее решение представляет собой суперпозицию падающего на отслоение волнового поля  $\mathbf{u}^{\text{in}}$  и рассеянного дефектами волнового поля  $\mathbf{u}^{\text{sc}}$ . Это даёт возможность сначала строить  $\mathbf{u}^{\text{in}}$ , а затем определять рассеянное поле таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Подстановка  $\mathbf{u}$  в условия (1) с учётом (2) приводит к граничным условиям

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\kappa}_1 \cdot [\mathbf{u}^{\text{sc}}](\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\varsigma} \cdot \boldsymbol{\kappa}_1 - I) \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (3)$$

Для построения рассеянного поля многослойный волновод условно разделяется на два волновода плоскостью  $x_3 = 0$ , на которой лежат отслоения и предполагаются неизвестными напряжения  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ . Таким образом, для вектора перемещений в каждом из волноводов  $x_3 \leq 0$  может быть сформировано известное интегральное представление в терминах Фурье-символов матриц Грина  $\mathbf{N}_1^{\pm}$  и Фурье-символа  $\mathbf{Q}$  неизвестного вектора напряжений  $\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}$  [5]. Нетрудно выразить связь между Фурье-символами напряжений  $\mathbf{q}_1(x_1, x_2)$  и скачком  $\Delta \mathbf{u}(x_1, x_2)$  на отслоении  $\Omega_1$  в виде соотношения

$$\mathbf{Q}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Delta \mathbf{U}_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) = (\mathbf{N}_1^+(\alpha_1, \alpha_2, 0) - \mathbf{N}_1^-(\alpha_1, \alpha_2, 0))^{-1}.$$

Подстановка этих выражений в граничные условия на отслоении (3) приводит к интегральному уравнению, которое записывается в Фурье-образах

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Delta \mathbf{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$- \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) \cdot \Delta \mathbf{u}_1(x_1, x_2) = (\boldsymbol{\varsigma} \cdot \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (4)$$

#### 4. Периодическая система интерфейсных отслоений.

Пусть теперь поврежденный интерфейс представляет собой двоякопериодическую систему отслоений  $\Omega_{j_1 j_2}$ , которые располагаются в узлах косоугольной решетки с направляющими векторами  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$  и углом  $\vartheta$  между ними, см. рисунок 1. Плоскость можно разбить на ячейки

$$G_{j_1 j_2} = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} = \mathbf{x} + j_1 \mathbf{g}_1 + j_2 \mathbf{g}_2\}, \mathbf{x} \in G_{00},$$

$$G_{00} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{g}_1 + \beta_2 \mathbf{g}_2\}, \beta_i \in [-1/2, 1/2].$$

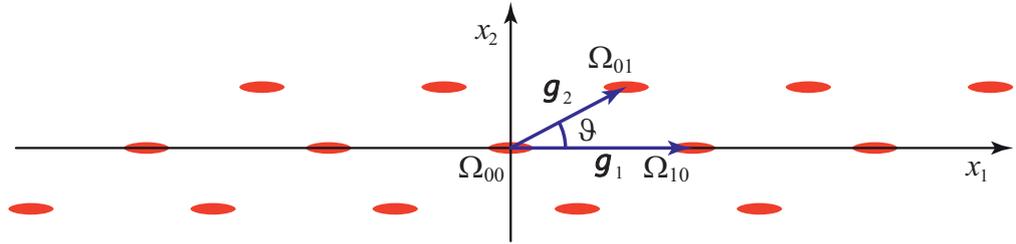
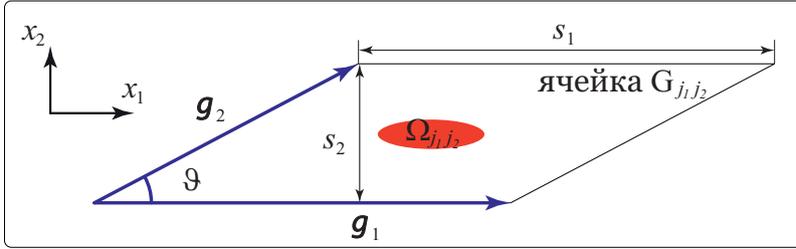


Рисунок 1 – Интерфейс с периодической системой трещин

Поле перемещений в такой периодической многослойной структуре согласно теории Флоке зависит от координат следующим образом:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}(x_1 - s_1 j_1 - s_2 j_2, x_2 - s_2 \text{tg} \vartheta j_2, x_3) e^{i(\bar{k}_1 j_1 + \bar{k}_2 j_2)}. \quad (5)$$

Здесь для упрощения записи введены расстояния  $s_1 = |\mathbf{g}_1|$ ,  $s_2 = |\mathbf{g}_2| \cos \vartheta$  и безразмерные величины  $\bar{k}_i = k_{0i} s_i$ . Для функции скачка смещений на отслоениях также справедливо соотношение (5), поэтому можно выразить скачок смещений  $\Delta \mathbf{u}_{j_1 j_2}$  на  $j_1 j_2$ -ом отслоении через  $\Delta \mathbf{u}_{00}$ :

$$\Delta \mathbf{u}_{j_1 j_2}(x_1, x_2) = \Delta \mathbf{u}_{00}(x_1 - s_1 j_1 - s_2 j_2, x_2 - s_2 \text{tg} \vartheta j_2) e^{i(\bar{k}_1 j_1 + \bar{k}_2 j_2)}.$$

Для решения этой задачи преобразуется интегральное уравнение для одиночного отслоения (4). После подстановки представлений для полного скачка перемещений

$$\Delta \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \Delta \mathbf{U}_{j_1 j_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \Delta \mathbf{U}_{00} e^{i(s_1 j_1 + s_2 j_2) \alpha_1} e^{i s_2 \text{tg} \vartheta j_2 \alpha_2} e^{i(\bar{k}_1 j_1 + \bar{k}_2 j_2)}$$

оно принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Delta \mathbf{U}_{00}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i(E_{j_1 j_2}(\alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) \cdot \Delta \mathbf{u}_{00}(x_1, x_2) = (\boldsymbol{\varsigma} \cdot \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (6) \\ & E_{j_1 j_2}(\alpha_1, \alpha_2) = (s_1 j_1 + s_2 j_2) \alpha_1 + s_2 \text{tg} \vartheta j_2 \alpha_2 + \bar{k}_1 j_1 + \bar{k}_2 j_2. \end{aligned}$$

Решение методом Галёркина интегрального уравнения (6) относительно скачка

$$\Delta \mathbf{u}_{00}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n p_n(x_1, x_2),$$

на трещине в ячейке  $G_{00}$  с центром в начале координат приводит к СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{A}_{k'/k}^L + \mathbf{A}_{k'/k}^{\kappa}) \cdot \mathbf{c}_k = \mathbf{f}_{k'}, \quad k' = 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k'/k}^L &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) P_k(\alpha_1, \alpha_2) P_{k'}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*) e^{i(E_{j_1 j_2}(\alpha_1, \alpha_2))} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ \mathbf{A}_{k'/k}^{\kappa} &= - \int_{\Omega_{00}} \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) p_k(x_1, x_2) p_{k'}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ \mathbf{f}_{k'} &= \int_{\Omega_{00}} (\boldsymbol{\varsigma} \cdot \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(x_1, x_2, 0) p_{k'}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Значения интегралов  $\mathbf{A}_{k'/k}^L$  с учётом фильтрующего свойства дельта-функции определяются выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k'/k}^L &= \frac{1}{s_1 s_2 \text{tg} \vartheta} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) P_k(\alpha_1, \alpha_2) P_{k'}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \Big|_{\substack{\alpha_1 = \alpha_1^{j_1 j_2} \\ \alpha_2 = \alpha_2^{j_1 j_2}}}, \\ \alpha_1^{j_1 j_2} &= \frac{2\pi j_1 - \bar{k}_1}{s_1}, \quad \alpha_2^{j_1 j_2} = \frac{2\pi j_2 - s_2 \alpha_1^{j_1 j_2} - \bar{k}_2}{s_2 \text{tg} \vartheta}, \end{aligned}$$

где при численных расчётах производится редукция. Для решения интегрального уравнения (7) возможно применение вариационно-разностного подхода, который предполагает использование осесимметричных базисных функций [2].

### 5. Сравнение стохастических и периодических систем отслоений.

Решение задачи о прохождении упругих волн через стохастически распределённый набор круговых отслоений было получено авторами в работе [3]. Найденное в явном виде решение позволяет выразить нормальные и тангенциальные пружинные жёсткости в явном виде и сравнить полученные выражения с гексагональным периодическим массивом круговых трещин радиуса  $R_1$  при расстоянии между центрами трещин  $R_u$ , см. подробнее в [4]. Можно отметить, что для одинаковых материалов пружинные жесткости отличаются только на множитель  $2\sqrt{3}/\pi = 1.103$ ,

то есть приблизительно на 10%. Для различных материалов в обеих работах [3, 4] добавляются множители, зависящие от упругих модулей материалов. Расхождение в этих множителях не превышает 0.02% и можно сделать вывод, что при  $R_1/R_u < 0.5$  расхождение в значениях коэффициентов пружинных жёсткостей составляет приблизительно 10%, что соответствует результатам, полученным ранее для полосовых трещин в статье [6]. Данное расхождение следует отнести к разным исходным предположениям относительно распределения интерфейсных дефектов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-51-53043 и 16-41-230352).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Sih G. C., Rice J. R.* The bending of plates of dissimilar materials with cracks // Journal of Applied Mechanics. 1964. Vol. 31. P. 477–482.
- [2] *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // Прикладная математика и механика. 1996. № 60. P. 282–289.
- [3] *Golub M. V., Doroshenko O. V., Boström A.* Effective spring boundary conditions for a damaged interface between dissimilar media in three-dimensional case // International Journal of Solids and Structures. 2013. Vol. 50(18). P. 2817–2828.
- [4] *Lekesiz H., Katsube N., Rokhlin S., Seghi R. R.* Effective spring boundary conditions for a damaged interface between dissimilar media in three-dimensional case // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 81. P. 141–150.
- [5] *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зимченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [6] *Golub M. V., Boström A.* Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves // Wave Motion. 2011. Vol. 48(2). P. 105–115.

**Golub M. V., Doroshenko O. V.** *Elastic wave propagation through a multilayered waveguide with periodic and stochastic distribution of planar delaminations*. Boundary integral equation method is used for simulation of elastic plane wave propagation through a multilayered waveguide with a periodic array of delaminations. The solution for a single crack is applied in order to describe stochastic distribution of damages. Comparison of stochastic distribution and periodic hexagonal array is given.

# ОБ АНАЛИЗЕ ДИСПЕРСИОННОГО МНОЖЕСТВА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОРИСТОУПРУГОГО СЛОЯ

Гусаков Д. В.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Разработан метод построения и анализа дисперсионного уравнения для пористоупругого [1] слоя при произвольных материальных характеристиках. Предложен способ полуаналитического исследования первых ветвей дисперсионного множества на основе проекционного метода.

## 1. Введение.

В последнее время все большую популярность приобретает изучение неоднородных материалов и сред сложной структуры, причем наличие неоднородности в структуре изучаемого материала требует особых подходов и методов решения. Как правило, такие задачи допускают построение решения для некоторого частного случая неоднородности, как, например, в работе [2] исследование проведено для кусочно-постоянной функции. Тем не менее существуют и более общие подходы к изучению деформирования тел при наличии неоднородности; так работа [3], посвященная исследованию распространения волн в упругом неоднородном цилиндрическом волноводе, содержит метод построения дисперсионного множества для произвольного вида неоднородности при помощи комбинации численных методов. Авторами показано, что вид неоднородности значительно влияет на структуру дисперсионного множества.

Настоящая работа посвящена исследованию дисперсионных характеристик неоднородного пористоупругого [1, 4] слоя. Разработан метод исследования спектральных задач при достаточно широком классе неоднородностей, включающих как непрерывные законы, характерные для функционально-градиентных материалов, так и кусочно-постоянные, характерные для слоистых структур. Аналогичный подход к рассмотрению переменных материальных характеристик был применен авторами ранее в задаче о вынужденных колебаниях пористоупругого слоя [5]. В качестве прикладных теорий, а также для проверки численных результатов, дисперсионное множество для рассматриваемой задачи было получено при помощи полуаналитического метода типа Бубнова–Галеркина.

## 2. Постановка задачи.

Рассмотрим бесконечный пористоупругий слой толщины  $H$ , закрепленный вдоль нижней грани. Материал слоя является трансверсально-изотропным, причем характеристики слоя считаются переменными по толщине. Слой находится в состоянии плоской деформации, соответственно введем в рассмотрение декартовы координаты на плоскости так, что ось  $x_1$  будет совпадать с нижней границей.

Исследуем задачу о свободных колебаниях слоя. Решение будем искать в виде:

$$U(x_1, x_3, t) = \tilde{U}(x_3)e^{i(\alpha x_1 - \omega t)}, \quad (1)$$

где  $U(x_1, x_3, t)$  есть вектор решений  $(u_1, u_3, \sigma_{13}, \sigma_{33}, p)$ . Соответственно  $u_1, u_3, \sigma_{13}, \sigma_{33}$  — перемещения и напряжения в упругом скелете,  $p$  — давление в поровой жидкости. Знак  $\sim$  в дальнейшем опустим.

Однородные граничные условия запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : \quad u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad p_{,3} = 0 \\ x_3 = H : \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad p = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

### 3. Основные уравнения.

Для исследуемой задачи воспользуемся  $(u, p)$  формулировкой уравнений теории Био [1]. Так как для реальных материалов значения функций и констант, входящих в такие уравнения, могут отличаться на несколько порядков [4], дополнительно к безразмерным параметрам и функциям приведенным в [5], введем следующие:

$$\sigma_{j3} = C_m t_j, u_j = H v_j, \alpha = H \zeta, p = P^* \bar{p}, \kappa^2 = \frac{\rho \omega^2 H^2}{C_m}, C_m = \max_{\xi \in [0,1]} C_{33} \quad (3)$$

Учитывая (1) и (3), запишем канонический вид уравнений для рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{\gamma_5} t_1 + i \zeta v_3, \\ v_3' &= \frac{1}{\gamma_4} (t_3 + i \zeta \gamma_7 v_1 + \beta_3 \bar{p}), \\ t_1' &= (\zeta^2 (\gamma_1 - \frac{\gamma_7^2}{\gamma_4}) - \kappa^2) v_1 + i \zeta \frac{\gamma_7}{\gamma_4} t_3 - (\frac{\gamma_7}{\gamma_4} \beta_3 - \beta_1) i \zeta \bar{p}, \\ t_3' &= i \zeta t_1 - \kappa^2 v_3, \\ s' &= (\zeta^2 \mu_1 - i \kappa (\delta + \frac{\eta_3}{\gamma_4} \beta_3)) \bar{p} - \kappa \zeta (\eta_1 - \frac{\eta_3}{\gamma_4} \gamma_7) v_1 - i \kappa \frac{\eta_3}{\gamma_4} t_3, \\ \bar{p}' &= \frac{s}{\mu_3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad s = 0 \\ \xi = 1 : \quad t_3 = 0, \quad t_1 = 0, \quad \bar{p} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Будем искать такие сочетания  $(\zeta, \kappa)$ , при которых однородная краевая задача (4)–(5) будет иметь нетривиальное решение. Пусть это множество описывается дисперсионным уравнением  $D(\zeta, \kappa) = 0$ .

Предварительный анализ уравнений задачи (4)–(5) позволяет заключить, что как само дисперсионное уравнение, так и его корни будут комплекснозначными. Современные вычислительные пакеты позволяют напрямую работать с комплекснозначными уравнениями, однако, результаты вычислительных экспериментов показали, что разделение вещественной и мнимой частей в исходных уравнениях гарантирует лучшую точность нахождения корней дисперсионного уравнения. Представим входящие в (4) параметры и функции в виде суммы их вещественной и мнимой частей  $U = Re(U) + i Im(U)$ , причем волновое число  $\zeta$  так же представим в

виде  $\zeta_1 + i\zeta_2$ . В результате такого преобразования получим вещественнозначную задачу удвоенной размерности.

#### 4. Построение дисперсионного уравнения.

Наличие произвольных неоднородных коэффициентов в уравнениях (4) не позволяет получить аналитическое представление для дисперсионного уравнения. Для нахождения дисперсионного множества рассматриваемой задачи воспользуемся методом пристрелки [6]. Действуя согласно этому методу, сформулируем вспомогательные задачи Коши с различными начальными условиями при  $\xi = 0$  аналогично [5]. Решение каждой из данных задач обозначим  $(v_1^j, v_3^j, t_1^j, t_3^j, \bar{p}^j, s^j)$ , где индекс  $j$  обозначает номер соответствующей задачи. Дисперсионное уравнение запишем в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} t_1^1(1) & t_1^2(1) & t_1^3(1) \\ t_3^1(1) & t_3^2(1) & t_3^3(1) \\ \bar{p}^1(1) & \bar{p}^2(1) & \bar{p}^3(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Решение дисперсионного уравнения (6) представляет собой наборы значений трех вещественных переменных  $(\zeta_1, \zeta_2, \kappa)$ . Для ускорения процесса вычислений применен метод продолжения по параметру  $\kappa$ . Для реализации такого метода область поиска решений дисперсионного уравнения разобьем сеткой с малым шагом по  $\kappa$ . Далее построим решение для  $\kappa = 0$ . Поиск корней для следующего значения  $\kappa$  будем производить в окрестности корней, найденных на предыдущем шаге. Таким образом мы имеем возможность значительно снизить количество наборов  $(\zeta_1, \zeta_2, \kappa)$ , для которых необходимо вычислять значения определителя, входящего в дисперсионное уравнение.

Помимо прямого численного подхода возможно применение полуаналитических методов, как, например, метод Бубнова–Галеркина. Данный метод предполагает представление неизвестных функций (решений) в виде линейных комбинаций базисных функций с неопределенными коэффициентами, удовлетворяющих граничным условиям искомой задачи. Важным требованием является линейная независимость системы базисных функций. Стоит отметить, что с одной стороны, увеличение числа членов в разложении искомых функций приводит к более точным с математической точки зрения результатам, однако добавление каждого следующего члена разложения увеличивает число неизвестных коэффициентов, причем алгебраические системы для их определения имеют плохо обусловленные матрицы коэффициентов (определитель таких матриц близок к нулю). Серия вычислительных экспериментов позволила определить, что в разложениях решений для данной задачи достаточно ограничиться двумя базисными вектор функциями. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} t_j &= D_{1j} \cos \frac{\pi\xi}{2} + D_{2j} \cos^2 \frac{\pi\xi}{2}, \\ v_j &= D_{3j} \sin \xi + D_{4j} \sin^2 \xi, \\ s &= D_{51} \sin \xi + D_{61} \sin^2 \xi, \\ \bar{p} &= D_{71} \cos \frac{\pi\xi}{2} + D_{81} \cos^2 \frac{\pi\xi}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения коэффициентов  $D_{ij}$  подставим представления (7) в преобразованную систему (4) и потребуем ортогональности полученных уравнений двум системам функций:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi\xi}{2}, \cos \frac{\pi\xi}{2}, \sin \xi, \sin \xi, \sin \xi, \cos \frac{\pi\xi}{2} \\ \cos \frac{3\pi\xi}{2}, \cos \frac{3\pi\xi}{2}, \sin 2\xi, \sin 2\xi, \sin 2\xi, \cos \frac{3\pi\xi}{2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

А именно, поочередно умножим полученные уравнения на каждый набор функций и проинтегрируем их по  $\xi$  от 0 до 1. В полученных уравнениях выпишем коэффициенты при  $D_j$  и составим определитель системы. Дисперсионное уравнение в этом случае будет порождаться нулями этого определителя.

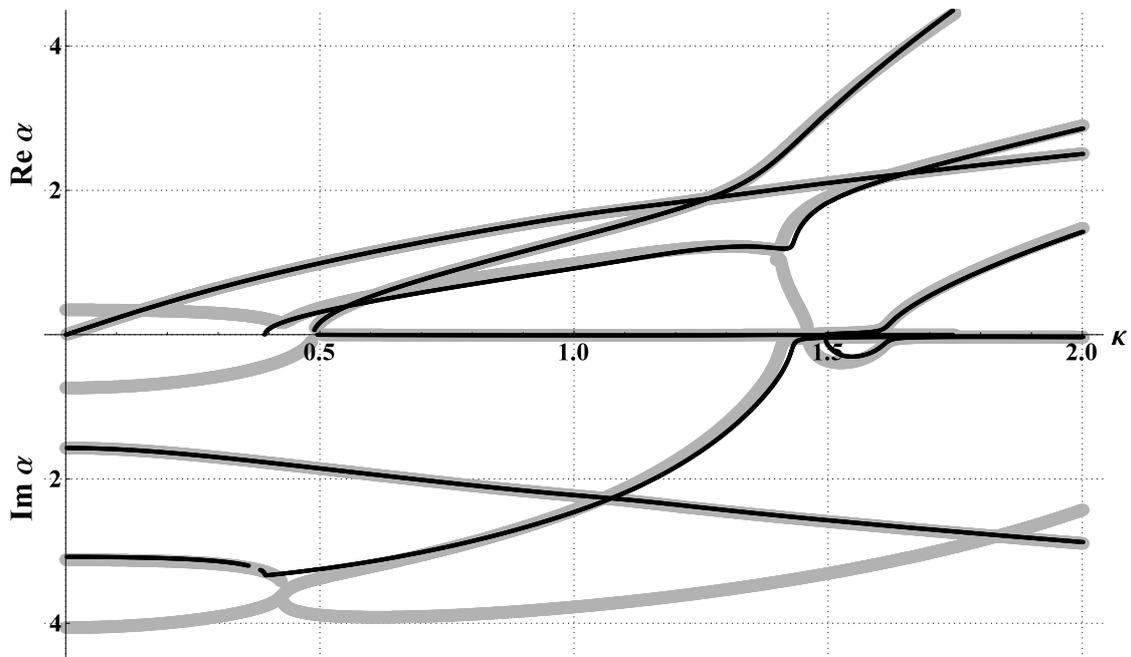


Рисунок 1 – Сравнение результатов построения дисперсионного множества. Линейная неоднородность упругих модулей  $\gamma_j(\xi) = |\gamma_j|(0.6\xi + 0.7)$ . а) Метод пристрелки (серый), б) Метод Бубнова–Галеркина (черный).

Результаты построения дисперсионного множества, приведенные на Рис.1, наглядно демонстрируют, что метод Бубнова–Галеркина позволяет получить достаточно точные приближения первых ветвей дисперсионного множества. Отметим, что метод также позволяет получить представления для еще нескольких ветвей, однако точность их построения заметно ниже.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Biot M. A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // *J. Acoustic. Soc. Am.* 1962. № 34. P.1254–1264.
- [2] *De Ryck L., et al.* Acoustic wave propagation in a macroscopically inhomogeneous porous medium saturated by a fluid // *Appl. Phys. Lett.* 2007. № 90.
- [3] *Ватульян А. О., Моргунова А. В.* Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами // *Акустический журнал.* 2015. № 61. С. 295–301.
- [4] *Маслов Л. Б.* Математическое моделирование колебаний пороупругих систем. Иваново: ИГЭУ, 2010. 264 с.
- [5] *Ватульян А. О., Гусаков Д. В.* Колебания неоднородного пористоупругого слоя // *Экологический вестник научных центров ЧЭС.* 2014. № 4. С. 21–28.
- [6] *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

**Gusakov D. V.** *On the analysis of the dispersion set of inhomogeneous poroelastic layer.* The problem of free oscillations of an inhomogeneous transversely isotropic poroelastic layer is considered within the framework of the Biot theory. All the characteristics of the layer are assumed to be arbitrary functions of the thickness coordinate. The dispersion is equation obtained using shooting method, and in this case will be a function of three real arguments. The analytical approach of the first branches of the dispersion of the set is obtained using the Galerkin method.

# АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ В РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИИ ДЛЯ СЛОЯ

Давыдов С. А., Земсков А. В.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

В данной работе рассматривается задача об определении напряжённо-деформированного состояния (НДС) термоупругой однокомпонентной среды с учётом наличия диффузионных потоков. Влияние диффузионных процессов на НДС среды учитывается с помощью локально-равновесной модели термоупругой диффузии, включающей в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнения тепло- и массопереноса. Решение ищется с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье. Также выделены особенности в функциях Грина и проведён их анализ.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается линейная одномерная нестационарная задача термоупругости для однородного слоя с учетом массопереноса (штрих означает производную по пространственной координате, точка — по времени) [1, 2]:

$$u'' = \ddot{u} + b\vartheta' + \alpha\eta', \quad \kappa\vartheta'' = \dot{\vartheta} + B\dot{u}' - \beta\dot{\eta}, \quad D\eta'' = \dot{\eta} + \Lambda u''' - M\vartheta'' \quad (1)$$

На границах слоя заданы перемещения, теплообмен и диффузионные потоки:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = f_{11}(\tau), \quad u|_{x=1} = f_{12}(\tau), \quad \vartheta'|_{x=0} = f_{21}(\tau), \quad \vartheta'|_{x=1} = f_{22}(\tau), \\ (\Lambda u'' - D\eta' - M\vartheta')|_{x=0} = f_{31}(\tau), \quad (\Lambda u'' - D\eta' - M\vartheta')|_{x=1} = f_{32}(\tau); \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия полагаются нулевыми:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad \eta|_{\tau=0} = 0, \quad \vartheta|_{\tau=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь все величины являются безразмерными. Их связь с размерными аналогами имеет вид (при одинаковом начертании они обозначены чертой, которая в дальнейшем изложении опускается):

$$\begin{aligned} x = \frac{x_3}{L}, \quad u = \frac{u_3}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{T_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{n_0}, \quad c^2 = \frac{C}{\rho}, \quad \bar{\alpha} = \frac{n_0\alpha}{C}, \quad \bar{\beta} = \frac{n_0\beta}{c_{\varepsilon n}}, \\ \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{c_{\varepsilon n}Lc}, \quad \bar{b} = \frac{bT_0}{C}, \quad B = \frac{b}{c_{\varepsilon n}}, \quad \bar{M} = \frac{MT_0}{n_0cL}, \quad \bar{D} = \frac{Dg}{cL}, \quad \bar{\Lambda} = \frac{\Lambda}{n_0cL}, \\ \bar{f}_1(\tau) = \frac{f_1(t)}{L}, \quad \bar{f}_2(\tau) = \frac{Lf_2(t)}{T_0}, \quad \bar{f}_3(\tau) = \frac{f_3(t)}{n_0c}. \end{aligned}$$

где  $t$  — время;  $x$  — декартова координата, направленная в глубину слоя;  $u$  — перемещение;  $L$  — толщина слоя;  $\eta = n - n_0$  — приращение концентрации;  $n$  и  $n_0$  — актуальная и начальная концентрации вещества;  $C$  — упругая постоянная;  $\rho$  — плотность;  $b$  — температурная постоянные;  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий объёмное изменение среды за счёт диффузии;  $D$  — коэффициент самодиффузии;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\vartheta = T - T_0$  — приращение

температуры;  $T$  и  $T_0$  — актуальная и начальная температуры среды;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $\gamma$  — коэффициент активации (для твердых растворов  $\gamma = 1$ );  $c_{\varepsilon n}$  — объемная теплоёмкость при постоянной концентрации и деформации. Коэффициенты  $\beta$ ,  $\Lambda$ ,  $M$  определяются следующими формулами:

$$\beta = R \ln(\gamma n_0), \quad \Lambda = n_0 \alpha D / RT_0, \quad M = n_0 D \ln(\gamma n_0) / T_0.$$

**2. Алгоритм решения начально-краевой задачи.** Пусть  $G_{1kl} = u$ ,  $G_{2kl} = \vartheta$ ,  $G_{3kl} = \eta$  ( $k = 1, 2, 3$ ;  $l = 1, 2$ ) — функции Грина задачи (1)–(3). Тогда, решение представим в виде (звездочка обозначает свертку по времени):

$$u = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 G_{1kl} * f_{kl}, \quad \vartheta = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 G_{2kl} * f_{kl}, \quad \eta = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 G_{3kl} * f_{kl}. \quad (4)$$

Использование замены  $y = 1 - x$  позволяет выделить свойства симметрии функций Грина. Достаточно найти только функции  $G_{qk1}$  (далее индекс  $l$  опускается).

Применим к (1) преобразование Лапласа по времени и представим решение в виде рядов по собственным функциям, предварительно произведя редукцию задачи к нулевым граничным условиям, раскладывая  $u^L$  по синусам, а  $\vartheta^L$  и  $\eta^L$  — по косинусам. Получаем систему линейных алгебраических уравнений ( $s$  — параметр преобразования Лапласа, индекс « $L$ » означает трансформанту Лапласа):

$$\begin{aligned} k_{1n} U_n^L - b \lambda_n \Theta_n^L - \alpha \lambda_n \Psi_n^L &= F_{1n}, \\ B s \lambda_n U_n^L + k_{2n} \Theta_n^L - \beta s \Psi_n^L &= F_{2n}, \\ -\Lambda \lambda_n^3 U_n^L + M \lambda_n^2 \Theta_n^L + k_{3n} \Psi_n^L &= F_{3n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$k_{1n} = s^2 + \lambda_n^2, \quad k_{2n} = s + \kappa \lambda_n^2, \quad k_{3n} = s + D \lambda_n^2; \quad U = u - \varphi, \quad \Theta = \vartheta - \theta, \quad \Psi = \eta - \psi;$$

$$\varphi = \varphi^*(x) f_1, \quad \theta = \theta^*(x) f_2, \quad \psi = \psi^*(x) (f_2 + M f_3);$$

$$\varphi^*(x) = 1 - x, \quad \theta^*(x) = -(1 - x)^2 / 2, \quad \psi^*(x) = (1 - x)^2 / 2D; \quad \lambda_n = \pi n;$$

$$\left\{ \begin{array}{c} U \\ F_1 \\ \varphi^* \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} U_n \\ F_{1n} \\ \varphi_n \end{array} \right\} \sin \lambda_n x, \quad \left\{ \begin{array}{c} \Theta, \Psi \\ F_2, F_3 \\ \theta^*, \psi^* \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \Theta_n, \Psi_n \\ F_{2n}, F_{3n} \\ \theta_n, \psi_n \end{array} \right\} \cos \lambda_n x;$$

$$F_{10} = 0, \quad F_{20} = B s f_1^L - (\kappa + s \theta_0 + \beta s M D^{-1}) f_2^L - \beta s D^{-1} \theta_0 f_3^L,$$

$$F_{30} = -M s \psi_0 f_2^L + (1 - s \psi_0) f_3^L;$$

$$F_{1n} = \varphi_n D^{-1} [-s^2 D f_1^L - (b D - \alpha M) f_2^L + \alpha f_3^L],$$

$$F_{2n} = -s \theta_n D^{-1} [(D + \beta M) f_2^L + \beta f_3^L], \quad F_{3n} = -s \psi_n [M f_2^L + f_3^L];$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \theta_0 = -1/6, \quad \psi_0 = 1/6; \quad \phi_n = 2/\lambda_n, \quad \theta_n = -2/\lambda_n^2, \quad D \psi_n = 2/\lambda_n^2 \quad (n \geq 1).$$

Решая СЛАУ, производя обратную редукцию, а также находя нулевые гармоники, получаем следующий вид искомым функций:

$$u^L = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \frac{P_{1kn}}{P_n} f_k^L \sin \lambda_n x, \quad \eta^L = \frac{f_3^L}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \frac{P_{3kn}}{P_n} f_k^L \cos \lambda_n x, \quad (6)$$

$$\vartheta^L = B f_1^L + \frac{-\kappa f_2^L + \beta f_3^L}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \frac{P_{2kn}}{P_n} f_k^L \cos \lambda_n x,$$

где

$$\begin{aligned}
 P_n(s) &= k_{1n}k_{2n}k_{3n} - (b\beta\Lambda + \alpha BM)\lambda_n^4 s + \beta Ms\lambda_n^2 k_{1n} - \lambda_n^4 \alpha \Lambda k_{2n} + Bbs\lambda_n^2 k_{3n}; \\
 P_{11n}(s) &= 2\lambda_n [(k_{2n}k_{3n} + \beta M\lambda_n^2 s) - (b\beta\Lambda + \alpha BM)\lambda_n^2 s - \lambda_n^2 \alpha \Lambda k_{2n} + Bbsk_{3n}], \\
 P_{12n}(s) &= 2\lambda_n \kappa (\alpha M\lambda_n^2 - bk_{3n}), & P_{13n}(s) &= 2\lambda_n (b\beta s + \alpha k_{2n}), \\
 P_{21n}(s) &= 2 [Bs^4 + (BD - \beta\Lambda)\lambda_n^2 s^3], & P_{22n}(s) &= -2\kappa (k_{1n}k_{3n} - \alpha\Lambda\lambda_n^4), \\
 P_{23n}(s) &= 2s (\beta k_{1n} - \alpha B\lambda_n^2), & P_{31n}(s) &= -2\lambda_n^2 s^2 (BMs + \Lambda k_{2n}), \\
 P_{32n}(s) &= 2\lambda_n^2 (k_{1n}M\kappa - \Lambda\kappa b\lambda_n^2), & P_{33n}(s) &= 2 (k_{1n}k_{2n} + Bbs\lambda_n^2).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим отдельно  $\vartheta^L$ :

$$\vartheta^L = Bf_1^L + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{21n}(s)}{P_n(s)} f_1^L \cos \lambda_n x + \frac{-\kappa f_2^L + \beta f_3^L}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^3 \frac{P_{2kn}(s)}{P_n(s)} f_k^L \cos \lambda_n x.$$

Первые два слагаемых представляют ряд, сходящийся в обобщённом смысле к дельта-функции Дирака. С другой стороны, этот ряд представляет собой значение тета-функции Якоби [3].

Все многочлены  $P_{ijn}(s)$  — третьей степени (на 1 меньше, чем степень знаменателя  $P_n(s)$ ) или ниже, кроме  $P_{21n}(s)$ . Это означает наличие в оригинале особенности типа дельта-функции. Выделим её в этой дроби следующим образом:

$$\frac{P_{21n}(s)}{P_n(s)} = \frac{2Bs^2}{\lambda_n^2 + s^2} + \frac{\tilde{P}_{21n}(s)}{\tilde{P}_n(s)}, \quad \tilde{P}_n(s) = (\lambda_n^2 + s^2) P_n(s). \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_{21n}(s) &= 2[B(k_2\Lambda\alpha\lambda_n^2 + (BM\alpha + \Lambda b\beta)\lambda_n^2 s - k_3 Bbs) - \\
 &\quad - 2(BM\beta s + B\kappa k_3 + \Lambda\beta s)k_1]\lambda_n^2 s^2.
 \end{aligned}$$

Для первого слагаемого в (8) воспользуемся следующей формулой:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \operatorname{ch}([\pi - x]a)}{2a \operatorname{sh}(\pi a)}.$$

Тогда  $\vartheta^L$  примет вид:

$$\begin{aligned}
 \vartheta^L &= Bs \frac{\operatorname{ch}([1-x]s)}{\operatorname{sh} s} f_1^L + \frac{-\kappa f_2^L + \beta f_3^L}{s} + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{P}_{21n}(s)}{\tilde{P}_n(s)} f_1^L \cos \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^3 \frac{P_{2kn}(s)}{P_n(s)} f_k^L \cos \lambda_n x.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Сравнивая (6) и (9) с (4), учитывая свойства преобразования Лапласа, находим изображения функций  $G_{1k}$ ,  $G_{2k}$  и  $G_{3k}$ :

$$\begin{aligned}
 G_{1k}^L &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}^L(s) \sin \lambda_n x, \quad G_{vk}^L = G_{vk0}^L(x) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{vkn}^L(s) \cos \lambda_n x \quad (v = 2, 3); \\
 G_{210}^L(s) &= Bs \frac{\operatorname{ch}([1-x]s)}{\operatorname{sh} s} = Bs \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-(2n+x)s} + e^{-(2+2n-x)s}], \quad G_{220}^L(s) = -\frac{\kappa}{s}, \\
 G_{230}^L(s) &= \frac{\beta}{s}, \quad G_{330}^L(s) = \frac{1}{s}; \quad G_{21n}^L(s) = \frac{\tilde{P}_{21n}(s)}{\tilde{P}_n(s)}, \quad G_{qkn}^L(s) = \frac{P_{qkn}(s)}{P_n(s)} \quad (n \geq 1).
 \end{aligned}$$

Перейдём к вычислению оригиналов функций влияния. Так как функции  $G_{qkn}^L(s)$  являются рациональными функциями параметра  $s$ , то переход в пространство оригиналов удобно осуществить с помощью вычетов. Пусть  $s_{1n}, s_{2n}$  комплексно-сопряжённые, а  $s_{3n}$  и  $s_{4n}$  — действительные корни многочлена  $P_n(s)$ ;  $\xi_n = \operatorname{Re}(s_{1n}) < 0$ ,  $\zeta_n = \operatorname{Im}(s_{1n})$ ,  $s_{2n} = \bar{s}_{1n}$ ;  $s_{3n}, s_{4n} < 0$ ;  $s_{5n} = i\lambda_n, s_{6n} = \bar{s}_{5n}$  [2]. Тогда, оригиналы функций  $G_{qkn}^L(s)$  имеют вид:

$$G_{qkn}(\tau) = e^{\xi_n \tau} (A_{qkn1} \cos \zeta_n \tau - A_{qkn2} \sin \zeta_n \tau) + A_{qkn3} e^{s_{3n} \tau} + A_{qkn4} e^{s_{4n} \tau}. \quad (10)$$

Коэффициенты  $A_{qknl}$  находятся по формулам (штрих — производная по параметру  $s$ ;  $m = 3, 4$ ):

$$A_{qkn1} = 2\operatorname{Re} \frac{P_{qkn}(s_{1n})}{P'_n(s_{1n})}, \quad A_{qkn2} = 2\operatorname{Im} \frac{P_{qkn}(s_{1n})}{P'_n(s_{1n})}, \quad A_{qknm} = \frac{P_{qkn}(s_{mn})}{P'_n(s_{mn})}.$$

Для нулевых гармоник имеем, соответственно:

$$G_{210}(s) = B\delta'(\tau - x) + B \sum_{n=1}^{\infty} [\delta'(\tau - 2n - x) + \delta'(\tau - 2n + x)],$$

$$G_{220}(\tau) = -\kappa H(\tau), \quad G_{230}(\tau) = \beta H(\tau), \quad G_{330}(\tau) = H(\tau),$$

где  $H(\tau)$  — функция Хэвисайда, а  $\delta'(\tau - x)$  — производная дельта-функции по  $\tau$ .

Рассмотрим оригинал функции Грина с особенностью ( $r = 1, 5$ ;  $w = 2, 6$ ):

$$G_{21n}(\tau) = e^{\xi_n \tau} (A_{21n1} \cos \zeta_n \tau - A_{21n2} \sin \zeta_n \tau) + A_{21n3} e^{s_{3n} \tau} + A_{21n4} e^{s_{4n} \tau} + A_{21n5} \cos \lambda_n \tau - A_{21n6} \sin \lambda_n \tau,$$

где

$$A_{21nr} = 2\operatorname{Re} \frac{\tilde{P}_{21n}(s_{rn})}{\tilde{P}'_n(s_{rn})}, \quad A_{21nw} = 2\operatorname{Im} \frac{\tilde{P}_{21n}(\bar{s}_{wn})}{\tilde{P}'_n(\bar{s}_{wn})}, \quad A_{21nm} = \frac{\tilde{P}_{21n}(s_{mn})}{\tilde{P}'_n(s_{mn})}.$$

Таким образом, имея функции влияния  $G_{qkn}(\tau)$ , окончательное решение можно представить в виде их свёртки с правыми частями граничных условий (3).

**3. Расчётный пример.** Полагаем, что обе границы слоя  $x = 0$  и  $x = 1$  теплоизолированы ( $f_{21}(\tau) = f_{22}(\tau) = 0$ ) и массоперенос на них отсутствует ( $f_{31}(\tau) = f_{32}(\tau) = 0$ ), при этом на верхней задано перемещение в виде линейно возрастающей функции ( $f_{11}(\tau) = f_1(\tau) = \tau H(\tau)$ ), а нижняя — зафиксирована ( $f_{12}(\tau) = 0$ ). Оригиналы будут иметь вид:

$$u(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n}(\tau) \sin(\lambda_n x), \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{3n}(\tau) \cos(\lambda_n x),$$

$$\vartheta(\tau) = H(\tau - x) + \sum_{n=1}^{\infty} [H(\tau - 2n - x) + H(\tau - 2n + x) + Q_{2n}(\tau) \cos \lambda_n x],$$

где  $Q_{qn}(\tau)$  — результат свёртки функций Грина и правых частей граничных условий. Результаты вычислений продемонстрированы в виде графиков (сплошная линия —  $x = 0.1$ , пунктирная линия —  $x = 0.5$ , штриховая линия —  $x = 0.9$ ).

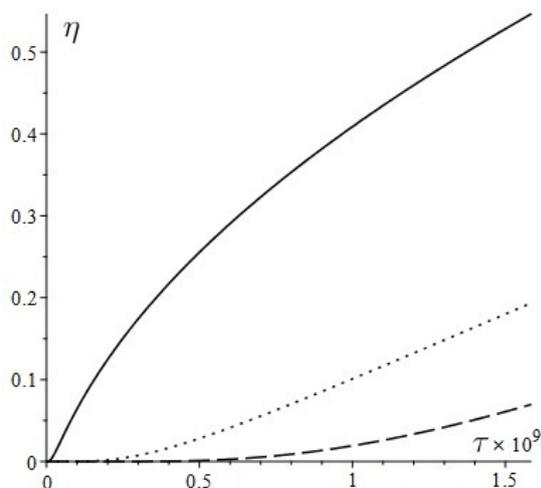


Рисунок 1 – зависимость приращения концентрации от времени

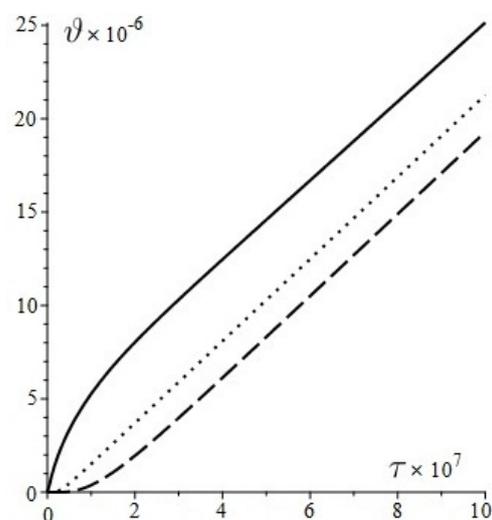


Рисунок 2 – зависимость приращения температуры от времени

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161 А).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Подстригач Я. С., Павлина В. С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в компонентном твёрдом растворе // Физико-химическая механика материалов. 1965. № 4. С. 383–389.
- [2] Давыдов Д. М., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Алгоритм решения одномерной связанной задачи термоупругости с учётом диффузии для слоя // Материалы XXII междунар. симп. «Динам. и технолог. проблемы мех. констр. и сплош. ср.» 2016. Т. 2. С. 56–58.
- [3] Янке Е., Эмде Ф., Лёви Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

**Davydov S. A., Zemskov A. V.** *Analysis of singularity in non-stationary problem of the thermoelasticity taking into account diffusion for layer.* In this paper, we consider the problem of determining the stress-strain state (SSS) of the thermoelastic one-component medium taking into account diffusion fluxes. Effect of diffusion processes on medium SSS taken into account by a locally-equilibrium model of the thermoelastic diffusion, including a coupled system of equations of motion of an elastic body, and heat- and mass-transfer equations. The solution is sought using of the Laplace transform and Fourier series expansion. Also singularity highlighted and analyzed in the Green's functions.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В КАЧЕСТВЕ ДАТЧИКА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

**Днепровский В. Г., Карапетьян Г. Я., Салафетов В. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе исследуется частотная зависимость коэффициента отражения поверхностных акустических волн (ПАВ) от отражательного встречно-штыревого преобразователя (ВШП) в зависимости от величины магнитного поля. Показана возможность создания беспроводных пассивных датчиков магнитного поля на поверхностных акустических волнах.

В настоящее время датчики на поверхностных акустических волнах (ПАВ) широко применяются в целом ряде радиотехнических систем. Проблема беспроводного дистанционного контроля физических параметров (давления, влажности, деформации и т. п.) в настоящее время осуществляется с помощью различных датчиков по радиосигналу, т. е. к датчику придается радиопередатчик, осуществляющий передачу информации от датчика. Однако, при этом требуется источник питания и возникает необходимость его периодической замены. Так как датчик может быть установлен в труднодоступном месте или использоваться в условиях, при которых невозможна замена источника питания, например, при непрерывно работающем контролируемом объекте, весьма привлекательным становится применение пассивных беспроводных датчиков [1]. В научной литературе, практически, нет данных о применении ПАВ датчиков для измерения магнитного поля. Поэтому данная задача представляется актуальной, в связи с чем, эта работа посвящена данной тематике.

Для выполнения исследований был собран экспериментальный стенд, включающий измеритель комплексных коэффициентов передачи «ОБЗОР-103», источник питания постоянного тока Б5-50, измерительный столик из комплекта ОСК-2, мультиметр TES 2360, ПК (ноутбук) Lenovo, линию задержки (ЛЗ) на ПАВ с центральной частотой 98 МГц, неодимовый магнит на специальном держателе и датчик Холла (рис. 1 и 2). ЛЗ на ПАВ, содержала два встречно-штыревых преобразователя (ВШП), причем, первый был приемо-передающим, а второй ВШП — отражательным. Отражательный ВШП, с подстроечными емкостью и индуктивностью, был нагружен на элемент, чувствительный к магнитному полю — датчик Холла. Таким образом, величина импеданса нагрузки, зависела от магнитного поля и влияла на коэффициент отражения ПАВ от отражательного ВШП. Величина магнитного поля варьировалась изменением расстояния от магнита до датчика Холла. Исследовалась частотная зависимость коэффициента отражения ПАВ в зависимости от величины магнитного поля, были получены Фурье преобразования частотных характеристик.

На рис. 3 представлена зависимость величины индукции магнитного поля  $B$  от расстояния до магнита  $L$ . Зависимость была получена на измерителе магнитной индукции Ш1-8.

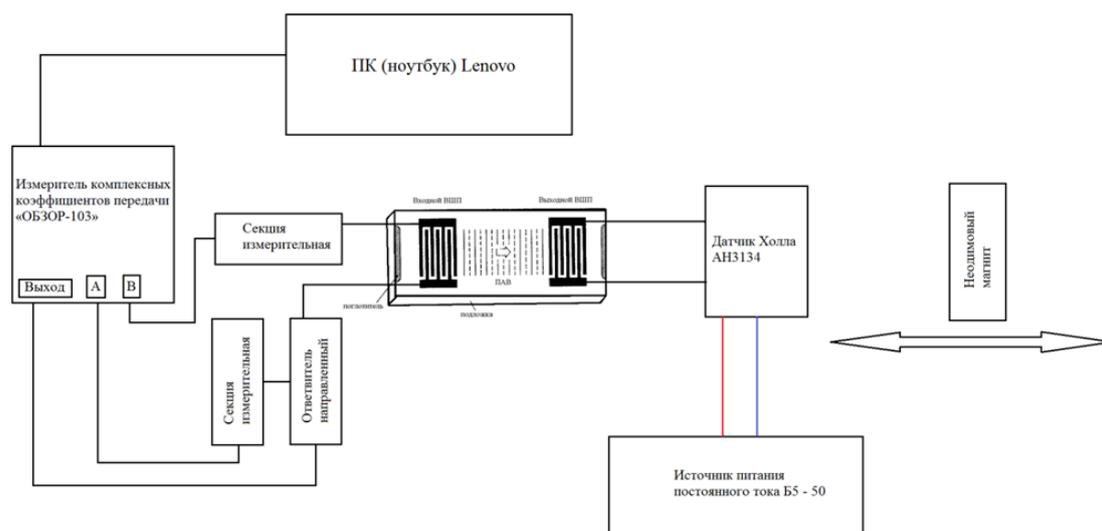


Рисунок 1 – Блок-схема экспериментального стенда

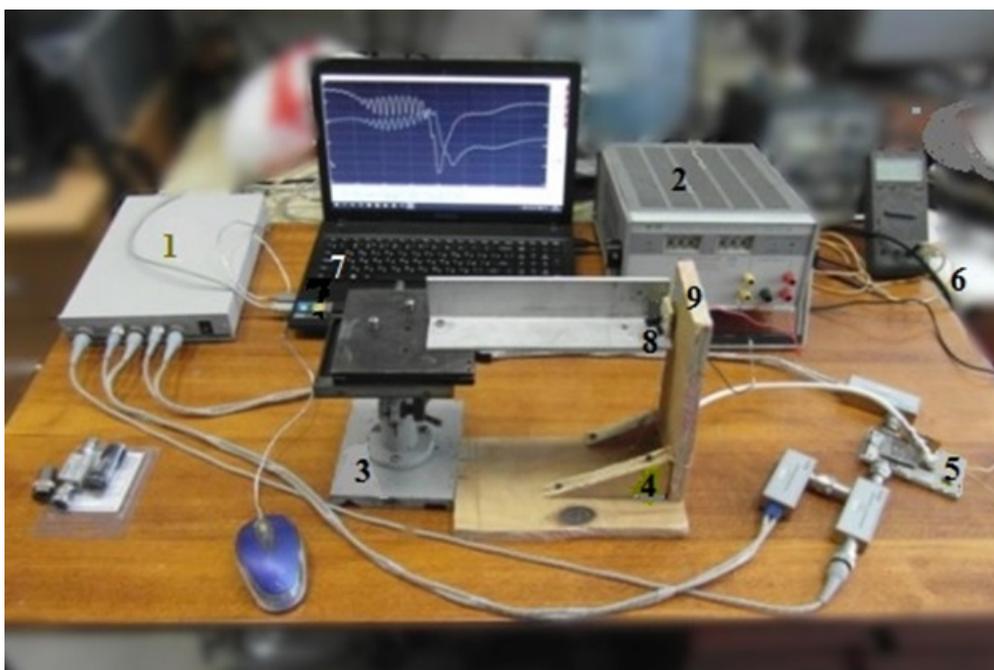


Рисунок 2 – Общий вид экспериментального стенда: 1 – измеритель комплексных коэффициентов передачи «ОБЗОР-103»; 2 – источник питания постоянного тока Б5-50; 3 – столик из комплекта ОСК-2; 4 – опора для датчика Холла; 5 – линия задержки на ПАВ; 6 – мультиметр TES 2360; 7 – ПК Lenovo; 8 – неодимовый магнит; 9 – датчик Холла АН 3134

Величина магнитного поля менялась изменением расстояния неодимового магнита от датчика Холла с помощью двухкоординатного столика из комплекта оптической скамьи ОСК-2 с точностью  $\pm 0,5$  мм. Величины индукции магнитного поля  $B$  определялись по калибровочной кривой, представленной на рис. 3. В процессе изменения магнитного поля с помощью прибора «ОБЗОР-103» велся контроль ча-

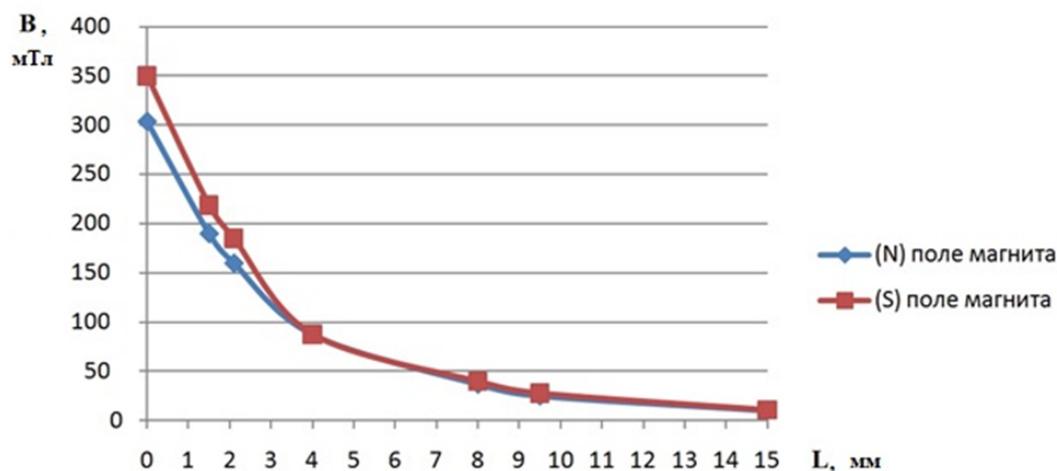


Рисунок 3 – Зависимость величины индукции магнитного поля  $B$  от расстояния до магнита  $L$

стотных характеристик коэффициента отражения ПАВ от отражательного ВШП (элемента матрицы рассеяния  $S_{11}$ ).

При значениях индукции магнитного поля около 10 мТл наблюдался существенный скачок частотной зависимости коэффициента отражения ПАВ. Сравнение Фурье преобразований частотных характеристик коэффициента отражения до и после скачка свидетельствовало о значительном изменении структуры отраженного импульса в этом случае. Следует отметить, что до скачка и после него частотные зависимости коэффициента отражения ПАВ практически не менялись. На рис. 4 представлены сравнения частотных характеристик коэффициента отражения ПАВ (элемента матрицы рассеяния  $S_{11}$ ) от отражательного ВШП и их Фурье преобразований в области их скачка при индукции магнитного поля около 10 мТл. На рис. 4 слева показаны частотные зависимости  $S_{11}$ , полученные на приборе «ОБЗОР-103», справа — сравнение частотных зависимостей  $S_{11}$  и их Фурье преобразований до и после скачка. Сплошные кривые, в правой части рисунка, соответствуют магнитным полям с индукцией более 10 мТл.

Скачок  $S_{11}$  происходит в точном соответствии со скачком электрического сопротивления датчика Холла АН 3134, подключенного к отражательному ВШП и имеющему место также при значениях индукции магнитного поля около 10 мТл. Таким образом, экспериментально показана возможность контроля магнитного поля с помощью беспроводного датчика на поверхностных акустических волнах и определения его порогового значения в области 10 мТл. Применение, в дальнейшем, магнитосопротивлений различных номиналов позволит варьировать определяемые пороговые значения индукции магнитного поля и обеспечит пассивность беспроводного датчика магнитного поля на ПАВ.

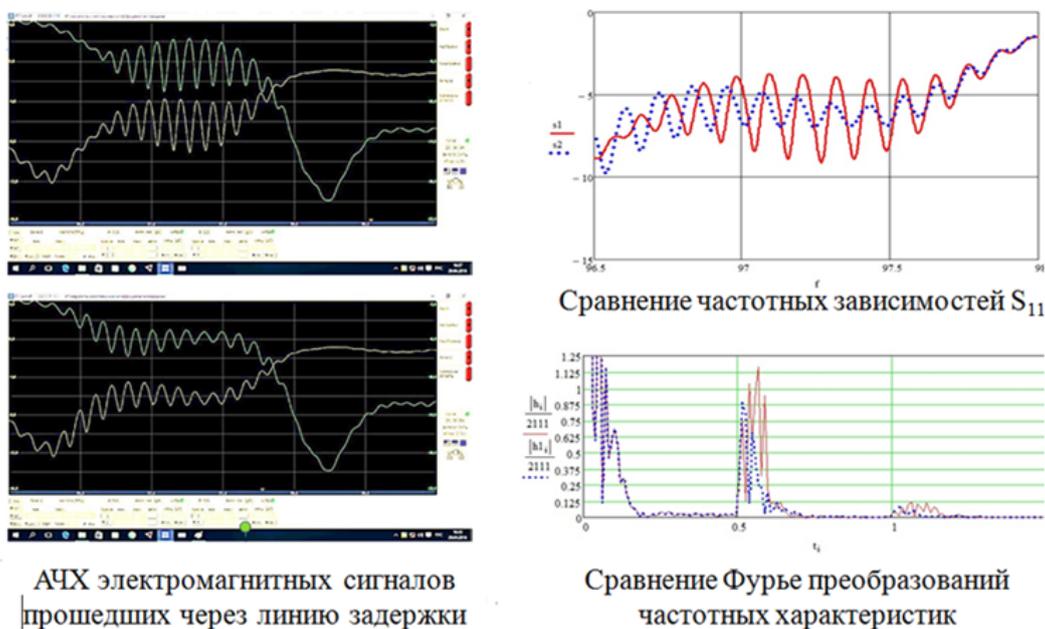


Рисунок 4 – Сравнение частотных характеристик коэффициента отражения ПАВ от отражательного ВШП (элемента матрицы рассеяния  $S_{11}$ ) и их Фурье преобразований в области их скачка при индукции магнитного поля около 10 мТл

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке темы № 16.219.2014К проектной части государственного задания Минобрнауки России.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Багдасарян А. С., Багдасарян С. А., Карапетьян Г. Я., Днепровский В. Г. Патент РФ № 2387051. Датчик физической величины на поверхностных акустических волнах // Опубликовано 20.04.2010. Бюлл. № 11.

**Dneprovski V. G., Karapetyan G. Y., Salafetov V. S.** *Research of the possibility of using surface acoustic wave delay lines as a magnetic field sensor.* We researched a frequency dependence of the surface acoustic wave (SAW) reflectance from the reflective interdigital transducer (IDT) at the different values of the magnetic field. The possibility of creating the wireless passive SAW magnetic field sensors is showed.

# УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА

Долгих Т. Ф.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе рассмотрен способ решения системы уравнений эллиптического типа, которые описывают процесс зонального электрофореза в двухкомпонентной смеси, с различными пространственно-периодическими начальными данными.

**1. Введение.** Зональный электрофорез (метод разделения многокомпонентной смеси на отдельные компоненты) в бездиффузионном приближении описывается системой квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Как правило, это уравнения гиперболического типа, но при некоторых значениях параметров (подвижности компонент смеси) тип уравнений становится эллиптическим [1]. В работе рассмотрены задачи Коши в случае эллиптических уравнений с различными пространственно-периодическими начальными данными. В частности, такие начальные данные используются при изучении квазигазовых сред типа газа Чаплыгина [2].

Рассмотрим систему уравнений для описания разделения компонент смеси [3, 4]

$$u_t^k + \mu^1 \mu^2 \left( \frac{\mu^k u^k}{1+s} \right)_x = 0, \quad k = 1, 2, \quad s = u^1 + u^2, \quad (1)$$

где  $u^k = u^k(x, t)$  и  $\mu^k = \text{const}$  — «эффективные» концентрации и подвижности компонент смеси соответственно,  $1 + s$  — полная электрическая проводимость (смесь плюс буферный раствор).

Заметим, что эффективные концентрации могут иметь различные знаки, которые будут определяться зарядностью компонент смеси, но подвижности компонент смеси — это всегда положительные величины.

Система (1) имеет инварианты Римана и представима в виде

$$K_t^i + \Lambda^i K_x^i = 0, \quad \Lambda^i = \frac{1}{K^i K^1 K^2}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где

$$K^i = \frac{1}{R^i}, \quad R^1 = \frac{B - \sqrt{D}}{2A}, \quad R^2 = \frac{B + \sqrt{D}}{2A},$$

$$A = 1 + s, \quad B = \mu^1 + \mu^2 + u^1 \mu^2 + u^2 \mu^1, \quad C = \mu^1 \mu^2, \quad D = B^2 - 4AC.$$

На  $(u^1, u^2)$ -плоскости в области  $D < 0$  тип уравнений (1) — эллиптический и им соответствуют комплексно сопряжённые собственные значения  $\Lambda^i$  и инварианты Римана  $K^i$  [4].

Для уравнений (2) на контуре  $\Gamma = \{(x, t) : x = x(\tau), t = t(\tau), a \leq \tau \leq b\}$ , не являющегося характеристикой, задаются начальные условия

$$K^i|_{\Gamma} = K_0^i(\tau), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

**2. Неявное решение задачи Коши.** Получим формальное решение задачи Коши (2), (3) с помощью метода годографа [4–6], основанного на законах сохранения. Этот метод позволяет получить неявные решения  $t = t(K^1, K^2)$  и  $x = x(K^1, K^2)$  уравнений (2), по которым можно восстановить явный вид решения, то есть функций  $u^1(x, t)$ ,  $u^2(x, t)$ .

Рассмотрим случай, когда начальные данные заданы при  $t = t_0$ , то есть контур  $\Gamma$  является отрезком оси  $t = t_0$ . В этом случае начальные условия (3) переписутся в виде

$$K^i|_{t=t_0} = K_0^i(\tau), \quad a \leq \tau \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Согласно [4, 5] неявное решение задачи Коши (2), (3) имеет вид

$$t = t_0 + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^t d\tau, \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^x d\tau. \quad (5)$$

Здесь функции  $\varphi^t = \varphi^t(K^1, K^2)$  и  $\varphi^x = \varphi^x(K^1, K^2)$  определяются через функцию Римана–Грина, которая для исследуемых уравнений известна [7]

$$\Phi(K^1, K^2 | k^1, k^2) = \frac{(K^1 + K^2)(k^1 + k^2) - 2K^1K^2 - 2k^1k^2}{(k^1 - k^2)^2},$$

где  $k^2 = K_0^2(a)$ ,  $k^1 = K_0^1(b)$ .

В случае комплексно сопряжённых инвариантов Римана  $K^1$ ,  $K^2$  параметры  $a$  и  $b$  также будут комплексно сопряжёнными. Тогда удобно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= u + iv, & \mathbf{b} &= u - iv, & \mathbf{a}^* &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{K} &= K^1 = P + iQ, & \mathbf{K}^* &= K^2 = P - iQ, \\ \mathbf{k} &= k^1 = p + iq, & \mathbf{k}^* &= k^2 = p - iq, \end{aligned}$$

где  $P = P(u, v)$ ,  $Q = Q(u, v)$ ,  $p = p(u, v)$ ,  $q = q(u, v)$  являются вещественными функциями от вещественных переменных  $u, v$ .

Таким образом, в комплексной форме задача (2), (3) запишется в виде

$$\mathbf{K}|\mathbf{K}|^2\mathbf{K}_t + \mathbf{K}_x = 0, \quad \mathbf{K}|_{t=t_0} = \mathbf{K}_0(\tau). \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{K}_0(\tau) = P_0(\tau) + iQ_0(\tau)$  — известная функция.

Тогда соотношения (5) переписутся следующим образом

$$\begin{aligned} t(u, v) &= t_0 + \frac{(p^2 + q^2)^2(4iv(p^2 + q^2) + 2pF - 2G)}{(2iq)^3}, \\ x(u, v) &= u + \frac{2(p^2 + q^2)F - 2pG - 2ipv(4p^2 - 6(p^2 + q^2))}{(2iq)^3}, \end{aligned}$$

где

$$F(u, v) = 2 \int_{u+iv}^{u-iv} P_0(\tau) d\tau, \quad G(u, v) = \int_{u+iv}^{u-iv} (P_0^2(\tau) + Q_0^2(\tau)) d\tau.$$

Очевидно, что функции  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$  — чисто мнимые. Обозначим

$$F^0(u, v) = \text{Im}F(u, v), \quad G^0(u, v) = \text{Im}G(u, v).$$

Из начального условия в (6) получим соотношения для функций  $p$  и  $q$

$$p(u, v) = \text{Re}\mathbf{K}_0(b), \quad q(u, v) = \text{Im}\mathbf{K}_0(b).$$

Таким образом, получаем неявное решение задачи Коши (6)

$$t(u, v) = t_0 - \frac{(p^2 + q^2)^2(pF_0 - G_0 + 2v(p^2 + q^2))}{4q^3}, \quad (7)$$

$$x(u, v) = u - \frac{pG^0 - (p^2 + q^2)F_0 - 2p(p^2 + 3q^2)}{4q^3}, \quad (8)$$

которое полностью определено начальными условиями.

**3. Явное решение задачи Коши.** Восстановим явное решение задачи Коши на некоторых линиях уровня неявного решения (изохронах), отвечающих фиксированным значениям  $t = t_* = \text{const}$ . Для этого решим задачу Коши

$$\frac{du}{d\rho} = -t_v(u, v)q^4(u, v), \quad \frac{dv}{d\rho} = t_u(u, v)q^4(u, v), \quad (9)$$

$$u|_{\rho=0} = u_*, \quad v|_{\rho=0} = v_*,$$

где  $\rho$  — некоторый параметр, а значения величин  $u_*$ ,  $v_*$  идентифицируют изохрону  $t_* = t(u_*, v_*)$ .

Производные  $t_u$ ,  $t_v$  вычисляются с помощью (7), а пространственная координата на изохроне  $x = x(u(\rho), v(\rho))$  — с помощью (8).

Определив значения  $u(\rho)$ ,  $v(\rho)$  на изохроне  $t = t_*(u_*, v_*)$ , найдём функции  $p(u, v)$ ,  $q(u, v)$ . Далее вычислим концентрации компонент смеси, которые связаны с инвариантами Римана при помощи соотношений

$$u^1 = \frac{\mu^2(1 - 2\mu^1 p + \mu^1 \mu^1 (p^2 + q^2))}{\mu^1 - \mu^2}, \quad (10)$$

$$u^2 = \frac{\mu^1(1 - 2\mu^2 p + \mu^2 \mu^2 (p^2 + q^2))}{\mu^2 - \mu^1}.$$

**4. Пространственно-периодические начальные данные.** Рассмотрим для задачи Коши (6) различные случаи пространственно-периодических начальных данных  $K_0^1(\tau) = P_0 + iQ_0$ ,  $K_0^2(\tau) = P_0 - iQ_0$ .

**4.1. Вариант I.** Пусть

$$P_0(\tau) = -\varepsilon \sin \tau, \quad Q_0(\tau) = 1 + \beta\varepsilon \cos \tau, \quad \beta > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (11)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\beta\varepsilon$  — амплитуды пространственно-периодического возмущения состояния равновесия  $P_0 = 0$ ,  $Q_0 = 1$ .

Если известны  $u = u(x, t)$ ,  $v = v(x, t)$  — решение задачи Коши (9), то явное решение задачи (6) с начальными функциями (11) определяется соотношениями

$$p(x, t) = -\varepsilon \sin u(\operatorname{ch} v + \beta \operatorname{sh} v), \quad q(x, t) = 1 + \varepsilon \cos u(\operatorname{sh} v + \beta \operatorname{ch} v).$$

**4.2. Вариант II.** Пусть теперь

$$P_0(\tau) = -\beta\varepsilon \sin \tau, \quad Q_0(\tau) = 1 + \varepsilon \cos \tau. \quad (12)$$

В этом случае явное решение задачи имеет вид

$$p(x, t) = -\varepsilon \sin u(\beta \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} v), \quad q(x, t) = 1 + \varepsilon \cos u(\beta \operatorname{sh} v + \operatorname{ch} v).$$

Решения поставленных задач — концентрации компонент смеси  $u^1 < 0$ ,  $u^2 > 0$ , в случае  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu^1 = 2$ ,  $\mu^2 = 3$  и начальными функциями вида (11), (12) представлены на рис. 1 и 2 соответственно (масштабы различны).

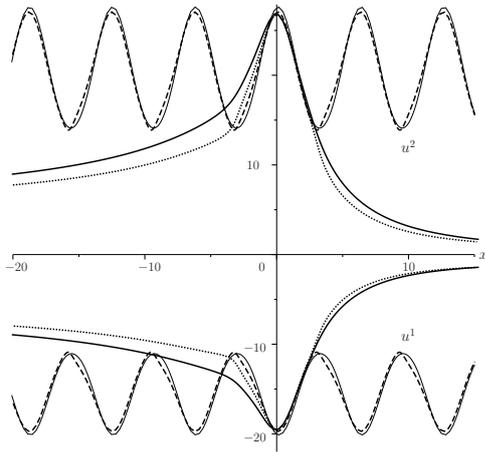


Рисунок 1 — Концентрации компонент смеси в моменты времени  $t_1 = 0.1607$ ,  $t_2 = 0.4734$ ,  $t_3 = 0.7857$ ,  $t_4 = 1.1103$ ;  $u_* = -0.5$ ,  $v_* = -0.10, -0.30, -0.50, -0.70$  соответственно

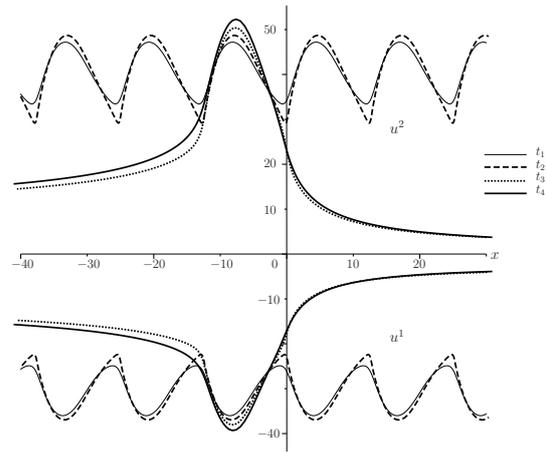


Рисунок 2 — Концентрации компонент смеси в моменты времени  $t_1 = 0.9612$ ,  $t_2 = 1.1266$ ,  $t_3 = 1.2984$ ,  $t_4 = 1.4803$ ;  $u_* = -1.5$ ,  $v_* = -0.90, -1.05, -1.20, -1.35$  соответственно

Очевидно, что с течением времени происходит качественное изменение поведения решения. Особенно отчётливо это видно на рис. 3 (случай начальных условий в виде (12)).

**5. Заключение.** Численные расчёты показывают, что с течением времени первоначальное пространственно-периодическое возмущение исчезает, превращаясь в солитоноподобный профиль для  $q(x, t)$  и кинкоподобный профиль для  $p(x, t)$  в точках  $2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (см. рис. 3).

В результате проведённых вычислительных экспериментов была выдвинута гипотеза: с течением времени возникает структура, состоящая из кноидальных неподвижных волн с растущей во времени амплитудой, то есть в эллиптическом случае задача описывает некоторую квазигазовую неустойчивую среду типа газа Чаплыгина.

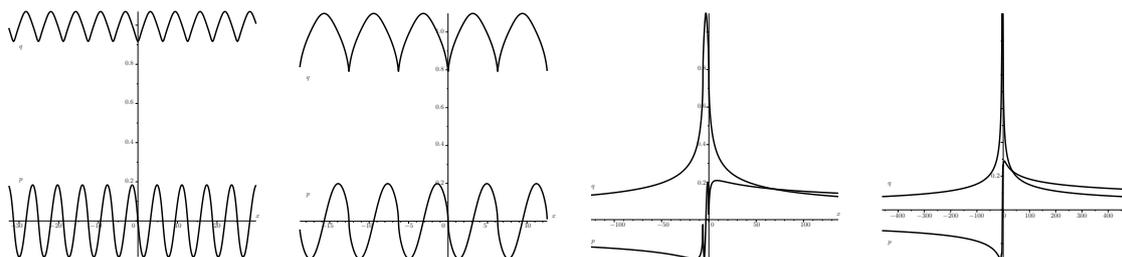


Рисунок 3 – Функции  $p(x, t)$  (снизу) и  $q(x, t)$  (сверху) в моменты времени  $t_1 = 0.9612$ ,  $t_2 = 1.17167$ ,  $t_3 = 1.1830$ ,  $t_4 = 1.6775$ ;  $u_* = -1.5$ ,  $v_* = -0.90, -1.09, -1.10, -1.50$  соответственно (масштабы различны)

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуков М. Ю., Паламарчук С. А. Исследование процессов переноса в двухкомпонентной среде для гиперболического и эллиптического случаев. // Материалы научной конференции РГЭУ «РИНХ» «Математические методы в современных и классических моделях экономики и естествознания». Ростов н/Д, 2005. С. 15–18.
- [2] Жданов С. К., Трубников Б. А. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.
- [3] Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов н/Д: Изд. РГУ, 2005.
- [4] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2015.
- [5] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Метод годографа для решения задачи о движении двухкомпонентной смеси под действием электрического поля. // Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов н/Д, Россия, 14–17 октября, 2014.
- [6] Senashov S. I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity. // SIGMA. 2012. Vol. 8, 071. 16 p.
- [7] Copson, E. T. On the Riemann–Green Function // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. Vol. 1. P. 324–348.

**Dolgikh T. F.** *Equation of elliptic type for zone electrophoresis.* We use the special method for solution of the elliptic equations system that describe the process of zone electrophoresis in a two-component mixture, with different spatially periodic initial data.

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРЕДНАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРОУПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ

Дударев В. В.<sup>1,2</sup>, Мнухин Р. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Владикавказский научный центр РАН

Рассматривается задача об установившихся радиальных колебаниях преднапряженного пьезокерамического цилиндрического диска. Колебания возбуждаются путем подачи переменной разности электрического потенциала на торцевые поверхности. Предполагается, что поле предварительных напряжений (ПН) создается скрытым внутренним давлением. В рамках современной модели электроупругого тела сформулирована постановка прямой задачи об определении поля смещения и электрического потенциала. С учетом выполнения условий плоского напряженного состояния осуществлено осреднение по толщине цилиндра. Решение задачи об определении функции радиального смещения реализовано численно. Проведен анализ изменения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) объекта в зависимости от уровня ПН. Сформулирована обратная задача об определении преднапряжений по данным о значениях первых резонансных частот. Предложен подход для ее решения.

**Введение.** В последнее время все более широкое применение в технике получают электроупругие материалы, обладающие прямым и обратным пьезоэффектом. Ярким представителем таких материалов является пьезокерамика, которая обычно изготавливается из различных оксидов титана. Процесс производства включает множество различных операций, в том числе нагревание до точки Кюри и поляризацию. В качестве готовых изделий из пьезокерамики следует отметить пьезоактуаторы, которые используются для возбуждения акустических колебаний или волн определенного вида с заданными параметрами. В результате действия различных скрытых факторов в электроупругом теле могут возникать ПН. Учет таких напряжений позволяет дать более точную оценку свойств объекта. В настоящее время одним из наиболее распространенных неразрушающих методов диагностики является акустический метод [1, 2].

**Постановка прямой задачи.** Общая постановка задачи о движении электроупругого тела при наличии неоднородного поля ПН согласно модели Куанга имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}T_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_i, \\T_{ij} &= \sigma_{ij} + u_{i,m}^0 \sigma_{mj} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0, \quad \sigma_{ij} = \hat{C}_{ijkl} u_{k,l} + \hat{e}_{mij} \varphi_{,m}, \\ \hat{C}_{ijkl} &= C_{ijkl} + C_{ijml} u_{k,m}^0, \quad \hat{e}_{mij} = e_{mij}, \\T_{ij} n_j |_{S_\sigma} &= P_i, \quad u_i |_{S_u} = 0, \\D_{i,i} &= 0, \\D_k &= e_{kij}^* u_{i,j} - \epsilon_{kn}^* \varphi_{,n}, \quad e_{mij}^* = e_{mij} + e_{mnn} u_{i,n}^0, \quad \epsilon_{mn}^* = \epsilon_{mn}, \\D_i n_i |_{S_D} &= 0, \quad \varphi |_{S_\pm} = \pm \varphi^*,\end{aligned}$$

где  $T_{ij}$  — компоненты несимметричного добавочного тензора напряжений Пиолы,  $\rho$  — плотность тела,  $u_i$  — компоненты добавочного вектора малых перемещений,  $\sigma_{ij}$  — компоненты добавочного тензора объективных напряжений,  $\sigma_{ij}^0$  — компоненты тензора ПН,  $u_{i,m}^0$  — вектор предварительных (остаточных) перемещений,  $\hat{C}_{ijkl}$  — компоненты несимметричного тензора эффективных упругих модулей,  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих модулей,  $e_{mij}$  — компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных,  $\varphi$  — потенциал,  $n_i$  — компоненты единичного вектора внешней нормали поверхности тела,  $P_i$  — компоненты вектора активной механической внешней нагрузки,  $D_i$  — компоненты вектора электрической индукции,  $\epsilon_{mn}$  — компоненты тензора диэлектрических проницаемостей,  $\pm\varphi^*$  — заданная разность потенциала на электродированных частях поверхности тела  $S_{\pm}$ .

В качестве конкретного примера рассмотрим установившиеся радиальные колебания электроупругого полого цилиндра малой толщины  $h$ . Внутренний радиус равен  $r_1$ , внешний —  $r_2$ . Колебания вызываются путем периодической подачи разности потенциала  $\pm V_0$  с частотой  $\omega$  на электродированные основания. Материал цилиндра — пьезокерамика PZT-4 с гексагональной симметрией (класс  $6mm$ ), ось симметрии направлена по оси цилиндра [4]. Будем считать, что поле ПН образовано действием скрытого внутреннего давления  $P$  и описывается двумя отличными от нуля компонентами  $\sigma_{\theta\theta}^0, \sigma_{rr}^0$ , зависящими только от радиальной координаты  $r$  и удовлетворяющими уравнению равновесия. Обозначим через  $u_0(r)$  соответствующую функцию предварительного (остаточного) радиального смещения. На основе общей постановки задачи запишем уравнения движения и определяющие соотношения для рассматриваемого объекта в цилиндрической системе координат после отделения временного множителя:

$$\begin{cases} T_{rr,r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + T_{zr,z} + \rho\omega^2 u_r = 0, \\ T_{rz,r} + \frac{T_{rz}}{r} + T_{zz,z} + \rho\omega^2 u_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \sigma_{rr} (1 + u'_0) + \frac{\partial u_r}{\partial r} \sigma_{rr}^0, & T_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) + \frac{u_r}{r} \sigma_{\theta\theta}^0, \\ T_{rz} &= \sigma_{rz} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \sigma_{rr}^0, & T_{zr} &= \sigma_{rz} (1 + u'_0), & T_{zz} &= \sigma_{zz}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}(1 + u'_0) \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}(1 + u'_0) \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11} \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{zr} = c_{44} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= c_{13}(1 + u'_0) \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{13} \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} D_r &= -\epsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_{15} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \\ D_z &= -\epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + e_{31} \left((1 + u'_0) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r}\right) + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая характер колебаний и малую толщину цилиндра, положим  $T_{zz} \approx 0$  и  $u_r = u_r(r)$ , тогда

$$u_z = -\frac{c_{13}}{c_{33}}z \left( (1 + u'_0)u'_r + \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right) - \frac{e_{33}}{c_{33}}\varphi. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), (5), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}^*(1 + u'_0)u'_r + c_{12}^* \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} + e_{31}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}^*(1 + u'_0)u'_r + c_{11}^* \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} + e_{31}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \sigma_{rz} = \sigma_{zr} &= -z \frac{c_{44}c_{13}}{c_{33}} \left[ ((1 + u'_0)u'_r)' + \left( \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right)' \right] + e_{15}^* \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ D_r &= -\epsilon_{11}^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} - z \frac{e_{15}c_{13}}{c_{33}} \left[ (1 + u'_0)u'_r + \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right]', \\ D_z &= -\epsilon_{33}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} + e_{31}^* \left( (1 + u'_0)u'_r + \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_{11}^* &= c_{11} \left( 1 - \frac{c_{13}^2}{c_{11}c_{33}} \right), \quad c_{12}^* = c_{12} \left( 1 - \frac{c_{13}^2}{c_{12}c_{33}} \right), \\ e_{31}^* &= e_{31} \left( 1 - \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}e_{31}} \right), \quad e_{15}^* = e_{15} \left( 1 - \frac{c_{44}e_{33}}{c_{33}e_{15}} \right), \\ \epsilon_{11}^* &= \epsilon_{11} \left( 1 + \frac{e_{33}e_{15}}{c_{33}\epsilon_{11}} \right), \quad \epsilon_{33}^* = \epsilon_{33} \left( 1 + \frac{e_{33}^2}{c_{33}\epsilon_{33}} \right), \quad e_{31}^* = e_{31} \left( 1 - \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}e_{31}} \right). \end{aligned}$$

Для простоты дальнейшего рассмотрения проведем операцию осреднения по толщине диска по правилу:  $\bar{Q} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} Q dz$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{T}_{rr} &= u'_r(c_{11}^*(1 + u'_0)^2 + \sigma_{rr}^0) + \frac{u_r}{r}c_{12}^* \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) (1 + u'_0) + \frac{2V_0e_{31}^*(1 + u'_0)}{h}, \\ \bar{T}_{\theta\theta} &= u'_rc_{12}^* \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) (1 + u'_0) + \frac{u_r}{r} \left( c_{11}^* \left(1 + \frac{u_0}{r}\right)^2 + \sigma_{\theta\theta}^0 \right) + \frac{2V_0e_{31}^*}{h} \left(1 + \frac{u_0}{r}\right), \\ \bar{T}_{zr} = \bar{T}_{rz} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, после осреднения второе уравнение движения (1) удовлетворится тождественно и останется только одно, дополненное граничными условиями на внутренней и внешней поверхности цилиндра:

$$\bar{T}_{rr,r} + \frac{\bar{T}_{rr} - \bar{T}_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2u_r = 0, \quad \bar{T}_{rr} \Big|_{r=r_1, r_2} = 0. \quad (7)$$

Задача для отыскания электрического потенциала примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \nu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -\frac{z\mu}{r} \left[ r \left( (1 + u'_0)u'_r + \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right)' \right]', \\ -\epsilon_{11}^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} - z \frac{e_{15}c_{13}}{c_{33}} \left[ (1 + u'_0)u'_r + \left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \frac{u_r}{r} \right]' &\Big|_{r=r_1, r_2} = 0, \\ \varphi(r, \pm h/2) &= \pm V_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Перепишем (7) относительно компоненты радиального смещения в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 & (1 + 2\tilde{u}'_0 + \tau\phi(\xi)) u'' + \left( (1 + 2\tilde{u}'_0 + \tau\phi(\xi))' + \frac{1 + 2\tilde{u}'_0 + \tau\phi(\xi)}{\xi} \right) u' + \\
 & + \left( c \left( 1 + \frac{\tilde{u}_0}{\xi} + \tilde{u}'_0 \right)' \frac{1}{\xi} - \left( 1 + \frac{2\tilde{u}_0}{\xi} + \xi\tau\phi'(\xi) + \tau\phi(\xi) \right) \frac{1}{\xi^2} + \kappa^2 \right) u = \\
 & = -k \left( \tilde{u}''_0 + \frac{\tilde{u}'_0}{\xi} - \frac{\tilde{u}_0}{\xi^2} \right), \\
 & (1 + 2\tilde{u}'_0 + \tau\phi(\xi)) u' + c \left( 1 + \tilde{u}'_0 + \frac{\tilde{u}_0}{\xi} \right) \frac{u}{\xi} + k (1 + \tilde{u}'_0) \Big|_{\xi=\xi_0,1} = 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где введены следующие безразмерные параметры и функции:  $u_r(r) = r_2 u(\xi)$ ,  $\xi = \frac{r}{r_2}$ ,  $u_0(r) = r_2 \tilde{u}_0(\xi)$ ,  $\tau = \frac{P}{c_{11}^*}$ ,  $c = \frac{c_{12}^*}{c_{11}^*} < 1$ ,  $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{c_{11}^*}$ ,  $k = \frac{2e_{31}^* V_0}{hc_{11}^*}$ ,  $\nu^2 = \frac{\epsilon_{33}^*}{\epsilon_{11}^*}$ ,  $\mu = \frac{c_{13}e_{15}}{c_{33}c_{11}^*}$ ,  $\frac{\sigma_{\theta\theta}^0(r)}{c_{11}^*} = \tau \frac{\phi'(\xi)}{\xi} + \tau\phi(\xi)$ ,  $\frac{\sigma_{rr}^0(r)}{c_{11}^*} = \tau\phi(\xi)$ .

Таким образом, в приближенной постановке прямая задача об определении электроупругого поля рассматриваемого цилиндра сводится к определению радиального смещения из дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (9) и электрического потенциала из уравнения в частных производных (8). Решение краевой задачи (9) реализовано численно в пакете Maple.

**Исследование обратной задачи.** На основе решения задачи Ляме для цилиндра определим функцию  $\phi(\xi)$ , описывающую закон распределения ПН, в виде

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\xi_0^{-2} - 1} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right)$$

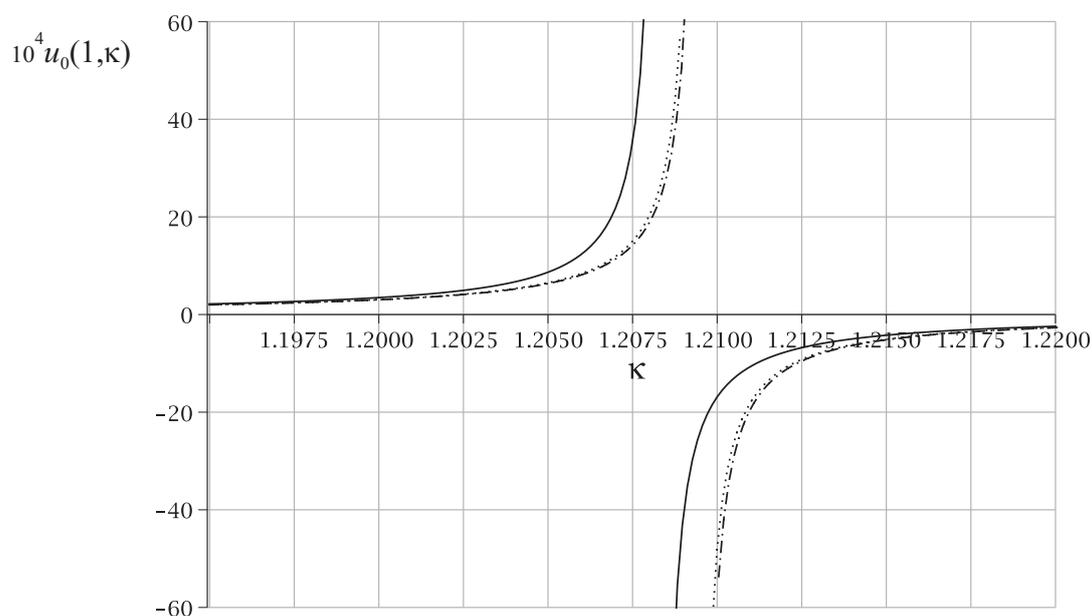
и соответствующую функцию остаточного радиального смещения

$$\tilde{u}_0(\xi) = \tau \frac{1}{(1 - c^2)(\xi_0^{-2} - 1)} \left( (1 - c)\xi + \frac{1 + c}{\xi} \right).$$

Тогда на основе построенного численного решения проведем анализ изменения АЧХ  $\tilde{u}_0(1, \kappa)$  для различных значений параметра  $\tau$ , характеризующего уровень ПН. На рисунке 1 показаны три графика АЧХ в окрестности первого резонанса: сплошной линией при  $\tau = 10^{-3}$ , точками —  $\tau = 10^{-4}$ , пунктирной —  $\tau = 10^{-5}$ , параметр  $\xi_0 = 0.6$ .

Из приведенных графиков видна однозначная зависимость характера изменения АЧХ от параметра  $\tau$ . Таким образом, решение обратной задачи об определении уровня ПН может быть получено по данным об изменении значений резонансной частоты.

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за предложенную задачу и методы ее исследования.

Рисунок 1 – Графики АЧХ при различных значениях параметра  $\tau$ 

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00354) и гранта Президента Российской Федерации (проект МК-5440.2016.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация: монография. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2014. 206 с.
- [2] Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Vatulyan A. O. Vibration of a prestressed tube in the presence of plastic zone // Journal of Sound and Vibration. 2016. V. 375. P. 92–101.
- [3] Kuang Z. B. Theory of Electroelasticity. NY.:Springer, 2014. 431 p.
- [4] Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

**Dudarev V. V., Mnukhin R. M.** *By definition of prestress of electroelastic cylinder.* The problem of radial steady state vibrations for prestressed cylindrical piezoceramic disc is presented. Oscillations are excited by variable electrical potential difference at the end faces. It is assumed that the field of pre-stress (PS) is created by a hidden internal pressure. Within the framework of the modern model of the electroelastic body we formulate the direct problem of determining the displacement field and the electric potential. With considering the conditions of plane stress averaging the thickness of the cylinder is done. Solution of the problem of determining the function of the radial displacement is realized numerically. The analysis of changes of the amplitude-frequency characteristics (AFC) of the object is described for different levels of the PS. We formulate the inverse problem of determining prestress according to the values of the first resonant frequency. An approach to solve it is proposed.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛИТ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМИ СЛОЯМИ ИЗ МАТЕРИАЛОВ ТРЕЛОАРА И МУНИ–РИВЛИНА

Еремеев В. В.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Проведен анализ устойчивости трехслойных прямоугольных плит из несжимаемых моделей материалов Трелоара и Муни–Ривлина. Для каждого материала рассматривается трехслойная плита с начальными напряжениями, действующими во внутреннем слое. Потеря устойчивости равновесия исследуется методом наложения малых деформаций на конечные. Сформулирована линеаризованная задача для трехслойной плиты с предварительно напряженным средним слоем, которая использует линеаризованные уравнения состояния различных моделей материалов, линеаризованные уравнения равновесия и граничные условия, дополненные соответствующим линеаризованным условием несжимаемости. Проведен анализ зависимости критических нагрузок от параметров начальной деформации среднего слоя. Исследования выявили как количественные, так и качественные отличия потери устойчивости плит из различных материалов.

**1. Постановка задачи устойчивости.** Будем рассматривать трехслойные плиты со сторонами  $a$  и  $b$  толщиной  $2H$ . Верхний и нижний слои плиты имеют толщину  $h$ , а средний —  $2h_1$ , так что полутолщина плиты дается формулой  $H = h_1 + h$ . Средний слой толщиной  $-h_1 \leq x_3 \leq h_1$  предварительно подвергнут однородной деформации и затем жестко скреплен с верхним  $h_1 \leq x_3 \leq h$  и нижним  $-h \leq x_3 \leq -h_1$  слоями по двум плоскостям  $x_3 = -h_1, x_3 = h_1$ . В работе рассматриваются модели несжимаемых материалов: Муни–Ривлина и Трелоара. Для обеих моделей материалов постановка задачи и геометрические размеры плит идентичны. Уравнения равновесия нелинейной теории упругости при отсутствии массовых сил относительно отсчетной конфигурации записываются следующим образом [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{C}), \quad (1)$$

где  $\operatorname{div}$  — оператор градиента в отчетной конфигурации,  $\mathbf{D}$  — тензор напряжений Пиолы,  $\mathbf{C}$  — градиент деформации.

Тензоры  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{C}$  зависят, вообще говоря, от отчетной конфигурации. Пусть мы имеем две отчетные конфигурации  $\kappa$  и  $\kappa'$ , а  $\mathbf{C}$  ( $\kappa \rightarrow \chi$ ) и  $\mathbf{C}'$  ( $\kappa' \rightarrow \chi$ ) — соответствующие им градиенты деформации, отвечающие одной текущей конфигурации  $\chi$ .

Справедлива [1] следующая формула преобразования градиента деформации при изменении отчетной конфигурации:  $\mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}'$ , где  $\mathbf{P}$  — градиент деформации при переходе от одной отчетной конфигурации к другой:  $\mathbf{P}$  ( $\kappa \rightarrow \kappa'$ ).

Записывая выражения для тензоров Пиолы в разных отчетных конфигурациях

$$\mathbf{D} = (\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{D}' = (\det \mathbf{C}') \mathbf{C}'^{-1} \cdot \mathbf{T},$$

где  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений Коши, получаем связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{D}'$ :

$$\mathbf{D}' = (\det \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}. \quad (2)$$

Для несжимаемого материала определители градиента деформации в разных отсчетных конфигурациях и градиента деформации перехода равны единице:  $\det \mathbf{C} = \det \mathbf{C}' = \det \mathbf{P} = 1$ .

В качестве уравнений состояния примем модели несжимаемых материалов Муни — Ривлина и Трелоара (неогуковского материала). Удельная потенциальная энергия деформации  $W$  и тензор напряжений Пиолы относительно ненапряженной отсчетной конфигурации  $\kappa$  для материала Муни — Ривлина задаются следующими выражениями

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = [\kappa_1(I_1, I_2) + I_1 \kappa_2(I_1, I_2)] \mathbf{C} - \kappa_2(I_1, I_2) \mathbf{G} \cdot \mathbf{C} - p \mathbf{C}^{-T}, \quad (4)$$

где  $C_1 = \mu/2$ ,  $C_2 = 0.2C_1 = \mu/10$ ,  $I_1 = \text{tr}(\mathbf{G})$ ,  $I_2 = \text{tr}(\mathbf{G}^{-1})$  — инварианты,

$$\kappa_1(I_1, I_2) = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \kappa_2(I_1, I_2) = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2},$$

$\mu$  — материальная постоянная, имеющая смысл модуля сдвига,  $p$  — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию. Здесь для простоты в расчетах будет рассмотрен случай, когда упругие постоянные связаны зависимостью  $C_2 = 0.2C_1$ .

Тензор напряжений Пиолы для материала Муни относительно преднапряженной отсчетной  $\kappa'$  конфигурации имеет вид

$$\mathbf{D}' = [\phi_1(I'_1, I'_2) + I'_1 \phi_2(I'_1, I'_2)] \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}' - \phi_2(I'_1, I'_2) \mathbf{L} \cdot \mathbf{G}' \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}' - p'(\mathbf{C}')^{-T}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \alpha^2 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \beta^2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + (\alpha\beta)^{-2} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3,$$

$$\phi_1(I'_1, I'_2) = 2 \frac{\partial W'}{\partial I'_1}, \quad \phi_2(I'_1, I'_2) = 2 \frac{\partial W'}{\partial I'_2},$$

$$I'_1 = \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{G}'), \quad I'_2 = \text{tr}[(\mathbf{G}')^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-1}].$$

Для исследования устойчивости равновесия применим метод линеаризации нелинейных уравнений [1]. Суть метода состоит в том, что на известное напряженное состояние тела, называемое невозмущенным или докритическим, накладывается малая деформация, которая определяется из линеаризованных уравнений равновесия и линеаризованных граничных условий. Далее разыскиваются такие параметры нагружения, при которых однородная линеаризованная краевая задача допускает нетривиальные решения. Рассмотрим возмущения вида  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \eta \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \eta \dot{\mathbf{D}} + \dots$ ,

$$\dot{\mathbf{D}} = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{C}_0 + \eta \text{grad} \mathbf{w}) \right|_{\eta=0},$$

где  $\eta$  — малый параметр,  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор точек тела в возмущенном деформированном состоянии,  $\mathbf{w}$  — вектор малых добавочных перемещений, а знак «0» внизу относится к невозмущенному состоянию. Подставляя эти разложения в нелинейные уравнения равновесия (1) и граничные условия, удерживая члены только

первого порядка относительно параметра  $\eta$ , получим линейную однородную краевую задачу для вектор-функции  $\mathbf{w}$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}} = & \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{w} \cdot (\mathbf{C})^T) 2C_2 \mathbf{C} + [2C_1 + \operatorname{tr}(\mathbf{G}) 2C_2] \nabla \mathbf{w} - 2C_2 (\nabla \mathbf{w} \cdot (\mathbf{C})^T + \\ & + \mathbf{C} \cdot (\nabla \mathbf{w})^T) \cdot \mathbf{C} - 2C_2 \mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{w} + p_0 (\mathbf{C})^{-T} \cdot (\nabla \mathbf{w})^T \cdot (\mathbf{C})^{-T} - \dot{p} (\mathbf{C})^{-T}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично при помощи (5) определяется  $\dot{\mathbf{D}}'$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}' = & \operatorname{tr}(\mathbf{L} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot (\mathbf{C}')^T) 2C_2' \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}' + [2C_1' + \operatorname{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{G}') 2C_2'] \mathbf{L} \cdot \nabla \mathbf{w} - \\ & - 2C_2' \mathbf{L} \cdot (\nabla \mathbf{w} \cdot (\mathbf{C}')^T + \mathbf{C}' \cdot (\nabla \mathbf{w})^T) \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}' - 2C_2' \mathbf{L} \cdot \mathbf{G}' \cdot \mathbf{L} \cdot \nabla \mathbf{w} + \\ & + p_0' (\mathbf{C}')^{-T} \cdot (\nabla \mathbf{w})^T \cdot (\mathbf{C}')^{-T} - \dot{p}' (\mathbf{C}')^{-T}. \end{aligned} \quad (7)$$

При  $C_2 = 0$  выражения (3)–(7) соответствуют неогуковскому материалу и приводятся в [2].

Для обеих моделей материалов также необходимо рассматривать линейризованное условие несжимаемости

$$\operatorname{tr}(\mathbf{C}_0^{-1} \cdot \nabla \mathbf{w}) = 0. \quad (8)$$

Граничные условия на свободных поверхностях плиты таковы

$$\begin{aligned} x_1 = 0, a : \quad & w_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad w_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \dot{D}_{11} = 0, \\ x_2 = 0, b : \quad & w_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad w_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \dot{D}_{22} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Линейризованные краевые условия и условия на границах между слоями даются формулами

$$\begin{aligned} z = -H : \quad & \dot{D}_{3k} = 0, \\ z = -h_1 : \quad & \dot{D}'_{3k} = \dot{D}_{3k}, \quad w'_k = w_k, \\ z = h_1 : \quad & \dot{D}'_{3k} = \dot{D}_{3k}, \quad w'_k = w_k, \\ z = H : \quad & \dot{D}_{3k} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Градиенты деформации имеют вид

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \beta \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + (\alpha \beta)^{-1} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 = & \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad h_1 \leq x_3 \leq H, \quad -H \leq x_3 \leq -h_1, \\ \mathbf{C}'_0 = & \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad -h_1 \leq z \leq h_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lambda_1 = \operatorname{const} > 0, \quad \lambda_2 = \operatorname{const} > 0.$$

В (11)  $\alpha$  и  $\beta$  — кратности удлинения среднего слоя в направлении осей координат. В (12)  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — постоянные кратности удлинений в начальном деформированном состоянии составной плиты.

Величины  $p_0$  и  $p'_0$  находятся из невозмущенного состояния плиты, то есть уравнений  $D_3 = 0$  и  $D'_3 = 0$ .

**2. Уравнения потери устойчивости.** Разыскиваем решение линеаризованной задачи в форме

$$\mathbf{w} = w_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_1 + w_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_2 + w_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_3. \quad (13)$$

Для каждого слоя решение разыскивается в виде разложения по тригонометрическим функциям вида

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1(x_3) \cos \frac{\pi n x_1}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b}, & w_2 &= W_2(x_3) \sin \frac{\pi n x_1}{a} \cos \frac{\pi m x_2}{b}, \\ w_3 &= W_3(x_3) \sin \frac{\pi n x_1}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b}, & \dot{p} &= P(x_3) \sin \frac{\pi n x_1}{a} \sin \frac{\pi m x_2}{b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Напомним, что именно такой выбор функций (14) позволяет точно удовлетворить граничным условиям.

Таким образом, при помощи (11)–(14) найдя выражения линеаризованных тензоров Пиолы для среднего и внешних слоев, подставив их в (1) и дополнив соответствующими условиями на границах слоев, а также условием несжимаемости, получим систему дифференциальных уравнений для неизвестных функций  $W_1'(x_3)$ ,  $W_2'(x_3)$ ,  $W_3'(x_3)$ ,  $P'(x_3)$  для среднего слоя и  $W_1(x_3)$ ,  $W_2(x_3)$ ,  $W_3(x_3)$ ,  $P(x_3)$  для крайних слоев для обеих моделей материалов. Данная система здесь не приводится в силу громоздкости. Данная задача рассматривалась, как спектральная задача относительно параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Аналогичные рассуждения проведены для неогукковского материала при  $C_2 = 0$ .

**3. Анализ потери устойчивости и сравнение результатов для разных материалов.** Далее рассматривается случай комбинированного нагружения плиты. Усилия определены формулой  $N_k = \int_{-H}^H D_k dx_3$ . Кривые критических усилий строятся по значениям кратностей удлинения плиты, удовлетворяющих критическим соотношениям между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , при которых краевая задача для составной плиты имеет нетривиальные решения.

На левом графике рис. 1 сравниваются критические усилия для трехслойных плит из материалов Муни–Ривлина и неогукковского при различных параметрах начальной деформации среднего слоя  $\alpha$ ,  $\beta$ . Из рисунка видно, что при параметрах  $\alpha = \beta = 1$  и  $\alpha = \beta = 1.15$  потеря устойчивости для плит из материала Муни наступает при больших значениях сжимающих усилий, чем для плит из неогукковского материала. Однако, для при  $\alpha = \beta = 0.85$  наблюдается обратный эффект — плита из материал Муни теряет устойчивость при меньших сжимающих нагрузках, чем плита из неогукковского материала.

На правой части рис. 1 изображены кривые критических усилий для однородной плиты из материала Муни и для плит со сжатым в двух направлениях средним слоем. Из рисунка видно, что при увеличении предварительного сжатия среднего слоя величина сжимающих усилий уменьшается, а при  $\alpha \leq 0.85$ ,  $\beta \leq 0.85$  потеря устойчивости возможна при растягивающих усилиях, чего не наблюдалось для плит из неогукковского материала.

Результаты получены для плиты полутолщиной  $H = 0.05$ . Полутолщина среднего слоя  $h = 0.025$ , модули сдвига слоев равны между собой  $\mu = \mu_1 = 1$ .

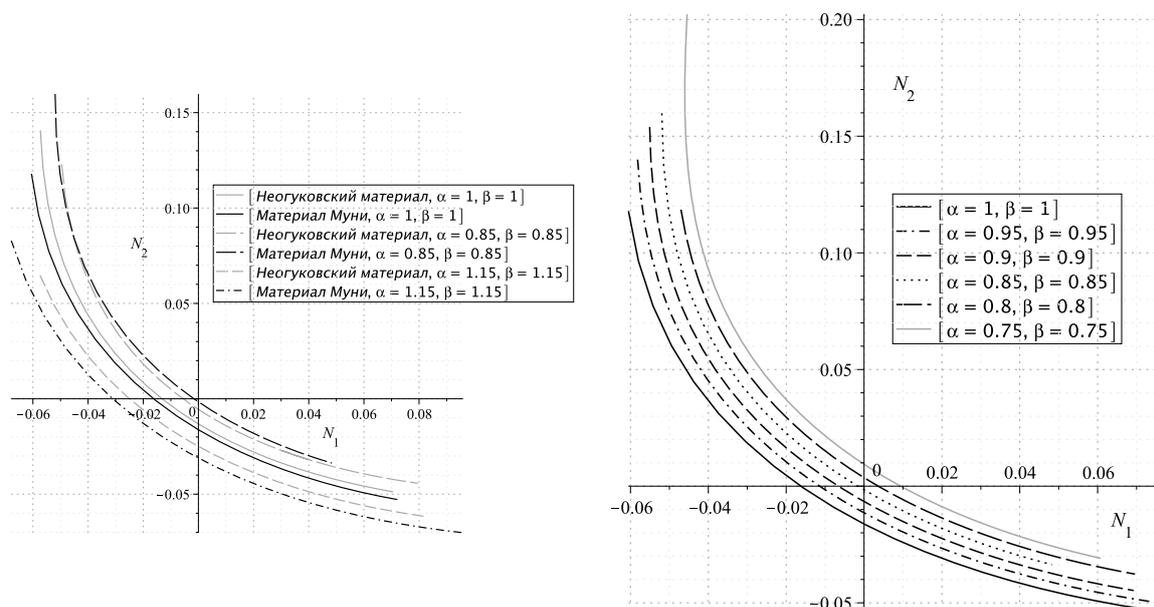


Рисунок 1 – Кривые критических усилий при различных значениях параметров начальной деформации среднего слоя

Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 9.665.2014/К.

Автор выражает благодарность научному руководителю Л.М. Зубову.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1990. 512 с.
- [2] Еремеев В. В., Зубов Л. М. Устойчивость трехслойной прямоугольной плиты с предварительно напряженным слоем // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. № 1. С. 51–62.

**Eremeev V. V.** *Stability of three-layered plates with pre-stressed layers of materials Treloar and Mooney–Rivlin.* Within the framework we analyze of the stability of three-layer rectangular plates of incompressible material models Treloar and Mooney–Rivlin. Three-layer plate with initial stresses acting in the inner layer is considered for each material. Loss of balance stability is investigated by superimposing small deformations on finite. Linearized problem was formulated for sandwich plates with prestressed middle layer, which uses a linearized equation of state of different material models, linearized equilibrium equations and boundary conditions, supplemented by the relevant linearized incompressibility condition. The dependence of the critical loads on the parameters of the initial deformation of the middle layer was investigated. Studies have shown, both quantitative and qualitative differences of stability loss of plates made of different materials.

# ИСПАРЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ КАПЛИ

Жуков М. Ю.<sup>1,2</sup>, Ширяева Е. В.<sup>1</sup>, Васильев А. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Владикавказский научный центр РАН

При помощи процедуры пространственного осреднения построены различные модели, описывающие поведение испаряющейся капли, расположенной на плоскости. В основе всех моделей лежат только два ключевых предположения — поток массы с поверхности при испарении пропорционален подводимому к ней потоку тепла, свободная граница является квазиравновесной границей раздела фаз жидкость–пар. Исследована одна из простейших бездиссипативных пространственно-двумерных моделей в предположении стационарности и вращательной симметрии.

**1. Основные уравнения.** Для исследования поведения испаряющейся капли (см. рис. 1) используем систему уравнений в безразмерных переменных

$$\operatorname{div}_0 \mathbf{u} + \nabla_3 v_3 = 0,$$

$$\mathbf{u}_t + \operatorname{div}_0(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_3(\mathbf{u}v_3) = -\nabla_0 q + \mu \Delta_0 \mathbf{u} + \mu \nabla_3^2 \mathbf{u},$$

$$(v_3)_t + \operatorname{div}_0(v_3 \mathbf{u}) + \nabla_3(v_3 v_3) = -\nabla_3 q + \mu \Delta_0 v_3 + \mu \nabla_3^2 v_3 + \beta_0 \theta,$$

$$\theta_t + \operatorname{div}_0(\mathbf{u}\theta) + \nabla_3(v_3 \theta) = \delta \Delta_0 \theta + \delta \nabla_3^2 \theta,$$

где  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, v_3)$  — скорость,  $\mathbf{u}$  — горизонтальная скорость,  $v_3$  — вертикальная скорость,  $q$  — давление,  $\theta$  — температура,  $\mu, \delta$  — коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности,  $\beta_0$  — коэффициент теплового расширения,  $\nabla_0, \operatorname{div}_0, \Delta_0$  — «плоские» операторы дифференцирования.



Рисунок 1 – Схема испаряющейся капли жидкости

Для описания межфазной границы используем следующие предположения.

1. Поток массы через поверхность при испарении пропорционален подводимому к поверхности потоку тепла, что хорошо согласуется с обычным представлением о фазовом переходе.

2. Свободная граница является границей раздела фаз жидкость — газ (пар), и фазовый переход является квазиравновесным, то есть на границе отсутствует скачок температуры и давления.

Межфазную границу задаем уравнением (параметризация Монжа)

$$\Phi(\mathbf{x}, x_3, t) \equiv x_3 - H(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}, \quad \mathcal{D}_n = -\frac{\Phi_t}{|\nabla\Phi|},$$

где  $H(\mathbf{x}, t)$  — функция, определяющая межфазную границу (области, занимаемой жидкостью, соответствует  $\Phi < 0$ ),  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathcal{D}_n$  — нормаль к границе и скорость движения границы.

Условие Ренкина–Гюгонио на разрыве имеет вид

$$\mathcal{D}_n[\rho] \Big|_{\Phi=0} = [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \Big|_{\Phi=0},$$

где  $[\cdot] \Big|_{\Phi=0}$  — означает величину разрыва функции на линии  $\Phi = 0$ .

Вычисление материальной производной

$$\frac{1}{|\nabla\Phi|} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{|\nabla\Phi|} (\Phi_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi), \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

с учетом выражений для  $\mathbf{n}$ ,  $\mathcal{D}_n$ , приводит к кинематическому условию на границе раздела

$$\frac{1}{|\nabla\Phi|} \frac{d\Phi}{dt} = -\mathcal{D}_n + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \left( \frac{1}{|\nabla\Phi|} \frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad \text{без переноса массы} \right).$$

Для определения  $\mathcal{D}_n$  считаем, что с одной стороны поверхности находится только лишь жидкая фаза с плотностью  $\rho_f$ , движущаяся со скоростью  $\mathbf{v}_f$ , а с другой стороны — лишь газовая фаза с плотностью  $\rho_g$ , движущаяся со скоростью  $\mathbf{v}_g$ . Тогда условие на разрыве имеет вид

$$\mathcal{D}_n = \frac{\rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n} - \rho_g \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}}{\rho_f - \rho_g} \quad \text{или} \quad -\mathcal{D}_n + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\frac{(\mathbf{i}_f - \mathbf{i}_g) \cdot \mathbf{n}}{\rho_f - \rho_g} = -\varepsilon V_n,$$

где  $\mathbf{i}_f = \rho_f(\mathbf{v}_f - \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{i}_g = \rho_g(\mathbf{v}_g - \mathbf{v})$  — локальные потоки массы жидкости и пара,  $\varepsilon V_n$  — обозначение для скорости переноса массы через межфазную границу.

Тогда кинематическое условие на границе принимает вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\varepsilon \gamma V_n, \quad \gamma = |\nabla\Phi|, \quad \Phi = x_3 - H(\mathbf{x}, x_3, t), \quad H_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 H - v_3 = \varepsilon \gamma V_n.$$

Учет термодинамики фазового перехода и уравнения состояния идеального газа (при  $\rho_f \gg \rho_g$ ) дает соотношение

$$|\varepsilon V_n| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|}{\rho_g Q_{fg}},$$

где  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}$  — плотность потока тепла, поступающего к границе,  $Q_{fg}$  — скрытая теплота паробразования.

**2. Осреднение по толщине капли.** Введем оператор осреднения  $\mathcal{P}$  при помощи соотношения

$$(\mathcal{P}f)(x_1, x_2, t) = \frac{1}{h(x_1, x_2, t)} \int_0^{h(x_1, x_2, t)} f(x_1, x_2, z, t) dz,$$

где

$$H = \varepsilon h, \quad x_3 = \varepsilon z.$$

Здесь  $\varepsilon$  — безразмерный параметр, характеризующий толщину капли.

Легко показать, что  $\mathcal{P}$  является проектором

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}, \quad \mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}, \quad f = \mathcal{P}f + \mathcal{Q}f, \quad \mathcal{P}\mathcal{Q}f = 0, \quad \mathcal{Q}\mathcal{P}f = 0,$$

где  $\mathcal{I}$  — единичное отображение.

Используя свойства оператора осреднения  $\mathcal{P}$ , легко получить осреднение уравнений, полагая, что границы области заданы уравнениями (см. рис. 1)

$$z = 0 \quad \text{и} \quad z = h(x_1, x_2, t),$$

выполнено кинематическое условие с учетом эффекта испарения

$$h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 h - w = \gamma V_n, \quad \gamma = (1 + \varepsilon^2 (\nabla_0 h)^2)^{1/2}, \quad z = h(x_1, x_2, t),$$

и граница  $z = 0$  непроницаема для жидкости

$$w|_{z=0} = 0.$$

В частности, осреднение уравнения несжимаемости  $\operatorname{div}_0 \mathbf{u} + \nabla_3 v_3 = 0$  приводит к уравнению, описывающему поведение свободной поверхности

$$h_t + \operatorname{div}_0(h\mathcal{P}\mathbf{u}) = \gamma V_n.$$

Применение к исходным уравнениям операции осреднения приведет к системе незамкнутых уравнений относительно величин  $h$ ,  $\mathcal{P}\mathbf{u}$ ,  $\mathcal{Q}\mathbf{u}$ ,  $\mathcal{P}q$ ,  $\mathcal{Q}q$ ,  $\mathcal{P}\theta$ ,  $\mathcal{Q}\theta$ , что, в свою очередь, потребует использования какой-либо процедуры замыкания уравнений. Для достаточно пологих капель хороший результат дает использование теории смазки — выбор линейного по  $z$  профиля функций  $\mathcal{Q}\mathbf{u}$ ,  $\mathcal{Q}\theta$ .

Исходные величины разыскиваем в виде

$$w = \mathcal{P}w + \mathcal{Q}w, \quad \theta = \mathcal{P}\theta + \mathcal{Q}\theta, \quad q = \mathcal{P}q + \mathcal{Q}q, \quad \mathbf{u} = \mathcal{P}\mathbf{u} + \mathcal{Q}\mathbf{u},$$

и требуем

$$\mathcal{Q}\mathbf{u} = \left(z - \frac{h}{2}\right) A_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{Q}\theta = \left(z - \frac{h}{2}\right) A_{\theta}(\mathbf{x}, t).$$

Процедура эквивалентна разложению решения в ряды по  $z$  с последующим феноменологическим «обрыванием» ряда. Заметим, что указание зависимостей функций  $\mathcal{Q}w$ ,  $\mathcal{Q}q$  от  $z$  не требуется — такие зависимости будут автоматически определены выражениями для  $\mathcal{Q}\mathbf{u}$ ,  $\mathcal{Q}\theta$ .

При использовании достаточно очевидных краевых условий

$$\mathbf{u}|_{z=0} = 0, \quad \theta|_{z=0} = 0,$$

можно связать  $A_{\mathbf{u}}$ ,  $A_{\theta}$  со средними величинами

$$\mathcal{Q}\mathbf{u} = \frac{2}{h} \left(z - \frac{h}{2}\right) \mathcal{P}\mathbf{u}, \quad \mathcal{Q}\theta = \frac{2}{h} \left(z - \frac{h}{2}\right) \mathcal{P}\theta.$$

Опуская громоздкие преобразования, приведем окончательный вид осредненных уравнений (опущены индексы у операторов  $\text{div}_0$ ,  $\Delta_0$ )

$$\begin{aligned} h_t + \text{div}(h^2 \mathbf{s}) &= -V_0 \varphi, \quad \nabla(h - \sigma \Delta h)|_{t=0} = 0, \\ (h^2 \mathbf{s})_t + \text{div}((\beta_r + 1)h^3 \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) + 2V_0 h \varphi \mathbf{s} &= \mu h^2 \Delta \mathbf{s}, \\ (h^2 \varphi)_t + \text{div}((\beta_r + 1)h^3 \varphi \mathbf{s}) + 2V_0 h \varphi^2 &= \delta h^2 \Delta \varphi, \quad \beta_r = 1/3. \end{aligned}$$

Здесь неизвестными функциями являются  $h(\mathbf{x}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ , которые связаны со средними значениями соотношениями

$$\frac{2\mathcal{P}\theta}{h} = \varphi, \quad \frac{\mathcal{P}\mathbf{u}}{h} = \mathbf{s}, \quad (\gamma V_n = -V_0 \varphi).$$

Четкая физическая интерпретация величин  $\varphi$ ,  $\mathbf{s}$  затруднительна. В частности,  $\varphi$  — плотность потока тепла, а также скорость переноса массы через межфазную границу, а также с точностью до множителя  $h$  — температура ( $\sim h\varphi$ ). Аналогично, величина  $\mathbf{s}$  может трактоваться как скорость, а также как производная  $\mathbf{u}_z$ .

**3. Асимптотическая модель для невязкой ( $\mu = 0$ ) и нетеплопроводной ( $\delta = 0$ ) капли.** Предварительный анализ показал, что для описания поведения свободной поверхности капли можно ограничиваться бездиссипативными моделями. Одна из таких простейших бездиссипативных пространственно-двумерных моделей представляет собой систему уравнений

$$\begin{aligned} h_t + \text{div}(h^2 \mathbf{s}) &= -V_0 \varphi, \quad \nabla(h - \sigma \Delta h)|_{t=0} = 0, \\ \mathbf{s}_t + (\beta_r - 1)h \mathbf{s} \text{div} \mathbf{s} + (\beta_r + 1)h \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{s} &= 0, \\ \varphi_t + (\beta_r - 1)h \varphi \text{div} \mathbf{s} + (\beta_r + 1)h \mathbf{s} \cdot \nabla \varphi &= 0. \end{aligned}$$

**4. Квазистационарная вращательно-симметричная капля.** Предположения о вращательной симметрии и стационарности функций  $s$ ,  $\varphi$

$$\mathbf{s} = (s_0 r, 0), \quad \varphi = \varphi_0 r, \quad h = h(r, t) \quad (s_0 > 0),$$

где  $s_0$ ,  $\varphi_0$  — некоторые константы, позволяют существенно упростить уравнения, описывая лишь поведение свободной поверхности

$$\eta_\tau + \eta \eta_r = -v_0 r^2, \quad \eta(r, t) = r h(r, t), \quad \tau = 2s_0 t, \quad v_0 = V_0 \varphi_0 / (2s_0) > 0.$$

Начальное положение  $h_0$  свободной поверхности определяется решением уравнения  $h_0 - \sigma \Delta h_0|_{t=0} = 0$  и имеет вид

$$h_0(r) = h_0(0) \frac{I_0(y) - I_0(y_0)}{1 - I_0(y_0)}, \quad y = \frac{r}{\sqrt{\sigma}}, \quad h_0(r_0) = 0,$$

где  $h_0(0)$  — начальная высота капли,  $r_0$  — начальный радиус капли в плоскости  $z = 0$ ,  $I_0(y)$  — модифицированная функция Бесселя.

Метод характеристик приводит к задаче Коши

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -v_0 r^2, \quad \frac{dr}{d\tau} = \eta, \quad \frac{d}{d\tau} = \partial_\tau + \eta \partial_r.$$

$$\eta|_{t=0} = ah_0(a), \quad r|_{t=0} = a,$$

решение которой записывается в неявной форме при помощи эллиптической функции Вейерштрасса. Однако для построения решения гораздо легче использовать численные методы, непосредственно интегрируя систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

В частности, для некоторого набора параметров на рис. 2 представлено поведение капли в различные моменты времени

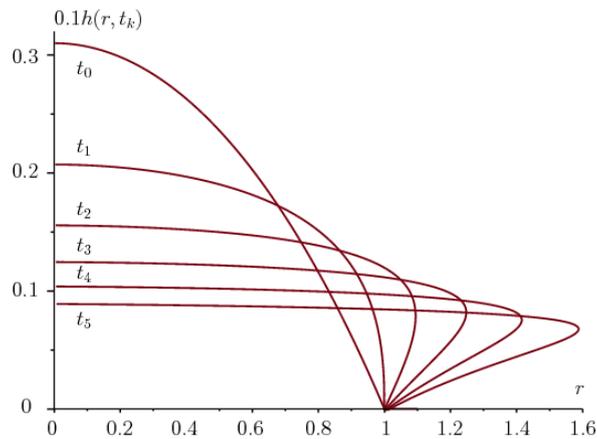


Рисунок 2 – Свободная поверхность капли в моменты  $\tau_k/(2s_0) = t_k = 0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0$  в случае параметров  $V_0 = 0.1, \varphi_0 = 0.3, s_0 = 0.2, h_0(0) = 3.1, r_0 = 1, \sigma = 1$

Обратим внимание, что реальная свободная поверхность является полой, так как  $x_3 = H = \varepsilon h$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Полякова Н. М. Моделирование испарения капли жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. 208 с.

**Zhukov M. Yu., Shiryaeva E. V., Vasilev A. V.** *Evaporation of the rotation-symmetric drop.* The different models describing the behavior of evaporating drops located on the plane are constructed with the help depth-averaged. We use two key assumptions: (i) the flow of masses from the free surface proportional to the heat flow, (ii) free boundary is a quasi-equilibrium liquid-vapor phase interface. Assuming the quasi stationarity and rotation symmetry we investigate the simplest non-dissipative 2D model.

# ПОСТРОЕНИЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Жуков М. Ю.<sup>1,2</sup>, Ширяева Е. В.<sup>1</sup>, Щитов Ф. А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Владикавказский научный центр РАН

Представлен метод построения явного решения для некоторых систем квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка, описывающих в бездиффузионном приближении широкий круг процессов переноса массы в многокомпонентных смесях, таких как электрофорез, хроматография, центрифугирование.

**1. Введение.** Система квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка (гиперболические законы сохранения), описывающая в бездиффузионном приближении широкий круг процессов переноса массы в многокомпонентных смесях, таких как электрофорез, хроматография, центрифугирование, седиментация, в безразмерных переменных в пространственно одномерном случае имеет вид

$$\partial_t u^k + \partial_x (\mu^k u^k E) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $u^k(x, t)$  — концентрации компонент смеси,  $\mu^k$  — скорости переноса компонент,  $E(u^1, \dots, u^n)$  — интенсивность внешнего поля.

Характерной особенностью системы (1) в случае электрофореза, хроматографии, центрифугирования и седиментации является зависимость интенсивности внешнего поля  $E$  от «коллективного» взаимодействия компонент смеси, которая после соответствующих замен переменных представима в форме

$$E = \frac{E_0}{1 + s}, \quad s = \sum_{k=1}^n u^k, \quad E_0 = \text{const}. \quad (2)$$

В частности, в случае электрофореза, которым в дальнейшем и ограничимся, величина  $E$  — интенсивность электрического поля,  $\mu^k$  — подвижности компонент в электрическом поле, для простоты считаем  $E_0 = 1$  [1, 2].

С математической точки зрения система (1), (2) примечательна тем, что допускает запись в инвариантах Римана  $R^k$

$$\partial_t R^k + \lambda^k(\mathbf{R}) \partial_x R^k = 0, \quad \mathbf{R} = (R^1, \dots, R^n), \quad \lambda^k = R^k \prod_{i=1}^n R^i, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где  $\lambda^i(\mathbf{R})$  определяют характеристики и сделано масштабирование  $t \rightarrow t \prod_{k=1}^n \mu^k$ .

Решение (3) представимо в неявной форме (обобщенный метод годографа)

$$x - \lambda^i(\mathbf{R})t = w^i(\mathbf{R}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где  $w^i(\mathbf{R})$  — коммутирующие потоки, удовлетворяющие некоторой системе уравнений в частных производных [3].

В случае (2) зависимость  $R^k(u^1, \dots, u^n)$  и обратные зависимости  $u^k(R^1, \dots, R^n)$  задаются корнями полинома  $L(R)$  и соотношениями [1, 2, 4]

$$L(R) \equiv M \prod_{k=1}^n (\mu^k - R) - R \sum_{j=1}^n u^j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mu^k - R), \quad u^s = \frac{\prod_{k=1}^n \mu^k \prod_{k=1}^n (\mu^s - R^k)}{\mu^s \prod_{k=1}^n R^k \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n (\mu^s - \mu^k)}. \quad (5)$$

В работе [5] для так называемых  $\varepsilon$ -систем построен общий вид коммутирующих потоков при  $\varepsilon = m = 1, 2, \dots$

$$w^k = \lambda^k \frac{\partial H}{\partial R^k}, \quad H(\mathbf{R}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{m-1}}{\partial (R^j)^{m-1}} \frac{A^j(R^j)}{\prod_{s=1, s \neq j}^n (R^s - R^j)^m}, \quad (6)$$

где  $A^j(R^j)$  — произвольные функции, определяемые начальными условиями для уравнений (3). Уравнения (1), (2) и соответствующая система (3) относятся к случаю  $m = 1$ .

**2. Задача Коши.** Для уравнений (3) поставим начальные условия

$$\partial_t R^k + \lambda^k(\mathbf{R}) \partial_x R^k = 0, \quad \lambda^k = R^k \prod_{j=1}^n R^j, \quad k = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$R^k(x, 0) = R_0^k(x), \quad k = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где  $R_0^k(x)$  — известные функции.

**Замечание.** Соотношения (8) выбраны при  $t = 0$  для простоты изложения. В общем случае дополнительные данные для уравнений (7) можно задавать на произвольной достаточно гладкой кривой  $\Gamma = \{x = x(\varphi), t = t(\varphi)\}$  и, в частности, при  $x = 0$ . Отметим, что структура уравнений (1) сохраняется при замене  $t \rightleftharpoons x$ , то есть название «координата»  $x$  и «время»  $t$  в данном случае условно, что особенно ярко видно на примере уравнений хроматографии (см., в частности, [4]).

**3. Определение функции  $H(\mathbf{R})$ .** Очевидно, что задачу Коши (7), (8) можно считать решенной, по крайней мере, в неявной форме (4), если по начальным данным (8) удастся определить коммутирующие потоки  $w^k(\mathbf{R})$ , что эквивалентно отысканию функций  $A^k(R^k)$  в выражении (6) для  $H(\mathbf{R})$ .

В случае уравнений хроматографии способ определения функции  $A^k(R^k)$  указан в [6]. Далее показан метод определения функций  $A^k(R^k)$ , основанный на теории разделенных разностей, который существенно отличается от метода работы [6], является более общим и без труда обобщаемым на случай произвольных  $\varepsilon$ -систем с натуральным значением  $\varepsilon$ .

Полагая в (4)  $t = 0$ , с учетом (6) имеем систему уравнений в частных производных первого порядка для определения функций  $A^k(r^k)$

$$\frac{x}{r^k \prod_{s=1}^n r^s} = \frac{\partial H}{\partial r^k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad H = \sum_{k=1}^n \frac{A^k(r^k)}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n (r^s - r^k)}. \quad (9)$$

Здесь под  $r^k$ , используемыми в качестве аргумента, следует понимать функции  $R_0^k(x)$ , а оператор дифференцирования  $\partial/\partial r^k$  соответствует  $\partial/\partial R^k$  при  $t = 0$ .

Функция  $H$  с точностью до знака совпадает с разделенной разностью для некоторой функции, которая в точках  $r^k, k = 1, \dots, n$  (узлах интерполяции) принимает значения  $A^k(r^k)$ , т. е.  $H = (-1)^{n-1}[A^1(r^1), \dots, A^n(r^n)]$ .

Построим интерполяционный полином Ньютона  $F(z)$  по узлам  $r^1, \dots, r^n, r^{n+1} = 0$ , считая, что в этих узлах значения полинома, соответственно, равны  $r^1 A^1, \dots, r^n A^n, F(0)$ . Введем обозначения для конечных разностей

$$H^m = \sum_{k=1}^m \frac{r^k A^k}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^m (r^s - r^k)} = (-1)^{m-1}[r^1 A^1, \dots, r^m A^m], \quad m = 1, \dots, n, \quad (10)$$

$$H^{n+1} = - \sum_{k=1}^n \frac{A^k}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n (r^s - r^k)} + \frac{F(0)}{\prod_{s=1}^n r^s}. \quad (11)$$

Интерполяционный полином Ньютона записывается в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} H^k \prod_{s=1}^{k-1} (z - r^s) + (-1)^n H^{n+1} \prod_{s=1}^n (z - r^s) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} g_k z^k, \quad (12)$$

где  $g_k$  — коэффициенты полинома, очевидно выражающиеся через  $H^i$ , в частности,  $H^{n+1} = -g_n$ . Используя соотношения (9), (11), получим

$$-g_n = -H + \frac{F(0)}{\prod_{s=1}^n r^s}. \quad (13)$$

Подчеркнем, что все соотношения (10)–(13) справедливы без учета конкретного вида уравнений (9). Для определения  $A^k = A^k(r^k)$  требуется информация лишь о значениях  $F(0)$  и  $g_n$ .

Умножая каждое уравнение (9) на  $dr^k(x)/dx$ , суммируя и интегрируя, имеем

$$\sum_{k=1}^n \frac{x}{r^k \prod_{s=1}^n r^s} \frac{dr^k}{dx} = \frac{dH}{dx}, \quad H = - \frac{x}{\prod_{s=1}^n r^s(x)} + \int_0^x \frac{d\tau}{\prod_{s=1}^n r^s(\tau)}.$$

Полученное соотношение совпадает с (13), если потребовать

$$F(0) = -x, \quad g_n(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{\prod_{s=1}^n r^s(\tau)}.$$

Соотношения (9) можно трактовать как определение функции  $x = x(r^1, \dots, r^n)$ . Тогда, используя (12), для определения  $A^k(r^k)$  получим

$$r^k A^k(r^k) = F(r^k) = \sum_{m=0}^n (-1)^{m-1} g_m(x(r^1, \dots, r^n)) (r^k)^m.$$

Однако по условию функции  $A^k$  зависят лишь от  $r^k$ . Иными словами, явная зависимость от переменной  $x$  для функций  $A^k(r^k)$  должна отсутствовать, то есть частная производная по  $x$  должна обращаться в нуль для любых значений  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^k A^k(r^k)) = \sum_{m=0}^n (-1)^{m-1} \frac{dg_m(x)}{dx} (r^k(x))^m \equiv 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Выполнение соотношения (14) возможно лишь в случае, когда коэффициенты полинома (14) являются его инвариантами, составленными из корней полинома. Иными словами

$$\frac{dg_m(x)}{dx} = I_m(x),$$

где

$$I_0(x) = 1, \quad I_1(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^k(x)}, \quad I_2(x) = \sum_{k>s} \frac{1}{r^k(x)r^s(x)}, \dots, \quad I_n(x) = \frac{1}{\prod_{s=1}^n r^s(x)}.$$

Окончательно выражение для  $A^k(r^k)$  имеет вид

$$A^k(r^k(x)) = \frac{1}{r^k(x)} \sum_{m=0}^n (-1)^{m-1} (r^k(x))^m \int_0^x I_m(\tau) d\tau. \quad (15)$$

**4. Лагранжевы переменные.** Решение задачи (7), (8) разыскиваем в виде (подробнее см. [6, 7])

$$R^k = R_0^k(a^k) \equiv r^k \equiv r^k(a^k), \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $a^k$  — лагранжевы переменные, удовлетворяющие задаче

$$a_t^k + \lambda^k(\mathbf{a}) a_x^k = 0, \quad \mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n), \quad a^k(x, 0) = x, \quad k = 1, \dots, n.$$

При этом характеристические направления  $\lambda^k$  (3) и соотношения метода годографа (4) считаются представленными в форме

$$\lambda^k(\mathbf{a}) = \lambda^k(\mathbf{r}(\mathbf{a})), \quad x - \lambda^k(\mathbf{r})t = w^k(\mathbf{r}), \quad k = 1, \dots, n. \quad (16)$$

При помощи (16) конструируем функции

$$t = t_k(\mathbf{a}) \equiv \frac{w^{k+1} - w^k}{\lambda^k - \lambda^{k+1}}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Параметризуя линии уровня функций  $t_k(\mathbf{a}) = t_*$  (изохроны), т. е. полагая на этих линиях  $a^k = a^k(\mu)$ , получим систему уравнений  $t_* = t_k(\mathbf{a}(\mu))$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

Дифференцирование этих уравнений по параметру  $\mu$  позволяет получить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da^i}{d\mu} = \varphi^i(\mathbf{a}), \quad a^i(\mu_*) = a_*^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (17)$$

где  $a_*^i$  — значение  $a_i$  в некоторой точке изохроны  $\mu = \mu_*$ ,  $\varphi^i(\mathbf{a})$  — собственный вектор матрицы  $\partial t_k / \partial a^i$ .

Окончательно, интегрирование задачи Коши (17) дает решение задачи на изохроне в виде

$$R^k(x, t_*) = R_0^k(a^k(\mu)), \quad k = 1, \dots, n.$$

При интегрировании задачи Коши величины  $A^k(r^k)$  следует выбирать в виде (ср. с (15), см. также [6, 7]), т. е. заменять верхний предел интегрирования  $x$  на  $a^k$

$$A^k(r^k) = \frac{1}{r^k} \sum_{m=0}^n (-1)^{m-1} (r^k)^m \int_0^{a^k} I_m(\tau) d\tau, \quad r^k = r_0^k(a^k).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов/Д: Изд. РГУ, 2005. 215 с.
- [2] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов/Д: ЮФУ, 2015. 126 с.
- [3] Царев С. П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, № 5. С. 1048–1068.
- [4] Ферпонтов Е. В., Царев С. П. Системы гидродинамического типа, возникающие в газовой хроматографии. Инварианты Римана и точные решения // Матем. моделирование. 1991. Т. 3, № 2. С. 82–91.
- [5] Павлов М. В. Интегрируемые системы уравнений гидродинамического типа. Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / РАН Инст. им. П. Н. Лебедева. М., 1992. 100 с.
- [6] Curro C., Fusco D., Manganaro N. Exact description of simple wave interactions in multicomponent chromatography // J. Phys. A: Math. Theor. 2015. V. 48. 015201. 25 p.
- [7] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Щитов Ф. А. Зональный электрофорез. Численно-аналитический метод решения прикладных задач в частных производных первого порядка // Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона». 2015. № 4.

**Zhukov M. Yu., Shiryaeva E. V., Shchitov F. A.** *Construction of an explicit solution for the quasilinear equations class.* A method constructing explicit solutions for the systems of quasilinear hyperbolic first order equations is presented. These equations correspond to the diffusionless approximation for mass transfer processes in multicomponent mixtures, such as electrophoresis, chromatography, centrifugation, sedimentation.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ УПЛОТНИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ТЕРМОРАСШИРЕННОГО ГРАФИТА ДЛЯ ТРУБОПРОВОДНОЙ АРМАТУРЫ

**Зайцев А. В., Зубко И. Ю., Кокшаров В. С., Судаков И. А.**  
*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

На основе разработанной модели механического поведения составных уплотнительных элементов из терморасширенного графита для крупнобаритных фланцевых соединений определены значения контактных давлений, обоснован выбор давлений герметизации, обеспечивающих безопасную работу трубопроводной арматуры.

Использование уплотнительных элементов (УЭ) из терморасширенного графита (ТРГ) для герметизации фланцевых соединений трубопроводов в нефтехимической и нефтеперерабатывающей промышленности, предприятиях электроэнергетики и ЖКХ связано с высокой термо- и химической стойкостью этого уникального материала. Для фланцевых соединений большего диаметра гарантированное обеспечение геометрической стабильности (заданные допуски на внутренние и внешние диаметры) может быть обеспечено только в случае, если УЭ будет составным. Возникающие при эксплуатации перепады рабочих давлений приводят к увеличению числа аварийных прекращений работы оборудования по причине разгерметизации или протечки рабочей среды в местах сопряжения составных частей УЭ фланцевых соединений. По мнению инженеров-конструкторов, занимающихся проектированием УЭ из «традиционных» слабосжимаемых изотропных материалов (паронит, фторопласт, резина и т.п.), в качестве возможных причин отказа оборудования может рассматриваться недостаточное контактное давление  $p_{\text{cont}}$  на поверхностях сопряжения частей составных УЭ и торцевое давление герметизации  $p_{\text{germ}}$ , задаваемое усилиями затяжки шпилек или болтов фланца. Аргументами в пользу этих предположений выступает регламентируемое стандартом [1] для «традиционных» уплотнительных материалов (имеющих коэффициенты Пуассона, близкие к 0,5) эмпирическое соотношение для  $p_{\text{cont}}$  и рабочего  $p_{\text{work}}$  давления:

$$p_{\text{cont}} \geq (2 \div 4) p_{\text{work}}. \quad (1)$$

ТРГ обладает анизотропией физико-механических свойств, предопределяемой технологическими операциями многократной прокатки в фольгу и прессования. Поэтому работа будет посвящена описанию деформирования составных УЭ из ТРГ и определению контактного давления для различных конструктивных исполнений соединения сегментов УЭ, различных значений давлений  $p_{\text{work}}$  и  $p_{\text{germ}}$ .

УЭ фланцевого соединения является составным толстостенным, ограниченным по высоте  $h$  однородным цилиндром, поперечное сечение которого ограничено двумя концентрическими окружностями радиусами  $a$  и  $b$ ,  $a < b$ .

При построении модели деформирования составного УЭ, будем предполагать, что справедливы уравнения равновесия и геометрические соотношения Коши:

$$\partial_r \sigma_{rr} + \partial_z \sigma_{zr} + (\partial_\theta \sigma_{r\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \partial_r \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{z\theta} + (\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + 2\sigma_{r\theta})/r &= 0, & \partial_r \sigma_{zr} + \partial_z \sigma_{zz} + (\partial_\theta \sigma_{\theta z} + \sigma_{zr})/r &= 0, \\
 \varepsilon_{rr} = \partial_r u_r, & \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, & 2\varepsilon_{zr} = \partial_r u_z + \partial_z u_r, & \\
 \varepsilon_{\theta\theta} = (\partial_\theta u_r + u_r)/r, & \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \partial_r u_\theta + (\partial_\theta u_r - u_\theta)/r, & 2\varepsilon_{\theta z} = \partial_z u_\theta + (\partial_\theta u_z)/r, &
 \end{aligned} \tag{3}$$

записанные в цилиндрической ортогональной системе координат  $r$ ,  $\theta$  и  $z$ .

ТРГ — линейно упругий трансверсально-изотропный материал с осью симметрии бесконечного порядка  $z$ , совпадающей с образующей УЭ. Поэтому определяющие соотношения представим следующим образом [2–4]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= K_{11}\varepsilon_{rr} + K_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + K_{13}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{\theta\theta} &= K_{12}\varepsilon_{rr} + K_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + K_{13}\varepsilon_{zz}, & (4) \\
 \sigma_{zz} &= K_{13}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + K_{33}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{r\theta} &= G\varepsilon_{r\theta}, & \sigma_{zr} &= \hat{G}\varepsilon_{zr}, & \sigma_{\theta z} &= \hat{G}\varepsilon_{\theta z}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $K_{11} = E(1 - \hat{\nu}^2)/D$ ,  $K_{12} = E(\nu - \hat{\nu}^2)/D$ ,  $K_{33} = \hat{E}(1 - \nu^2)/D$ ,  $K_{13} = \hat{\nu}E(1 + \nu)/D$  и  $D = (1 + \nu)(1 - \nu - 2\hat{\nu}^2)$ ;  $E$  и  $\hat{E}$  — модули Юнга в плоскости изотропии и продольном направлении,  $G$  и  $\hat{G}$  — поперечный и продольный модули сдвига,  $\nu$  и  $\hat{\nu}$  — коэффициенты Пуассона.

Будем предполагать, что герметизация фланцевого соединения обеспечивается равномерным осевым давлением  $p_{\text{germ}}$  на торцевой поверхности УЭ  $\Gamma_5$ :

$$\sigma_{zz}|_{\Gamma_5} = p_{\text{germ}}, \tag{5}$$

которое не исключает скольжение на внешней боковой  $\Gamma_4$  и нижней торцевой  $\Gamma_6$  поверхностях, по которым составной УЭ контактирует с корпусом фланца:

$$u_r|_{\Gamma_4} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{\Gamma_6} = 0, \quad u_z|_{\Gamma_6} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{\Gamma_6} = 0. \tag{6}$$

На участке  $\Gamma_3$  внутренней боковой поверхности, контактирующей с рабочими средами (жидкостями или газами), задано рабочее давление  $p_{\text{work}}$ . Поэтому

$$\sigma_{rr}|_{\Gamma_3} = p_{\text{work}}. \tag{7}$$

Геометрия и положение поверхности сопряжения  $\Gamma_7$  отдельных частей УЭ определяются в ходе решения краевой задачи. При  $[\sigma_{nr}(\mathbf{r})]|_{\Gamma_7^+} < [\mu|\sigma_{nn}(\mathbf{r})]|_{\Gamma_7^-}$  на этих поверхностях имеет место идеальное прилипание частей

$$[\sigma_{nr}(\mathbf{r})n_n(\mathbf{r})]|_{\Gamma_7^+} = [\sigma_{nr}(\mathbf{r})n_n(\mathbf{r})]|_{\Gamma_7^-}, \quad [u_n(\mathbf{r})]|_{\Gamma_7^+} = [u_n(\mathbf{r})]|_{\Gamma_7^-}, \tag{8}$$

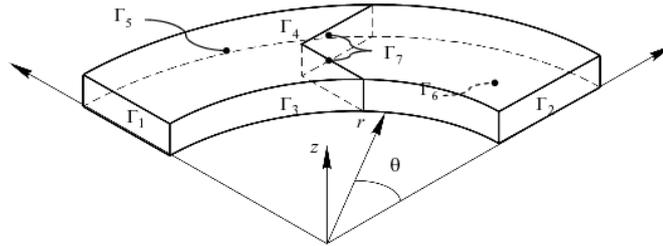


Рисунок 1 – Граничные условия для 1/4 симметричной части разъемного УЭ

а при  $[\sigma_{n\tau}(\mathbf{r})]_{\Gamma_7^+} = [\mu |\sigma_{nn}(\mathbf{r})|]_{\Gamma_7^-}$  реализуются условия контакта с трением

$$[\sigma_{n\tau}(\mathbf{r})]_{\Gamma_7^+} = [\mu |\sigma_{nn}(\mathbf{r})|]_{\Gamma_7^-}, \quad [u_n(\mathbf{r})]_{\Gamma_7^+} = [u_n(\mathbf{r})]_{\Gamma_7^-}. \quad (9)$$

Здесь  $\mu$  — статический коэффициент трения, а  $n$  и  $\tau$  — единичные векторы нормали и касательной к  $\Gamma_7$ .

Рассмотрим составной УЭ из ТРГ с внутренним  $a = 380,0$  мм и внешним  $b = 395,0$  мм радиусами и толщиной  $h = 3,0$  мм. УЭ будет состоять из 4 сегментов, конструктивными решениями для соединения которых являются «ласточкин хвост» и «клипса». Рабочие давления  $p_{\text{work}}$  предполагались равными 10,0 и 20,0 МПа, а давление герметизации  $p_{\text{germ}}$  изменялись дискретно от 10,0 МПа до 90,0 МПа. Упругие модули ТРГ были выбраны следующими:  $E = 9,04$  ГПа,  $\hat{E} = 0,75$  ГПа,  $G = 0,35$  ГПа,  $\hat{G} = 0,47$  ГПа,  $\nu = 0,03$  и  $\hat{\nu} = 0,05$  [5], коэффициент трения между частями составного УЭ из ТРГ был равен  $\mu = 0,02$  [6].

Решение краевой задачи (2)–(4) с граничными условиями (5)–(9), описывающей механическое поведение составных УЭ из ТРГ при герметизации фланцевых соединений, проводилось численно методом конечных элементов в пакете ANSYS 11.0. Для выбора оптимальной конечноэлементной сетки были решены задачи с различной степенью дискретизации на 8-узловые призматические элементы с тремя степенями свободы в каждом узле. Дополнительное сгущение сетки предусматривалось вблизи границы контакта сегментов УЭ. Сравнение максимальных значений контактного давления  $p_{\text{cont}}$  на границе сопряжения сегментов составных УЭ для сеток с 24185 и 28420 конечными элементами (30526 и 35428 узловых точек соответственно) показало, что различие не превышает 5%. Любая из этих сеток может быть использована для проведения вычислительных экспериментов.

В табл. 1 и 2 представлены значения контактного давления в характерных точках на границе сопряжения сегментов составных УЭ (рис. 2). Значение контактного давления может рассматриваться в качестве одного из возможных параметров оценки герметичности соединения. Как видим, регламентируемое стандартами для «традиционных» изотропных слабосжимаемых уплотнительных материалов эмпирическое соотношение (1) не выполняется ни для одного из способов соединения, а для случаев  $p_{\text{work}} = p_{\text{germ}}$  во всех контрольных точках, принадлежащих поверхности сопряжения, имеет место условие  $p_{\text{cont}} < p_{\text{work}}$ .

Результаты, представленные на рис. 3, свидетельствуют, что увеличение давления герметизации  $p_{\text{germ}}$  (регулируемое моментом затяжки шпилек или болтов фланца) не приводит к значительному росту величин максимального контактного давления на поверхностях сопряжения сегментов. Для выполнения условия (1) при  $p_{\text{work}} = 10$  МПа необходимо, чтобы  $p_{\text{cont}} \geq 20$  МПа. Поэтому для способов соединения сегментов составного УЭ «клипса» и «ласточкин хвост» необходимо увеличить  $p_{\text{germ}}$  до 70 МПа и 60 МПа соответственно. Такое увеличение нагрузки может привести к разрушению или необратимому пластическому деформированию крепежных элементов фланцевого соединения, появлению зазоров на границе сопряжения сегментов. При  $p_{\text{work}} = 10$  МПа эти зазоры появляются в окрестности шестой контрольной точки для соединения «клипса» (рис. 2, а), если  $p_{\text{germ}}$  будет превышать 30 МПа, а при  $p_{\text{work}} = 20$  МПа, если  $p_{\text{germ}} > 60$  МПа (табл. 2). Кроме того, при двукратном превышении  $p_{\text{germ}}$  над  $p_{\text{work}}$  наблюдается появление зазоров в окрестности только четвертой контрольной точки, о чем свидетельствуют

Таблица 1 – Значения давления  $p_{\text{cont}}$  (МПа) в характерных контрольных точках на границе контакта сегментов составного УЭ из ТРГ для соединения «ласточкин хвост»

$\frac{p_{\text{germ}}}{p_{\text{work}}}$	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4	Точка 5	Точка 6	Точка 7
10 / 10	9,567	9,502	8,406	8,813	8,439	9,465	9,339
10 / 20	18,383	18,238	15,617	14,775	15,493	18,103	17,521
20 / 10	10,286	10,320	10,796	10,080	10,725	10,332	10,386
20 / 20	19,144	18,987	16,889	17,611	16,853	18,955	18,677
50 / 10	12,544	13,018	15,539	17,720	15,874	13,118	14,063
50 / 20	21,350	21,501	24,880	23,537	24,982	21,618	21,976
70 / 10	13,878	15,103	18,142	24,541	20,196	15,212	16,605
70 / 20	22,795	23,360	27,278	27,727	28,235	23,522	24,480
90 / 10	16,948	17,193	22,277	32,316	35,204	17,840	19,402
90 / 20	24,182	25,263	29,970	37,072	32,289	25,737	26,978

Таблица 2 – Значения давления  $p_{\text{cont}}$  (МПа) в характерных контрольных точках на границе контакта сегментов составного УЭ из ТРГ для соединения «клипса»

$\frac{p_{\text{germ}}}{p_{\text{work}}}$	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4	Точка 5	Точка 6	Точка 7
10 / 10	9,072	9,366	9,507	9,974	9,045	9,775	8,990
10 / 20	16,659	17,930	18,252	19,657	16,917	18,872	16,384
20 / 10	10,593	10,445	10,288	10,017	10,605	10,082	10,642
20 / 20	18,138	18,734	19,006	19,967	18,066	19,575	17,974
50 / 10	14,973	14,746	12,799	10,592	16,765	9,817	15,364
50 / 20	22,691	21,723	21,379	20,142	22,727	20,732	22,914
70 / 10	17,826	19,006	14,214	10,254	21,162	9,980	18,520
70 / 20	25,683	23,242	23,061	21,213	26,914	19,677	26,123
90 / 10	20,759	22,556	15,675	9,602	25,622	9,615	21,727
90 / 20	28,574	26,976	24,728	21,644	31,439	19,904	29,241

данные табл. 1 и 2. Несмотря на то, что конструктивное исполнение для соединения сегментов «клипса» обеспечивает большую поверхность контакта, наиболее технологичный с точки зрения реализации «ласточкин хвост» продемонстрировал стабильные показатели герметичности соединения и гарантированное отсутствие зазоров уже при  $p_{\text{germ}} = 2p_{\text{work}}$ . Несмотря на это, при стационарном режиме работы трубопроводной арматуры, когда рабочее давление сохраняется на неизменном уровне, разгерметизации соединения сегментов составных УЭ на практике не наблюдается. Однако даже незначительные перепады давления приводят к разгерметизации и последующей аварийной остановке работы оборудования.

Опыт эксплуатации составных УЭ из ТРГ для трубопроводов больших диаметров показывает, что гарантированное обеспечение условий герметичности может быть достигнуто и при нарушении ограничения (1). Исключения составляют описанные выше особые случаи, когда из-за определенных соотношений между рабочими давлениями и давлениями герметизации на границе контакта появляются зазоры. Это, с одной стороны, демонстрирует ограничения в применении существующих и предопределяет необходимость разработки новых отраслевых стандартов для расчета современных составных УЭ для фланцевых соединений

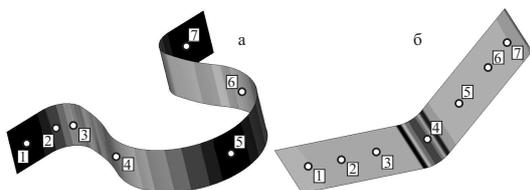


Рисунок 2 – Характерные точки на поверхности контакта сегментов составного УЭ для способов соединения «клипса» (а) и «ласточкин хвост» (б)

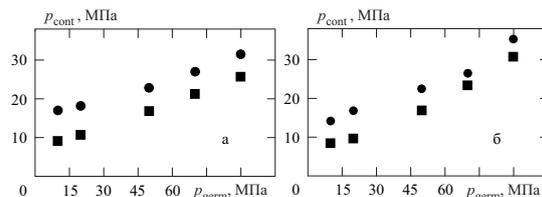


Рисунок 3 – Зависимость максимального контактного давления от давления обжатия ( $p_{\text{work}} = 10$  МПа,  $p_{\text{work}} = 20$  МПа) для способов соединения сегментов составного УЭ из ТРГ «клипса» (а) и «ласточкин хвост» (б)

трубопроводов больших диаметров, изготовленных из композитов на основе ТРГ, а с другой — показывает необходимость разработки принципиально новых методов мониторинга УЭ на основе оптоволоконных технологий, контролирующих не только изменение давлений, но и перемещений точек поверхностей сопряжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы Пермского национального исследовательского политехнического университета по проведению фундаментальных исследований (код проекта — 2016/ПИ-3).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] ГОСТ Р 52857.4—2007. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Расчет на прочность и герметичность фланцевых соединений. Введ. с 27.12.2007. М.: Стандартиформ, 2009. 38 с.
- [2] Зайцев А. В., Рогов Д. С. Моделирование начального режима работы кольца из терморасширенного графита в кранах с уплотнением по штоку // Известия Самарского научного центра РАН. 2012. Т. 14, № 4–5. С. 1235–1238.
- [3] Зайцев А. В., Злобин Н. Г., Исаев О. Ю., Смирнов Д. В. Моделирование условий эксплуатации и уточненный прочностной анализ уплотнительных элементов из терморасширенного графита // Вестник ПНИПУ. Механика. 2012. № 4. С. 5–19.
- [4] Зайцев А. В., Кокшаров В. С., Предков И. В., Механическое поведение составных уплотнительных элементов из терморасширенного графита для фланцевых соединений трубопроводов большого диаметра // Изв. Самарского научного центра РАН. 2012. Т. 16, № 4(3). С. 542–546.
- [5] Нагорный В. Г., Котосонов А. С., Островский В. С., и др. Свойства конструкционных материалов на основе углерода: Справочник. М.: Металлургия, 1975. 336 с.
- [6] Филалков А. С. Углерод, межслоевые соединения и композиты на его основе. М.: Аспект Пресс, 1997. 718 с.

**Zaitsev A. V., Zoubko I. Yu., Koksharov V. S., Sudakov I. A.** *Mechanical behaviour of combined flexible graphite seals for flange connection of big-inch pipe-lines.* Usage of the mathematical model, which described behaviour of combined flexible graphite seals for big-inch flange connections, allowed us to define contact pressures, justify recommendations to select values of sealing pressures for safety exploration of pipelines.

# УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫХ ПО ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ И ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

**Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

Используя разложения компонент вектора перемещений по окружной и радиальной координате в тригонометрические и обобщенные степенные ряды, получены новые точные аналитические решения задач о равновесии толстостенных тяжелых анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, жестко закрепленных по внешней поверхности и находящихся под действием равномерного внутреннего давления.

В различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях нефте-газо-химического комплексов находят применение конструкции и сооружения сферической и цилиндрической формы (монолитные крепи горных выработок, контейнеры для длительного хранения и транспортировки высокоагрессивных и реакционно-способных веществ, пульпопроводы, облицовки туннелей, реагентопроводы), изготовленные из анизотропных материалов, весом которых нельзя пренебречь. Важным и актуальным является получение новых аналитических решений задач о равновесии тяжелых толстостенных анизотропных упругих тел с центральной и осевой симметрией и разработка на основе этих решений инженерных методов уточненного прочностного анализа. Кроме того, получение аналитических зависимостей важно еще и для тестирования численных алгоритмов решения более сложных задач, в которых отдельные элементы имеют аналогичную геометрию и граничные условия, а также для отработки методик эксперимента с тяжелыми телами простейшей геометрии.

Рассмотрим в сферической  $(\rho, \theta$  и  $\varphi)$  и цилиндрической  $(\rho, \theta$  и  $z)$  системах координат равновесие толстостенных анизотропных центрально- и осесимметричных тел, жестко закрепленных по внешним поверхностям и находящихся под действием равномерно распределенных внутренних давлений  $p$ . Будем считать, что однородный материал, из которого изготовлены тела, сферически трансверсально-изотропный относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра, или обладает цилиндрической ортотропией. Перемещения, напряжения и деформации в точках, принадлежащих сфере (в силу симметрии тела и внешней нагрузки), не зависят от координаты  $\varphi$ , а принадлежащих цилиндру (в силу бесконечной протяженности) — от  $z$ ; удовлетворяют геометрическим соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \partial_{\rho}u_{\rho}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = (\partial_{\theta}u_{\theta} + u_{\rho})/\rho, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = (u_{\theta} \cot \theta + u_{\rho})/\rho, \quad (1)$$

$$\gamma_{\rho\theta} = \partial_{\rho}u_{\theta} + (\partial_{\theta}u_{\rho} - u_{\theta})/\rho,$$

и уравнениям равновесия в сферических:

$$\partial_{\rho}\sigma_{\rho\rho} + (\partial_{\theta}\tau_{\rho\theta} + 2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta} \cot \theta)/\rho + F_{\rho} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_{\rho}\tau_{\rho\theta} + [\partial_{\theta}\sigma_{\theta\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}]/\rho + F_{\theta} = 0,$$

и цилиндрических координатах:

$$\partial_\rho \sigma_{\rho\rho} + (\partial_\theta \sigma_{\rho\theta} + \sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta})/\rho + F_\rho = 0, \quad \partial_\rho \sigma_{\rho\theta} + (\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + 2\sigma_{\rho\theta})/\rho + F_\theta = 0. \quad (3)$$

Здесь  $F_\rho = -\gamma \cos \theta$  и  $F_\theta = \gamma \sin \theta$  — компоненты вектора массовых сил,  $\gamma$  — удельный вес материала, а  $\partial_x = \partial/\partial x$ .

Определяющие соотношения для сферически трансверсально-изотропного

$$\sigma_{\rho\rho} = A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + H\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\rho\theta} = A_{44}\gamma_{\rho\theta} \quad (4)$$

и цилиндрически ортотропного

$$\sigma_{\rho\rho} = K_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + K_{12}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\theta\theta} = K_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + K_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\rho\theta} = G_{\rho\theta}\gamma_{\rho\theta}, \quad (5)$$

$$\sigma_{zz} = E_z (\mu_{\rho z}\sigma_{\rho\rho}/E_\rho + \mu_{z\theta}\sigma_{\theta\theta}/E_\theta)$$

тел содержат коэффициенты:  $\nu = 1 - \mu_{\theta\varphi} - 2\mu_{\rho\theta}^2 E_\theta/E_\rho$ ,  $H = A_{22} + A_{23}$ ,

$$\nu A_{11} = E_\rho (1 - \mu_{\theta\varphi}), \quad \nu A_{12} = E_\theta \mu_{\rho\theta}, \quad \nu A_{22} = E_\theta (1 - \mu_{\rho\theta}^2 E_\theta/E_\rho)/(1 + \mu_{\theta\varphi}),$$

$$\nu A_{23} = E_\theta (\mu_{\theta\varphi} + \mu_{\rho\theta}^2 E_\theta/E_\rho)/(1 + \mu_{\theta\varphi}), \quad A_{44} = G_{\rho\theta},$$

$$DK_{11} = E_\rho (1 - \mu_{\theta z}\mu_{z\theta}), \quad DK_{22} = E_\theta (1 - \mu_{\rho z}\mu_{z\rho}), \quad DK_{12} = E_\rho (\mu_{\rho\theta} + \mu_{\rho z}\mu_{z\theta}),$$

$$D = 1 - 2\mu_{\rho\theta}\mu_{\theta z}\mu_{z\rho} - \mu_{\rho\theta}\mu_{\theta\rho} - \mu_{\theta z}\mu_{z\theta} - \mu_{z\rho}\mu_{\rho z},$$

определяемые модулями Юнга  $E_\rho$ ,  $E_\theta$  и  $E_z$ , коэффициентами Пуассона  $\mu_{\rho\theta}$ ,  $\mu_{\theta z}$ ,  $\mu_{z\rho}$  и  $\mu_{\theta\varphi}$ , модулем сдвига в диаметральной плоскости  $G_{\rho\theta}$ .

Последовательно подставляя геометрические соотношения (1) в определяющие (4) и (5), а полученного результата — в уравнения равновесия (2) и (3), запишем неоднородные системы дифференциальных уравнений Ламе в частных производных. Граничные условия на внешней и внутренней поверхностях цилиндра и сферы, ограниченных радиусами  $R$  и  $r$  соответственно, запишем следующим образом:

$$u_\rho|_{\rho=R} = 0, \quad u_\theta|_{\rho=R} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=r} = -p, \quad \sigma_{\rho\theta}|_{\rho=r} = 0. \quad (6)$$

Для любых граничных условий, не нарушающих симметрию задач, раскладывая компоненты вектора перемещений по окружной и радиальной координате в тригонометрические и обобщенные степенные ряды, и учитывая однородность граничных условий для  $i > 0$ , получим точные аналитические решения задач о равновесии толстостенной тяжелой трансверсально-изотропной сферы [1, 2]:

$$u_\rho = D_1 \rho^{-0,5-s} + D_2 \rho^{-0,5+s} + \left( \frac{1}{\rho} d_2 C_2 + d_3 C_3 \rho^w + d_4 C_4 \rho^v + \frac{H_\rho}{H_1} \rho^2 \gamma - C_1 \right) \cos \theta, \quad (7)$$

$$u_\theta = \left( C_1 + \frac{1}{\rho} C_2 + C_3 \rho^w + C_4 \rho^v + \gamma \frac{H_\theta}{H_1} \rho^2 \right) \sin \theta, \quad w = -\frac{1}{2} + t, \quad v = -\frac{1}{2} - t,$$

где  $s = \sqrt{1/4 + 2H_4/A_{11}}$ ,  $t = \sqrt{9/4 + [H(A_{11} + 2A_{44}) - 2A_{12}(H_3 + 2A_{44})]/(A_{11}A_{44})}$ ,

$$H_\rho = H_4 - H_3 - A_{44}, \quad H_\theta = 2A_{11} - H_2, \quad H_2 = H + 2A_{44}, \quad H_3 = A_{12} + A_{44},$$

$$d_2 = -H_2/(H_4 + A_{44}), \quad Ld_3 = Y + 2A_{44}H_3t, \quad Ld_4 = Y - 2A_{44}H_3t,$$

$$Y = -A_{44}(H_2 + H_4 + A_{44}), \quad H_4 = H - A_{12},$$

$$H_1 = 2[A_{11}(H - 4A_{44}) + 2A_{44}(H_4 - 2A_{12}) - 2A_{12}^2], \quad L = 2H_3^2 - A_{11}H_2,$$

и толстостенного тяжелого ортотропного цилиндра [3], [4]:

$$u_\rho = Q(R^{2n}\rho^{-n} - \rho^n) + [a_1\rho^\beta + a_2\rho^{-\beta} + a_3\ln \rho + a_4 + (\gamma\Theta\rho^2)/G_{\rho\theta}] \cos \theta, \quad (8)$$

$$u_\theta = \{a_1\alpha_1\rho^\beta + a_2\alpha_2\rho^{-\beta} - a_3\ln \rho - a_4 + [\gamma(\omega_4\Theta - 1)\rho^2]/(\omega_3G_{\rho\theta})\} \sin \theta,$$

где  $\beta = \sqrt{K_{22}(1/K_{11} + 1/G_{\rho\theta}) - K_{12}/K_{11}(2 + K_{12}/G_{\rho\theta}) + 1}$

$$Q = p/(a^{n-1}\Lambda_{11} - a^{-n-1}R^{2n}\Lambda_{21}), \quad \Theta = (\omega_3G_{\rho\theta} + \omega_2K_{11})/[K_{11}(\omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_4)],$$

$$\Lambda_{11} = K_{11}n + K_{12}, \quad \Lambda_{21} = K_{12} - K_{11}n, \quad \alpha_1 = [\beta(k^2 + 1) + \omega_5]/(\beta^2 - \omega_5),$$

$$\alpha_2 = [-\beta(k^2 + 1) + \omega_5]/(\beta^2 - \omega_5), \quad \omega_1 = 4 - m^2 - n^2, \quad \omega_2 = 2q^2 + m^2 - n^2,$$

$$\omega_3 = 3 - g^2, \quad \omega_4 = 2k^2 + g^2 + 3, \quad \omega_5 = 4 - \omega_3, \quad m = \sqrt{G_{r\theta}/K_{11}},$$

$$n = \sqrt{K_{22}/K_{11}}, \quad q = \sqrt{K_{12}/K_{11}}, \quad g = \sqrt{K_{22}/G_{r\theta}}, \quad k = \sqrt{K_{21}/G_{r\theta}}.$$

Постоянные  $D_1, D_2, C_1, C_2, C_3, C_4, a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$ , входящие в (7) и (8), определяются из граничных условий (6), не приводятся ввиду громоздкости [5].

Последовательная подстановка (7) и (8) в геометрические (1) и определяющие соотношения (4), (5) позволяет записать выражения для деформаций и напряжений соответственно. В качестве примера использования полученных аналитических решений может быть проанализирован вклад массовых сил в напряженное состояние железобетонных монолитных крепей подземных сферических и горизонтальных цилиндрических горных выработок, а также проведена оценка начальной прочности этих сооружений по совокупности критериев.

В работе [6] были введены независимые величины  $J_\sigma^I = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta}$ ,  $J_\sigma^{II} = \sigma_{\rho\rho}$ ,  $J_\sigma^{III} = \sigma_{\rho\theta}$  и  $J_\sigma^I = \sigma_{\theta\theta}$ ,  $J_\sigma^{II} = \sigma_{\rho\rho}$ ,  $J_\sigma^{III} = \sigma_{zz}$ ,  $J_\sigma^{IV} = \sigma_{\rho\theta}$ , инвариантные относительно ортогональных преобразований, допустимых над сферически трансверсально-изотропным и цилиндрически ортотропным телами соответственно, и описывающих различные механизмы разрушения.

На рис. 1 и 2 представлены распределения инвариантов тензора напряжений в монолитных железобетонных крепях ( $p = 0$  МПа): сферической — вдоль меридиональной  $\theta$  и обезразмеренной радиальной  $\tilde{\rho} = (\rho - r)/(R - r)$  координаты, горизонтальной цилиндрической — вдоль окружной и радиальной координаты  $\tilde{\rho}$ . Параметры геометрии и упругие модули железобетона ( $\gamma = 40$  кН / м<sup>3</sup>) были выбраны следующими:  $r = 3,0$  м,  $R = 6,0$  м;  $E_\theta = 50,0$  ГПа,  $E_\rho = 35,0$  ГПа,  $G_{\rho\theta} = 56,5$  ГПа,  $\mu_{\theta\phi} = 0,075$  и  $\mu_{\rho\theta} = 0,15$  (сферическая выработка);  $r = 3,0$  м,  $R = 5,5$  м;  $E_\rho = 40$  ГПа,  $E_\theta = 80$  ГПа,  $E_z = 53,3$  ГПа,  $G_{\rho\theta} = 56,5$  ГПа,  $\mu_{\rho\theta} = 0,15$ ,  $\mu_{\rho z} = 0,075$  и  $\mu_{z\theta} = 0,375$  (горизонтальная цилиндрическая выработка). В отличие от «классического» решения задачи Ламе для анизотропных сфер и цилиндров компоненты тензора напряжений являются ненулевыми при отсутствии внутреннего давления: аналитическое решение (7) и (8) учитывает вклад массовых сил.

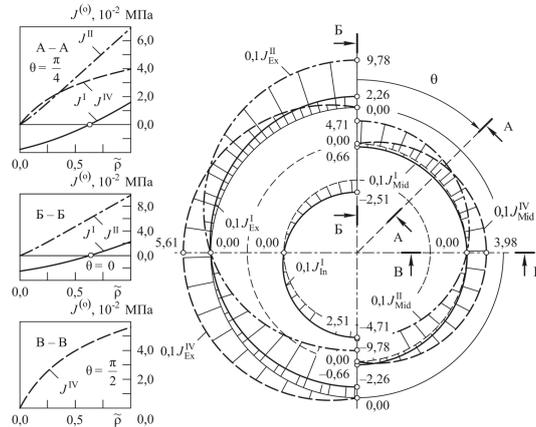


Рисунок 1 – Распределение инвариантов тензора напряжений (КПа) на внешней ( $J_{Ext}^{(o)}$ ), свободной от нагрузок внутренней ( $J_{In}^{(o)}$ ) и серединной ( $J_{Mid}^{(o)}$ ) поверхностях

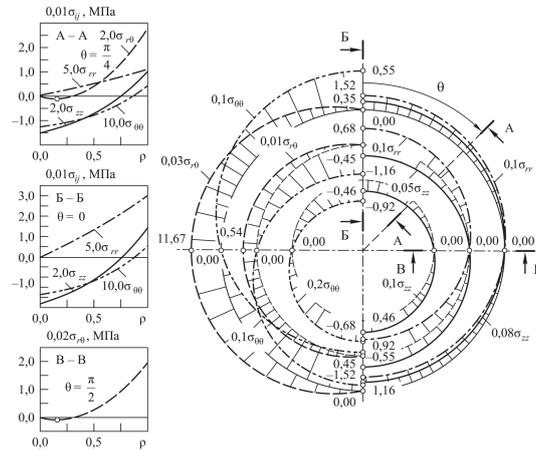


Рисунок 2 – Распределение инвариантов тензора напряжений (МПа) на внешней ( $J_{Ext}^{(o)}$ ), свободной от нагрузок внутренней ( $J_{In}^{(o)}$ ) и серединной ( $J_{Mid}^{(o)}$ ) поверхностях

На внутренней свободной поверхности (рис. 1 и 2) ненулевым является только первый инвариант  $J_{\sigma}^I$ , который в верхней части сооружений всюду монотонно возрастает вдоль  $\tilde{\rho}$ , а в нижней — всюду монотонно убывает, принимая нулевое значение при  $\tilde{\rho} = 0,63$  и  $\tilde{\rho} = 0,87$  у крепей сферической и цилиндрической выработок. Положение этих точек, разделяющих область положительных и отрицательных значений  $J_{\sigma}^I$ , не зависит от  $\theta$  (за исключением диаметральной плоскости, соответствующей  $\theta = \pi/2$ , где  $J_{\sigma}^I = 0,00$  КПа). Такой же характер изменения вдоль  $\tilde{\rho}$  в крепях горизонтальных выработок имеет и третий инвариант  $J_{\sigma}^{III}$  (рис. 2). Точки, в которых происходит смена знака  $J_{\sigma}^{III}$ , находятся на расстоянии  $\tilde{\rho} = 0,75$  от внутренней поверхности. При изменении  $\tilde{\rho}$  от свободной поверхности к закрепленной  $J_{\sigma}^{II}$  всюду возрастает по абсолютной величине (рис. 1 и 2). Поскольку свои наибольшие по абсолютной величине значения  $J_{\sigma}^I$  и  $J_{\sigma}^{II}$  (сферическая выработка),  $J_{\sigma}^I$ ,  $J_{\sigma}^{II}$  и  $J_{\sigma}^{III}$  (цилиндрическая выработка) достигают в точках вертикальной диаметральной плоскости, эти точки являются наиболее опасными с точки зрения

возможности начала разрушения крепей, от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлении (сферическая выработка), в окружном, радиальном и осевом направлениях (цилиндрическая горизонтальная выработка).

Третий  $J_{\sigma}^{III}$  и четвертый  $J_{\sigma}^{IV}$  инварианты, описывающие разрушение от сдвига точек монолитных крепей сферической и горизонтальной цилиндрической горных выработок соответственно, равны нулю в точках, расположенных в вертикальной плоскости (рис. 1 и 2).  $J_{\sigma}^{III}$  (рис. 1) и  $J_{\sigma}^{IV}$  (рис. 2) возрастают по мере увеличения угла  $\theta$ , достигая своих максимальных значений при  $\theta = \pi/2$  (в этой плоскости остальные инварианты принимают нулевые значения).  $J_{\sigma}^{III}$  монотонно изменяет свои значения от нулевого на внутренней до максимального на внешней закрепленной поверхности (рис. 1).  $J_{\sigma}^{IV}$  (рис. 2) немонотонно возрастают, имеют локальный минимум при  $\tilde{\rho} = 0,16$  и изменяют свой знак при  $\tilde{\rho} = 0,34$ . Положение этого минимума не зависит от  $\theta$  за исключением сечения, совпадающего с вертикальной диаметральной плоскостью, во всех точках которого значения  $J_{\sigma}^{IV}$  нулевые.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал №14–01–96029).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зайцев А. В., Фукалов А. А. Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. № 5(21). С. 85–95.
- [2] Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Механизмы начального разрушения железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 4. С. 59–74.
- [3] Зайцев А. В., Кутергин А. В. Упругое равновесие тяжелого горизонтального толстостенного ортотропного цилиндра, находящегося под действием неравномерно распределенного бокового давления // Вестник ПНИПУ. Механика. 2010. № 4. С. 36–45.
- [4] Зайцев А. В., Кислицын А. В., Кутергин А. В., Фукалов А. А. Распределение напряжений в поперечных сечениях контейнеров из стеклопластика и полимербетона, используемых для длительного хранения высокоагрессивных сред // Изв. Самарского НЦ РАН. 2012. Т. 14, № 4–5. С. 1230–1234.
- [5] Зайцев А. В., Кислицын А. В. Об одном решении задачи Ламе для составного протяженного элемента конструкции, состоящего из посаженных с натягом толстостенного трансверсально-изотропного внешнего цилиндра на соосный изотропный внутренний // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2007. № 1(14). С. 164–167.
- [6] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Fukalov A. A. *Elastic equilibrium state of heavy anisotropic axial- and central-symmetric bodies which are fixed on the external surfaces*. Using decomposition of hoop and radial displacements to the trigonometrical and generalized power series, the new analytical solutions to problems on equilibrium state of thick-walled heavy anisotropic central- and axial-symmetric bodies, which are fixed on the external surfaces and are subject to the action of uniform internal lateral pressure, are obtained.

# КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Зеленина А. А.<sup>1</sup>, Зубов Л. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ростовский государственный университет путей сообщения

<sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача нелинейной теории упругости для полого кругового цилиндра с распределенными дислокациями. При определенных предположениях о характере распределения дислокаций задача сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В случаях осесимметричного распределения осевых винтовых дислокаций и винтовых дислокаций радиального направления построены точные и универсальные в классе изотропных несжимаемых тел решения задач о равновесии цилиндра. В рамках модели гармонического сжимаемого материала найдено решение задачи об осесимметричном распределении краевых дислокаций. Обнаружены решения, описывающие квазитвердые состояния упругих тел с распределенными дислокациями.

1. Система уравнений нелинейной континуальной теории дислокаций состоит [1, 2] из уравнений несовместности

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

относительно тензора дисторсии  $\mathbf{C}$ , уравнений равновесия

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (2)$$

для несимметричного тензора напряжений Пиолы  $\mathbf{D}$  и определяющих соотношений упругого материала

$$\mathbf{D}(\mathbf{C}) = \frac{dW(\mathbf{G})}{d\mathbf{C}}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \quad (3)$$

где  $\mathbf{G}$  — мера деформации Коши,  $W$  — удельная энергия деформации. Тензорное поле плотности дислокаций считается заданным и должно удовлетворять требованию соленоидальности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (4)$$

При отсутствии распределенных дислокаций, т. е. при  $\boldsymbol{\alpha} = 0$  существует вектор положения частиц тела  $\mathbf{R}$  в деформированной конфигурации, такой, что справедливо равенство  $\mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R}$ . В этом случае тензор  $\mathbf{C}$  называется градиентом деформации. Введем цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  и отвечающие им единичные базисные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , которые направлены по касательным линиям. Здесь первый индекс соответствует радиальной координате, второй — угловой, третий — осевой. Предположим, что тензор плотности дислокаций задан в виде  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{sk}(r)\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_k$ , будем разыскивать тензорное поле дисторсии в аналогичной

форме:  $\mathbf{C} = C_{sk}(r)\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_k$ . Уравнение соленоидальности (4) теперь сводится к следующим ограничениям на функции  $\alpha_{sk}(r)$

$$\alpha'_{11} + \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{r} = 0, \quad \alpha'_{12} + \frac{\alpha_{12} + \alpha_{21}}{r} = 0, \quad (r\alpha_{13})' = 0 \quad (5)$$

Здесь и далее штрихом обозначены производные по переменной  $r$ . Тензорное уравнение несовместности (1) приводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C_{32} = -r\alpha_{11}, \quad C_{31} = r\alpha_{12}, \quad C'_{31} = -\alpha_{21} \quad (6)$$

$$C'_{32} = -\alpha_{22}, \quad C'_{33} = -\alpha_{23}, \quad (rC_{23})' = r\alpha_{33}$$

$$C'_{21} + \frac{C_{12} + C_{21}}{r} = \alpha_{31}, \quad C'_{22} + \frac{C_{22} - C_{11}}{r} = \alpha_{32} \quad (7)$$

Из соотношений (6) с учетом (5) непосредственно определяются функции  $C_{31}(r)$  и  $C_{32}(r)$ , а функции  $C_{23}(r)$  и  $C_{33}(r)$  выражаются квадратурами.

Для изотропного упругого материала с возможной неоднородностью по радиальной координате, а также для некоторых типов анизотропных тел тензор напряжений Пиолы в силу сделанных предположений будет иметь представление  $\mathbf{D} = D_{sk}(r)\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_k$ , а векторное уравнение равновесия (1) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$D'_{11} + \frac{D_{11} - D_{22}}{r} = 0, \quad D'_{12} + \frac{D_{12} + D_{21}}{r} = 0, \quad (rD_{13})' = 0 \quad (8)$$

Выразив при помощи определяющих соотношений компоненты тензора напряжений Пиолы через компоненты тензора дисторсии, получим, что соотношения (7) и (8) образуют систему пяти обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с пятью неизвестными функциями  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{13}$ . В качестве граничных условий на внутренней и внешней поверхностях цилиндрической трубы можно задать равномерно распределенные нормальную и касательную нагрузку.

**2.** Рассмотрим некоторые частные случаи этой задачи. Предположим, что тензор плотности дислокаций задан в виде

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_0 r^{-1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \beta(r) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad \alpha_0 = \text{const} \quad (9)$$

что соответствует распределению радиальных и осевых винтовых дислокаций. Из (9) видно, что требования соленоидальности (5) удовлетворяются при любой функции  $\beta(r)$ . Тензорное поле дисторсии ищем в виде

$$\mathbf{C} = h'(r)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + r^{-1}h(r)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + t(r)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \alpha_0 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (10)$$

$$t(r) = r^{-1} \int \beta(r)rdr, \quad \lambda = \text{const}$$

где  $h(r)$  — неизвестная функция. Из определяющих соотношений изотропного упругого материала [3]

$$\mathbf{D} = \varkappa_1 \mathbf{C} + \varkappa_2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{C} + \varkappa_0 \mathbf{C}^{-T}, \quad \varkappa_s = \varkappa_s(I_1, I_2, I_3), \quad s = 0, 1, 2; \quad (11)$$

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{G} - \text{tr } \mathbf{G}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{G}$$

заданных при помощи инвариантов деформации  $I_1, I_2, I_3$ , вытекает, что для деформации цилиндра, описываемой тензором дисторсии (10), отличны от нуля только пять компонент тензора Пиолы:  $D_{11}(r), D_{22}(r), D_{23}(r), D_{32}(r), D_{33}(r)$ . Из трех уравнений равновесия (8) второе и третье удовлетворяются тождественно, а первое служит для определения функции  $h(r)$ . Нетрудно проверить, что в силу (9) тензорное поле дисторсии (10) удовлетворяет уравнениям несовместности (6), (7). Таким образом, задача о деформации полого цилиндра с дислокациями, распределенными с плотностью (9), сведена к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Цилиндрические поверхности трубы могут быть нагружены внешним и внутренним давлениями. Граничные условия на торцах цилиндра можно выполнить в интегральном смысле, задавая значение результирующей продольной силы.

В случае несжимаемого материала определяющее соотношение (11) видоизменяется следующим образом [3]

$$\mathbf{D} = \varkappa_1(I_1, I_2)\mathbf{C} + \varkappa_2(I_1, I_2)\mathbf{G} \cdot \mathbf{C} - p\mathbf{C}^{-T} \quad (12)$$

где  $p$  — гидростатическое давление в теле, не выражаемое через деформацию.

Для несжимаемого тела функция  $h(r)$  определяется из условия несжимаемости  $\det \mathbf{C} = 1$ , которое в силу (10) приводит к следующему дифференциальному уравнению

$$r^{-1}\lambda h h' + \alpha_0 t(r) = 1 \quad (13)$$

В двух частных случаях, когда  $\alpha_0 = 0$  либо  $\beta(r) = 0$  уравнение (13) имеет простое решение

$$h(r) = \sqrt{\lambda^{-1}r^2 + h_0^2 - \lambda^{-1}r_0^2}, \quad h_0 = h(r_0) \quad (14)$$

В силу (14) тензорное поле дисторсии (10) оказывается известным, а функция давления  $p(r)$  находится в квадратурах для любой модели изотропного несжимаемого материала из первого уравнения (8). Произвольная постоянная, возникающая при интегрировании этого уравнения, а также постоянная  $h_0$  определяются из граничных условий на внутренней ( $r = r_1$ ) и внешней ( $r = r_0$ ) поверхностях трубы.

Таким образом, задача о больших деформациях растяжения-сжатия и раздувания полого цилиндра, содержащего осесимметрично распределенные осевые винтовые дислокации или осесимметрично распределенные радиальные винтовые дислокации, допускает точное явное решение, которое является универсальным в классе изотропных несжимаемых упругих тел.

**3.** Обратимся теперь к осесимметричному распределению краевых дислокаций, которому соответствует такое поле тензора плотности дислокаций

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma(r)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (15)$$

Из (5), (15) следует, что требование соленоидальности тензора  $\boldsymbol{\alpha}$  выполняется при любой функции  $\gamma(r)$ . Исходя из уравнений несовместности (6), (7), решение задачи о равновесии трубы следует искать в виде

$$\mathbf{C} = C_{11}(r)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + C_{22}(r)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (16)$$

Для изотропного материала согласно (11), (16) отличны от нуля только три компоненты тензора напряжений Пиолы:  $D_{11}(r)$ ,  $D_{22}(r)$ ,  $D_{33}(r)$ . Система уравнений несовместности (6), (7) и равновесия (8) приводится к двум уравнениям

$$C'_{22} + \frac{C_{22} - C_{11}}{r} = \gamma(r); \quad D'_{11} + \frac{D_{11} - D_{22}}{r} = 0 \quad (17)$$

При помощи определяющих соотношений система (17) легко сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции  $C_{22}(r)$ .

В качестве примера рассмотрим модель полуминерального (гармонического) материала [3] с таким определяющим соотношением

$$\mathbf{D} = \frac{2\mu}{1 - 2\nu} (\nu \operatorname{tr} \mathbf{U} - 1 - \nu) \mathbf{A} + 2\mu \mathbf{C}; \quad \mathbf{U} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C} \quad (18)$$

Здесь  $\mu$ ,  $\nu$  — материальные постоянные, совпадающие при малых деформациях с модулем сдвига и коэффициентом Пуассона, а положительно определенный симметричный тензор  $\mathbf{U}$  и собственно ортогональный тензор  $\mathbf{A}$  суть элементы полярного разложения тензора дисторсии  $\mathbf{C}$ .

Согласно (16) развернутая запись определяющих соотношений (18) в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{2\mu}{1 - 2\nu} [\nu(|C_{11}| + |C_{22}| + |\lambda|) - 1 - \nu] \operatorname{sgn} C_{11} + 2\mu C_{11} \\ D_{22} &= \frac{2\mu}{1 - 2\nu} [\nu(|C_{11}| + |C_{22}| + |\lambda|) - 1 - \nu] \operatorname{sgn} C_{22} + 2\mu C_{22} \\ D_{33} &= \frac{2\mu}{1 - 2\nu} [\nu(|C_{11}| + |C_{22}| + |\lambda|) - 1 - \nu] \operatorname{sgn} \lambda + 2\mu \lambda \end{aligned} \quad (19)$$

Нелинейность определяющих соотношений (19) порождает неединственность решения задачи. Так как физически реализуемая деформация сплошной среды должна удовлетворять условию  $\det \mathbf{C} = C_{11}C_{22}\lambda > 0$ , возможны четыре варианта:

- 1)  $C_{11} > 0$ ,  $C_{22} > 0$ ,  $\lambda > 0$ ;
- 2)  $C_{11} > 0$ ,  $C_{22} < 0$ ,  $\lambda < 0$ ;
- 3)  $C_{11} < 0$ ,  $C_{22} < 0$ ,  $\lambda < 0$ ;
- 4)  $C_{11} < 0$ ,  $C_{22} < 0$ ,  $\lambda > 0$

Ниже мы ограничимся изложением результатов только для первого варианта. Выражая при помощи (19) компоненты дисторсии через  $D_{11}$ ,  $D_{22}$  и  $\lambda$ , получим

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\frac{1}{2\mu} (-2\mu\nu + \nu D_{22} + 2\mu\nu\lambda + \nu D_{11} - D_{11} - 2\mu) \\ C_{22} &= -\frac{1}{2\mu} (-2\mu\nu + \nu D_{22} + 2\mu\nu\lambda + \nu D_{11} - D_{22} - 2\mu) \end{aligned} \quad (20)$$

Из (17) и (20) вытекает дифференциальное уравнение для напряжения  $D_{11}(r)$

$$rD_{11}'' + 3D_{11}' = \frac{2\mu}{1-\nu}\gamma(r) \quad (21)$$

Напряжения в упругом теле с дислокациями, возникающие без приложения внешних нагрузок, называют собственными напряжениями. Следовательно, в задаче о собственных напряжениях в полом цилиндре краевые условия для уравнения (21) будут такими

$$D_{11}(r_1) = 0; \quad D_{11}(r_0) = 0 \quad (22)$$

Краевая задача (21), (22) для произвольной функции  $\gamma(r)$  имеет следующее точное решение

$$\begin{aligned} D_{11}(r) &= \frac{\mu}{\nu-1} \left( \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \gamma(\rho)\rho^2 d\rho - \int_{r_1}^r \gamma(\rho)d\rho \right) + A + \frac{B}{r^2} \\ D_{22}(r) &= \frac{\mu}{1-\nu} \left( \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \gamma(\rho)\rho^2 d\rho + \int_{r_1}^r \gamma(\rho)d\rho \right) + A - \frac{B}{r^2} \\ A &= \frac{\mu}{(\nu-1)(r_0^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_0} \gamma(\rho)(r_0^2 - \rho^2) d\rho, \quad B = r_1^2 A \end{aligned} \quad (23)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (15-01-01492).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zubov L. M. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. В.: Springer, 1997.
- [2] Зеленина А. А., Зубов Л. М. Нелинейные эффекты при растяжении, изгибе и кручении упругих тел с распределенными дислокациями // ДАН. 2013. Т. 451. № 5. С. 516–519.
- [3] Лурье А. И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980.

**Zelenina A. A., Zubov L. M.** *Final deformations of the elastic hollow cylinder with distributed dislocations*. The problem of the nonlinear theory of elasticity for the hollow cylinder with distributed dislocations is considered. At certain assumptions of the nature of distribution of dislocations the problem is reduced to system of the nonlinear ordinary differential equations.

# ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕРМОУПРУГАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СВЯЗАННОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ О СКОЛЬЗЯЩЕМ ФРИКЦИОННОМ КОНТАКТЕ С РАЗОГРЕВОМ ОТ ТРЕНИЯ

**Зеленцов В. Б., Митрин Б. И.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается квазистатическая контактная задача о скольжении с учётом трения и разогрева от трения на контакте жёсткой полуплоскости по поверхности покрытия, сцепленного с недеформируемым основанием. Точные решения задачи построены в виде контурных квадратур обратного преобразования Лапласа, а после их вычисления — в виде бесконечных рядов по полюсам подынтегральных функций. В пространстве безразмерных параметров определяется область неустойчивых решений задачи. Проводится асимптотический анализ полученных решений, влияния термоупругой связанности на основные параметры задачи — температуру и напряжения на контакте.

**Введение.** Исследование задач термоупругости, учитывающее взаимодействие полей деформации и температуры, получило развитие в 50-х годах прошлого века. При исследовании скользящего контакта с учётом трения и разогрева от трения на контакте до настоящего использовались решения несвязанных задач термоупругости. Исследование несвязанных задач термоупругости о скользящем контакте с разогревом от трения позволило установить существование области неустойчивых решений задачи, которая часто называется областью термоупругой неустойчивости скользящего контакта [1–3].

**1. Постановка связанной задачи.** Рассматривается квазистатическая контактная задача связанной термоупругости о скольжении с постоянной скоростью  $V$  жёсткого теплоизолированного тела в виде полуплоскости I ( $h \leq x < \infty$ ) по верхней поверхности ( $x = h$ ) упругого теплопроводящего покрытия ( $0 \leq x \leq h$ ), нижняя поверхность которого жёстко сцеплена с недеформируемой, нетеплопроводной подложкой в виде полуплоскости II ( $-\infty < x < 0$ ). Скольжение жёсткого тела (полуплоскости I) по поверхности упругого покрытия происходит с учётом кулоновского трения. Поток тепла, образующийся на контакте за счёт трения, направлен в покрытие. С начального момента времени скользящее параллельно оси  $y$  жёсткое тело деформирует поверхность упругого покрытия, смещаясь в направлении, противоположном оси  $x$  по закону  $\Delta(t)$ . До начального момента покрытие находилось в покое, а его температура равнялась  $T_0$ .

Рассматриваемая задача предполагает, что распределения температуры, смещений и напряжений в покрытии не зависят от выбора горизонтальной координаты по оси  $y$ , параллельной направлению движения жёсткого тела, и являются функциями только координаты  $x$  и времени  $t$  [2, 3]. В этом случае поставленная квазистатическая контактная задача о скользящем контакте с учётом разогрева от трения сведётся к совместному решению дифференциальных уравнений термоупругости в смещениях [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0 \quad (1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0 \quad (2)$$

и дифференциального уравнения связанной термоупругости [4]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{3\lambda + 2\mu}{K} \alpha T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0 \quad (3)$$

в которых  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  — вертикальные и горизонтальные смещения в покрытии,  $T(x, t)$  — распределение температуры в покрытии,  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $K$  — коэффициент теплопроводности,  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала покрытия,  $T_0$  — начальная температура.

Связь между напряжениями, деформациями и температурой определяется соотношениями Дюамеля–Неймана [4]

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0), \quad \sigma_{xy} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

Граничные условия задачи для системы дифференциальных уравнений (1)–(3) имеют вид ( $t > 0$ ):

$$u(h, t) = -\Delta(t), \quad \sigma_{xy}(h, t) = -f \sigma_{xx}(h, t), \quad K \frac{\partial T(h, t)}{\partial x} = -fV \sigma_{xx}(h, t) \quad (5)$$

$$u(0, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad K \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = -k(T(0, t) - T_0) \quad (6)$$

где  $f$  — коэффициент трения,  $k$  — коэффициент теплообмена.

Начальные условия на смещения  $u$ ,  $w$  и их скорости  $\partial u / \partial t$ ,  $\partial w / \partial t$  в покрытии — нулевые, начальная температура в покрытии  $T(x, 0) = T_0$ .

Вертикальные смещения  $u(x, t)$ , нормальные напряжения  $\sigma_{xx}(x, t)$  и температура  $T(x, t)$  в упругом покрытии определяются независимо от горизонтальных смещений  $w(x, t)$ .

**2. Точное решение задачи.** Решение рассматриваемой связанной квазистатической задачи термоупругости о скользящем контакте, поставленной в предыдущем пункте, определяется с помощью интегрального преобразования Лапласа и записывается в виде свёртки

$$T(x, t) - T_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\hat{V} \beta^2}{\alpha h} \int_0^t \Delta(\tau) f_T^0(x, t-\tau) d\tau \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0 \quad (7)$$

$$u(x, t) = - \int_0^t \Delta(\tau) f_u^0(x, t-\tau) d\tau \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0 \quad (8)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = - \frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \int_0^t \Delta(\tau) f_\sigma^0(x, t-\tau) d\tau \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0 \quad (9)$$

$$f_q^0(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_q^0(x, z)}{t_{\kappa} R(z)} e^{z\tilde{t}} dz \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{\kappa}}, \quad t_{\kappa} = \frac{h^2}{\kappa} \quad (10)$$

$$N_0^T(x, z) = \sqrt{z} \left( \text{Bi sh} \sqrt{z} \frac{x}{h} + \sqrt{z} \text{ch} \sqrt{z} \frac{x}{h} \right) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \hat{T} z \left( r(z) - \text{Bi ch} \sqrt{z} \frac{h-x}{h} \right) \quad (11)$$

$$N_u^0(x, z) = zr(z) \frac{x}{h} - \hat{V} \beta^2 \left( \sqrt{z} \text{sh} \sqrt{z} \frac{x}{h} - \text{Bi} \left( 1 - \text{ch} \sqrt{z} \frac{x}{h} \right) \right) + \hat{T} \text{Bi} \sqrt{z} \left( \text{sh} \sqrt{z} - \text{sh} \sqrt{z} \frac{h-x}{x} \right) \quad (12)$$

$$N_{\sigma}^0(x, z) = z \left[ r(z) + \hat{T} \left( \text{Bi ch} \sqrt{z} \frac{h-x}{h} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \tilde{V} \beta^2 \left( r(z) - \text{Bi ch} \sqrt{z} \frac{h-x}{h} \right) \right) \right] \quad (13)$$

$$R(z) = zr(z) - \hat{V} \beta^2 (r(z) - \text{Bi}) + \hat{T} \text{Bi} \sqrt{z} \text{sh} \sqrt{z} \quad (14)$$

$$r(z) = \text{Bi ch} \sqrt{z} + \sqrt{z} \text{sh} \sqrt{z}$$

$$\hat{V} = \frac{fV\alpha}{K} \frac{2\mu(1+\nu)}{(1-2\nu)h}, \quad \hat{T} = \frac{2\mu(1+\nu)^2}{(1-\nu)(1-2\nu)} \frac{\kappa\alpha^2}{K} T_0, \quad \beta^2 = 1 + \hat{T}, \quad \text{Bi} = \frac{kh}{K}$$

где контур интегрирования  $\Gamma = \{z : -i\infty + dt_{\kappa}, i\infty + dt_{\kappa}\}$ . Значение  $d$  подбирается таким образом, чтобы контур интегрирования проходил правее всех изолированных особых точек подынтегральных функций. Следует заметить, что при  $\hat{T} = 0$  ( $T_0 = 0$ ) полученные формулы (7)–(13) совпадают с соответствующими формулами несвязанной квазистатической задачи термоупругости о скользящем термофрикционном контакте [2, 3]. Напряжения  $\sigma_{xx}(x, t)$  (9), (13), (14) зависят от координаты  $x$ , тогда как в соответствующей несвязанной задаче [2, 3] напряжения не зависят от  $x$ .

В (7)–(14) для  $T(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $\sigma_{xx}(x, t)$  присутствуют контурные интегралы (10), в которых вместо  $q$  записывается  $T$ ,  $u$ ,  $\sigma$ , соответственно. В комплексной плоскости переменной интегрирования  $z$  подынтегральные функции в этих интегралах являются функциями мероморфными, содержащими счётное множество полюсов. На бесконечности при  $|z| \rightarrow \infty$  подынтегральные функции из (10) ведут себя следующим образом:

$$N_q^0(x, z)R^{-1}(z) = \gamma_q + O(z^{-1/2}) \quad 0 < x < h, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (15)$$

где  $\gamma_T = (1-\nu)(1+\nu)^{-1}\hat{T}$ ,  $\gamma_u = xh^{-1}$ ,  $\gamma_{\sigma} = 1 + (1-\nu)(1+\nu)^{-1}\hat{T}(1+\hat{T})\hat{V}$ ,  $N_q^0(x, z)$   $q = T, u, \sigma$  из (11)–(13).

Квадратуры (10) в обычном смысле не существуют и понимаются в обобщенном смысле. После регуляризации подынтегральных функций контурных квадратур на бесконечности с учётом асимптотик (15), в предположении, что полюсы получившихся подынтегральных функций  $\zeta_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  известны и являются однократными в комплексной плоскости, вычисление получившихся квадратур

методами теории функций комплексного переменного приводит к формулам

$$T(x, t) - T_0 = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{\hat{V}(1 + \hat{T})}{\alpha h} \gamma_T \Delta(t) + \sum_{k=0}^{\infty} B_T(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t) \quad 0 \leq x \leq h, t > 0 \quad (16)$$

$$u(x, t) = -\Delta(t) \frac{x}{h} + \sum_{k=0}^{\infty} B_u(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t) \quad 0 \leq x \leq h, t > 0 \quad (17)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\frac{2\mu(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)h} \left[ \gamma_q \Delta(t) + \sum_{k=0}^{\infty} B_\sigma(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t) \right] \quad 0 \leq x \leq h, t > 0 \quad (18)$$

где  $B_q(x, z)$  и  $D(z, t)$  имеют вид

$$B_q(x, z) = \frac{N_q(x, z)}{t_\kappa R'(z)}, \quad D(z, t) = \int_0^t \Delta(\tau) \exp\left(z \frac{t - \tau}{t_\kappa}\right) d\tau \quad t > 0 \quad (19)$$

$$N_q(x, z) = N_q^0(x, z) - \gamma_q R(z)$$

где  $\gamma_q$  дано после (15),  $N_q^0(x, z)$   $q = T, u, \sigma$  из (11)–(13).

**3. Анализ решений задачи. Области устойчивых и неустойчивых решений.** Исследование решений задачи  $T(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $\sigma_{xx}(x, t)$ , представленных формулами (16)–(18), показывают, что при  $\zeta_k < 0$   $k = 0, 1, 2, \dots$  решения задачи устойчивы и стремятся с увеличением времени  $t$  к стационарному состоянию. Если хотя бы один из  $\zeta_k$   $k = 0, 1, 2, \dots$  при изменении параметров задачи становится положительным  $\zeta_k > 0$ , то амплитуда  $T(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $\sigma_{xx}(x, t)$  неограниченно возрастает при  $t \rightarrow \infty$ , что свидетельствует о неустойчивости решения задачи или о термоупругой неустойчивости (ТУН) скользящего контакта.

В комплексной плоскости  $z$  траектории  $\zeta_0(\hat{V})$  для  $\hat{V} \in [0, \hat{V}_*)$ , где  $\hat{V}_* = 2\text{Bi}/(2 + \text{Bi})$ , и  $\zeta_k(\hat{V})$   $k = 1, 2, \dots$  для  $\hat{V} \in [0, \infty)$  и любых  $\text{Bi}$  и  $\hat{T}$  находятся в левой полуплоскости на отрицательной части действительной оси и образуют область устойчивых решений задачи. При  $\hat{V} > \hat{V}_*$  полюс  $\zeta_0(\hat{V})$  становится положительным, и хотя все остальные полюсы  $\zeta_k$   $k = 1, 2, 3, \dots$  отрицательны, решение задачи неустойчиво.

**4. Асимптотический анализ полученных решений.** Формулы решения рассматриваемой связанной задачи термоупругости о скользящем контакте, полученные для температуры  $T(x, t)$  (16), смещений  $u(x, t)$  (17) и напряжений  $\sigma_{xx}(x, t)$  (18), позволяют провести сравнительный асимптотический анализ изменения основных характеристик процесса скользящего контакта при малых  $t$  для связанной и соответствующей несвязанной задачи. Формулы решения задачи (16)–(18) в области устойчивых решений записываются для малых  $t$  в виде следующих асимптотических соотношений ( $t \rightarrow 0$ ,  $0 \leq x \leq h$ )

$$T(x, t) - T_0 = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{\hat{V}}{\alpha} (1 + \hat{T}) \gamma_T \frac{\Delta(t)}{h} + O(t^{3/2} \Delta(t)) \quad (20)$$

$$u(x, t) = -x \frac{\Delta(t)}{h} + O(t^{3/2} \Delta(t)) \quad (21)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\frac{2\mu(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \left( 1 + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \hat{V} \hat{T} (1 + \hat{T}) \right) \frac{\Delta(t)}{h} + O(t^{3/2} \Delta(t)) \quad (22)$$

Асимптотика смещений  $u(x, t)$  (21) совпадает с соответствующей асимптотикой несвязанной задачи [2, 3]. После дифференцирования  $u(x, t)$  в (21) по  $x$  и по  $t$  скорость деформации на контакте принимает вид

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\frac{\dot{\Delta}(t)}{h} + O\left(t^{3/2}\dot{\Delta}(t)\right) \quad t \rightarrow 0 \quad (23)$$

Отсюда следует, что в связанной задаче интенсивность изменения температуры  $\dot{T}(h, t)$  и интенсивность изменения напряжений  $\dot{\sigma}_{xx}(h, t)$  на контакте при малых  $t$  пропорциональны скорости деформации  $-\dot{\epsilon}_{xx}$ . Формулы (20), (22) демонстрируют влияние связанности задачи на основные параметры контакта.

**Заключение.** Точные решения связанной задачи термоупругости о скользящем контакте позволяют провести сравнительный анализ полученных решений с решениями соответствующей несвязанной задачи и установить степень влияния связанности задачи на основные параметры контакта — температуру и напряжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №16-07-00929-а, 15-07-05208-а). Митрин Б.И. поддержан стипендией Президента РФ СП-137.2015.1.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В. М., Аннакулова Г. К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. Т. 11, № 1. С. 24–28.
- [2] Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Васильев А. С., Волков С. С. Термоупругодинамическая неустойчивость решения контактной задачи для покрытия с учётом тепловыделения от трения // Вестник Донского государственного технического университета. 2014. Т. 14, № 3. С. 17–29.
- [3] Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Айзикович С. М. Динамическая и квазистатическая неустойчивость скользящего термофрикционного контакта // Трение и износ. 2016. Т. 37, № 3. С. 280–289.
- [4] Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1965. 204 с.

**Zelentsov V. B., Mitrin B. I.** *Parametrical thermoelastic instability in a coupled quasi-static thermoelastic sliding contact problem with frictional heating.* We consider a quasi-static sliding contact problem with account for friction and frictional heat generation at contact interface between a rigid half-plane and an elastic coating bonded to an undeformable substrate. Exact solutions of the problem are constructed in form of contour integrals of the inverse Laplace transform and then, after their calculation, in form of infinite series over poles of integrand functions. Instability domain is determined in the dimensionless parameters space of the problem. Asymptotic analysis of the obtained solutions is carried out; special attention is paid to influence of thermoelastic coupling on main characteristics of the problem — contact stresses and temperature.

# ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНОДИФФУЗИИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ

Земсков А. В.<sup>1</sup>, Тарлаковский Д. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

<sup>2</sup>*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

Рассматривается одномерная задача упругой диффузии для однокомпонентной изотропной плоскости. Физические поля являются полярно симметричными. Решение задачи ищется в интегральной форме и представляется в виде сверток функций Грина рассматриваемой задачи с правыми частями уравнений движения и массопереноса. Алгоритм решения основан на последовательном применении к исходной системе уравнений преобразования Лапласа по времени и преобразования Ганкеля по радиальной координате. Из полученной таким образом системы линейных алгебраических уравнений находятся трансформанты Ганкеля—Лапласа перемещения и приращения концентрации диффузанта. Эти трансформанты являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа и переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью теоремы о вычетах. Обращение трансформант Ганкеля осуществляется численно с помощью квадратурных формул.

**1. Постановка задачи.** При исследовании нестационарных процессов в сплошных средах зачастую требуется учет различных взаимодействующих между собой полей: механических, тепловых, электрических, магнитных и диффузионных. Изменяющееся во времени поле деформаций вызывает изменение поля температуры, и наоборот. Кроме того, наличие диффузионных потоков приводит к перераспределению компонентов вещества, поэтому в диффузионной зоне возникает напряженно-деформированное состояние, которое в свою очередь за счет деформации кристаллической решетки влияет на величину диффузионного потока. Также, взаимное влияние оказывают друг на друга и другие поля, проявляющееся в виде электромагнитных волн, нагрева проводников, пьезоэффекта и обратного пьезоэффекта, термоэлектрических эффектов (явления Зеебека, Пельтье, Томпсона) и электрострикции, магнитоупругих эффектов и магнитоэлектричества, электродиффузии и т. д.

В зависимости от геометрии области бывает целесообразно рассматривать задачи механики в криволинейных системах координат. Это особенно актуально в тех случаях когда переход к криволинейным координатам позволяет уменьшить размерность решаемой задачи.

В работе рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния однокомпонентной изотропной плоскости, находящейся под влиянием нестационарных объемных упруго-диффузионных возмущений. Предполагается, что физические поля являются полярно симметричными, поэтому в качестве математической модели используется связанная система уравнений упругой диффузии в полярной системе координат [1] (точка означает производную по времени,

штрих — производную по радиальной координате):

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \alpha\eta' + f_1, \\ \dot{\eta} &= -\Lambda \left( u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D \left( \eta'' + \frac{\eta'}{r} \right) + f_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь все величины являются безразмерными и связаны с соответствующими размерными аналогами (при одинаковом начертании обозначены с волной) следующим образом:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\tilde{r}}{L}, \quad u = \frac{\tilde{u}}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \eta = \frac{\tilde{\eta}}{n_0}, \\ \alpha &= \frac{n_0\tilde{\alpha}}{\rho C^2}, \quad D = \frac{\tilde{D}}{CL}, \quad \Lambda = \frac{\tilde{\Lambda}}{CLn_0}, \quad f_1 = \frac{\tilde{f}_1 L}{\lambda + 2\mu}, \quad f_2 = \frac{\tilde{f}_2 L}{Cn_0}, \end{aligned}$$

где  $t$  — время;  $r$  — радиальная координата,  $\tilde{u}(r, t)$  — координаты вектора перемещений;  $T_0$  — абсолютная температура среды;  $\tilde{\eta}(r, t) = n(r, t) - n_0(r, t)$  — приращение молярной концентрации вещества  $n$  относительно начальной концентрации  $n_0$ ;  $\lambda + 2\mu$  — упругие постоянные Ламе;  $\rho$  — плотность среды;  $\tilde{\alpha}$  — коэффициент, характеризующий объемное расширение связанное с массопереносом;  $\tilde{D}$  — коэффициент самодиффузии;  $\tilde{\Lambda} = n_0\tilde{D}\tilde{\alpha}/RT_0$ ;  $R$  — универсальная газовая постоянная.

**2. Метод решения.** Решение задачи ищется в интегральной форме. Пусть  $G_{nm}(r, \tau)$ ,  $n, m = 1, 2$  — функции Грина рассматриваемой задачи, т. е. решение следующих задач Коши:

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{1m} &= G_{1m}'' + \frac{G_{1m}'}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} - \alpha G_{2m}' + \delta_{1m} \delta(r - \xi) \delta(\tau), \\ \dot{G}_{2m} &= -\Lambda \left( G_{1m}''' + \frac{2G_{1m}''}{r} - \frac{G_{1m}'}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + \\ &D \left( G_{2m}'' + \frac{G_{2m}'}{r} \right) + \delta_{2m} \delta(r - \xi) \delta(\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Для их нахождения воспользуемся преобразованиями Лапласа и Ганкеля. А именно, применим к уравнениям (2) преобразование Лапласа, а затем, к первому уравнению (2) преобразование Ганкеля 1-го порядка, а ко второму уравнению преобразование Ганкеля нулевого порядка, получим

$$\begin{aligned} (s^2 + p^2) G_{1m}^{H_1L} - \alpha p G_{2m}^{H_0L} &= f_{1m}^{H_1L}, \\ -\Lambda p^3 G_{1m}^{H_1L} + (s + Dp^2) G_{2m}^{H_0L} &= f_{2m}^{H_0L} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь индексы « $L$ » и « $H_k$ » означают преобразования Лапласа и Ганкеля  $k$ -го порядка;  $p$  — параметр преобразования Ганкеля;  $s$  — параметр преобразования

Лапласа. Функции  $G_{nm}^{H_k L}$  и  $f_{nm}^{H_k L}$  определяются так

$$\begin{aligned} G_{1m}^{H_1 L} &= \int_0^\infty r J_1(pr) dr \int_0^\infty G_{1m}(r, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \\ G_{2m}^{H_0 L} &= \int_0^\infty r J_0(pr) dr \int_0^\infty G_{2m}(r, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \\ f_{1m}^{H_1 L} &= \delta_{1m} \int_0^\infty r J_1(pr) dr \int_0^\infty \delta(r - \xi) \delta(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \delta_{1m} \xi J_1(p\xi), \\ f_{2m}^{H_0 L} &= \delta_{2m} \int_0^\infty r J_0(pr) dr \int_0^\infty \delta(r - \xi) \delta(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \delta_{2m} \xi J_0(p\xi). \end{aligned}$$

Решение системы (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} G_{11}^{H_1 L}(p, \xi, s) &= \frac{P_{11}(p, s)}{P(p, s)} \xi J_1(p\xi), \quad G_{12}^{H_1 L}(p, \xi, s) = \frac{P_{12}(p, s)}{P(p, s)} \xi J_0(p\xi), \\ G_{21}^{H_0 L}(p, \xi, s) &= \frac{P_{21}(p, s)}{P(p, s)} \xi J_1(p\xi), \\ G_{22}^{H_0 L}(p, \xi, s) &= \left[ \frac{1}{s + Dp^2} + \frac{P_{22}(p, s)}{Q(p, s)} \right] \xi J_0(p\xi), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} P(p, s) &= (s^2 + p^2)(s + Dp^2) - \alpha\Lambda p^4, \quad Q(p, s) = (s + Dp^2)P(p, s), \\ P_{11}(p, s) &= s + Dp^2, \quad P_{12}(p, s) = \alpha p, \quad P_{21}(p, s) = \Lambda p^3, \quad P_{22}(p, s) = \alpha\Lambda p^4. \end{aligned} \quad (5)$$

Многочлен  $P(p, s)$  по переменной  $s$  имеет пару комплексно сопряженных и один отрицательный действительный нуль. Многочлен  $Q(p, s)$  имеет дополнительный нуль  $-Dp^2$ . Кроме того, правые части в равенствах (5) являются рациональными функциями. Поэтому, оригиналы по Лапласу функций Грина в (4) могут быть представлены следующим образом [2, 3]

$$\begin{aligned} G_{11}^{H_1}(p, \xi, \tau) &= \tilde{G}_{11}(p, \tau) \xi J_1(p\xi), \quad G_{12}^{H_1}(p, \xi, \tau) = \tilde{G}_{12}(p, \tau) \xi J_0(p\xi), \\ G_{21}^{H_0}(p, \xi, \tau) &= \tilde{G}_{21}(p, \tau) \xi J_1(p\xi), \quad G_{22}^{H_0}(p, \xi, \tau) = \tilde{G}_{22}(p, \tau) \xi J_0(p\xi), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{nm}(p, \tau) &= e^{\gamma\tau} (A_{nm}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{nm}^{(2)} \sin \beta\tau) + A_{nm}^{(3)} e^{s_3\tau}, \quad n \neq m \neq 2, \\ \tilde{G}_{22}(p, \tau) &= e^{\gamma\tau} (A_{22}^{(1)} \cos \beta\tau - A_{22}^{(2)} \sin \beta\tau) + A_{22}^{(3)} e^{s_3\tau} + A_{22}^{(4)} e^{-Dp^2\tau}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $s_1 = \gamma + i\beta$  и  $s_2 = \bar{s}_1$  — комплексно сопряженные, а  $s_3$  — действительный нуль многочлена  $P(p, s)$ . При этом  $\gamma < 0$  и  $s_3 < 0$ . Коэффициенты  $A_{nm}^{(l)}$ ,  $l = \overline{1, 4}$  находятся по формулам:

$$\begin{aligned} A_{nm}^{(1)} &= 2Re \frac{P_{nm}(p, s_1)}{P(p, s_1)}, \quad A_{nm}^{(2)} = 2Im \frac{P_{nm}(p, s_1)}{P(p, s_1)}, \quad A_{nm}^{(3)} = \frac{P_{nm}(p, s_3)}{P(p, s_3)}, \quad n \neq m \neq 2, \\ A_{22}^{(1)} &= 2Re \frac{P_{22}(p, s_1)}{P(p, s_1)}, \quad A_{22}^{(2)} = 2Im \frac{P_{22}(p, s_1)}{P(p, s_1)}, \quad A_{22}^{(3)} = \frac{P_{22}(p, s_3)}{P(p, s_3)}, \quad A_{22}^{(4)} = \frac{P_{22}(p, -Dp^2)}{P(p, -Dp^2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Обратное преобразование Ганкеля находится по формулам:

$$\begin{aligned}
 G_{11}(r, \xi, \tau) &= \int_0^\infty \tilde{G}_{11}(p, \tau) \xi J_1(\xi p) p J_1(rp) dp, \\
 G_{12}(r, \xi, \tau) &= \int_0^\infty \tilde{G}_{12}(p, \tau) \xi J_0(\xi p) p J_1(rp) dp, \\
 G_{21}(r, \xi, \tau) &= \int_0^\infty \tilde{G}_{21}(p, \tau) \xi J_1(\xi p) p J_0(rp) dp, \\
 G_{22}(r, \xi, \tau) &= \int_0^\infty \tilde{G}_{22}(p, \tau) \xi J_0(\xi p) p J_0(rp) dp.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Для вычисления этих интегралов используются квадратурные формулы.

**3. Расчетный пример.** Положим для расчета

$$f_1(r, \tau) = \frac{e^{-\varepsilon r}}{r}, \quad f_2(r, \tau) = 0, \quad Re\varepsilon > 0.$$

Материал — алюминий имеющий следующие характеристики [4]:  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{3333} = 1,255 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2$ ,  $T_0 = 800 \text{ K}$ ,  $D^{(1)} = 7,73 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ .

Результаты расчетов по формулам (3), (5) – (9) представлены на рисунках 1, 2.

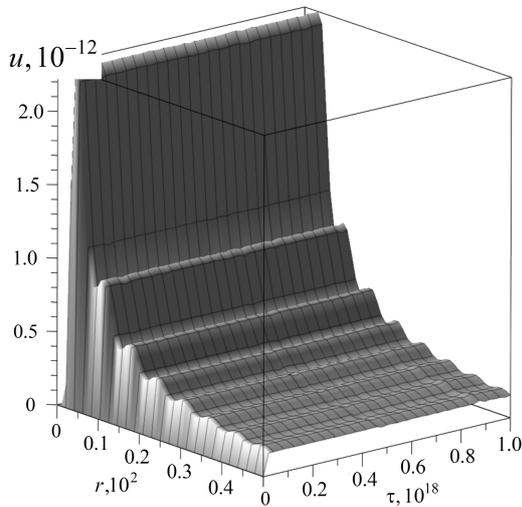


Рисунок 1 – Зависимость перемещений  $u(r, \tau)$  от радиальной координаты  $r$  и времени  $\tau$

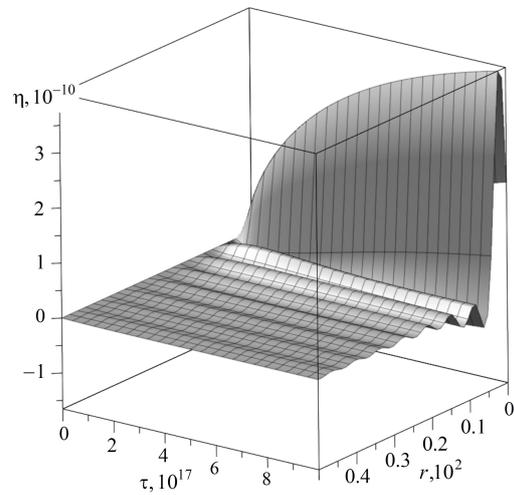


Рисунок 2 – Зависимость приращения концентрации  $\eta(r, \tau)$  от радиальной координаты  $r$  и времени  $\tau$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Постановка одномерной Задачи упругой диффузии для однокомпонентного слоя в цилиндрической системе координат // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1., 2016. С. 106–108.
- [2] Davydov S. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. An elastic half-space under the action of one-dimensional time-dependent diffusion perturbations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36. № 4. P. 503–509.
- [3] Диткин В. А., Прудников В. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 586 с.
- [4] Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др. Физические величины: Справочник; Под общей редакцией Григорьева И.С., Мейлихова И.З. - М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

**Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V.** *Axisymmetric model of elastic diffusion for an isotropic plane.* We consider the one-dimensional problem to a single component elastic isotropic diffusion plane. Physical fields are symmetric polarity. The solution is sought in the integral form and presented in the form of a convolution of Green's functions of the problem with right-hand sides of equations of motion and mass transfer. The algorithm of the solution is based to used of the Laplace transform in time and Hankel transform along the radial coordinate. The result is a system of linear algebraic equations. From it are solution of the problem in the transformants Laplace-Hankel. These transformants are rational functions of the parameter of the Laplace transform. The inverse Laplace transform carried out by means the residue theorem. Inverse Hankel transforms is carried out numerically using quadrature formulas.

# УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

**Зубов Л. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Формулируются уравнения динамики упругих оболочек, испытывающих большие деформации. За независимые переменные принимаются эйлеровы координаты на круговом цилиндре и время, а одной из неизвестных функций является расстояние от точки поверхности оболочки до оси цилиндра. Уравнения динамики нелинейно упругих оболочек в эйлеровых координатах удобны при точной постановке задачи взаимодействия сильно деформируемых оболочек с движущимися жидкостями и газами. Полученные в представленной работе уравнения могут быть использованы для динамических расчетов процессов протекания жидкостей и газов в трубопроводах, кровеносных сосудах, шлангах и в других нелинейно деформируемых тонкостенных трубчатых элементах конструкций.

1. Изучая взаимодействие оболочки и жидкости в условиях больших деформаций оболочек, обычно используют совместный лагранжево-эйлеров подход [1], при котором уравнения движения жидкости записываются в эйлеровых координатах, а уравнения движения оболочки — в лагранжевых координатах. Такой подход дает возможность только приближенной постановки условий сопряжения оболочки и жидкости. Ниже выводятся нелинейные уравнения динамики упругих оболочек типа Коссера, основанные на эйлеровом описании движения поверхности. Предположим, что срединная поверхность  $\sigma$  оболочки в отсчетной (недеформированной) конфигурации однозначно проектируется на некоторую фиксированную поверхность  $\Pi$ , и зададим поверхность  $\sigma$  функцией  $s(\eta^1, \eta^2)$ , где  $\eta^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — некоторые криволинейные координаты на  $\Pi$ , называемые лагранжевыми координатами оболочки,  $s$  — расстояние точки поверхности  $\sigma$  от поверхности  $\Pi$ , отсчитанное по нормали к  $\Pi$ . Пусть срединная поверхность  $\Sigma$  деформированной оболочки также однозначно проектируется на ту же поверхность  $\Pi$ . Определим положение точки на  $\Sigma$  в момент времени  $t$  расстоянием  $S(q^1, q^2, t)$ , отсчитываемым от неподвижной поверхности  $\Pi$ . Здесь  $q^\beta$ ,  $\beta = 1, 2$  — произвольные криволинейные координаты на  $\Pi$ , задающие положение точки этой поверхности и называемые эйлеровыми координатами оболочки. Движение поверхности  $\Sigma$  можно описать функциями  $q^\beta(\eta^\alpha, t)$ ,  $S(q^\beta, t)$ . Уравнениями динамики оболочек в эйлеровых координатах будем называть такие уравнения, в которых независимыми переменными служат эйлеровы координаты  $q^\beta$  и время  $t$ , а одной из неизвестных функций является  $S(q^\beta, t)$ . Уравнения нелинейной динамики упругих оболочек типа Кирхгофа—Лява в эйлеровых координатах были выведены ранее для случая, когда поверхность оболочки однозначно проектируется на плоскость [2] и для случая, когда оболочка однозначно проектируется на круговой цилиндр [3].

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда поверхность оболочки как в отсчетной конфигурации, так и в деформированном состоянии однозначно проектируется на поверхность кругового цилиндра произвольного радиуса. Это означает, что в качестве эйлеровых координат поверхности будут использоваться  $q^1 = \varphi$ ,

$q^2 = z$ , где  $\varphi$  — угловая координата,  $z$  — расстояние, отсчитываемое по оси цилиндра. Уравнение поверхности оболочки  $\Sigma$  в текущей конфигурации имеет вид  $r = r(\varphi, z, t)$ . Величины  $r, \varphi, z$  являются круговыми цилиндрическими координатами точек пространства, которые связаны с декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$  формулами  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $x_3 = z$ . Пусть  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — постоянные орты декартовых координат в пространстве. В дальнейшем будем использовать также ортонормированный базис эйлеровых цилиндрических координат  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{i}_3$  где  $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi$ . Радиус-вектор произвольной точки пространства представляется в виде

$$\mathbf{R} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3 = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{i}_3 \quad (1)$$

Цилиндрические координаты точек поверхности  $\sigma$  оболочки в недеформированном состоянии (т.е. в отсчетной конфигурации) обозначим  $\rho, \theta, \zeta$ . Величины  $\theta, \zeta$  являются лагранжевыми координатами движущейся оболочки.

2. Разложим поле скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{R}^\bullet$  точек поверхности  $\Sigma$  по базису  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{i}_3$

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{i}_3 \quad (2)$$

На основании (1), (2) получим

$$v_r = r^\bullet, \quad v_\varphi = r \varphi^\bullet, \quad v_z = z^\bullet \quad (3)$$

Здесь точкой обозначена материальная производная по времени, т.е. частная производная по времени от функции лагранжевых координат и времени. Частные производные функции эйлеровых координат  $\varphi, z$  и времени  $t$  будем обозначать индексами после запятой. В частности, локальная производная по времени обозначается так:  $r_{,t} = \partial r(\varphi, z, t) / \partial t$ . Из (3) вытекает соотношение

$$v_r = r_{,t} + r^{-1} r_{,\varphi} v_\varphi + r_{,z} v_z \quad (4)$$

которое выражает радиальную компоненту скорости через функцию  $r(\varphi, z, t)$  и составляющие скорости  $v_\varphi, v_z$ . Рассмотрим нормальную по отношению к деформированной поверхности  $\Sigma$  составляющую скорости  $v_N = \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}$ , где  $\mathbf{N}$  — единичный вектор нормали к поверхности оболочки в текущей конфигурации. Он выражается формулой

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{G}} (r \mathbf{e}_r - r_{,\varphi} \mathbf{e}_\varphi - r r_{,z} \mathbf{i}_3), \quad G = r^2 (1 + (r_{,z})^2) + (r_{,\varphi})^2 \quad (5)$$

Из (2), (4) и (5) получаем

$$v_N = \frac{r r_{,t}}{\sqrt{G}} \quad (6)$$

Компоненты векторного поля ускорений точек поверхности  $\Sigma$

$$\mathbf{w} = w_r \mathbf{e}_r + w_\varphi \mathbf{e}_\varphi + w_z \mathbf{i}_3 \quad (7)$$

вычисляются по формуле  $\mathbf{w} = \mathbf{v}^\bullet$  с использованием соотношений (2), (3) и имеют вид

$$w_r = v_{r,t} + r^{-1} v_\varphi v_{r,\varphi} + v_z v_{r,z} - r^{-1} v_\varphi^2 \quad (8)$$

$$w_\varphi = v_{\varphi,t} + r^{-1}v_\varphi v_{\varphi,\varphi} + v_z v_{\varphi,z} + r^{-1}v_r v_\varphi \quad (9)$$

$$w_z = v_{z,t} + r^{-1}v_\varphi v_{z,\varphi} + v_z v_{z,z} \quad (10)$$

Здесь подразумевается, что радиальная компонента скорости  $v_r$ , участвующая в формулах (8), (9), выражена при помощи соотношения (4). Таким образом, компоненты поля ускорений точек поверхности движущейся оболочки согласно (8)–(10) выражаются в эйлеровых цилиндрических координатах через функции  $r, v_\varphi, v_z$  и их производные.

**3.** Векторы основного  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  и взаимного  $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2$  базисов на поверхности  $\Sigma$ , ассоциированных с координатами  $\varphi, z$ , согласно (2) выражается формулами ( $\delta_\beta^\alpha$  — символ Кронекера)

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{,\varphi} = r_{,\varphi} \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{,z} = r_{,z} \mathbf{e}_r + \mathbf{i}_3 \quad (11)$$

$$\mathbf{R}^1 = G^{-1} [r_{,\varphi} \mathbf{e}_r + r (1 + (r_{,z})^2) \mathbf{e}_\varphi - r_{,\varphi} r_{,z} \mathbf{i}_3] \quad (12)$$

$$\mathbf{R}^2 = G^{-1} [r^2 r_{,z} \mathbf{e}_r - r r_{,\varphi} r_{,z} \mathbf{e}_\varphi + (r^2 + (r_{,\varphi})^2) \mathbf{i}_3]$$

Первый фундаментальный тензор и эйлеров набла-оператор на поверхности  $\Sigma$  определяются формулами [4]

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} = G_{sk} \mathbf{E}_s \otimes \mathbf{E}_k, \quad s, k = 1, 2, 3 \quad (13)$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_r$$

$$\nabla = \mathbf{R}^1 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{R}^2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (14)$$

Здесь  $\mathbf{I}$  — трехмерный единичный тензор.

При помощи формулы (5) величины  $G_{sk}$  выражаются через функцию  $r(\varphi, z, t)$  и ее производные.

Радис-вектор точки поверхности  $\sigma$  оболочки в отсчетной конфигурации задается выражением

$$\boldsymbol{\eta} = \rho(\theta, \zeta) \mathbf{e}_\rho + \zeta \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_\rho = \mathbf{i}_1 \cos \theta + \mathbf{i}_2 \sin \theta, \quad \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1 \sin \theta + \mathbf{i}_2 \cos \theta \quad (15)$$

Здесь  $\rho(\theta, \zeta)$  — заданная функция, поскольку отсчетная конфигурация оболочки известна. Вектор нормали к поверхности  $\sigma$  и ее первый фундаментальный тензор выражаются через известную функцию  $\rho(\theta, \zeta)$  и ее производные. В свою очередь лагранжевы координаты  $\theta$  и  $\zeta$  — неизвестные функции эйлеровых координат и времени:  $\theta = \theta(\varphi, z, t)$ ,  $\zeta = \zeta(\varphi, z, t)$ . Ниже будет использоваться также обратный тензор дисторсии оболочки  $\mathbf{f}$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \nabla \otimes \boldsymbol{\eta} &= \frac{1}{G} [r_{,\varphi} \mathbf{e}_r + r (1 + (r_{,z})^2) \mathbf{e}_\varphi - r_{,\varphi} r_{,z} \mathbf{i}_3] \otimes \\ &\otimes \left[ \left( \theta_{,\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \zeta_{,\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right) \mathbf{e}_\rho + \rho \theta_{,\varphi} \mathbf{e}_\theta + \zeta_{,\varphi} \mathbf{i}_3 \right] + \\ &+ \frac{1}{G} [r^2 r_{,z} \mathbf{e}_r - r r_{,\varphi} r_{,z} \mathbf{e}_\varphi + (r^2 + (r_{,\varphi})^2) \mathbf{i}_3] \otimes \\ &\otimes \left[ \left( \theta_{,z} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \zeta_{,z} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right) \mathbf{e}_\rho + \rho \theta_{,z} \mathbf{e}_\theta + \zeta_{,z} \mathbf{i}_3 \right] = f_{sk} \mathbf{E}_s \otimes \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (16)$$

4. Уравнения движения нелинейно упругой оболочки типа Коссера имеют вид [5]

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{\tau} = \mu \mathbf{w}, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \mathbf{h} = \gamma(\mu) \boldsymbol{\omega} \quad (17)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{M}$  — тензоры усилий и моментов типа Коши,  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{h}$  — интенсивности на единицу площади поверхности  $\Sigma$  распределенных по  $\Sigma$  внешних сил и моментов,  $\boldsymbol{\omega}$  — векторное поле угловых скоростей двумерного континуума Коссера,  $\gamma$  — скалярная мера вращательной инерции частиц оболочки. Поверхностная плотность оболочки  $\mu$  в текущей конфигурации выражается через известную плотность  $\mu_0$  в отсчетной конфигурации и тензор  $\mathbf{f}$  [3].

Мера вращательной инерции, вообще говоря, может зависеть от плотности  $\mu$ . Каждая частица оболочки Коссера, рассматриваемой как материальная поверхность  $\Sigma$ , обладает вращательными степенями свободы, кинематически независимыми от поля перемещений. Повороты частиц характеризуются собственно ортогональным тензорным полем  $\mathbf{H}$ , для которого удобно использовать общее представление через вектор поворота  $\boldsymbol{\psi}$

$$\mathbf{H} = (4 + \psi^2)^{-1} [(4 - \psi^2)\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi} - 4\mathbf{I} \times \boldsymbol{\psi}], \quad \psi^2 = \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (18)$$

Определяющие соотношения упругой оболочки типа Коссера можно записать в следующей общей форме [5]

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^T \cdot \Phi_1(\mathbf{E}, \mathbf{L}, \theta, \zeta) \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{F}^T \cdot \Phi_2(\mathbf{E}, \mathbf{L}, \theta, \zeta) \cdot \mathbf{H} \quad (19)$$

$$\mathbf{F} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L} = 4(4 + \psi^2)^{-1} \mathbf{F} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} \cdot \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \times \boldsymbol{\psi} \right) \quad (20)$$

В (19), (20)  $\mathbf{E}$  — мера деформации,  $\mathbf{L}$  — тензор изгибной деформации,  $\overset{\circ}{\nabla}$  — оператор градиента на поверхности  $\sigma$ ,  $\mathbf{F}$  — тензор дисторсии оболочки. Тензоры  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{f}$  связаны соотношениями:  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g}$ ;  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G}$ . Указанная в (19) явная зависимость функций отклика от лагранжевых координат  $\theta, \zeta$  имеет место для неоднородных оболочек.

Формулировка уравнений оболочек в эйлеровых координатах затруднена тем, что участвующий в соотношениях (19), (20) тензор дисторсии  $\mathbf{F}$  по определению выражается путем дифференцирования по лагранжевым координатам, которые в этих уравнениях являются неизвестными функциями. Данное затруднение можно преодолеть, выразив тензор дисторсии через тензор обратной дисторсии  $\mathbf{f}$  [6].

На основании (16), (18)–(20) тензоры усилий и моментов могут быть представлены в виде разложений

$$\mathbf{T} = T_{sk} \mathbf{E}_s \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{M} = M_{sk} \mathbf{E}_s \mathbf{E}_k \quad (21)$$

где компоненты  $T_{sk}$  и  $M_{sk}$  выражаются через функции  $r(\varphi, z)$ ,  $\theta(\varphi, z)$ ,  $\zeta(\varphi, z)$ ,  $\psi_k(\varphi, z) = \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{E}_k$  и их производные.

Векторное поле угловых ускорений частиц оболочки выражается формулой

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^\bullet = & (\omega_r \mathbf{e}_r + \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \omega_z \mathbf{i}_3)^\bullet = (\omega_{r,t} + r^{-1} v_\varphi \omega_{r,\varphi} + v_z \omega_{r,z} - r^{-1} v_\varphi \omega_\varphi) \mathbf{e}_r + \\ & + (\omega_{\varphi,t} + r^{-1} v_\varphi \omega_{\varphi,\varphi} + v_z \omega_{\varphi,z} + r^{-1} v_\varphi \omega_r) \mathbf{e}_\varphi + (\omega_{z,t} + r^{-1} v_\varphi \omega_{z,\varphi} + v_z \omega_{z,z}) \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (22)$$

Используя известное [5] соотношение, связывающее угловую скорость и вектор поворота

$$\boldsymbol{\omega} = 4(4 + \psi^2)^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \times \boldsymbol{\psi} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}^\bullet \quad (23)$$

можно получить выражения компонент угловой скорости  $\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z$  через компоненты  $\psi_r, \psi_\varphi, \psi_z$  вектора поворота в эйлеровом базисе и их производные. Для этого надо учесть представление  $\mathbf{I} + 1/2 \mathbf{I} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - 1/2 \psi_z \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi + 1/2 \psi_\varphi \mathbf{e}_r \mathbf{i}_3 + 1/2 \psi_z \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi - 1/2 \psi_r \mathbf{e}_\varphi \mathbf{i}_3 - 1/2 \psi_\varphi \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_r + 1/2 \psi_r \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$  а вместо  $\boldsymbol{\psi}^\bullet$  подставить в (23) выражение, аналогичное (22). Внося в (22) вместо  $\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z$  полученные указанным образом представления, найдем выражения компонент углового ускорения через компоненты векторного поля поворотов и их производные.

Проектирование векторных уравнений движения (17) на орты  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{i}_3$  с учетом соотношений (7)–(10), (21)–(23) дает шесть скалярных уравнений относительно восьми функций эйлеровых координат и времени:  $r, v_\varphi, v_z, \psi_r, \psi_\varphi, \psi_z, \theta, \zeta$ . Недостающие два уравнения получим из условия, что материальные производные по времени от лагранжевых координат  $\theta, \zeta$  равны нулю:

$$\theta_{,t} + r^{-1} v_\varphi \theta_{,\varphi} + v_z \theta_{,z} = 0, \quad \zeta_{,t} + r^{-1} v_\varphi \zeta_{,\varphi} + v_z \zeta_{,z} = 0$$

Начальные условия для указанной системы динамических уравнений состоят в том, что в начальный момент времени должны быть заданы значения функций  $r, r_{,t}, v_\varphi, v_z, \theta, \zeta, \psi_r, \psi_\varphi, \psi_z, \omega_r, \omega_\varphi, \omega_z$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-01492).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильгамов М. А. Введение в нелинейную гидроупругость. М.: Наука, 1991.
- [2] Zubov L. M. Уравнения упругих оболочек в эйлеровых координатах // ДАН. 1977. Т. 237. № 5. С. 1044–1047.
- [3] Zubov L. M. Уравнения нелинейной динамики упругих оболочек в цилиндрических эйлеровых координатах // ДАН. 2016. Т. 468. № 1. С. 29–32.
- [4] Zubov L. M. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1982.
- [5] Еремеев В. А., Zubov L. M. Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008.
- [6] Zubov L. M. Nonlinear deformations of elastic shells with distributed dislocations // Shell Structures: Theory and Applications. 2014. V. 3. P. 165–168.

**Zubov L. M.** *The equations of the micropolar elastic shells movement in Euler coordinates.* The equations of the elastic shells dynamics under large deformations are formulated.

# ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИИ НАЛОЖЕНИЯ СЕТОК ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ ШЕСТЕРЕННОГО НАСОСА

**Ильиных Г. В., Сметанников О. Ю.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

Эксплуатация шестеренных насосов связана с экстремальными режимами работы (высокая скорость, большой перепад давления), следствием которых может являться кавитационный износ деталей. Определенная модификация насоса позволяет исключить такого рода износ. Для анализа работы таких машин, а также влияния на нее изменения геометрии деталей, используются различные методы вычислительной гидродинамики. Численное моделирование работы насосов с подвижными деталями значительно осложняется из-за учета движения и деформаций расчетной сетки. В работе апробирован метод наложения сеток, позволяющий исключить деформацию расчетной сетки. На основе данного метода смоделирована работа шестеренного насоса исходной и модифицированной конфигураций в пакете ANSYS CFX. Исследованы и представлены достоинства и недостатки метода наложения сеток. Получено решение, представляющее собой стационарный режим работы насоса. Исследованы зоны кавитации, а также влияние на них модификации геометрии деталей. Проведена верификация численной модели на основе данных о расходе насоса.

Экстремальные режимы работы шестеренных насосов связаны с эрозионным износом деталей. Причиной этого служит явление кавитации, исключение или минимизация которого возможно, в частности, с помощью изменения внутренней геометрии насоса. В работе рассмотрена технология наложения сеток, используемая в совокупности с методом конечных объемов для выявления зон парообразования в процессе нестационарной работы шестеренного насоса. Преимущество такого метода, по сравнению, например с методом деформируемых сеток, заключается в исключении проблем построения расчетной сетки, учитывающей минимальные зазоры между шестернями и корпусом, а также деформацию границ [1–3]. Метод наложения сеток (технология Immersed solid в Ansys CFX) в основном используется для упрощения модели за счет замены общей сетки, представляющей собой свободное пространство течения жидкости и (или) газа, парой сеток. Основная сетка занимает не только пространство, занятое жидкой (газообразной) средой в данный момент за счет исключения движущихся деталей, но общую рабочую зону насоса с неподвижными границами. Движущиеся детали, в свою очередь, представляются теперь не твердыми границами модели, а конечно-объемными сетками, внедренными в основную сетку. Балансовые соотношения решаются как на общей, так и на наложенных сетках, а для стыковки решений осуществляется переинтерполяция полей с общей сетки на наложенную и обратно [4]. Отсутствие твердой стенки, с одной стороны, вносит погрешность в решение при проникновении потока внутрь накладываемой сетки, с другой — это проникновение сглаживает экстремальные условия потока вблизи запертых объемов и улучшает сходимость решения.

Полная система уравнений с учетом  $k - \varepsilon$  модели турбулентности для фазы  $\alpha$ , решаемая в ANSYS CFX для моделирования рассматриваемых в данной работе задач включает: уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^\alpha U_j) = 0, \tag{1}$$

уравнение переноса импульса:

$$\frac{\partial \rho^\alpha U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^\alpha U_i U_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_{eff}^\alpha \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + S_i, \tag{2}$$

уравнения для турбулентной кинетической энергии и энергии диссипации:

$$\frac{\partial (\rho^\alpha k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^\alpha U_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu^\alpha + \frac{\mu_t^\alpha}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho^\alpha \varepsilon, \tag{3}$$

$$\frac{\partial (\rho^\alpha \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^\alpha U_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu^\alpha + \frac{\mu_t^\alpha}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{z1} P_k - C_{z2} \rho^\alpha \varepsilon), \tag{4}$$

$$P_k = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \left( 3\mu_t^\alpha \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \rho^\alpha k \right), \tag{5}$$

турбулентная вязкость связана с  $k$  и  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\mu_t^\alpha = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \tag{6}$$

компоненты, используемые для моделирования влияния погруженного объекта  $D$  на окружающую жидкость:

$$S_i = -\gamma \beta C (U_i - U_i^F), \tag{7}$$

$$\beta = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Образование кавитации моделируется с помощью уравнения Рэлея—Плессета:

$$R_B \frac{d^2 R_B}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR_B}{dt} \right)^2 + \frac{2\sigma}{\rho_f R_B} = \frac{p_v - p}{\rho_f} \tag{8}$$

где  $\mu_{eff}^\alpha = \mu^\alpha + \mu_t^\alpha$  — эффективная вязкость, вычисляемая для турбулентности;  $\mu_t^\alpha$  — турбулентная вязкость;  $U_i^F$  — скорости, возникающие из-за погруженного объема;  $\gamma$  — масштабный коэффициент, устанавливающий баланс между точностью и сходимостью решения;  $C$  — коэффициент источника импульсов;  $C_{z1}, C_{z2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$  — константы;  $C_\mu$  — константа в  $k - \varepsilon$  модели;  $R_B$  — радиус пузырька;  $p_v$  — давление в пузырьке (предполагается равным давлению насыщенных паров);  $p$  — давление в жидкости, окружающей пузырек;  $\rho_f$  — плотность жидкости;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения между жидкостью и паром.

Для выявления особенностей решения, связанных с использованием технологии наложения сеток, была решена тестовая задача течения жидкости в трубе

с коническим кавитатором. Кавитатор моделировался в двух вариантах: в виде жесткой стенки (эталонное решение) и в виде погруженного домена Immersed solid. В ходе решения тестовой задачи с наложенной сеткой исследованы различные методы дискретизации численного решения, встроенные в Ansys CFX. Подобран оптимальный набор, максимально приближающий решение к эталонному. По результатам двух решений сделан вывод, что модель с накладываемой сеткой корректно описывает зоны образования паровых каверн. Также была отмечена устойчивость численного решения модели с накладываемой сеткой. Оба варианта задачи были верифицированы с помощью экспериментальных данных об обтекании конического кавитатора, полученных при аналогичных параметрах течения.

Далее с помощью технологии наложения сеток была смоделирована работа заданного шестеренного насоса (рисунок 1). Рассмотрены три режима работы насоса, соответствующие частотам вращения шестерен, равным 7480 об/мин, 7020 об/мин и 2580 об/мин соответственно. Трехмерная модель представляет собой половину насоса. Для улучшения сходимости входной и выходной участки были удлиненны, что позволило исключить зоны турбулентности на участках и изолировать их от пульсаций давления, возникающего в зоне зацепления. На входе и выходе заданы значения избыточного давления  $P_{inp}$  и  $P_{out}$  соответственно. В качестве начального приближения использовано распределение давления

$$P_{init} = \begin{cases} P_{inp}, y < 0 \\ P_{out}, y \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

где  $y = 0$  соответствует уровню осей вращения шестерен. Также на входе задано начальное значение объемного содержания газа  $\psi = 0$ . Критерий сходимости RMS в виде среднего значения абсолютной невязки для всех уравнений был выбран

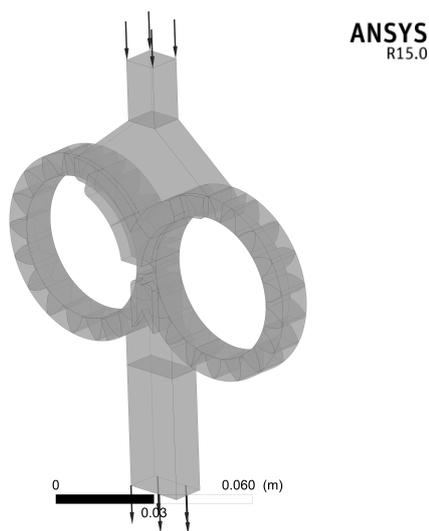


Рисунок 1 – Расчетная модель шестеренного насоса

в виде среднего значения абсолютной невязки для всех уравнений был выбран

Для каждого режима получено численное решение, соответствующее стационарной работе насоса. На рисунке 2 показано, что использование наложения сеток позволяет описать появление запертых объемов с характерными зонами повышенного и пониженного давления. При этом давление достигает значений насыщенных паров  $P = -1.01$  МПа.

Давление в зоне над запертыми объемами падает ниже уровня давления насыщенных паров, что приводит к появлению кавитации. Локальные зоны с максимальным содержанием пара находятся вблизи зубьев шестерен. В таблице 1 представлены данные об объемном содержании пара для двух режимов. За счет меньшего падения давления в третьем режиме работы насоса паровых каверн не образуется.



Рисунок 2 – Появление запертых объемов, режим 1

Таблица 1 – Объемное содержание пара

Режим	Объемное содержание пара, $\psi$		
	Топливо	Поверхность зубьев	Поверхность подпятников
1	70%	60%	18%
2	79%	69%	23%

Из рисунка 3 видно, что зона максимального образования кавитации находится в центре зубьев, при это объемное содержание газа достигает значения  $\psi=60.6\%$ . Появление кавитации в нерабочих зонах шестерен объясняется особенностями упрощения модели насоса.

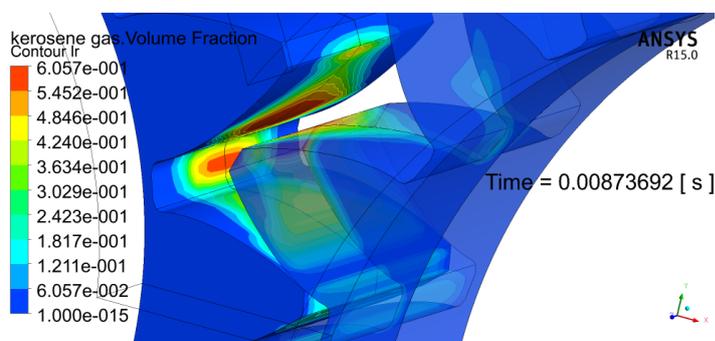


Рисунок 3 – Образование зон кавитации вблизи центра зубьев



Рисунок 4 – Внешний вид шестерен с кавитационным повреждением зубьев шестерен

В рамках моделирования не учитывается разница между ведущей и ведомой шестернями, обе шестерни вращаются с одинаковой скоростью, между контактными поверхностями всегда остается минимальный зазор, что приводит к периодической смене роли ведущей и ведомой шестерен. Следствием чего является возникновение кавитации на противоположных поверхностях шестерен, однако зоны кавитации совпадают с картинами действительного повреждения зубьев (рисунок 3). Ввод в модель различия между ведущей и ведомой шестернями может быть реализован на этапе дальнейшего уточнения модели, в частности уменьше-

ние зазора между контактной парой зубьев и учет разницы скоростей вращения шестерен.

Для верификации модели проведено сравнение теоретического и полученного из численного расчета значений объемного расхода  $Q$  для первых двух режимов работы. Относительная погрешность численного решения не превысила 10.6% для первого режима и 7.2% для второго. Таким образом, показано, что построенная модель качественно верно описывает работу шестеренного насоса, моделирует зоны повышенного и пониженного давления, а также зоны кавитационного воздействия на зубья.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Voorde J. V., Vierendeels J.A grid manipulation algorithm for ALE calculations in screw compressors // 17th AIAA computational fluid dynamics conference. 2005. P. 4701.
- [2] Hesse J., Spille-Kohoff A., Hauser J., Schulze-Beckinghausen P. Structured meshes and reliable CFD simulations: TwinMesh for positive displacement machines. // International screw compressor conference. TU Dortmund. 2014.
- [3] Hesse J., Spille-Kohoff A., Shorbady A. E., CFD simulation of screw compressor including leakage flows and rotor heating // 9th International Conference on Compressors and their Systems. 2015.
- [4] Смирнов Е. М., Зайцев Д. К., Применение деформируемых сеток для численного моделирования течений в областях с подвижными границами // Научно-технические ведомости. 2006. N 1(47). С. 15–22.

**Il'nykh G. V., Smetannikov O. Yu.** *Experience in the use of immersed solid method for simulating the operation of the gear pump.* Gear pumps operate under extreme working conditions (high velocity, high pressure drop). These conditions may be a cause of cavitation wear. Computational fluid dynamics (CFD) methods are used to analyze the operation of these machines. Numerical simulation of the pumps with moving parts is significantly complicated by the account of movement and deformation of the computational grid. Immersed solid method, which allows to eliminate the deformation of computational grid, is tested. Modeling gear pump using this method is simulated in Ansys CFX. Advantages and disadvantages of the method are investigated and presented. Numerical solution, which is associated with steady-state conditions is obtain. Cavitation zones are investigated. The verification of the numerical model is defined.

# МНОГОУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ АРМИРУЮЩЕГО КАРКАСА ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ

**Ильиных Г. В., Сметанников О. Ю., Смертина Т. А.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

В работе исследованы фильтрационные свойства армирующего каркаса полимерного композита. Рассмотрен многоуровневый подход, включающий численные модели механики многофазной жидкости на трех масштабных уровнях: уровень волокна, уровень ткани, уровень многослойной выкладки. На последнем уровне исследовано заполнение многослойного армирующего каркаса связующим. Параметры и условия модели данного процесса соответствуют известным экспериментальным данным, по которым проведена верификация модели. Подход реализован в виде универсальных макросов CAE пакета ANSYS.

**1. Введение.** Проблема расчетной оценки конструкционной прочности многослойных армированных пластиков на этапе проектирования является актуальной ввиду роста объемов использования таких материалов. Ее решение связано с целым комплексом задач и отличается большой сложностью, обусловленной, в частности, многообразием механизмов разрушения армированных пластиков, анизотропией материалов, значительным числом варьируемых переменных, а также возможным присутствием дефектов различного характера [1]. Наиболее часто встречаемыми дефектами в конструкции деталей авиационной техники являются смоляные карманы, поры, складки (или волны в одном или нескольких слоях) и расслоения. Такие дефекты могут образоваться на этапе инфузии или пропитки под давлением — RTM (Resin Transfer Molding). Разработка технологий RTM для создания ответственных конструкций невозможна без моделирования технологического процесса пропитки. В этой связи поставлена задача многоуровневого исследования фильтрационных свойств армирующего каркаса, учитывающего, в том числе, поверхностное натяжение связующего, особенности укладки волокон в жгутах и жгутов в ткани и другие факторы. В настоящей работе построена полная многоуровневая модель без учета указанных дополнительных факторов.

**2. Математическая модель.** Общая система уравнений, описывающая процесс пропитки с учетом  $k - \varepsilon$  модели турбулентности для фазы  $\alpha$  включает: уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^\alpha U_j) = 0, \quad (1)$$

уравнение переноса импульса:

$$\frac{\partial \rho^\alpha U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^\alpha U_i U_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_{eff}^\alpha \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + S_i, \quad (2)$$

уравнения для турбулентной кинетической энергии и энергии диссипации:

$$\frac{\partial (\rho^\alpha k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^\alpha U_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu^\alpha + \frac{\mu_t^\alpha}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho^\alpha \varepsilon, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho^\alpha \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^\alpha U_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu^\alpha + \frac{\mu_t^\alpha}{\sigma_z} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{z1} P_k - C_{z2} \rho^\alpha \varepsilon), \quad (4)$$

$$P_k = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \left( 3\mu_t^\alpha \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \rho^\alpha k \right), \quad (5)$$

турбулентная вязкость связана с  $k$  и  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\mu_t^\alpha = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6)$$

Для всех поставленных задач было получено численное решение методом конечных объемов в пакете Ansys CFX.

**3. Первый масштабный уровень.** Главная задача на данном уровне состоит в определении фильтрующих свойств нитей ткани. Для этого рассмотрены две модели, определяющие характер течения жидкости в двух взаимно перпендикулярных направлениях, вдоль и поперек волокон. Предполагается, что волокна имеют круглое сечение радиуса  $r_f$ , расстояние между соседними волокнами  $a_f$  постоянное. Расчетные схемы моделей представлены на рисунке 1 и рисунке 2. В качестве связующего рассматривается эпоксидная смола Araldite ly 8615. Модели имеют аналогичные граничные условия: скорость на входе  $V_{in}=0.1$  мм/с, избыточное давление на выходе  $P_{out}=0$ , границы волокон представляют собой адиабатические стенки, остальные границы являются плоскостями симметрии. Исследуется ламинарное стационарное течение связующего. В качестве критерия сходимости используется абсолютное значение максимальной невязки  $MAX=1e-14$ .

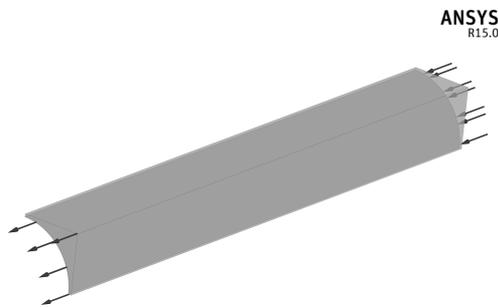


Рисунок 1 – Расчетная схема задачи течения связующего вдоль волокна

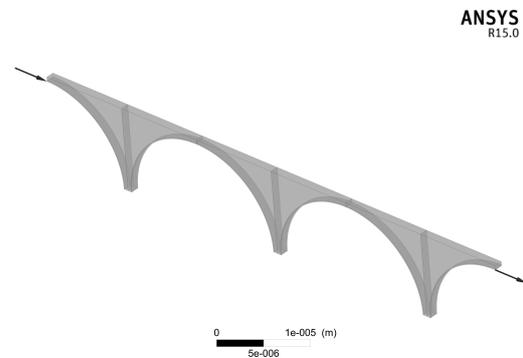


Рисунок 2 – Расчетная схема задачи течения связующего поперек волокон

Полученное численное решение системы (1)–(2) в дальнейшем используется для описания течения связующего внутри нити, рассматриваемой в качестве пористой среды. С помощью некоторых преобразований закона Дарси (7) [2] получим выражение для линейного коэффициента потерь (8).

$$v = -\frac{\kappa}{\eta} \mathbf{grad} p \quad (7)$$

$$C_R = \frac{\kappa}{\eta} = -\frac{\delta P}{vL} \quad (8)$$

где  $v$  — скорость пропитки через пористую среду,  $\kappa$  — проницаемость среды,  $p$  — давление,  $\eta$  — динамическая вязкость. Значения  $C_{R1}, C_{R2}$ , представляют собой линейные коэффициенты потерь для задачи течения вдоль и поперек волокна соответственно. Также для описания пористой среды нитей, состоящих из элементарных волокон получим значение пористости среды (9).

$$\phi_1 = \frac{V_0}{V} = \frac{\pi r_f^2}{(r_f + a_f)^2}, \tag{9}$$

где  $V_0$  - объем полостей,  $V$  — общий объем, включающий  $V_0$  и объем волокон.

**4. Второй масштабный уровень.** На данном уровне определяются фильтрующие свойства ткани в двух случаях течения связующего: вдоль нитей основы ткани, поперек ткани (сверху вниз на рисунке 4). В качестве расчетной модели выступает ячейка периодичности стеклоткани Porcher 7781, имеющей сатиновое 8-ремизное плетение. Рассматривается один слой ткани, представляющий собой 8 доменов нитей утка, 8 доменов нитей основы, а также домен, описывающий внешнее протекание связующего через полости между нитями. Данный домен имеет общую границу со всеми доменами нитей. Домены нитей границ между собой не имеют.

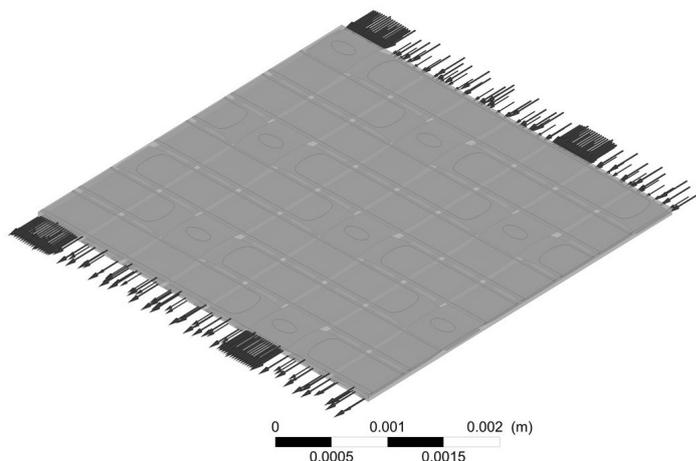


Рисунок 3 – Расчетная схема задачи протекания связующего через ткань

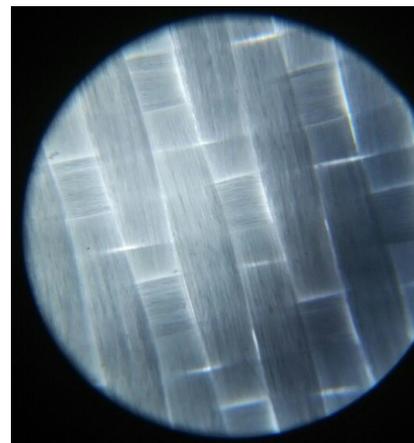


Рисунок 4 – Фотография нитей ткани Porcher 7781

Все домены нитей представляют собой пористую среду с заданными значениями  $C_{R1}, C_{R2}, \phi_1$ , полученными на предыдущем масштабном уровне. Автоматизированное создание конечно-объемной сетки любой реализовано в пакете Ansys Mechanical APDL с помощью макроса на встроенном языке APDL. Автоматизированное создание проекта Ansys CFX (домены, граничные условия, интерфейсы и т. д.) реализовано с помощью макроса на встроенном языке CEL с использованием языка Perl. Граничные условия для первого случая течения: давление на входе  $P_{in}=0$ , давление на выходе  $P_{out} = -754$  Па, Верхняя, нижняя, а также боковые грани модели являются плоскостями симметрии. Граничные условия для

второго случая: скорость на верхней границе  $P_{in} = 0.1$  мм/с, избыточное давление на нижней границе  $P_{out}=0$ , все боковые границы являются плоскостями симметрии. Для описания сопротивления пористой среды используется модель прямых потерь. Анизотропные свойства проницаемости основы и утка задавались с помощью направляющего вектора. Исследуется турбулентное стационарное течение связующего. В качестве критерия сходимости используется абсолютное значение максимальной невязки  $MAX=1e-4$ . Полученное численное решение системы (1)–(6) в дальнейшем используется для описания течения связующего в процессе пропитки под давлением технологического пакета, рассматриваемой в качестве пористой среды. С помощью (8) получены линейные коэффициенты потерь  $C_{R3}$ ,  $C_{R4}$  для задачи течения вдоль и поперек ткани соответственно. Для описания пористой среды ткани, состоящей из нитей основы и утка, а также полостей между ними использована формула (10).

$$\phi_2 = \frac{V_0}{V} = \frac{\left(\sum_i^8 V_i^{warp} + \sum_i^8 V_i^{weft}\right) \phi_1 + V_0}{\sum_i^8 V_i^{warp} + \sum_i^8 V_i^{weft} + V_0} \quad (10)$$

где  $V_i^{warp}$  и  $V_i^{weft}$  объемы основы и утка соответственно.

**5. Третий масштабный уровень.** На данном моделируется процесс пропитки технологического пакета размерами  $100 \times 500$  мм, включающего в себя 9 слоев ткани. Расчетная схема представляет собой параллелепипед заданных размеров. Граничные условия: давление на входе  $P_{inp}=0$ , давление на выходе  $P_{out} = -98$  кПа, все остальные границы являются твердыми адиабатическими стенками. Исследуется турбулентное нестационарное многофазное течение. Для учета многофазности используется гомогенная модель. В качестве критерия сходимости на каждом шаге по времени используется абсолютное значение средней невязки  $RMS=1e-5$ . Начальные условия включают начальное распределение объемного содержания связующего (11) и начальное распределение давления (12)

$$P_0 = (P_{out} - P_{in})\gamma + P_{in} \quad (11)$$

$$\gamma = \begin{cases} 1, x \leq x_0 \\ 0, x > x_0 \end{cases} \quad (12)$$

где  $x_0 = 10$  мм — длина заполненного связующим участка пакета в начальный момент времени.

Полученное численное решение системы (1)–(6) было верифицировано с помощью данных, полученных из аналогичного эксперимента пропитки пакета. На рисунке 5 представлено сравнение экспериментальных и численных данных о положении фронта пропитки.

Построенная многоуровневая модель позволяет исследовать процесс пропитки композита на трех масштабных уровнях. Построенные алгоритмы могут быть использованы для различных типов тканей и режимов пропитки.

В дальнейшем планируется исследовать следующие проблемы: нестационарное заполнение связующим армирующего каркаса на всех уровнях, влияние поверх-

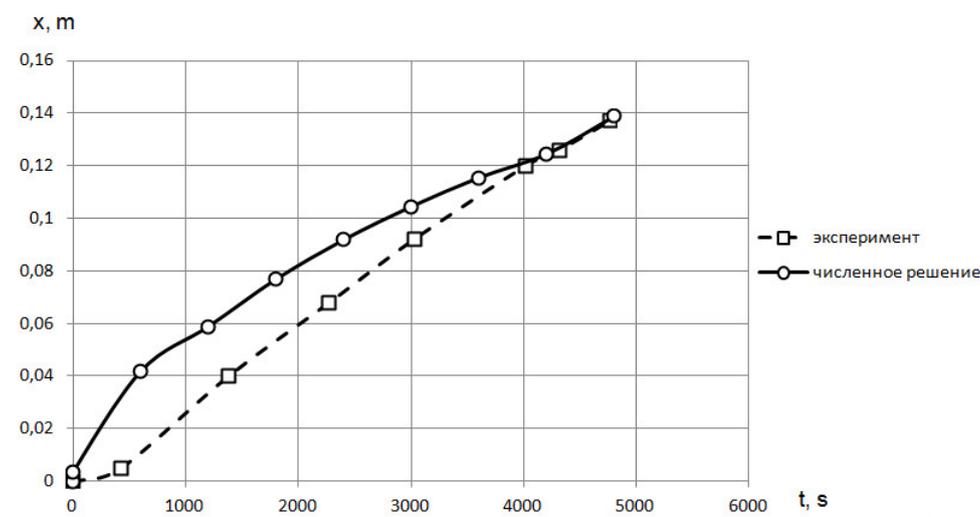


Рисунок 5 – Движение фронта пропитки

ностного натяжения связующего на всех уровнях модели, особенности укладки волокон в жгуты ткани, особенности укладки жгутов в ткани.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-48-590809).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Matveenko V. P., Smetannikov O. Yu., Trufanov N. A., Shardakov I. N. Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition // *Acta Mechanica*. 2012, V. 223, N. 6, P.1261–1284.
- [2] Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Applied Scientific Research*. No. 1. 1949. P.27–34.

**Илныкх Г. В., Сметанников О. Ю., Смертина Т. А.** *Model of multilevel research of filtration properties of fiber reinforced polymers.* This paper presents a study of filtration properties of fiber reinforced polymers. Model of multilevel research, which contains numerical three-level models of multiphase fluid mechanics is considered. These levels contain fiber level, fabric level and multilayer polymer level. The process of matrix molding of multilayer fiber reinforced polymers is studied at last level. Parameters and conditions of the level are match known experimental data, which area used for model verification. The method is implement as universal Ansys macros.

# О КОНТАКТЕ ТЕЛ С ПОВЕРХНОСТНО НЕОДНОРОДНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ И РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ШТАМПОВ

Казаков К. Е.<sup>1,2</sup>, Курдина С. П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

Механика контактного взаимодействия является активно развивающейся областью механики сплошных сред. Она находит применение как в задачах машиностроения и приборостроения, в которых улучшение характеристик в областях контакта приводит к увеличению ресурса работы механизмов и приборов, так и при строительстве объектов недвижимости, когда разработка методов определения допустимых кренов объектов как на этапе планирования застройки, так и в условиях частичной застройки, позволит скорректировать технологию возведения зданий и сооружений и разработать рекомендации по постепенному усилению инженерных и строительных конструкций.

В работе рассматриваются плоские задачи контактного взаимодействия стареющего вязкоупругого слоя с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярной конечной системы жестких штампов. Учитываются возрастные и структурные неоднородности покрытий, обусловленные процессом нанесения на основной слой, а также поверхностной обработкой уже существующего слоя. Поверхностная неоднородность может быть также вызвана использованием различных материалов при изготовлении покрытий. Такие неоднородности могут описываться как быстро осциллирующими, так и даже разрывными функциями. Рассмотрены различные варианты возможной постановки задачи. Получена система разрешающих интегральных уравнений с системой дополнительных условий, которая приведена к одному операторному уравнению с тензорным ядром и двум векторным дополнительным условиям в функциональном векторном пространстве. Поскольку применение классических методов (например, метода ортогональных многочленов) приводит к необходимости исследования бесконечных систем интегральных уравнений Вольтерра, то для нахождения ее решения использован проекционно-спектральный метод. Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы поверхности основания выделена в явном виде отдельным сомножителем. Это позволяет проводить расчеты для покрытий, неоднородности которых описываются быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Также получены аналитические выражения для определения осадок и углов наклона штампов.

Вязкоупругий однородный стареющий слой толщины  $H$  с тонким покрытием толщиной  $h$  лежит на подстилающем недеформируемом основании. Покрытие обладает поверхностной неоднородностью, то есть его жесткость меняется от точки к точке поверхности. В некоторый момент времени  $\tau_0$  в поверхность такого слоя начинает вдавливаться регулярная система одинаковых плоских жестких штампов силами  $P_i(t)$  с эксцентриситетами приложения  $e_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  — количество штампов). Области контакта  $b = b_i - a_i$  со временем не меняются и они значительно больше толщины покрытия. Здесь  $a_i$  — левая координата  $i$ -го штампа,  $b_i$  — его правая координата. Предполагается также, что жесткость покрытия меньше жесткости нижнего слоя, или же они одного порядка.

Заменив штампы некоторыми нормальными распределенными нагрузками  $q_i(x, t)$ , действующими на тех же участках, где и штампы, и приравняв вертикальные перемещения [1], вызванные этими нагрузками, перемещениям штампов, получим ( $i = 1, 2, \dots, n, x \in [a_i, b_i]$ )

$$\frac{q_i(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{F}_j \frac{q_j(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta_i(t) + x\alpha_i(x - \eta_i), \quad (1)$$

где  $R(x)$  — функция, описывающая жесткость покрытия и зависящая от условий его соединения с нижним слоем, причем в случае идеального контакта  $R(x) = E_1(x)[1 - \nu_1(x)][\{1 + \nu_1(x)\}[1 - 2\nu_1(x)]]$ , а в случае гладкого  $R(x) = E_1(x)/[1 - \nu_1^2(x)]$ ,  $\nu_1(x)$ ,  $E_1(x)$  — коэффициент Пуассона и модуль Юнга покрытия,  $\nu_2$ ,  $E_2(t - \tau_2)$  — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя;  $\delta_i(t)$  — осадка  $I$ -го штампа,  $\alpha_i(t)$  — угол его поворота;  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор,  $\mathbf{V}$  — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении  $K(t, \tau)$ ,  $\mathbf{F}_i$  — интегральные операторы Фредгольма с ядром плоской контактной задачи [2], зависящие от условий соединения нижнего слоя и недеформируемого основания,  $\eta_i = (a_i + b_i)/2$  — срединная точка  $i$ -го штампа.

Условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(x, t)dx = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} xq_i(x, t)dx = e_i(t)P_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Сделав в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{2(x - \eta_i)}{b}, & \xi^* &= \frac{2(\xi - \eta_j)}{b}, & t^* &= \frac{t}{\tau_0}, & \tau_2^* &= \frac{\tau_2}{\tau_0}, & \lambda &= \frac{2H}{b}, & \eta_i &= \frac{a_i + b_i}{2}, \\ \delta_i^*(t^*) &= \frac{2\delta_i(t)}{b}, & \alpha_i^*(t^*) &= \alpha_i(t), & c^*(t^*) &= \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_1}, & m^*(x^*) &= \frac{E_0}{R(x)(1 - \nu_2^2)} \frac{h}{b}, \\ q^{i*}(x^*, t^*) &= \frac{2(1 - \nu_2^2)q_i(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, & P^{i*}(t^*) &= \frac{4P_i(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)b}, & M^{i*}(t^*) &= \frac{8e_i(t)P_i(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)b}, \\ \mathbf{F}^{ij*}f(x^*) &= \int_{-1}^1 k^{ij}(x^*, \xi^*)f(\xi^*)d\xi^*, & k^{ij}(x^*, \xi^*) &= \frac{1}{\pi}k_{pl}\left(\frac{x - \xi}{H}\right), \\ \mathbf{V}^*f(t^*) &= \int_1^{t^*} K^*(t^*, \tau^*)f(\tau^*)d\tau^*, & K^*(t^*, \tau^*) &= K(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\tau_0 \end{aligned}$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений ( $x \in [-1, 1]$ )

$$c(t)m(x)q^i(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij}q^j(x, t) = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 q_i(x, t)dx = P^i(t), \quad \int_{-1}^1 xq_i(x, t)dx = M^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из четырех типов условий: осадку и угол поворота, вдавливающую силу и эксцентриситет ее приложения, осадку и момент приложения нагрузки, вдавливающую силу и угол поворота

штампа. Разумеется, на каждом штампе возможен свой набор условий. Очевидно, что тогда существует всего 15 возможных вариантов постановки задачи. В данной работе рассмотрим лишь решение для случая, когда на всех штампах заданы силы и эксцентриситеты их приложения (квазистатические условия). Решения для остальных вариантов строятся аналогично.

Приведем систему уравнений (3) с дополнительными условиями (4) к одному операторному уравнению с дополнительным векторным условием. Примем, что  $\mathbf{q}(x, t) = q^i(x, t)\mathbf{i}^i$ ,  $\boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t)\mathbf{i}^i$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t)\mathbf{i}^i$ ,  $\mathbf{P}(t) = P^i(t)\mathbf{i}^i$ ,  $\mathbf{M}(t) = M^i(t)\mathbf{i}^i$ ,  $\mathbf{k}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi)\mathbf{i}^i\mathbf{j}^j$ ,  $\mathbf{Gf}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{k}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi)d\xi$ . Здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до  $n$ , если левая часть формулы не зависит от этого индекса. Тогда уравнения (3), (4) можно записать в виде

$$c(t)m(x)\mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{Gq}(x, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x, \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{q}(x, t)dx = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 x\mathbf{q}(x, t)dx = \mathbf{M}(t). \quad (6)$$

Введя в (5), (6) обозначения  $\mathbf{Q}(x, t) = \sqrt{m(x)}\mathbf{q}(x, t)$ ,  $\mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{k}(x, \xi)/\sqrt{m(x)m(\xi)}$ ,  $\mathbf{Ff}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi)d\xi$ , получим ( $x \in [-1, 1]$ )

$$c(t)\mathbf{Q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{FQ}(x, t) = \frac{\boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x}{\sqrt{m(x)}} \equiv \boldsymbol{\Delta}(x, t), \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathbf{Q}(x, t)}{\sqrt{m(x)}}dx = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 x \frac{\mathbf{Q}(x, t)}{\sqrt{m(x)}}dx = \mathbf{M}(t). \quad (8)$$

Решение полученного разрешающего операторного уравнения (7) с векторным дополнительным условием (8) строится в классе вектор-функций из гильбертова пространства  $L_2([-1, 1], V)$ . Так как операторное уравнение и дополнительное условие содержат функции  $\sqrt{m(x)}$ , то при построении решения следует учитывать, что эта функция может быть быстроосциллирующей и даже разрывной. Поэтому в структуру функционального базиса должны входить функции  $\sqrt{m(x)}$ . Система ортонормированных базисных вектор-функций, удовлетворяющая вышеописанным условиям, сможет быть построена по следующему правилу

$$\mathbf{p}_k^i(x) = \frac{\mathbf{p}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \mathbf{p}_k^{i*}(x) = p_k^*(x)\mathbf{i}^i, \quad d_{-1} = 1, \quad J_k = \int_{-1}^1 \frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)},$$

$$d_k = \begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k & \cdots & J_{2k} \end{vmatrix}, \quad p_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k-1} & J_k & \cdots & J_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{vmatrix}.$$

Следуя обобщенному проекционному методу [3–5], пространство  $L_2([-1, 1], V)$  представим в виде прямой суммы евклидова пространства  $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ , базисом которого являются функции  $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$ , и ортогонального ему гильбертова пространства  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$  с базисом  $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 2, 3, \dots$

Тогда неизвестная вектор-функция  $\mathbf{Q}(x, t)$  и правая часть уравнения (7) представимы в виде суммы функций, определенных в пространствах  $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$  и  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ :  $\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_0(x, t) + \mathbf{Q}_1(x, t)$ ,  $\mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_0(x, t) + \mathbf{\Delta}_1(x, t)$ . Причем из дополнительных условий (8) сразу можно определить, что  $\mathbf{Q}_0(x, t) = z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x) + z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x)$ , где  $z_0^i(t) = P^i(t)/\sqrt{J_0}$ ,  $z_1^i(t) = [J_0M^i(t) - J_1P^i(t)]/\sqrt{J_0(J_0J_2 - J_1^2)}$ , а  $\mathbf{\Delta}(x, t) \equiv 0$ . Введя ортопроекторы  $\mathbf{P}_0: L_2([-1, 1], V) \rightarrow L_2^{(0)}([-1, 1], V)$  и  $\mathbf{P}_1: L_2([-1, 1], V) \rightarrow L_2^{(1)}([-1, 1], V)$  и, подействовав  $\mathbf{P}_1$  на (7), получим уравнение с известной правой частью

$$c(t)\mathbf{Q}_1(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_1(x, t) = \mathbf{\Delta}_1(x, t) - (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_2(x, t) = \tilde{\mathbf{\Delta}}_1(x, t)$$

решение которого строится в виде ряда по собственным функциям оператора  $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$ :  $\mathbf{P}_1\mathbf{F}\varphi_k(x) = \gamma_k\varphi_k(x)$ ,  $\varphi_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^i(x)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ). Тогда функция  $\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x)$ , где функции разложения определяются из соотношений  $z_k(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}_k)\{\Delta_k(t)/[c(t) + \gamma_k]\}$ ,  $\Delta_k(t)$  — функции разложения правой части по базису  $\varphi_k(x)$ ,  $\mathbf{W}_k$  — операторы Вольтерра с ядром, являющиеся резольвентами ядер  $\gamma_k K(t, \tau)/[c(t) + \gamma_k]$ . Отметим, что решение имеет вид

$$q^i(x, t) = \frac{1}{m(x)} [p_0^*(x)z_0^i(t) + p_1^*(x)z_1^i(t) + \dots], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

то есть в нем отдельным сомножителем выделена функция  $m(x)$ , что позволяет производить вычисления в случаях, когда формы оснований штампов и поверхностная неоднородность покрытия описываются быстроосциллирующими и даже разрывными функциями.

Определив функцию  $\mathbf{Q}_1(x, t)$  можно найти и осадки и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором  $\mathbf{P}_0$  на уравнение (7). Уравнения для осадок и углов поворота примут вид ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\alpha^i(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}} \left\{ c(t)z_1^i(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \left[ K_{10}^{ij}z_0^j(t) + K_{11}^{ij}z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^i z_k(t) \right] \right\},$$

$$\delta^i(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ c(t)z_0^i(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \left[ K_{00}^{ij}z_0^j(t) + K_{01}^{ij}z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t) \right] \right\} - \frac{J_1}{J_0} \alpha^i(t).$$

Таким образом, поставлена и решена плоская задача о контакте между вязкоупругим стареющим основанием с поверхностью неоднородным покрытием и конечной системой одинаковых жестких плоских штампов, расположенных на одном и том же расстоянии друг от друга (одно из обобщений периодической задачи). Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция, описывающая неоднородность покрытия, выделена в явном виде. Это позволяет проводить расчеты для покрытий, неоднородности которых описываются быстро изменяющимися функциями.

Авторы благодарят А. В. Манжирова за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научных проектов № 15-31-70002 «мол\_а\_мос» и № 16-31-00320 «мол\_а».

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
- [2] Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
- [3] Манжиров А. В., Казаков К. Е. Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактными задачам для тел с неоднородными покрытиями // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела: сб. трудов / отв. ред. Р. В. Гольдштейн; Ин-т проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2009. С. 238–263.
- [4] Манжиров А. В., Курдина С. П., Кухарский С. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. 2012. Т. 12. Вып. 4. С. 80–89.
- [5] Манжиров А. В., Казаков К. Е., Кухарский С. Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта // Развитие идей Л. А. Галина в механике. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 280–304.

**Kazakov K. E., Kurdina S. P.** *On the contact of bodies with surface inhomogeneous coatings and regular system of punches.* Mechanics of contact interaction is an actively developing field of continuum mechanics and has application both in problems of mechanical and instrument engineering, where improved contact zone characteristics result in increased operational life of devices and instruments, and in real estate construction projects, where the development of methods for determining allowable building tilt at the planning stage as well as in partially built areas permits improving building construction techniques and working out guidelines for the gradual reinforcement of mechanical and civil engineering structures.

The paper deals with plane problems of contact interaction between an ageing viscoelastic layer with surface-inhomogeneous coatings and a regular finite system of rigid dies. The age and structural inhomogeneities of the coatings arising from the coating process and also from surface treatment of an already existing coating are taken into account. Surface inhomogeneities can also result from the use of differing materials in the coating process. Such inhomogeneities can be described by rapidly oscillating or even discontinuous functions. Various possible statements of the problem are considered. We obtain a system of resolving integral equations with a system of additional conditions, which is reduced to a single integral equation with tensor kernel and two additional vector conditions in a vector function space. We solve this system by a projection-spectral method, because an application of classical methods (say, the method of orthogonal polynomials) would necessitate studying infinite systems of Volterra integral equations. The solution of the problem is obtained in closed form, and the shape function of the base surface occurs as a separate factor in the expressions for the contact stresses. This permits one to analyze coatings whose inhomogeneities are described by rapidly oscillating or even discontinuous functions. We also obtain closed-form expressions for the die indentation depths and tilt angles.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ И КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПЛИТ

Калоеров С. А., Занько А. И., Кошкин А. А.  
*Донецкий национальный университет*

Методом малого параметра задача линейной вязкоупругости для тонкой анизотропной плиты приведена к последовательности аналогичных задач теории упругости. Для плиты с эллиптическими упругими включениями или отверстиями задача приведена к решению системы линейных алгебраических уравнений, получаемой из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов. Проведены численные исследования, с помощью которых установлено значительные изменения напряженного состояния плиты во времени. Изотропные плиты рассматриваются как частный случай анизотропных.

**Введение.** Несмотря на большую практическую важность знаний изменения напряженного состояния многосвязных вязкоупругих плит с течением времени после приложения нагрузки, до сих пор такие исследования не выполнялись. В данной работе методом малого параметра задача вязкоупругости для плит приведена к последовательности аналогичных задач теории упругости, решаемых с использованием комплексных потенциалов и обобщенного метода наименьших квадратов. Решены задачи для плиты с эллиптическими (в частном случае линейными) упругими включениями, в частном случае отверстиями или жесткими включениями.

**Постановка задачи.** Рассмотрим вязкоупругую анизотропную плиту, занимающую область  $S$ , ограниченную контурами  $L_l$ . При нахождении для нее значений исследуемых величин во времени можно воспользоваться принципом Вольтерра, т. е. решить задачу без учета свойств вязкоупругости, а затем в этом решении заменить упругие постоянные временными операторами и найти действие этих операторов во времени. Однако для многосвязных областей такие решения задач теории упругости получать невозможно. Поэтому непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно-деформированного состояния тел невозможно. В связи с этим возникает необходимость и здесь получать такие решения, которые явным образом содержали бы упругие постоянные. Это можно сделать, используя метод малого параметра, в качестве которого можно взять изменение во времени коэффициентов Пуассона, например, коэффициента  $\nu_{12}$ , представив его в виде  $\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda$ , в котором  $\nu_{12}^0$  — мгновенно-упругое значение коэффициента  $\nu_{12}$ ,  $\lambda$  — малый параметр. Учитывая это, как и в случае плоской задачи [1], получим, что решение задачи вязкоупругости сводится к нахождению комплексных потенциалов приближений  $W'_{jk}(z_k)$  из соответствующих граничных условий. Эти функции комплексных переменных  $z_k = x + \mu_k y$ , где  $\mu_k$  — корни известного характеристического уравнения [1], определены в областях  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  указанными аффинными преобразованиями, и в общем случае имеют вид

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^L (A_{jkl} z_k + B_{jkl}) \ln(z_k - z_{kl}) + W'_{j0k}(z_k), \quad (1)$$

где  $W'_{j0k}(z_k)$  — функции, голоморфные в  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими  $L_l$  области  $S$ ;  $\Gamma_{jk}$  ( $k = 1, 2$ ) — постоянные, равные нулю в случае конечной области  $S$  и определяемые в случае бесконечной области из систем:

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{0k} &= \\ &= \left( -\frac{a_{11}M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{12}^0M_y^\infty}{D_0}, -\frac{a_{66}H_{xy}^\infty}{2D_0}, -\frac{a_{12}^0M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{22}M_y^\infty}{D_0}, 0 \right), \\ 2Re \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{1k} &= \left( \frac{a_{11}M_y^\infty}{D_0}, 0, \frac{-a_{11}M_x^\infty}{D_0}, 0 \right), \Gamma_{jk} = 0 \quad (j \geq 2); \end{aligned} \quad (2)$$

$A_{jkl}, B_{jkl}$  — постоянные, определяемые из аналогичных систем.

Производные комплексных потенциалов приближений  $W'_{jk}(z_k)$ , должны удовлетворять определенным граничным условиям. Так, в случае плиты с упругими включениями эти условия получаются такими:

$$2Re \sum_{k=1}^2 \left[ g_{0kli} W'_{jk}(z_k) - g_{0ki}^{(l)} W_{jk}^{(l)}(z_k) \right] = f_{jli} \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} f_{j11} &= -\delta_j^0 (c_{1x} - c_{1l}) - (1 - \delta_j^0) 2Re \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[ \frac{p_{j-i,k}}{\mu_k} W'_{ik}(z_k) - \frac{p_{j-i,k}^{(l)}}{\mu_k^{(l)}} W_{ik}^{(l)}(z_k) \right], \\ f_{j12} &= \delta_j^0 (c_{1y} + c_{2l}) - (1 - \delta_j^0) 2Re \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[ q_{j-i,k} W'_{ik}(z_k) - q_{j-i,k}^{(l)} W_{ik}^{(l)}(z_k) \right], \\ f_{j13} &= -(1 - \delta_j^0) 2Re \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[ W'_{ik}(z_k) - W_{ik}^{(l)}(z_k) \right], \\ f_{j14} &= -(1 - \delta_j^0) 2Re \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[ \mu_k W'_{ik}(z_k) - \mu_k^{(l)} W_{ik}^{(l)}(z_k) \right]; \end{aligned}$$

$g_{0kli}, p_{j-i,k}, q_{j-i,k}, c_l, c_{1l}, c_{2l}$  — постоянные. Здесь и далее все величины со значком  $(l)$  вверху относятся к включениям  $S^{(l)}$ .

После определения производных комплексных потенциалов приближений комплексные потенциалы вычисляются по формуле [1]

$$W'_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j W'_{jk}(z_k) \quad (4)$$

Заменяя параметр  $\lambda$  временными операторами  $\lambda = D_1 \mathfrak{A}_\alpha^* (-\beta_1^* - \delta_1^*) + D_2 \mathfrak{A}_\alpha^* (-\beta_2^*)$ , где  $D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[ \frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4\nu_{12}^0 \right]$ ,  $D_2 = \frac{\delta_2^* E_1^0}{4 E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*}$ ,  $E_i^0$  — мгновенно упругие значения модулей Юнга  $E_i$ ,  $\delta_i^*, \beta_i^*$  — реологические постоянные материала плиты, связанные с изменением  $E_i$  во времени [3] и возведя в степень найдем

$$\lambda^j = \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathfrak{A}_\alpha^{*k} (-\beta_2^*) - \mathfrak{A}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*} \quad (5)$$

Вычислив  $\lambda^j$  по формуле (5) и подставив его в выражения (4), найдем функции  $W'_k(z_k)$  и их производные, а, следовательно, изгибающие моменты и перерезывающие силы в любой момент времени.

**Решение задачи для плиты с эллиптическими включениями или отверстиями.** Рассмотрим бесконечную вязкоупругую плиту-матрицу с эллиптическими отверстиями  $L_l$  ( $l = \overline{1, L}$ ) с полуосями  $a_l$ ,  $b_l$ . В отверстия без предварительного натяжения вставлены упругие включения из других вязкоупругих материалов. Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана, для производных комплексных потенциалов получим выражения [1]

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jkl n}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (6)$$

где  $\zeta_{kl}$  — переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}) \quad (7)$$

внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ ;

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, & R_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2, \\ m_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2R_{kl}; \end{aligned} \quad (8)$$

$x_{0l}$ ,  $y_{0l}$  — координаты начала локальной системы координат  $O_l x_l y_l$  с началом в центре эллипса  $L_l$  и осью  $O_l x_l$  вдоль полуоси  $a_l$ ;  $\varphi_l$  — угол между направлениями осей координат  $Ox$  и  $O_l x_l$  основной системы и локальной системы координат, отсчитываемый от  $Ox$  против часовой стрелки;  $a_{jkl n}$  — постоянные, определяемые из граничных условий на контурах плиты.

Для включений комплексные потенциалы приближений имеют вид:

$$W_{jk}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jkn}^{(l)} \varphi_{kn}^{(l)}, \quad \varphi_{kn}^{(l)} = \left( \frac{z_k^{(l)} - z_{kl}^{(l)}}{R_{kl}^{(l)}} \right)^n. \quad (9)$$

Для определения неизвестных постоянных  $a_{jkl n}$ ,  $a_{jkn}^{(l)}$  функций (6) и (9) методом наименьших квадратов удовлетворим граничным условиям в дифференциальной форме. Для этого на контурах контакта плиты с включениями выберем набор точек  $t_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$  ( $m = \overline{1, M_l}$ ) и удовлетворим в них условиям (3), продифференцировав их по дуге контура. Получим уравнения

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left[ g_{0kli} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{jkl n} - g_{0ki}^{(l)} \delta_k^{(l)} \varphi_{kn}^{\prime(l)}(t_{km}^{(l)}) a_{jkn}^{(l)} \right] = \\ \frac{df_{jli}(t_{lm})}{ds} - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0kli} \delta_k \Gamma_{jk} \quad (i = \overline{1, 4}; m = \overline{1, M_l}; l = \overline{1, L}), \end{aligned} \quad (10)$$

в которых  $\delta_k = dz_k/ds$ ,  $\delta_k^{(l)} = dz_k^{(l)}/ds$ ,  $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$ ,  $t_{km}^{(l)} = x_{lm} + \mu_k^{(l)} y_{lm}$ ,  $\varphi'_{kln} = -n/\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})$ ,  $\varphi_{kln}^{\prime(l)} = n (z_k^{(l)} - z_{kl})^{n-1} / (R_k^{(l)})$ .

Если включение переходит в прямолинейную упругую линию (соответствующее отверстие — в разрез), то по аналогии с коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) для концов разрезов в плоской задаче [1] можно вычислить и коэффициенты интенсивности моментов (КИМ).

**Описание результатов численных исследований.** Были проведены численные исследования значений величин для плиты из алюминия (материал М1) и эпоксида (М2) [1]. Для постоянных материалов включений считалось, что  $a_{ij}^{(l)} = \lambda^{(l)} a_{ij}$ , где  $\lambda^{(l)}$  — коэффициенты относительной жесткости включений  $S^{(l)}$ . Ниже описаны некоторые из полученных результатов, когда на бесконечности  $M_y^\infty = m$ ,  $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$ , а плита имеет одно или два эллиптических включения, которые в частном случае рассматривались как абсолютно мягкие (отверстия,  $\lambda^{(l)} = 0$ ) или абсолютно жесткие ( $\lambda^{(l)} = \infty$ ).

Как следует из полученных результатов, течением времени значения моментов в плите изменяются. При этом большие изменения происходят лишь в первые 50 часов после приложения нагрузки, а через 200 часов они практически не изменяются, т. е. в плите устанавливается стационарное состояние.

На рисунке 1 для двух случаев  $\lambda^{(l)}$  ( $\lambda^{(l)} = 0$  и  $\lambda^{(l)} = \infty$ ) в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки, изображены графики распределения в плите моментов  $M_s$ , соответствующих напряжениям на площадках, перпендикулярных к контуру, в начальном и стационарном состояниях. Сплошные и пунктирные линии соответствуют начальному и стационарному состояниям. Кривые 1, 3 относятся к плите из материала М2, 2, 4 — из материала М1, кривые 1, 2 относятся к плите с абсолютно мягким включением ( $\lambda^{(l)} = \infty$ ), кривые 3, 4 — с абсолютно жестким включением ( $\lambda^{(l)} = 0$ ). Как следует из рисунка 1 и других полученных результатов, при переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов вблизи контура включения претерпевают значительные изменения. Наиболее высокая концентрация моментов наблюдается в точке  $\theta = 0$  плиты с абсолютно мягким включением (отверстием) и абсолютно жестким включением. С увеличением жесткости включения моменты сперва убывают (при  $\lambda^{(l)} > 1$ ), а затем растут (при  $\lambda^{(l)} < 1$ ). Наибольшие изменения моментов во времени наблюдаются для абсолютно жесткого включения, наименьшие изменения — в случае отверстия. При  $\lambda^{(l)} > 10^3$  включение можно считать абсолютно мягким, при  $\lambda^{(l)} < 10^{-3}$  — абсолютно жестким.

Как показывают исследования, на значения моментов вблизи включения существенно влияет отношение полуосей эллиптического включения  $b_1/a_1$ . С уменьшением этого отношения значения моментов вблизи концов большой полуоси включения растут, стремясь к бесконечности, а при  $b_1/a_1 < 10^{-3}$  включение можно считать линейным и для него вычислять КИМ. На рисунке 2 изображены графики изменения КИМ в зависимости от жесткости материала включения (параметра  $\lambda^{(l)}$ ) в начальном и стационарном состоянии. Видно, что для линейного включения влияние параметра  $\lambda^{(l)}$  такое же, как и для кругового включения:  $\lambda^{(l)} < 10^{-3}$  линейное включение можно считать абсолютно жестким, при  $\lambda^{(l)} > 10^3$  — абсолютно мягким (трещиной). При  $10^{-3} < \lambda^{(l)} < 10^3$  значения КИМ весьма малы и ими можно пренебречь. Поэтому говорить о КИМ для линейных упругих включений, когда жесткость их материалов отличается от жесткости материала плиты

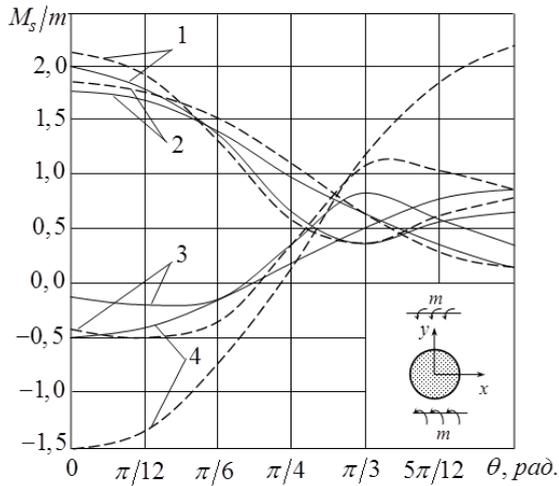


Рисунок 1

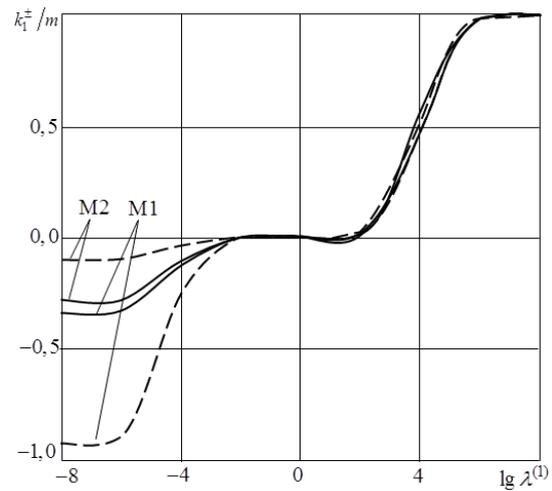


Рисунок 2

менее чем  $10^3$  раз, нет смысла, хотя при использовании других моделей и методов авторы приходят к другим результатам.

Расчеты были проведены и для плиты с двумя одинаковыми включениями. При уменьшении расстояния между включениями значения моментов около включений и в точках перемычки растут уже в упругой постановке, а при переходе в стационарное состояние они претерпевают еще большие изменения. Если расстояние между включениями больше диаметра, то влияние одного включения на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калоеров С. А., Паршикова О. А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки // Теорет. и прикладная механика. 2001. № 2 (48). С. 51–70.
- [2] Лехмицкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
- [3] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

**Kaloerov S. A., Zanko A. I., Koshkin A. A.** *Solving of linear viscoelasticity problem for homogeneous and piecewise homogeneous plates.* By use of small parameter method the problem for the linear viscoelastic anisotropic thin plate is reduced to a sequence of similar elasticity problems. The problem for plates with elliptical elastic inclusions or holes is reduced to solving a system of linear equations obtained from the boundary conditions by generalized least squares method. Numerical studies shows that a significant change in the stress state of the plate occur over time. Isotropic plates are treated as a special case of anisotropic plates.

# РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И РАЗДУВАНИИ

Карякин М. И., Обрезков Л. П., Шубчинская Н. Ю.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В большинстве классических и современных работ, посвященных исследованию потери устойчивости трехмерных тел и конструкций из сжимаемых [1–3] и несжимаемых [4, 5] материалов, рассмотрены случаи простого нагружения однородных тел. Целью настоящей работы являлось изучение явлений неустойчивости при одновременном действии нескольких типов нагрузок для тел неоднородной структуры. Для различных моделей нелинейно-упругого поведения рассмотрены процессы одноосного растяжения и радиального раздувания неоднородного кругового полого цилиндра. Посредством полубратного метода трехмерная задача сведена к исследованию нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для решения задачи устойчивости применялся метод наложения малой деформации на конечную. Такой подход позволяет провести компьютерную автоматизацию исследования равновесия и устойчивости с использованием системы компьютерной алгебры Maple. Рассмотрены наборы из осесимметричных и неосесимметричных мод и построены области устойчивости при растяжении и раздувании.

**1. Постановка задачи.** Деформация осевого растяжения и раздувания полого кругового цилиндра с изолированной дисклинацией высоты  $h$  с внутренним и внешним радиусами  $r_0$  и  $r_1$ , соответственно, описывается полубратным представлением вида [1–5]

$$R = P(r), \Phi = \varkappa\varphi, Z = \eta z, \quad (1)$$

где  $r, \varphi, z$  и  $R, \Phi, Z$  — цилиндрические координаты в отсчетной и текущей конфигурации соответственно,  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $0 \leq z \leq h$ ,  $\eta$  — коэффициент удлинения цилиндра,  $P(r)$  — функция, описывающая изменение радиуса радиальной координаты точки цилиндра. Будем предполагать, что на торцах цилиндра отсутствуют касательные напряжения. Случай  $\eta < 1$  соответствует сжатию цилиндра, а  $\eta > 1$  — растяжению,  $\varkappa$  — параметр дисклинации. Случай  $\varkappa > 1$  соответствует деформации, возникающей при удалении из цилиндра сектора  $2\pi\varkappa^{-1} \leq \varphi \leq 2\pi$ , и поворота сечения на  $\varphi = 2\pi\varkappa^{-1}$  вокруг оси цилиндра до совмещения с плоскостью  $\varphi = 0$ , Случай  $0 < \varkappa < 1$  соответствует деформации, когда в разрезанный цилиндр вставляется клин из такого же нелинейно-упругого материала с углом раствора  $2\pi(1 - \varkappa)$ .

Материал цилиндра будем считать гиперупругим, его свойства описываются функцией удельной потенциальной энергии деформации  $W$ , которая в изотропном случае зависит только от главных инвариантов меры деформации Коши  $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$ , где  $\mathbf{C}$  — градиент деформации, который имеет вид:

$$\mathbf{C} = P' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{P\varkappa}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \eta \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z, \quad (2)$$

Для описания напряжённого состояния будем использовать тензор напряжений Пиолы  $\mathbf{D}$ , определяющие соотношения для которого записывается в виде  $\mathbf{D} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}$ , а уравнение равновесия в области, занимаемой телом в отсчётной конфигурации, имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (3)$$

С учётом (1) уравнение (3) после конкретизации функции  $W$  сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции  $P(r)$ .

Граничными условиями для уравнения (3) служит условие отсутствия нагрузки на внешней боковой поверхности цилиндра

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (4)$$

и загруженности его внутренней поверхности равномерно распределенным гидростатическим давлением  $p$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -pJ\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}, \quad (5)$$

где  $J = \det \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали. Часть граничных условий на торцах цилиндра, обеспечивающих условие скользящей заделки

$$D_{zR} = 0, D_{z\Phi} = 0, \quad (6)$$

выполняется точно, а условие на осевое напряжение — в интегральном смысле, что гарантирует необходимую величину растягивающей силы и служит для определения связи между этой силой и коэффициентом удлинения  $\eta$ .

Исследование устойчивости построенных решений осуществляется в рамках бифуркационного подхода на основе анализа уравнений нейтрального равновесия. Соотношение (1) заменяется преобразованием:

$$\begin{aligned} R &= P(r) + \varepsilon u(r, \varphi, z), \\ \Phi &= \kappa\varphi + \varepsilon v(r, \varphi, z), \\ Z &= \eta z + \varepsilon w(r, \varphi, z). \end{aligned} \quad (7)$$

Линеаризация необходимых деформационных характеристик проводилась по формуле  $\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{F}(\mathbf{C}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{C}})|_{\varepsilon=0}$ . Уравнения нейтрального равновесия — линеаризованные уравнения (3) — запишутся в следующем виде

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = 0 \quad (8)$$

с соответствующими однородными краевыми условиями для функций  $u(r, \varphi, z)$ ,  $v(r, \varphi, z)$ ,  $w(r, \varphi, z)$ . Анализ полученной системы проводится методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) &= U(r) \cos\left(\frac{z\pi m}{h}\right) \cos(n\varphi), \\ v(r, \varphi, z) &= V(r) \cos\left(\frac{z\pi m}{h}\right) \sin(n\varphi), \\ w(r, \varphi, z) &= U(r) \sin\left(\frac{z\pi m}{h}\right) \cos(n\varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

$m, n \in \mathbf{N}$  — номера мод потери устойчивости. При таком разделении автоматически выполняются граничные условия (6) на торцах цилиндра, а предметом анализа становится линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $U(r), V(r), W(r)$ .

Будем рассматривать поведение цилиндра из материала Блейтца и Ко, функция удельной потенциальной энергии деформаций которого имеет вид [6]

$$W = \frac{1}{2}\mu \left( \frac{I_2(\mathbf{G})}{I_3(\mathbf{G})} + 2\sqrt{I_3(\mathbf{G})} - 5 \right),$$

$\mu$  — это константа, которая в линейной теории соответствуют модулю сдвига,  $I_k(\mathbf{G}), k = \overline{1,3}$  — инварианты меры деформации Коши.

Приведем вид двух областей устойчивости, очерчиваемые кривыми с номерами соответствующих мод  $(m, n)$  указанными в таблицах, для двух цилиндров со следующими геометрическими характеристиками  $h/r_1 = 10, r_0/r_1 = 0.9$ . В первом случае (рисунок 1) неоднородность задается параметром дисклинации, во втором (рисунок 2) цилиндр предполагается однородным. Область устойчивости будем изображать на плоскости параметров  $\eta$  и  $\xi$ , где  $\xi = \frac{P(r_0)}{r_0}$ .

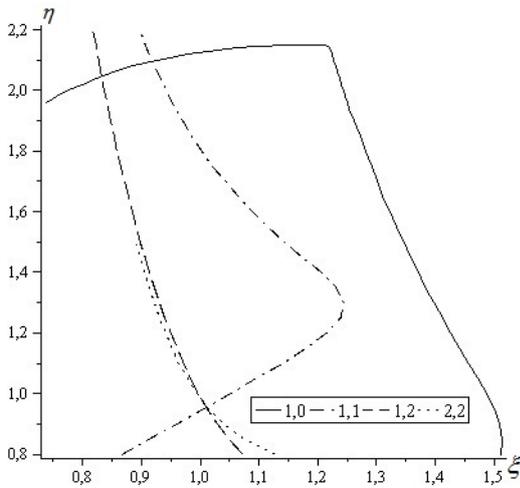


Рисунок 1 – Цилиндр с дисклинацией  $\varkappa = 1.05$

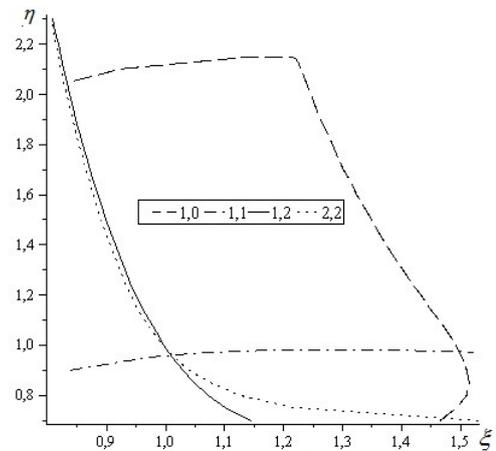


Рисунок 2 – Цилиндр без дисклинации

Как видно из графиков, даже небольшое изменение параметра  $\varkappa$  значительно меняет вид области: меняется поведение кривой с модами (1, 1) и именно она становится границей этой области устойчивости при раздувании внутренним давлением; площадь области в целом уменьшается.

**2. Осевое растяжение и раздувание двухслойного цилиндра.** Деформация двухслойного цилиндра описывается аналогично предыдущему случаю, уравнения равновесия и устойчивости выводятся для каждого слоя отдельно. Добавляются следующие граничные условия – на внутренней поверхности внешнего слоя:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_2 = -p_c J_2 \mathbf{C}_2^{-1} \cdot \mathbf{e}_r, \tag{10}$$

где  $p_c$  — это давление, которое возникает между слоями цилиндра, и для внешней боковой поверхности внутреннего слоя:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_1 = -p_c J_1 \mathbf{C}_1^{-1} \cdot \mathbf{e}_r. \quad (11)$$

На рисунках представлены изменение внутреннего радиуса в зависимости от давления (рисунок 3) и области устойчивости (рисунок 4) двухслойных цилиндров при  $\frac{r_0}{r_1} = 0.7$ ,  $\frac{h}{r_1} = 10$ , причем  $\delta_i$  обозначает толщину  $i$ -го слоя.

Оказалось, что увеличение относительной жесткости внутреннего слоя ведет к уменьшению области устойчивости при растягивающих напряжениях (рисунок 4).

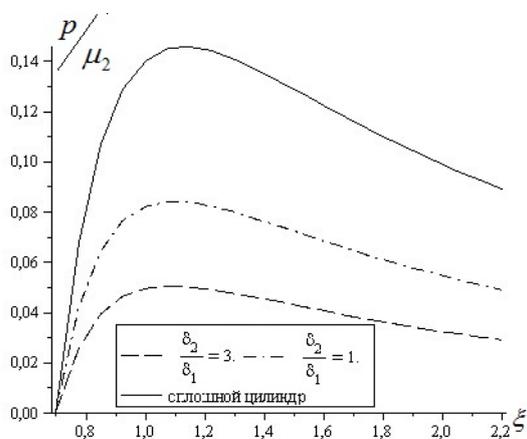


Рисунок 3 – Изменение внутреннего радиуса цилиндра в зависимости от внутреннего давления ( $\eta = 1$ ,  $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 10$ )

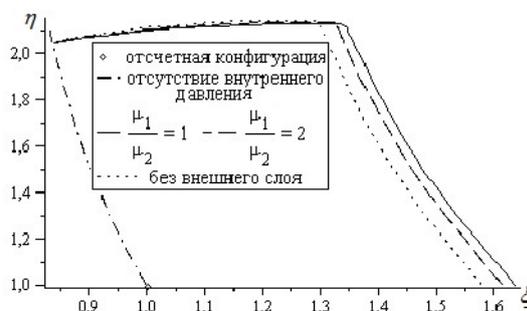


Рисунок 4 – Области устойчивости двухслойного цилиндра при  $\delta_1 = \delta_2$ , пунктиром обозначена область устойчивости сплошного цилиндра  $\frac{r_0}{r_1} = \frac{0.7}{0.85}$

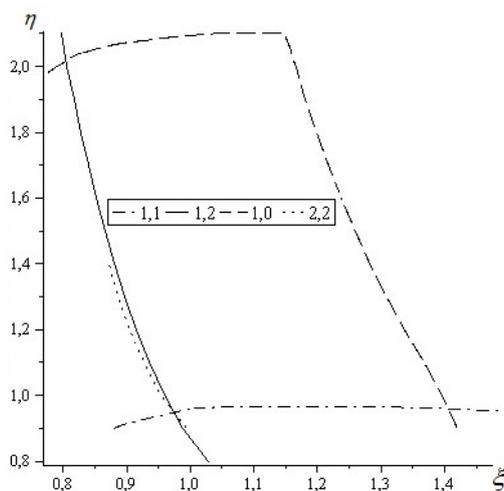


Рисунок 5 – Области устойчивости цилиндра при раздувании и растяжении при  $\frac{h}{r_1} = 10$ ,

$$\frac{r_0}{r_1} = 0.5, \mu(r) = 100 \exp\left(-\frac{\ln(\mu_0/\mu_1) \frac{(r-r_1)}{100}}{(r_1-r_0)}\right)$$

**3. Осевое растяжение-сжатие и радиальное раздувание-обжатие цилиндра с переменным модулем жесткости.** Рассмотрим случай однослойного цилиндра описываемого моделью материала Блейтца и Ко с переменным модулем  $\mu(r)$  при отсутствии дисклинации ( $\mu_0$  — значение модуля сдвига на внутренней границе,  $\mu_1$  — на внешней).

Задание переменного модуля сдвига, как и в случае двухслойного цилиндра, не меняет характера области устойчивости, т. е. она очерчивается теми же кривыми, но ведет к ее уменьшению (рисунок 5) по сравнению со случаем, когда  $\mu$  имеет постоянное значение.

Работа выполнена в рамках гранта Минобрнауки РФ № 9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александрин М. В., Карякин М. И. Об устойчивости растяжения нелинейно-упругого цилиндра // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2010. №1. С. 7–12.
- [2] Spector S. On the absence of bifurcation for Elastic bars in uniaxial tension // Arch. Ration. Mech. and Analysis 1984. V 85. №2. P. 171–199.
- [3] Willoson A. J., Myers P. J. On The Finite Elastostatic Deformation of Thin-Walled Spheres and Cylinders // International Journal Solids and Structures 1990. V 26. №3. P. 369–373.
- [4] Zubov L. M., Sheidakov D. I. Об устойчивости цилиндрической трубы при осевом растяжении и внутреннем давлении // Южного Научного Центра РАН. 2006. Т. 2. №3. С. 8–15.
- [5] Zubov L. M., Sheidakov D. I. Instability of a Hollow Elastic Cylinder Under Tension, Torsion and Inflation // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics 2008. V 75. №1. 011002
- [6] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 312 с.

**Karyakin M. I., Obrezkov L. P., Shubchinskaya N. Y.** *Equilibrium and stability of inhomogeneous nonlinear-elastic cylinders*. In the most of modern papers devoting to the buckling researching of solid bodies form compressible [1–3] and incompressible [4, 5] materials, only cases of simple loading of homogeneous bodies have been considered. The aim of the present paper is researching of buckling effects of inhomogeneous bodies under simultaneously types of loading. Axes stretching and radial inflation of hollow cylinder from nonlinear elastic material are considered. Stability areas have been obtained.

# THREE DIMENSIONAL MODES IN THE COUETTE–TAYLOR PROBLEM WITH RADIAL CROSS-FLOW

**Ilin K. I.<sup>1</sup>, Morgulis A. B.<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup>*The University of York*

<sup>2</sup>*Southern Federal University, Rostov-on-Don*

<sup>3</sup>*Vladikavkaz Scientific Centre of RAS*

We consider the stability of the Couette–Taylor flow between porous cylinders with radial through-flow in the limit of high radial Reynolds number. This limit had been studied earlier for the 2D (planar) modes only [1, 2]. The present study covers the general 3D modes.

**1. Preliminaries.** Consider the gap between two concentric circular cylinders with radii  $r_1$  and  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ). Assume there is a constant volume flux  $2\pi Q$  (per unit length measured along the common axis of the cylinders) through the gap. Suppose that  $r_1$  is taken as a length scale,  $r_1^2/Q$  as a time scale,  $Q/r_1$  as a scale for the velocity and  $\rho Q^2/r_1^2$  for the pressure where  $\rho$  is the fluid density. Then the Navier–Stokes equations written in non-dimensional variables involve only one dimensionless parameter which is the Reynolds number defined as  $R = Q/\nu$  where  $\nu$  is the kinematic viscosity of the fluid. Then  $R^{-1}$  plays the role of the ‘effective viscosity’. Let the boundary conditions be written in the form

$$u|_{r=1} = \beta, \quad u|_{r=a} = \beta/a, \quad v|_{r=1} = \gamma_1, \quad v|_{r=a} = \gamma_2/a, \quad w|_{r=1} = w|_{r=a} = 0 \quad (1)$$

where where  $u, v, w$  stand for the radial, azimuthal and axial velocities correspondingly,  $a = r_2/r_1 > 1$ ,  $\beta = \pm 1$ ,  $\gamma_1 = \Omega_1 r_1^2/Q$ ,  $\gamma_2 = \Omega_2 r_2^2/Q$  with  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  being the angular velocities of the inner and outer cylinders respectively. Boundary conditions (1) model the interface between a fluid and a porous wall [7].

There exists unique steady solution that obeys (1) and possesses both the translational and rotational symmetries. This solution is given by<sup>1</sup>

$$u = \frac{\beta}{r}, \quad w = 0, \quad v = V(r) = Ar^{\beta R+1} + \frac{B}{r}, \quad A = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{a^{\beta R+2} - 1}, \quad B = \frac{a^{\beta R+2}\gamma_1 - \gamma_2}{a^{\beta R+2} - 1} \quad (2)$$

Flow (2) generalizes the classical Couette–Taylor flows to the case of permeable (porous) cylinders. For this generalization we will use abbreviation OCT (Open Couette–Taylor) in what follows. If  $\beta = 1$  then the OCT flow is referred to as *the diverging flow* and as *the converging flow* otherwise. The cylinder through which the fluid is being pumped in (pumped out) is referred to as the flow *inlet* (*outlet*).

The classical Rayleigh criterion states that the Couette–Taylor flow (with no cross-flow) possesses the stability to the axisymmetric perturbations provided that  $r^{-3}d(rV(r))^2/dr > 0$  for every  $r : 1 < r < a$ . The condition  $rV = \text{const}$  determines so-called *Rayleigh line* on the plane of the angular velocities of the cylinders. In our

---

<sup>1</sup>This expression can be extended to  $\beta = -1$ ,  $R = 2$  by continuity.

notation the Rayleigh line bisects the quadrant  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ . For the co-rotating cylinders, the Rayleigh line is usually treated as a boundary that separates stable flows from the unstable ones. This is not a rigorous theorem. Nevertheless, the Rayleigh line gives quite reasonable approximation for the critical curves of instability in the case of the co-rotating cylinders even for the rather viscous flows except for the very slow rotations. This instability also known as the *centrifugal* instability gives rise to the Taylor vortices and its linear modes are always axisymmetric and grow monotonically<sup>2</sup>.

For the OCT-flows the Rayleigh line is the same bisector but we'll see that it loses its meaning. It is worth to note here that every Rayleigh-neutral TC flow with no cross-flow is stable to general (not necessarily axisymmetric) perturbations irrespective of the fluid viscosity. However, Fujita et al [3] had reported the occurrences of instability to 2D (planar) perturbations for some of the Rayleigh-neutral OTC. This instability is due to the growth of circulation and the modes of it are azimuthal waves. Later on the same instabilities have been discovered for more wide (not necessarily Rayleigh-neutral) but still particular classes of OCT flows [4]. Ilin and Morgulis [1] have shown that such 2D instabilities occur for *every Rayleigh-neutral* OCT-flow in the limit of the vanishing viscosity (*i.e.*  $R \rightarrow \infty$ ) provided that the flow circulation is great enough. In [2], Ilin and Morgulis have constructed the vanishing viscosity asymptotic of 2D eigen modes of the general OCT-flows. It turned out that these modes can be approximated by the eigen-modes of certain Rayleigh-neutral OTC-flow with error not exceeding  $O(R^{-2})$ ,  $R \rightarrow \infty$ . In this communication we use the inviscid limit to shed some light on the 3D instability of OCT flows.

**2. The inviscid limit.** This limit becomes clear if one note that

$$V(r) = \begin{cases} \gamma_1/r + a^{-1}(\gamma_2 - \gamma_1) e^{-R(1-r/a)} (1 + O(R^{-1})) & R \rightarrow \infty, \beta = 1, \\ \gamma_2/r + (\gamma_1 - \gamma_2)e^{-R(r-1)} (1 + O(R^{-1})) & R \rightarrow \infty, \beta = -1. \end{cases} \quad (3)$$

Equation (3) mean that, in the limit of  $R \rightarrow \infty$ , every OCT-flow is almost Rayleigh-neutral except for a thin boundary layer near the outlet which thickness is  $O(R^{-1})$ . Neglecting the boundary layer we arrive exactly at the Rayleigh-neutral flow with velocity field

$$\mathbf{b} = r^{-1} (\beta \mathbf{e}_r + \gamma_{in} \mathbf{e}_\varphi), \quad (4)$$

where  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  stands for the frame of the cylindrical coordinate system and  $\gamma_{in} = \gamma_1$  for the converging flows, otherwise  $\gamma_{in} = \gamma_2$ . Note that  $\text{curl } \mathbf{b} = 0, \text{div } \mathbf{b} = 0$ ; therefore  $\mathbf{b}$  is exact solution to the Euler equations of the inviscid fluid dynamics. Furthermore,  $\mathbf{b}$  satisfies all boundary conditions (1) on the inlet but fails to do so on the outlet; only the radial velocity satisfies (1) on both cylinders. In view of these observations, one should expect that the inviscid limits for the eigen modes of a generic OCT-flow are solutions to the following eigenvalue problem

$$\lambda \mathbf{v} + \text{curl } \mathbf{v} \times \mathbf{b} = -\nabla \chi; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } S; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0 \text{ on } S^+ \quad (5)$$

where  $\times$  stands for the vector product,  $S$  denotes the flow boundary and  $S^+$  denotes the inlet for the flow  $\mathbf{b}$ . The eigenvalue problem (5) comes from the linearization

---

<sup>2</sup>The effect of the radial flow on the centrifugal instability had been studied by many authors but we have no room for discussing the subject. The references can be found in the articles cited above.

of the Euler equations near the Rayleigh-neutral flow (4). The boundary conditions prescribe full velocity on the inlet and the normal velocity on the outlet. This choice of the boundary conditions originates from the general theory of inviscid limits for the flows with permeable boundaries [8–10]. The special feature of problem (5) is that the basic flow is irrotational. Such kind of spectral problem deserves considering in greater generality.

Let vector field  $\mathbf{b}$  be *harmonic* in some domain  $D$  i.e. let  $\text{curl } \mathbf{b} = 0, \text{div } \mathbf{b} = 0$  in  $D$ . Given with harmonic field  $\mathbf{b}$  consider eigenvalue problem (5). Since every harmonic field satisfies the exact Euler equations the problem (5) describes the eigen modes of inviscid flow  $\mathbf{b}$ .

THEOREM. [6] *Let  $D$  be a smooth domain confined within two bounded or periodic surfaces which are equivalent topologically. Let  $\mathbf{b}$  be a harmonic field in  $D$ , such that*

$$\mathbf{b} \neq 0 \text{ in } D, \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} > 0 \text{ on } S_1; \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ on } S_2 \text{ i.e. } S_1 = S^+, S_2 = S^-.$$

*Then there exists an entire operator-function  $K^+(\lambda) : \tilde{L}_2(S_+) \rightarrow \tilde{L}_2(S_+)$  such that  $\lambda \in \mathbb{C}$  is an eigenvalue for problem (5) if  $\ker K^+(\lambda) \neq \{0\}$ . Here  $\tilde{L}_2$  consists of the scalar functions with zero averaged values on  $S^+$ , and  $K^+(\lambda)$  admits almost explicit description up to the reconstructing of a divergence free vector field by its curl.*

This theorem gives us a ‘road map’ for the studying of inviscid spectra of concrete harmonic flows. In particular, in the case of diverging Rayleigh-neutral flow ( $\beta = 1$  in (4)), the eigenvalues of problem (5) coincide with zeroes of entire functions  $\kappa_{n,k,\Gamma,a}(\lambda)$  given by the Laplace integrals; namely,

$$\kappa_{n,k,\Gamma,a}(\lambda) = -K_{k,n,a}^{-1}(1) \int_1^a r^{-i\hat{\Gamma}} e^{-\lambda(r^2-1)/2} K'_{k,n,a}(r) r^2 dr, \hat{\Gamma} = n\Gamma. \tag{6}$$

$$r^2 K_{rr} + r K_r - (n^2 + r^2 k^2) K = 0; \quad K(a) = 1; \quad K_r(a) = 0, \tag{7}$$

where  $k, n$  are the axial and azimuthal wave numbers and  $a > 1$  denotes the radius of the greater cylinder. In the case of converging Rayleigh-neutral flow the spectral problem (5) also admits a reduction to finding of zeroes of some Laplace integrals; these integrals are slightly different from (6–7) but we omit them for the sake of brevity. The described reductions are crucial for the gathering of concrete information concerning the inviscid instabilities of the OCT-flows.

**2. The summary of the inviscid instability.** The following is true for the Rayleigh-neutral flows of both directions

1. Flow with  $\gamma_{in} = 0$  i.e. the purely radial flow with no rotation is stable in the sense that every eigen mode decays exponentially.
2. Every mode possessing the axial symmetry decays exponentially for all possible values of  $\beta, \gamma_{in}$ , and  $a$ .
3. For every  $\beta, a, k$  and  $n$  there exists such critical value  $\Gamma_n(a, k, \beta) \neq 0$  that all the modes with wavenumbers  $n, k$  decay exponentially provided that  $\gamma_{in} < \Gamma_n(a, k, \beta)$  and if  $\gamma_{in} > \Gamma_n(a, k, \beta)$  then there exists an eigen mode that grows exponentially. This mode must be a spiral or azimuthal wave.
4.  $\Gamma_*(a, \beta) \stackrel{def}{=} \min_k \min_n \Gamma_n(a, k, \beta) > 0$  for every  $\beta, a$ . Flow (4) is stable provided that

$\gamma_{in} < \Gamma_*(a, \beta)$  and unstable otherwise.

5. The azimuthal waves are most dangerous in the sense that  $\Gamma_*(a, \beta) = \min_n \Gamma_n(a, 0, \beta)$ .

Items 1 and 2 are proved formally with the use of the Polia theorem on the zeroes of the Laplace integrals. Items 3, 4 and 5 had been checked numerically for  $n = 1..20$ ,  $k = 1..20$ ,  $a = 1..8$ . More visual information can be easily accessed via ArXive [12].

**3. The effect of small viscosity.** The boundary value problem for the eigen modes of the general OCT-flows has the form

$$\lambda \mathbf{v} + \text{curl } \mathbf{v} \times \mathbf{b}_\varepsilon + \text{curl } \mathbf{b}_\varepsilon \times \mathbf{v} = -\nabla \chi + \varepsilon \Delta \mathbf{v}; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v} = 0 \text{ on } S, \quad (8)$$

where  $\varepsilon = R^{-1}$ ,  $\Delta = \nabla \text{div} - \text{curl curl}$ , and  $\mathbf{b}_\varepsilon$  is the field defined in (2). Eigenvalue problem (8) is issued from the linearization of the Navier-Stokes system near the OCT flow (2). If  $\varepsilon \rightarrow +0$  then  $\text{curl } \mathbf{b}_\varepsilon$  concentrates itself in the thin strip along the outlet and the thickness of this strip is  $O(\varepsilon)$ . Ilin and Morgulis [2, 12] had developed the asymptotic of small  $\varepsilon$  for problem (8). They used kind of the Vishik-Lyusternik technique. The special feature is that a boundary layer arises near the outlet only.

The asymptotic approximation for eigenvalues of problem (8) is written in the form

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (9)$$

where  $\lambda_0$  is an eigenvalue of the ‘inviscid’ problem (5) and  $\lambda_1$  is expressed explicitly via  $\lambda_0$ . The concrete expressions are rather cumbersome and we omit them. The details can be found in [2] (2D case) and in [12] (the general case). The evaluating of (9) in the wide ranges of the flow parameters leads to the following conclusions which are valid for both directions of OCT-flows.

1. The inviscid instability described above persists for sufficiently small viscosities. Moreover, the approximation (9) matches the numerical solution even for rather moderate Reynolds numbers e.g.  $R \sim 10^2$ . Consequently the described instability will not get lost in the developed turbulence.
2. The difference  $\Delta\gamma = |\gamma_1 - \gamma_2|$  is almost irrelevant to the flow stability unless  $\Delta\gamma \gg R$ . This means that the stability of OCT flows for high  $R$  depends mainly on the rotation of the flow inlet. Consequently, the influence of the inlet does not decay downstream in sharp contrast with the pipe flows in which such decay usually takes place.
3. The small viscosity always enhances the stability in the sense that the real part of  $\lambda_1$  is always negative provided that  $\lambda_0$  lies on the imaginary axis. This observation once again reveals the inviscid mechanism underlying the instability described above.

Finally, we would like to recall that the occurrence of oscillatory instability is well-known linear precursor of the excitation of self-oscillations via the Poincare-Andronov-Hopf bifurcation. Therefore, the simple example we has presented here gives us a chance for thorough studying of the Poincare-Andronov-Hopf bifurcation in the dynamics of the *inviscid* open flows where such kind of phenomena is rather unusual as the system is free of any friction or diffusion. At present there is a numerical example of Poincare-Andronov-Hopf bifurcation of the inviscid open flow through a finite channel [11] but no rigorous proofs are known to date.

A. Morgulis acknowledges financial support from a project which is a part of Russian Government research task No. 1.1398.2014/K.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *K. Ilin, A. Morgulis*. Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial flow // *J. Fluid Mech.* 2013. Vol. 730. P. 364–378.
- [2] *K. Ilin, A. Morgulis*. Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations // *Phys. Fluids*. 2015. Vol. 27. 044107.
- [3] *H. Fujita, H. Morimoto, H. Okamoto*. Stability analysis of Navier-Stokes flows in annuli // *Mathematical methods in the applied sciences*. 1997. Vol. 20(11). (1997) P. 959–978.
- [4] *B. Gallet, C. R. Doering, E. A. Spiegel*. Destabilizing Taylor-Couette flow with suction // *Phys. Fluids*. 2010. Vol. 22(3). 034105.
- [5] *K. I. Ilin, A. B. Morgulis*. Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial flow // *J. Fluid Mech.* 2013. Vol. 730. P. 364–378.
- [6] *К. И. Ильин, А. Б. Моргулис*. О спектрах открытых течений идеальной жидкост в кольцевых областях // *Исследования по мат. анализу, диф. уравнениям, мат. моделированию и их приложениям*. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 408–419.
- [7] *G. S. Beavers, D. D. Joseph*. Boundary conditions at a naturally permeable wall // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30(1). P. 197–207.
- [8] *С. Н. Алексеенко*. Существование и асимптотическое представление слабых решений задачи протекания с условием регулярного проскальзывания вдоль твердых стенок // *Сиб. матем. журн.* 1994. Т. 35, № 2. С. 235–257.
- [9] *R. Temam, X. Wang*. Remarks on the Prandtl equation for a permeable wall // *Z. Angew. Math. Mech.* 2000. Vol. 80. P. 835–843.
- [10] *K. Ilin*. Viscous boundary layers in flows through a domain with permeable boundary // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2008. Vol. 27. P. 514–538.
- [11] *V. N. Govorukhin, A. B. Morgulis, V. A. Vladimirov*. Planar inviscid flows in a channel of finite length: washout, trapping and self-oscillations of vorticity // *J. Fluid Mech.* 2010. Vol. 659. P. 420–472.
- [12] *K. Ilin, A. Morgulis*. Inviscid instability of an incompressible flow between rotating porous cylinders to three-dimensional perturbations // *arXiv preprint*. 2015. arXiv:1502.03600v3

**Ильин К. И., Моргулис А. Б.** *Трёхмерные моды в задаче Тэйлора–Куэтта с радиальным потоком*. Исследована устойчивость течения Куэтта в зазоре между двумя пористыми цилиндрами с наложенным радиальным потоком при стремлении числа Рейнольдса последнего к бесконечности. Ранее такой предел был исследован только для плоских мод [1, 2]. В настоящем сообщении изучены общие трёхмерные моды.