Министерство образования и науки РФ
Федеральное агентство научных организаций
Российский национальный комитет по теоретической
и прикладной механике
Научный совет РАН по комплексной проблеме «Механика»
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
Южный федеральный университет
Южный научный центр РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТРУДЫ XVIII МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

(Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.)

В двух томах

Том II

Ростов-на-Дону
Издательство Южного федерального университета
2016

УДК [531/534+539.3/.5](063)
ББК 22.25я43
С568

*XVIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды»
(Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.)
поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 16-01-20860*

Ответственный редактор А. О. Ватульян
Редакторы: А. В. Наседкин, А. В. Попов

С568 **Современные проблемы механики сплошной среды** : труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.) : в 2 т. – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2016.
ISBN 978-5-9275-2116-6
Т. 2. – 2016. – 266 с.
ISBN 978-5-9275-2117-3 (Т. 2)

Сборник содержит научные доклады, представленные на XVIII Международную конференцию «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.). Конференция посвящена 80-й годовщине со дня рождения советского и российского учёного-механика, известного специалиста в области смешанных задач теории упругости, заслуженного деятеля науки РФ, лауреата Государственной премии РФ, профессора В. М. Александрова.

В сборнике представлены результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, по устойчивости движений вязкой жидкости, аэрогидродинамике, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности в механике контактных взаимодействий и теории оболочек, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и при их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

ISBN 978-5-9275-2117-3 (Т. 2)
ISBN 978-5-9275-2116-6

УДК [531/534+539.3/.5](063)
ББК 22.25я43

Содержание

КРИТЕРИИ ПОЛНОТЫ СИСТЕМ НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРОВ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА

Ковалев В. А.[1], Радаев Ю. Н.[2]
[1]*Московский городской университет управления Правительства Москвы*
[2]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

Рассматривается проблема построения полных систем неприводимых объективных мер деформации и экстрадеформации микрополярного континуума, допускающего вложение во внешнее плоское пространство. Сформулированная проблема решается в рамках и методами физической теории поля в сочетании с теорией алгебраических инвариантов конечных систем контравариантных векторов в плосокм пространстве. Тензоры деформации при этом конструируются как неприводимые алгебраические инварианты системы контравариантных векторов, с помощью которых задается плотность интеграла действия, относительно группы собственно ортогональных преобразований. Решение ограничивается характерными для механики континуума системами рациональных или целых рациональных инвариантов. Указаны критерии полноты системы тензоров деформации и экстрадеформации микрополярного континуума.

1. Вводные замечания. Континуальный подход является одним из важнейших методов моделирования механического поведения сред с микроструктурой. Хорошо известно, что классическая механика сплошных деформируемых сред не в состоянии учесть в своих определяющих уравнениях для реальных тел характерные внутренние линейные микромасштабы, связанные с их микроструктурой. Микрополярные континуумы обеспечивают возможность более или менее точного описания механического поведения нескольких классов материалов, обладающих микроструктурой: жидкие кристаллы (среда с микроструктурой, определяемой одним полярным директором), горные породы и гранулированные среды, композиты, кристаллы с несовершенствами в форме дислокаций.

Представляемая работа посвящена проблеме построения полных систем неприводимых объективных мер деформации и экстрадеформации микрополярного континуума, допускающего вложение во внешнее плоское пространство (возможно более высокой размерности) со стандартной метрикой. Сформулированная проблема решается в рамках и методами физической теории поля и теории алгебраических инвариантов конечных систем контравариантных векторов. Тензоры деформации при этом конструируются как инварианты системы контравариантных векторов внешнего эйлерова пространства, с помощью которых задается плотность интеграла действия, относительно группы собственно ортогональных преобразований. Решение ограничивается характерными для механики континуума системами рациональных или целых рациональных инвариантов. Сначала с помощью некоторой регулярной процедуры осуществляется выбор системы объективных (т. е. не зависящих от вращений эйлеровой координатной системы внешнего пространства) тензоров деформации. Затем устанавливается неприводимость тензоров, образующих систему. Каждая система объективных тензоров деформации должна удовлетворять свойству полноты: полная система не допускает присоединения к ней новых неприводимых тензоров деформации и тем самым гарантирует отсутствие не имеющих физического смысла вкладов в интеграл действия. Указаны критерии полноты системы тензоров деформации и экстрадеформации микрополярного континуума. Приводятся примеры полных неприводимых систем. Рассматривается объективная геометрия конечной деформации микрополярного континуума с нежестким микроструктурным триэдром.

2. Микрополярный континуум. Плотность действия. Континуум как математический объект чаще всего мыслится как дифференцируемое многообразие некоторой размерности M. В этом случае даже не требуется никаких представлений об окружающем пространстве, в которое континуум может быть вложен. Индивидуальные точки континуума суть точки указанного дифференцируемого многообразия; они представляются специальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, которая, в свою очередь, как это устанавливается для многообразий идентифицируется с помощью координат ξ^α (так называемые материальные координаты). В том случае, когда континуум допускает вложение в некоторое плоское пространство размерности N со стандартной метрикой, оказывается возможным вести речь о положениях $\mathbf{X}$ в этом пространстве и измерениях. Референциальное положение точки континуума $\mathbf{X}$ взаимно-однозначно связано с материальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, поэтому референциальную переменную $\mathbf{X}$ можно рассматривать как материальную и попросту отождествить переменные $\mathbf{X}$ и $\boldsymbol{\xi}$.

Ясно, что в наиболее общей форме деформацию континуума можно выразить отображением $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{x}$, которое в каждый данный момент времени t указывает пространственное положение $\mathbf{x}$ индивидуальной точки континуума $\boldsymbol{\xi}$. В силу сказанного выше, это отображение может быть заменено отображением позиционных переменных: $\mathbf{X} \to \mathbf{x}$. С координатами X^α, x^j связаны метрики: отсчетная (лагранжева) метрика ${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}$ и внешняя пространственная (эйлерова) метрика g_{ij}. Обратным штрихом (backprime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием.

В теориях континуума с микроструктурой (см., например, [1]) произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая геометрическим преобразованием позиционных переменных $\mathbf{X} \to \mathbf{x}$, сопровождается экстра-деформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы полярных d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^k$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, N$), связанных с микроэлементом.

Градиент деформации или «дисторсия»

$$\partial_\alpha x^j \tag{1}$$

характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Дисторсия $\partial_\alpha x^j$ трансформирует отсчетный линейный элемент dX^α в актуальное положение dx^j согласно

$$dx^j = (dX^\alpha)\partial_\alpha x^j. \tag{2}$$

Дисторсия $\partial_\alpha x^j$, как известно, разлагается в композицию чистой деформации (растяжений относительно трех взаимно ортогональных главных осей деформации в отсчетном положении) и поворота отсчетного триэдра главных осей деформации до их актуального положения.

Конвективная метрика $g_{\alpha\beta}$ вычисляется с помощью градиента деформации и внешней эйлеровой g_{ij} метрики с помощью следующей формулы:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j). \tag{3}$$

Метрики $\grave{g}_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ ротационно-инвариантны при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы x^j.

Отдавая приоритет теоретико-полевому подходу [2], будем рассматривать эйлеровы переменные x^j как физические поля. То же самое относится и к системе d-векторов. Последние рассматриваются как экстра-полевые (сверх позиционных переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент. Плотность действия (лагранжиан) $\mathscr{L}$ в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии примем в следующей форме:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(X^\beta, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j). \tag{4}$$

3. Тензоры деформации как рациональные алгебраические инварианты. Плотность действия $\mathscr{L}$ является объективной величиной и не должна зависеть от поворотов эйлеровой системы координат. Поэтому $\mathscr{L}$ на самом деле функционально зависит лишь от таких алгебраических комбинаций контравариантных пространственных векторов

$$\partial_\alpha x^i,\ \underset{\mathfrak{a}}{d}^j,\ \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \tag{5}$$

которые являются инвариантными относительно собственно ортогональных преобразований внешнего пространства. К таковым следует отнести попарные внутренние (в пространственной метрике) произведения векторов (5)

$$\begin{array}{ll}
g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), & \underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{S}} = g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}^i \underset{\mathfrak{b}}{d}^j, \\
\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_\alpha = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{a}}{d}^j, & \underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{R}}_\alpha = g_{ij}(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)\underset{\mathfrak{b}}{d}^j, \\
\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j), & \underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{b}}{d}^j),
\end{array} \tag{6}$$

собственно и образующие *неприводимые* тензоры деформации, а также $N{\times}N$-определители, в столбцах которых расположены эйлеровы компоненты всевозможных систем из N векторов (5).

Неприводимость каждого из указанных инвариантов без труда обосновывается, правда, при этом приходится ограничиваться лишь целыми рациональными инвариантами системы векторов (5). Полноту системы (6) вместе с упомянутыми определителями, т. е. возможность представления любого целого рационального инварианта как рациональной функции от (6) и определителей, можно доказать, опираясь на известные критерии полноты систем рациональных алгебраических инвариантов (см., например, [3]). Тензоры деформации в правой колонке (6) никак не связаны с градиентом деформации и обычно вообще не рассматриваются.

Заметим также, что квадраты рассматриваемых определителей в силу формул Грама являются целыми рациональными функциями системы векторов (5). Поэтому сами определители рационально не выразимы в терминах эйлеровых компонент векторов (5). В частности, если $M = N$, целое рациональное соотношение, связывающее якобиан деформации $J = \det(\partial_\alpha x^j)$ и конвективную метрику

$$\det(g_{ij})J^2 - \det(g_{\alpha\beta}) = 0,$$

выступает в качестве сизигии. Такого рода сизигии могут быть выписаны для всех независимых детерминантов, определяемых системами из N векторов (5).

4. Построение тензоров деформации из элементов полярных разложений. Полные системы в случае $M = N$ могут быть построены с помощью полярных разложений. Градиент деформации всегда может быть представлен как произведение симметричного положительно определенного тензора второго ранга $|x|_{\alpha\beta}$ (модуля) и ортогонального тензора $\lambda^{i\beta}$ (тензора поворота):

$$\partial_\alpha x^i = |x|_{\alpha\beta}\lambda^{i\beta}. \tag{7}$$

Ортогональность тензора поворота $\lambda^{i\beta}$ выражается одним из эквивалентных уравнений:

$$g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = {}^{\backprime}g^{\beta\gamma}, \qquad {}^{\backprime}g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = g^{ij}. \tag{8}$$

Собственные векторы модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$, обозначаемые через ${}^{\backprime}\underset{A}{k}{}^{\beta}$, образуют ортонормированный в отсчетной метрике ${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}$ полиэдр

$${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}{}^{\backprime}\underset{A}{k}{}^{\beta}\,{}^{\backprime}\underset{C}{k}{}^{\beta} = \underset{AC}{\delta},$$

определяющий отсчетные ориентации главных осей деформации.

Актуальная ориентация главных осей деформации определяется в результате поворота полиэдра ${}^{\backprime}\underset{A}{k}{}^{\beta}$:

$$\underset{A}{k}{}^{s} = \lambda^{s\beta}\,{}^{\backprime}\underset{A}{k}{}^{\beta}.$$

Векторы $\underset{A}{k}{}^{s}$ взаимно ортогональны в эйлеровой метрике g_{ij}.

Дисторсия $\partial_\alpha x^j$, таким образом, представляет собой композицию последовательно выполняемых чистой деформации (растяжений относительно взаимно ортогональных главных осей деформации в отсчетном положении) и поворота отсчетного полиэдра главных осей деформации до их актуального положения.

Полярные разложения градиентов d-директоров имеют вид

$$\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{i} = |\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{i\beta}, \tag{9}$$

где тензоры $|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}$ симметричны и положительны, а «тензоры поворота» $\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{i\beta}$ ортогональны (считаются неопределенными, если градиент вырождается).

Тензоры $|x|_{\alpha\beta}$ и $|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\alpha\beta}$, очевидно, ротационно-инвариантны. С тем чтобы получить полную систему, к ним следует добавить следующие внутренние произведения (обязательно содержащие множитель $\lambda^{i\beta}$):

$$g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{i}\lambda^{j\beta}, \qquad g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma}, \qquad g_{ij}\lambda^{i\beta}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{j\gamma}. \tag{10}$$

Рассмотрим контравариантный отсчетный вектор $g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{i}\lambda^{j\beta}$. Он получается в результате обратного поворота актуального положения d-директора с указателем $\mathfrak{a}$ в некоторое отсчетное положение, вообще говоря, отличающееся от ${}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{\beta}$.

Второй из перечисленных в (10) тензоров в силу ортогональности тензора поворота $\lambda^{i\beta}$ в точности совпадает с отсчетной метрикой:

$$ {}^{\backprime}g^{\beta\gamma} = g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma}. \tag{11} $$

Поскольку модули градиентов d-директоров никак не связаны с градиентом деформации, их необходимо включить в третий из тензоров (10), устраняя тем самым и возможную неопределенность «тензоров поворота»:

$$ |\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\beta\varsigma}g_{ij}\lambda^{i\gamma}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{j\varsigma}. \tag{12} $$

Первая система инвариантов выразима в терминах второй с помощью целых рациональных соотношений:

$$ \begin{gathered} g_{\alpha\beta} - {}^{\backprime}g^{\sigma\kappa}|x|_{\alpha\sigma}|x|_{\beta\kappa} = 0, \quad \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_{\alpha} - |x|_{\alpha\beta}\underset{\mathfrak{a}}{d}_{j}\lambda^{j\beta} = 0, \\ \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta} - |x|_{\alpha\sigma}|\underset{\mathfrak{a}}{d}|_{\beta\gamma}g_{ij}\lambda^{i\sigma}\underset{\mathfrak{a}}{\lambda}{}^{j\gamma} = 0. \end{gathered} \tag{13} $$

Полнота второй из рассмотренных систем тензоров деформации обеспечивается взаимно-однозначным соответствием между двумя системами, устанавливаемым с помощью соотношений (13); последние в терминах второй системы инвариантов выступают как сизигии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Toupin R.A.* Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17. No. 5. P. 85–112.

[2] *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 156 с.

[3] Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.

Kovalev V.A., Radayev Y.N. *On completeness criteria for systems of irreducible finite strains tensors of micropolar continuum.* Problem of establishing complete systems of irreducible objective strain and extrastrain tensors for micropolar continuum immersed in an external plane space is considered. The solution to the problem is given by methods of the field theory and the theory of algebraic invariants. Strain tensors are formed as irreducible algebraic invariants of contravariant vectors of the external space emerging in the micropolar elastic action density. Considerations are restricted to rational algebraic invariants. Completeness criteria for systems of rational algebraic invariants and rational syzygies are discussed and applied to strain tensors of micropolar elastic continua.

СТЯГИВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ, ОДЕТОЙ НА ЖЁСТКИЙ ЦИЛИНДР

Колесников А. М.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В данной работе рассматривается задача о равновесии высокоэластичной тонкостенной трубки. Один конец трубки одет на неподвижный негладкий твёрдый цилиндр. К другому концу приложена продольная растягивающая сила. Деформация трубки полагается конечной и осесимметричной. Трубка моделируется безмоментной цилиндрической оболочкой, изготовленной их несжимаемого изотропного нелинейно-упругого материала. Цилиндр считается абсолютно твёрдым телом. Контакт мембраны и цилиндра осуществляется с трением. Сухое трением между мембраной и цилиндром моделируется законом Кулона. Мембрана не будет соскальзывать с цилиндра только благодаря трению и при достаточной области контакта. В работе исследуется зависимость минимальной длины контакта, необходимой для равновесия мембраны. Аналитическое решение получено для функции потенциальной энергии деформации Бартенева — Хазановича.

1. Введение. Существует много исследований осесимметричных деформаций тонкостенных высокоэластичных мембран. В этих задачах наиболее распространённым типом нагружения является нормальное давление, например, газа. Другие типы воздействий на мембрану исследованы меньше. Кроме взаимодействия газа и жидкости мембраны часто взаимодействуют с твёрдыми телами. В большинстве исследований контакт мембраны с другим твёрдым телом принимается без трения. Исследования контактных задач с трением проведены в работах [1, 2].

В данной работе рассматривается задача о равновесии длинной тонкостенной трубки, изготовленной из высокоэластичного материала. Один конец которой одет на неподвижный негладкий абсолютно твёрдый цилиндр. К другому концу трубки приложена продольная растягивающая сила. Равновесие трубки, одетой на цилиндр, возможно только за счёт сил трения при достаточной области контакта. Цель работы определить минимальную необходимую длину области контакта.

2. Конечная деформация мембраны вращения. Пусть в начальной конфигурации упругая мембрана задаётся параметрически: $\{r(s), \varphi, z(s)\}$ в цилиндрической системе координат. Пусть параметры $\{s, \varphi\}$ будут лагранжевыми координатами. Также они являются гауссовыми координатами срединой поверхности мембраны в отсчётной конфигурации.

Рассмотрим осесимметричную деформацию мембраны. Пусть частица с лагранжевыми координатами $\{s, \varphi\}$ из положения $\{r(s), \varphi, z(s)\}$ переместится в положение $\{R(s), \varphi, Z(s)\}$, задаваемое в цилиндрической системе координат.

Тогда главные кратности удлинений λ_1, λ_2 и главные кривизны κ_1, κ_2 деформированной поверхности задаются в виде

$$\begin{gathered}\lambda_1 = \sqrt{\frac{(R')^2 + (Z')^2}{(r')^2 + (z')^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{R}{r}, \\ \kappa_1 = \frac{\psi'}{\lambda_1}, \quad \kappa_2 = \frac{\sin\psi}{r\lambda_2}, \quad \tan\psi = \frac{Z'}{R'}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $()' = d()/ds$, ψ — угол между касательной к образующей деформированной мембраны и осью ρ.

Уравнения равновесия упругой мембраны в случае осесимметричной деформации можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{dT_1}{ds} + \frac{T_1 - T_2}{R}\frac{dR}{ds} + \xi_1\lambda_1 = 0,\\ T_1\kappa_1 + T_2\kappa_2 + \xi = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь T_1 и T_2 — главные усилия в мембране, ξ_1 — касательная поверхностная нагрузка вдоль образующей и ξ — нормальная поверхностная нагрузка.

Для гиперупругого несжимаемого изотропного материала определяющие соотношения можно записать с помощью функции потенциальной энергии деформации $W = W(\lambda_1, \lambda_2)$, как функции главных кратностей удлинений:

$$T_1 = \frac{h}{\lambda_2}\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}, \quad T_2 = \frac{h}{\lambda_1}\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}. \tag{3}$$

Здесь h — начальная толщина мембраны. Толщина H мембраны после деформации определяется следующим образом

$$H = \frac{h}{\lambda_1\lambda_2}.$$

3. Стягивание цилиндрической мембраны, частично одетой на жёсткий цилиндр. Рассмотрим полубесконечную круговую цилиндрическую мембрану радиуса r_0 в недеформированном состоянии (см. рисунок 1a)

$$r(s) = r_0, \quad z(s) = s, \quad s \in [0, +\infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

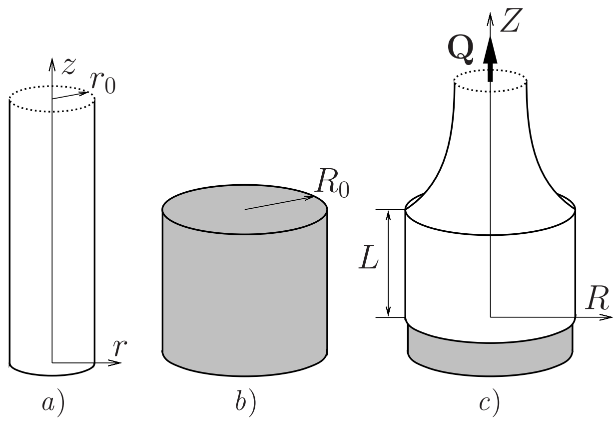


Рисунок 1 – a) Начальная цилиндрическая мембрана радиуса r_0, b) жёсткий цилиндр радиуса R_0, c) мембрана, частично одетая на жёсткий цилиндр и стягиваемая продольной силой $\mathbf{Q}$

Положим, что один конец мембраны одет на неподвижный, негладкий, жёсткий цилиндр радиуса $R_0 > r_0$ и величина продольной растягивающей силы равна Q

при $Z \to +\infty$ (см. рисунок 1c). Считаем, что мембрана плотно прилегает к боковой поверхности цилиндра в области контакта. Пусть L — длина части мембраны, которая находится в контакте с жёсткий цилиндром, и s_L — лагранжева координата границы области контакта. Принимаем закон Кулона для описания напряжений трения между мембраной и жёстким цилиндром. На части мембраны, которая не находится в контакте с цилиндром, поверхностная нагрузка отсутствует.

В общем случае для сухого трения выполняется неравенство $|\xi_1| < f|\xi|$, где f — коэффициент сухого трения. Направление напряжений трения противоположно движению мембраны, если бы трение отсутствовало. Рассмотрим предельный случай такой, что напряжения трения во всех точках контакта достигают своего предела одновременно. Тогда величина напряжений трения пропорциональна нормальной поверхностной нагрузке с коэффициентом f. Так как при отсутствии трения мембрана будет соскальзывать с цилиндра, то направление напряжений трения противоположно оси Z. Таким образом, выражение для поверхностной нагрузки имеет вид

$$\xi = \begin{cases} -q, & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ 0, & s > s_L, \end{cases} \qquad \xi_1 = \begin{cases} -fq, & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ 0, & s > s_L. \end{cases} \tag{4}$$

Координаты точек срединой поверхности деформированной мембраны можно представить в виде

$$R = \begin{cases} R_0, & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ P(s), & s \geqslant s_L, \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} Y(s), & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ X(s), & s \geqslant s_L. \end{cases} \tag{5}$$

Угол ψ, главные кратности удлинений и кривизны (1) выражаются следующим образом

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ \alpha(s), & s \geqslant s_L, \end{cases} \qquad \left(\tan\alpha = \frac{X'}{P'}\right),$$

$$\kappa_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ \dfrac{\alpha'}{\lambda_1}, & s \geqslant s_L, \end{cases} \qquad \kappa_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{R_0}, & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ \dfrac{\sin\alpha}{r_0\lambda_2}, & s \geqslant s_L. \end{cases} \tag{6}$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} Y'(s), & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ \nu(s), & s \geqslant s_L, \end{cases} \qquad \lambda_2 = \begin{cases} \rho_0, & 0 \leqslant s \leqslant s_L, \\ \rho(s), & s \geqslant s_L, \end{cases}$$

где

$$\nu(s) = \sqrt{(P')^2 + (X')^2}, \quad \rho = \frac{P(s)}{r_0}, \quad \rho_0 = \frac{R_0}{r_0}.$$

Для области контакта $s \in [0, s_L]$, используя (3)–(6), уравнения равновесия (2) сводятся к уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{(\partial Y')^2} Y'' = \frac{f}{r_0}\frac{\partial W}{\partial \rho_0}. \tag{7}$$

Для области $s \in [s_L, +\infty)$ уравнения равновесия (2) могут быть один раз проинтегрированы [3]

$$W - \nu\frac{\partial W}{\partial \nu} = \hat{c}_1. \tag{8}$$

Здесь $\hat{c}_1$ — постоянная интегрирования.

С другой стороны, если рассмотреть равновесие части мембраны $[s, +\infty)$ (при $s > s_L$), то можно получить уравнение

$$2\pi P T_1 \sin\alpha = Q.$$

Граничными условиями будут:

1) условия в точке $s = 0$

$$Y\big|_{s=0} = 0, \quad T_1\big|_{s=0} = 0; \tag{9}$$

2) условия непрерывности в точке $s = s_L$

$$X\big|_{s=s_L} = Y\big|_{s=s_L} = L, \quad \rho\big|_{s=s_L} = \rho_0, \tag{10}$$

$$Y'\big|_{s=s_L} = \nu\big|_{s=s_L}; \tag{11}$$

3) условия при $s \to +\infty$, где мембрана стремится к состоянию одноосного растяжения,

$$\alpha \to \frac{\pi}{2}, \quad \nu \to \nu_\infty, \quad \rho \to \rho_\infty = \frac{R_\infty}{r_0},$$
$$T_2 \to 0, \quad 2\pi R_\infty T_1 \to Q. \tag{12}$$

Для определения длины L необходимо решить следующие нелинейные уравнения, полученные из граничных условий (10) и (12),

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)\Big|_{\substack{\rho=\rho_\infty\\ \nu=\nu_\infty}} = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)\Big|_{\substack{\rho=\rho_\infty\\ \nu=\nu_\infty}} = \frac{Q}{2\pi r_0 h},$$
$$\left(W - \nu\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)\Big|_{\substack{\rho=\rho_0\\ \nu=\nu_0}} = \left(W - \nu\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)\Big|_{\substack{\rho=\rho_\infty\\ \nu=\nu_\infty}}.$$

Откуда определяются величины ρ_∞, ν_∞ и ν_0 для заданных Q, ρ_0 и r_0. Затем решая задачу Коши (7), (9) необходимо определить неизвестную координату s_L из условия (11). Затем можно вычислить длину L из условия (10).

3. Результаты. Для произвольной функции потенциальной энергии деформации для решения задачи можно использовать численные методы. Для материала Бартенева — Хазановича [4] удаётся получить решение в явном виде. Функция потенциальной энергии деформации Бартенева–Хазановича имеет вид

$$W = 2\mu\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} - 3\right),$$

Тогда зависимость длины L от других параметров можно представить в виде

$$L = \frac{2r_0\rho_0}{f}\ln\left(\frac{3\rho_0\left(\rho_0 - \left(1 - \frac{Q}{4\pi\mu h r_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{2\left(\rho_0^2 - \sqrt{\rho_0}\right)}\right). \tag{13}$$

Заметим, что существуют следующие ограничения на нагрузку Q и радиус жёсткого цилиндра R_0:

$$Q < 4\pi\mu h r_0 \left(1 - \left(\frac{R_0}{3r_0}\right)^3\right), \quad R_0 < 3r_0.$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской федерации (государственный контракт 9.665.2014/K) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 15-01-01492-а, 16-08-00802-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Selvadurai A. P. S.* Deflection of a rubber membrane // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. V. 54. № 6. P. 1093–1119.

[2] *Kumar N., Das Gupta A.* On the contact problem of an inflated spherical hyperelastuc membrane // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. V. 57. P. 130–139.

[3] *Pipkin A. C.* Integration of an equation in membrane theory // ZAMP. 1968. V. 19. № 5. P. 818–819.

[4] *Бартенев Г. М., Френкель С. Я.* Физика полимеров. Ленинград: Машиностроение. 1986. 336 с.

Kolesnikov A. M. *Tension of a cylindrical membrane partially stretched on a rigid cylinder*. We consider the equilibrium problem of a hyperelastic long thin-walled tube. One end of the tube is placed over an immovable, rough, rigid cylinder and an axial force is applied to another end. We assume the deformation of the tube is finite and axisymmetric. The tube is modeled by a semi-infinity cylindrical membrane. The membrane is made of an incompressible, homogeneous, isotropic elastic material. A contact between the membrane and the rigid cylinder is with a dry friction. The membrane will not slide off the cylinder only by friction and at a sufficient contact area. The friction is described by Coulomb's law. We study a minimum length of the membrane which is in contact with the rigid cylinder and is needed to the equilibrium of the membrane. We obtain an explicit solution for the Bartenev–Khazanovich (Varga) strain-energy function.

ЗАВИСИМОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СОРБЕНТОВ ОТ РАЗМЕРОВ МИКРОПОР

Колесникова А. С.
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Построены атомистические модели углеродных пористых наноструктур для теоретического исследования их модуля Юнга в зависимости от размера пор при неизменном значении концентрации атомов углерода. Установлено, что добиться уменьшения модуль Юнга пористых углеродных наноструктур можно путем уменьшения пористости структур. Исследование осуществлялось с использованием молекулярно-механического метода Бреннера.

1. Общие указания.

Пористые углеродные материалы человечество использует на протяжении многих столетий. В настоящее время пористые углеродные материалы используются в различных областях науки и техники: в адсорбционной медицине и фармацевтике в качестве сорбентов для очистки, разделения и концентрирования в газовых и жидких средах, в электронике в качестве элементной базы наноустройств, в энергетике в качестве материала для хранения водорода.

В сорбционной медицине ПУМ (сорбенты) привлекают к себе большое внимание из-за своей пористости. Например, микропористые структуры используются для удаления из биологических жидкостей продуктов небольшой молекулярной массы. В связи с этим, в настоящее время существует большое разнообразие пористых углеродных микро- и наноструктур [1–6]. Плотность таких структур колеблется от 0.26 г/см^3 до 2.2 г/см^3 [2]. Однако среди этого разнообразия особый интерес вызывают пористые наносруктуры с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3. Этот интерес обусловлен тем, что научных работ по исследованию свойств такого пористого материала мало [7, 8]. В работе [7] осуществляется теоретическое исследование способности пористой структуры с размером пор 10–15 нм и с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 восстанавливаться после больших деформаций. При этом модуль Юнга углеродной пористой структуры до процесса деформаций составляет 30 ГПа. В работе [8] осуществляется теоретическое исследование теплопроводящих свойств пористого материала с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3.

Для использования пористых углеродных наноструктур в качестве адсорбентов необходимо исследовать механические свойства материала. Ранее исследования по выявлению зависимости модуля Юнга пористых углеродных наноструктур с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 в зависимости от размера пор не проводились. В работе [9] методом конечных элементов показано, что с увеличением пористости структур модуль Юнга будет уменьшаться. Однако не учитывается атомарное строение данных структур и не говорится о плотности материала, т. е. будет ли плотность меняться при уменьшении размеров пор. При этом известно, что при увеличении плотности материала размеры пор уменьшаются [10]. В связи с этим в данной работе впервые осуществляется теоретическое исследование модуля Юнга пористых углеродных наноструктур с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 в зависимости от размера пор. Исследование осуществлялось с использованием энергетического потенциала Бреннера [11], и с учетом периодических граничных условий. Вычисления проводились в программном пакете Ring [12]. Апробация реализации потенциала Бреннера в программном пакете Ring представлена в работе [13].

2. Материалы и методы.

Объектом исследования являются пористые углеродные наноструктуры с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 двух видов: первый вид — размер пор от 0.4 нм до 0.8 нм, второй вид — размер пор от 0.2 нм до 1.12 нм (рис. 1а). На основе композита элементарной кубической ячейки размером $a = 3$ нм, $b = 3$ нм $c = 3$ нм с учетом периодических граничных условий осуществлялось исследование модуля Юнга двух видов пористых углеродных наноструктур с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 в зависимости от размера пор. Количество атомов в элементарной ячейке составляло 1899.

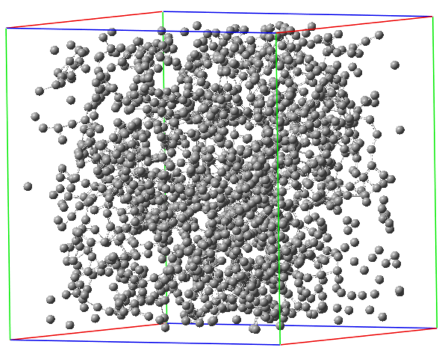


Рисунок 1 – *Пористая углеродная наноструктура с размером пор от 0.4 нм до 0.8 нм.*

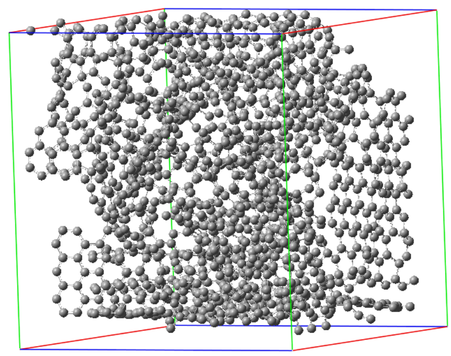


Рисунок 2 – *Пористая углеродная наноструктура с размером пор от 0.2 нм до 1.12 нм.*

Для расчета модуля Юнга была использована методика, включающая следующие этапы.

1) Расчет полной энергии равновесной конфигурации углеродного стекловидного композита с помощью эмпирического потенциала Бреннера [11];

2) Расчет изменения энергии наноструктуры при деформации, которая определяется в свою очередь тензором деформации. Для такого расчета использовалась следующая схема:

• минимизация полной энергии наноструктуры по координатам. Полученная оптимизированная геометрия соответствует недеформированному состоянию структуры, которое описывается тензором деформации, заданным единичной матрицей 3го порядка;

• расчет энергии деформированной структуры, определяемой тензором деформации ε.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

3) Расчет упругих постоянных по формуле [14]:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{V_0}\frac{\partial^2 E(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}} \quad (2)$$

где V_0 — объём ячейки, $E(\varepsilon)$ — полная энергия структуры, определяемая тензором деформации, ε_{ij}, ε_{kl} — компоненты матрицы тензора деформации. Дифференцирование в соответствии с описанной выше процедурой вычисления энергии осуществляется численно.

Для индексации упругих постоянных использовалась нотация Фойгта. При расчете модуля Юнга используется две компоненты тензора деформации, располагающиеся на главной диагонали. Эти компоненты определяют плоскость, вдоль которой осуществляется деформация. Если в качестве компоненты тензора деформации выбирать, например, ε_{11} и ε_{22}, то упругие постоянные будут определяться следующим образом:

$$C_{11} = \frac{1}{V_0}\frac{\partial^2 E(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{11}\partial\varepsilon_{11}} \quad (3)$$

$$C_{12} = \frac{1}{V_0}\frac{\partial^2 E(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{11}\partial\varepsilon_{22}} \quad (4)$$

4) Расчет модуля Юнга с помощью упругих постоянных осуществляет по формуле [15]

$$E = \frac{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}{C_{11} + C_{12}} \quad (5)$$

где E — модуль Юнга, C_{11}, C_{12} — упругие постоянные.

3. Результаты и их обсуждения.

Для воспроизведения первой модели пористой углеродной структуры были взяты атомы углерода, хаотично расположенные в кубическом фрагменте 3 нм × 3 нм × 3 нм. Для воспроизведения второй модели пористой углеродной структуры были взяты хаотично расположенные графеновые чешуйки с учетом, что расстояние между чешуйками не составляло значения менее 0.142 нм (длина химической связи между атомами углерода). Графеновые чешуйки также, как и в первой модели располагались в кубическом фрагменте 3 нм × 3 нм × 3 нм. Для обеих структур указывались периодические граничные условия и осуществлялся процесс минимизации полной энергии путем ее оптимизации. Нахождение минимума энергии осуществлялось молекулярно-механическим методом на основе потенциала REBO. В процессе оптимизации структур учитывалось перестроение химических связей между атомами углерода и наблюдалось образование пористой структуры, что подтверждается содержание у пористых углеродных материалов sp2 и sp3 гибридизации.

В рамках данной работы установлено, что модуль Юнга пористой углеродной наноструктуры с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см3 с размером пор от 0.4 нм до 0.8 нм составляет 1.45 ТПа, а модуль Юнга пористой углеродной наноструктуры с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 с размером пор от 0.2 нм до 1.12 нм составляет 732 ГПа. Следовательно, можно сделать вывод, что чем меньше размер пор в пористой углеродной структуре, тем она более жесткая. Данный результат согласуется с результатами работы [9], в которой механические свойства пористых структур исследовались методом конечных элементов.

3. Выводы.

С помощью методов компьютерного моделирования в данной работе впервые осуществлялось теоретическое исследование модуля Юнга пористых углеродных наноструктур с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 в зависимости от размера пор. Результаты прогностического моделирования показали, что модуль Юнга пористых углеродных наноструктур уменьшается с уменьшением пористости структуры. Установлено, что модуль Юнга пористой углеродной наноструктуры с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 и с размером пор от 0.4 нм до 0.8 нм составляет 1.45 ТПа, а модуль Юнга пористой углеродной наноструктуры с концентрацией атомов углерода 1.4 г/см^3 и с размером пор от 0.2 нм до 1.12 нм составляет 732 ГПа.

Можно предположить, что представленные в данной работе композитные пористые наноструктуры будут являться перспективным материалом для наноэлектромеханических устройств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской стипендии 2016-2018 (проект № СП-2502.2016.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Xing M., Li B.,Yu Z.,Chen Q.* A Reinvestigation of a Superhard Tetragonal sp3 Carbon Allotrope // Materials. 2016. № 9. P. 484.

[2] *Yang W., Mao S., Yang J., Shang T., Song H., Mabon J., Swiech W., Vance J. R., Yue Z., Dillon S. J., Xu H., Xu B.* Large-deformation and highstrength amorphous porous carbon nanospheres // Scientific Reports. 2016. № 6. P. 24187.

[3] *Iwaki M.* Estimation of the atomic density of amorphous carbon using ion implantation, SIMS and RBS // Surface and Coatings Technology. 2002. № 158. P. 377–381.

[4] *He C. Y., Sun L. Z., Zhang C. X.,Zhong J. X.* Two viable three-dimensional carbon semiconductors with an entirely sp2 configuration // Phys. Chem. Chem. Phys. 2013. № 15. P. 680–684.

[5] *He C. Y., Sun L. Z., Zhang C. X.,Peng X. Y., Zhang K. W., Zhong J. X.* Four superhard carbon allotropes: A first-principles study // Phys. Chem. Chem. Phys. 2012. № 14. P. 8410–8414.

[6] *Kvashnina Y. A., Kvashnin A. G., Sorokin P. B.* Investigation of new superhard carbon allotropes with promising electronic properties // J. Appl. Phys. 2013. № 114. P. 183708.

[7] *Zhao Z., Wang E. F., Yan H., Kono Y., Wen B., Bai L., Shi F., Zhang J.,Kenney-Benson C., Park C., Wang Y.* Nanoarchitectured materials composed of fullerene-like spheroids and disordered graphene layers with tunable mechanical properties // Nature Comm. 2015. № 6. P. 1–10.

[8] *Suarez-Martinez I.,Marks N. A.* Effect of microstructure on the thermal conductivity of disordered carbon // Applied Physics Letters. 2011. № 99. P. 033101.

[9] *Shuting K.* Porous Structure Modeling with Computers // Department of Mechanical Engineering The University of Hong Kong. 2014. P. 1–127.

[10] Department of Mechanical Engineering The University of Hong Kong. 2014. P. 1–127.

[11] *Brenner D. W.* Empirical potential for hydrocarbons for use in simulationg the chemical vapor deposition of diamond films // Phys. Rev. B. 1990. № 42. P. 9458–9471.

[12] *Глухова О. Е., Терентьев О. А.* Программный продукт «Программа для моделирования наноструктур (Ring)» // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2010612881. 2010.

[13] *Глухова О. Е., Колесникова А. С.* Эмпирическое моделирование продольного растяжения и сжатия графеновых наночастиц и нанолент // Физика твердого тела. 2011. № 53. P. 1850–1855.

[14] *Киттель Ч.* Эмпирическое моделирование продольного растяжения и сжатия графеновых наночастиц и нанолент // Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 792 с.

[15] *Беринский И. Е.* Теоретическая механика. Упругие и тепловые свойства идеальных кристаллов // Учебное пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 144 с.

Kolesnikova A. S. *Dependence of the mechanical properties of the sorbent on the size of the micropores*. Atomistic model porous carbon nanostructures constructed for theoretical studies of their Young's modulus depending on the pore size at a constant value of the concentration of carbon atoms. It is found that reducing of the Young's modulus of porous carbon nanostructures can be achieved by reducing the porosity structures. The study was carried out by molecular mechanical method Brenner.

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЧНОСТНЫМИ СВОЙСТВАМИ УГЛЕРОДНЫХ КОМПОЗИТОВ

Колесникова А. С., Мазепа М. М.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Представлены результаты исследования модуля Юнга для углеродных композитов, состоящих из графеновых листов и углеродных нанотрубок. Изучена зависимость механических свойств от длины углеродных нанотрубок, входящих в состав композита. Установлено, что механическая прочность возрастает с увеличением длины трубок, входящих в состав композита.

Введение. Актуальной задачей в области усовершенствования работы наноустройств является создание композитного материала с уникальными свойствами, который может использоваться в качестве элементной базы наноустройств.

Новый виток в области развития таких материалов связан с синтезом и исследованием свойств композитных углеродных наноструктур (КУНС) на основе углеродных нанотрубок (УНТ) и графена. Такие композиты различаются по следующим параметрам: тип, длина и диаметр нанотрубок, расстояние между трубками на графеновом листе, а также угол наклона УНТ относительно графенового листа.

Исследуемые композиты состоят из графенового листа и присоединенных к нему с помощью химических связей углеродных нанотрубок типа armchair, ориентированных вертикально.

Среди всего многообразия КУНС именно эти композиты были выбраны в связи с тем, что они уже применяются в различных сферах, но физические свойства изучены мало [1–5].

В настоящее время исследуются механические и тепло- и электропроводные свойства таких композитов [1, 2]. В работе [1] показано, что с увеличением значения упругих свойств возрастают значения количественных характеристик проводимости. В работе [3] исследовалась зависимость модуля Юнга от различных дефектов при присоединении, однако, никаких численных результатов, и зависимости представлено не было.

Важной особенностью углеродных наноструктур является связь их механических деформаций с электронными характеристиками, что делает наноструктуры уникальными в наноэлектромеханических системах.

В связи с этим целью данной работы является исследование зависимости изменения значения модуля Юнга от изменения длины композита при его растяжении вдоль нанотрубок.

Объект исследования. Объект исследования в данной работе представляет собой протяженное в направлениях графенового листа углеродное полотно, состоящее из графенового листа и вертикально ориентированных, перпендикулярно присоединенных к нему, расположенных в шахматном порядке углеродных нанотрубок типа armchair. Края УНТ открыты, а в графеновом листе располагаются отверстия, форма и размер которых соответствует диаметру присоединенных нанотрубок.

Расчет такого композита осуществлялся на ячейке с учетом периодических граничных условий. Периодические граничные условия позволяют учитывать взаимодействие атомов соседних ячеек, расположенных на границах графенового листа, соединенных посредством вектора трансляции. Периодические условия представлены на рисунке 1.

Задание периодических условий только в двух направлениях обусловливается тем, что в эксперименте протяженность композитов наблюдается только в плоскости графенового листа. Связано это с тем, что именно такие композиты получаются при синтезе [4].

Ячейка углеродного композита состоит из графенового листа и присоединенных к нему углеродных нанотрубок. Геометрические размеры квадратного графенового листа составили 46.748 Å, у углеродных нанотрубок расположенных с разных сторон относительно плоскости графенового листа в шахматном порядке, длины варьировались в пределах от 15 Å до 35 Å постоянного диаметра 12.12 Å (рисунок 1). При этом, в пределах одной ячейки длина оставалась постоянной. Для каждой модели композитов выбиралась ячейка с разной длиной нанотрубок.

Такой выбор геометрических размеров для ячейки композита обусловлен тем, что такие композиты наиболее востребованы и уже используются [5].

Результаты и их обсуждение. Целью данной работы является исследование модуля Юнга для углеродных композитов, состоящих из графенового листа и углеродных нанотрубок вдоль оси нанотрубок. Для расчета энергий, по результатам которых найдены силы, применим молекулярно-механический метод с использованием потенциала UFF [6]. Значения энергий были получены в программном пакете Gaussian'09. Расчет проводился следующим образом:

1. Проводилась оптимизация структуры с целью минимизации энергии, находилось численное значение полной энергии структуры.

2. Вдоль оси симметрии углеродных трубок, входящих в состав структуры, проводилось растяжение на 1% относительно первоначальной длины.

3. Вновь проводилась оптимизация структуры с целью минимизации энергии.

По формуле (1) определялось значение внешней силы, необходимой для растяжения структуры вдоль оси трубок на 1% [6]:

$$F = \frac{2\Delta E}{\Delta l} \tag{1}$$

Здесь ΔE — разница между первоначальным значением энергии и конечным, Δl — удлинение.

По формуле (2) определялось значение модуля Юнга:

$$Y = \frac{FL}{S\Delta l} \tag{2}$$

Здесь L — значение первоначальной длины, S — площадь поперечного сечения.

Результаты расчетов представлены на графике (рисунок 2).

Установлено, что при растяжении на 1% композита вдоль оси нанотрубок модуль Юнга композита увеличиваюеся с увеличением длины нанотрубок в композите. Следовательно, можно построить диаграмму зависимости силы, которую необходимо приложить для растяжения структуры на 1%, от геометрических параметров композита. Из диаграммы видно, что, если в композите длина нанотрубок составляет 32 Å и выше, наблюдается резкое увеличение модуля Юнга на растяжение.

Подобное использование композитов позволит уменьшить расход материалов при конструировании наноустройства, не теряя качества его работы.

Для апробации метода исследования проводился расчет упругих свойств углеродных нанотрубок типа armchair. Значение силы, необходимой для растяжения нанотрубки вдоль своей оси на 1% составило 5.54 нН и совпало с экспериментальными значениями, которые для данного типа композта составили 5.5 нН [7].

Проводилось количественное сравнение с результатами расчета модуля Юнга схожих структур, но протяженных в трех направлениях, а не в двух [9]. В таких структурах значение модуля Юнга в 1,5 раза больше при тех же длинах.

Вывод. С помощью методов компьютерного моделирования в данной работе впервые осуществлялось теоретическое исследование модуля Юнга углеродного композита, содержащего графен и перпендикулярно присоединенные к нему нанотрубки типа armchair. Установлено, что модуль Юнга на растяжение резко увеличивается, если длина нанотрубок в композите выше 32 Å.

Учитывая существующие технологии успешного получения композитных материалов на основе углеродных нанотрубок и графена, можно предположить, что представленные в данной работе композитные наноструктуры будут являться перспективным материалом для наноэлектромеханических устройств.

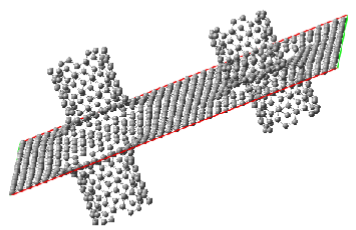


Рисунок 1 – Исследуемая модель углеродного композита

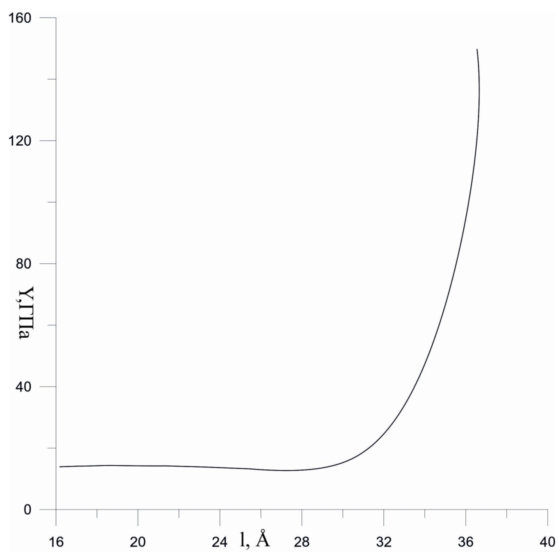


Рисунок 2 – Зависимость изменения модуля Юнга вдоль оси нанотрубок, входящих в состав композита, от их длины

Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской стипендии 2016–2018 (СП-2502.2016.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Zhu Y., Li L., Zhang C., Casillas G., Sun Z., Yan Z., Ruan G., Peng Z., Raji A. R. O., Kittrell C., Hauge R. H., Tour J. M.* A seamless three-dimensional carbon nanotube graphene hybrid material // Nature Communications. 2012. V. 3. P. 1225-1–1225-7.

[2] *Duck H. L., Ji E. K., Tae H. H., Jae W. H.,Seokwoo J., Sung-Yool C., Soon H. H., Won J. S., Rodney S. R., Sang O. K.* Versatile Carbon Hybrid Films Composed of Vertical Carbon Nanotubes Grown on Mechanically Compliant Graphene Films // Advanced Materials. 2010. V. 22. P. 1247–1252.

[3] *Seo S.-D., Hwang I.-S., Lee S.-H., Shim H.-W., Kim D.-W.* 1D/2D carbon nanotube/graphene nanosheet composite anodes fabricated using electrophoretic assembly // Ceramics International. 2012. V. 38. P. 3017–3021.

[4] *Shansavari R., Sakhavand N.* Junction configuration-induced mechanisms govern elastic and inelastic deformations in hybrid carbon nanomaterials// Carbon. 2015. V. 95 P. 699–709.

[5] *Sangwook S., Vikas V., Aji K. R.,Barry L. F.* Prediction of 3D elastic moduli and Poisson's ratios of pillared graphene nanostructures // Carbon. 2012. V. 50. P. 603–611.

[6] Химик Молекулярная механика [Электронный ресурс]: сайт о химии. URL: http://www.xumuk.ru/encyklopedia/2655.html (дата обращения: 23.04.2016).

[7] *Глухова О. Е. Колесникова А. С., Слепченков М. М., Шмыгин Д. С.* Атомная структура энергетически устойчивых композитов углеродные нанотрубки/графен // Физика твердого тела. 2015. Т. 57, вып. 5. С. 994–998.

[8] *Hsao W. Y., Roderic S. L., Carpick R. W.* Mechanical Instabilities of Individual Multiwalled Carbon Nanotubes under Cyclic Axial Compression // Nano Lett. 2007. V. 7(5). P. 1149–1154.

[9] *Колесникова А. С. Сафонов Р. А., Мазепа М. М.* Прогнозирование модуля упругости и коэффициента Пуассона углеродного нанокомпозита // В сборнике: Нано- и биомедицинские технологии. Управление качеством. Проблемы и перспективы. Сборник научных статей. 2016. С. 41–47

Kolesnikova A. S. Mazepa M. M. *Control of strength mechanical properties of carbon composites*. The results of a study of the young's modulus of composite, which consist graphene and carbon nanotube joined by chemical bonds are presented. The dependence of mechanical properties of nanotube's length and diameter are researched. The hardness of composites increases with length and diameter of the nanotube.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОРИСТЫХ ТЕРМОУПРУГИХ КОМПОЗИТОВ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ЭФФЕКТАМИ

Корниевский А. С., Наседкин А. В., Наседкина А. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе при исследовании на наноуровне пористых термоупругих материалов предложен подход, основанный на теории эффективных модулей механики композитов, моделировании представительных объемов и методе конечных элементов. В качестве программного инструментария для моделирования представительных объемов и расчета эффективных модулей использовался конечно-элементный комплекс ANSYS. Для учета поверхностных эффектов границы контакта материала и пор покрывались упругими оболочечными элементами с опциями мембранных напряжений и тепловыми оболочечными элементами.

Введение. В настоящее время теория поверхностных напряжений, обычно называемая моделью Гуртина—Мурдоха, широко используется для описания размерных эффектов на наноуровне. В ряде работ эта теория была применена для моделирования термоупругих наноразмерных композитов. Так, в [1–4] в рамках теории температурных напряжений с поверхностными эффектами исследовались термомеханические свойства композитов со сферическими нановключениями (нанопорами) и волокнистые нанокомпозиты.

Для моделирования эффективной теплопроводности композитов с несовершенными интерфейсными границами известны модели сильной и слабой теплопроводности [5, 6]. Модель сильной теплопроводности с непрерывным полем температуры при переходе через межфазные границы аналогична модели Гуртина—Мурдоха для упругих полей. Задачи по определению эффективных модулей теплопроводности для композитных микро- и наноматериалов с несовершенными интерфейсными границами исследовались в [5–8] и др. работах.

В настоящей работе рассматриваются анизотропные термоупругие материалы со случайно расположенными нанопорами. Для учета наноразмерности на границах материала с порами использованы модель Гуртина—Мурдоха поверхностных напряжений и модель сильной теплопроводности.

1. Методы эффективных модулей и конечных элементов для определения свойств двухфазных нанокомпозитов. Пусть Ω — двухфазное композитное тело с наноразмерными включениями или порами, $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$, $\Omega^{(1)}$ — объем, занимаемый основным материалом первой фазы (матрицей), $\Omega^{(2)}$ — совокупность объемов, занимаемых материалом второй фазы (включениями или порами), $\Gamma = \partial\Omega$ — внешняя граница объема Ω, Γ^s — совокупность пограничных поверхностей материалов с различными фазами ($\Gamma^s = \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)}$), $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к границе, внешней по отношению к $\Omega^{(1)}$, т. е. к области, занимаемой материалом матрицы, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ — радиус-вектор точки в декартовой системе координат. Будем считать, что объемы $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ заполнены различными анизотропными термоупругими материалами. Тогда в рамках классической статической линейной теории термоупругости имеем следующую систему определяющих уравнений

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\,\theta, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*)/2\,, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla\theta\,, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений второго ранга; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций второго ранга; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; θ — приращение температуры от естественного состояния; $\mathbf{c}$ — тензор упругих жесткостей четвертого ранга; $\boldsymbol{\beta}$ — тензор коэффициентов температурных напряжений второго ранга; $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла; $\mathbf{k}$ — тензор коэффициентов теплопроводности второго ранга; $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(m)}$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(m)}$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(m)}$, $\mathbf{x} \in \Omega^{(m)}$, и т. д.

В соответствии с моделью Гуртина—Мурдоха примем, что на наноразмерных границах раздела фаз выполняется условие

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = \nabla^s \cdot \boldsymbol{\sigma}^s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^s\,, \tag{3}$$

где $[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$; ∇^s — поверхностный набла-оператор; $\nabla^s = \nabla - \mathbf{n}(\partial/\partial r)$, r — координата, отсчитываемая по нормали к Γ^s; $\boldsymbol{\sigma}^s$ — тензор поверхностных напряжений. Считается, что тензор поверхностных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^s$ связан с $\mathbf{u}$ и θ соотношениями

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{c}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^s - \boldsymbol{\beta}^s\,\theta, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = (\nabla^s \mathbf{u}^s + (\nabla^s \mathbf{u}^s)^*)/2,, \quad \mathbf{u}^s = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^*\,, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ — тензор поверхностных деформаций; $\mathbf{c}^s$ — тензор поверхностных упругих модулей четвертого ранга; $\boldsymbol{\beta}^s$ — тензор поверхностных коэффициентов температурных напряжений.

Аналогично (3), для наноразмерных межфазных границ Γ^s примем также условие сильной тепловой проводимости

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}] = \nabla^s \cdot \mathbf{q}^s, \quad \mathbf{q}^s = -\mathbf{k}^s \cdot \nabla^s\theta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^s\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{k}^s$ — тензор коэффициентов поверхностной теплопроводности.

Следуя методу эффективных модулей, для определения жесткостных и тепловых свойств термоупругого композита будем решать задачу (1)–(5) со специальными граничными условиями первого рода на внешней поверхности Γ, допускающими для однородной среды постоянные поля напряжений, деформаций, температуры или теплового потока. Затем, из условия равенства средних напряжений или тепловых потоков для неоднородной и для однородной среды сравнения будем находить эффективные модули композита.

В общем случае анизотропной среды, как можно показать, для определения эффективных жесткостей нужно решать задачу (1)–(5) с граничными условиями, указанными ниже, вычислить средние напряжения, и в итоге найти эффективные жесткости c^{eff}_{ijkl}:

$$\mathbf{u} = \varepsilon_0(x_k\mathbf{e}_l + x_l\mathbf{e}_k)/2, \quad \theta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad c^{\text{eff}}_{ijkl} = \langle\sigma_{ij}\rangle/\varepsilon_0\,. \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathrm{const}$; $k, l = 1, 2, 3$ — фиксированные числа, а средние величины в задачах с поверхностными эффектами вычисляются не только по объему Ω, но и по интерфейсным границам Γ^s:

$$\langle(...)\rangle = \frac{1}{|\Omega|}\Big(\int_\Omega (...)\, d\Omega + \int_{\Gamma^s} (...)^s\, d\Gamma\Big)\,. \tag{7}$$

Для определения коэффициентов температурных напряжений следует решить задачу (1)–(5) с иными граничными условиями ($\theta_0 = \mathrm{const}$):

$$\mathbf{u} = 0, \quad \theta = \theta_0 \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \beta_{ij}^{\mathrm{eff}} = -\langle\sigma_{ij}\rangle/\theta_0\,. \tag{8}$$

Отметим, что в задачах (1)–(5) с граничными условиями (6) или (8) поля температуры известны: $\theta = 0$ — для условия (6); $\theta = \theta_0$ — для условия (8). Поэтому фактически здесь надо решать задачи о температурных напряжениях (1), (3), (4) с (6) или (8).

Наконец, для определения эффективных коэффициентов теплопроводности надо найти средние тепловые потоки из решения задачи (2), (5) с граничным условием линейного изменения температуры на внешней поверхности

$$\theta = x_l G_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad k_{il}^{\mathrm{eff}} = -\langle q_i\rangle/G_0\,, \tag{9}$$

где $G_0 = \mathrm{const}$; $l = 1, 2, 3$ — фиксированное число.

Как видно, сформулированные задачи гомогенизации отличаются от обычных задач метода эффективных модулей для термоупругих композитов [9] наличием интерфейсных граничных условий (3)–(5), характерных для модели Гуртина—Мурдоха учета поверхностных напряжений и для модели сильной температурной проводимости для наноразмерных тел.

Выше рассматривались двухфазные композиты. Но можно отметить, что представленные модели описывают и процедуры гомогенизации пористых композитов с поверхностными эффектами, если положить модули жесткости и температурных напряжений пренебрежимо малыми, а модули теплопроводности — равными коэффициенту теплопроводности воздуха.

Для конечно-элементного решения задач (1), (3), (4) с (6) или (8) и (2), (5), (9) следует перейти к их слабым или обобщенным постановкам, применяя стандартные преобразования, связанные с умножением полевых уравнений на проекционные функции, интегрированием полученных равенств по объему, использованием теорем о дивергенции и формул (3)–(9). Для аппроксимации полученных слабых постановок можно использовать классические лагранжевы или серендиповы конечные элементы со степенями свободы узловых перемещений и температур. Заметим, что в силу структуры полей поверхностных механических и тепловых полей (3)–(5) в качестве поверхностных элементов можно использовать стандартные оболочечные элементы с опциями мембранных напряжений и, соответственно, только со степенями свободы узловых перемещений, а также температурные оболочечные элементы. Для этих элементов можно взять фиктивную единичную толщину так, чтобы поверхностные модули из (4), (5) определялись через произведения специально заданных объемных модулей и толщины оболочки.

2. Конечно-элементное моделирование представительного объема со случайной пористостью. Реализация представленных подходов была выполнена в программном комплексе ANSYS. Представительный объем Ω строился в форме куба, равномерно разбитого на меньшие геометрически одинаковые кубики — термоупругие двадцатиузловые гексаэдральные конечные элементы SOLID226 с KEYOPT(1)=11. В кубической решетке Ω имелось $L \times L \times L$ конечных элементов, где L — целое число. В таком двухфазном композите конечные элементы первой фазы наделялись материальными свойствами исходного термоупругого материала, а для пор задавались пренебрежимо малые модули жесткости и температурные свойства воздуха. Далее выделялись элементы со свойствами пор в соответствии с принимаемой микроструктурой композита. В случае слабо пористого материала нерегулярной стохастической структуры, исходя из задаваемой пористости, часть конечных элементов случайным образом объявлялась порами. Отметим, что такая модель легко строится, но она не поддерживает связности элементов первой фазы и не отражает структуры связности элементов второй фазы (закрытые или открытые поры). Другие методы, поддерживающие связность каркаса, состоящего из элементов первой фазы, или поддерживающие кластерность элементов второй фазы были описаны в [9].

Для автоматизированного покрытия внутренних границ пор в кубическом представительном объеме применялся следующий алгоритм. Вначале выделялись конечные элементы с материальными свойствами пор. Полученный массив элементов по своим внешним границам по команде TSHAP,QUA8 покрывался ответными контактными элементами TARGE170. Таким образом, грани всех конечных элементов со свойствами пор, находящиеся на внешних поверхностях массива элементов — пор оказывались покрытыми восьмиузловыми контактными элементами (TARGE170 вида QUA8). Затем контактные элементы, находящиеся на внешней границе представительного объема удалялись, а оставшиеся контактные элементы заменялись на восьмиузловые оболочечные элементы SHELL281 с опцией мембранных напряжений. В итоге все грани соприкосновения термоупругих структурных элементов с порами были покрыты мембранными конечными элементами.

На следующем этапе для полученного представительного объема решались статические задачи (1), (3), (4) с (6) или с (8). Далее, в постпроцессоре ANSYS вычислялись осредненные напряжения, причем как по объемным элементам, так и по поверхностным. Далее, по формулам (6), (8) вычислялись эффективные модули жесткости и коэффициенты температурных напряжений пористого композита с поверхностными эффектами. Аналогичным образом решались в ANSYS задачи теплопроводности (2), (5), (9).

3. Обсуждение результатов. В результате проведенных вычислительных экспериментов для материала пористого кремния кубической сингонии были обнаружены тенденции, выявленные в [10]. Если сравнить два подобных тела с обычными размерами и с наноразмерами, то для наноразмерного тела за счет поверхностных напряжений эффективные жесткости будут больше, чем у тела с обычными размерами. Кроме того, понятно, что для пористого тела обычных размеров эффективные упругие жесткости убывают с ростом пористости. Между тем, эффективные жесткости пористого нанокомпозитного тела при одной и той же пористости могут, как уменьшаться, так и увеличиваться в зависимости от величин поверхностных модулей и размеров и количества пор. Этот эффект связан прежде всего с тем, что на размеры границ пор с поверхностными напряжениями влияет не только общая пористость, но также конфигурация, размеры и количество пор. Аналогичные тенденции были отмечены и для величин эффективных коэффициентов теплопроводности.

Работа первых двух авторов по моделированию упругих нанокомпозитов выполнена в рамках проекта РНФ № 15-19-10008.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Chen T., Dvorak G. J., Yu C. C.* Solids containing spherical nano-inclusions with interface stresses: Effective properties and thermal-mechanical connections // Int. J. Solids Struct. 2007. V. 44. P. 941–955.

[2] *Duan H. L., Karihaloo B. L.* Thermo-elastic properties of heterogeneous materials with imperfect interfaces: Generalized Levin's formula and Hill's connections // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. P. 1036-1052.

[3] *Le Quang H., He Q.-C.* Size-dependent effective thermoelastic properties of nanocomposites with spherically anisotropic phases // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. P. 1889–1921.

[4] *Le Quang H., He Q.-C.* Estimation of the effective thermoelastic moduli of fibrous nanocomposites with cylindrically anisotropic phases // Arch. Appl. Mech. 2009. V. 79. P. 225–248.

[5] *Le Quang H., Phan T.-L., Bonnet G.* Effective thermal conductivity of periodic composites with highly conducting imperfect interfaces // Int. J. Thermal Sci. 2011. V. 50. P. 1428–1444.

[6] *Le Quang H., Pham D. S., Bonnet G., He Q.-C.* Estimations of the effective conductivity of anisotropic multiphase composites with imperfect interfaces // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 58. P. 175–187.

[7] *Graham S., McDowell D. L.* Numerical analysis of the transverse thermal conductivity of composites with imperfect interfaces // J. Heat Transfer. 2003. V. 125. P. 389–393.

[8] *Kushch V. I., Sevostianov I., Chernobai V. S.* Effective conductivity of composite with imperfect contact between elliptic fibers and matrix: Maxwell's homogenization scheme // Int. J. Eng. Sci. 2014. V. 83. P. 146–161.

[9] *Наседкин А. В., Наседкина А. А., Ремизов В. В.* Конечно-элементное моделирование пористых термоупругих композитов с учетом микроструктуры // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 100–109.

[10] *Еремеев В. А., Морозов Н. Ф.* Об эффективной жесткости нанопористого стержня // Доклады Академии наук. 2010. Т. 432, № 4. С. 473–476.

Kornievsky A.S., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A. *Finite element analysis of nanostructured porous thermoelastic composites with surface effects*. The paper considers an integrated approach to the determination of the material properties of nanoscale thermoelastic porous composites. ANSYS finite element package was used to simulate representative volumes and to calculate the effective moduli. This approach is based on the theory of effective moduli, modeling of representative volumes and the finite element method. The contact boundaries between material and pores were covered by the surface membrane elastic shell elements and thermal shell elements in order to take the surface effects into account.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНИКИ НЕПРЕРЫВНОГО НАНО- И МИКРОИНДЕНТИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МИКРОКОМПОНЕНТОВ УГЛЕЙ

Коссович Е. Л.[1], **Добрякова Н. Н.**[1], **Минин М. Г.**[2], **Эпштейн С. А.**[1], **Агарков К. В.**[1]

[1] *Национальный исследовательский технологический университет "МИСиС", Москва*

[2] *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург*

Механические свойства углей на разных уровнях их структурной организации определяют закономерности их поведения в условиях воздействий различной природы. Зарождение и рост дефектов (в том числе разрушения) в угольном веществе происходит на уровне микрокомпонентов и аномальных включений (минеральных компонентов и т. п.). Классические методы оценки механических свойств углей не позволяют учесть особенности строения угольного вещества на микро- и наноуровне. Недавно был предложен новый подход, основанный на применении метода непрерывного индентирования.Целью данной работы является демонстрация возможностей современных методов инструментального индентирования для оценки локальных механических свойств микрокомпонентов углей. Эксперименты проводили на двух типах объектов — угле низкой стадии метаморфизма и антраците. Измерения проводили на двух типах микрокомпонентов угля — витрините и инертините, а также на микрокомпоненте витрините антрацита. В результате были получены данные о качественных и количественных различиях между механическими свойствами микрокомпонентов углей, в том числе между разными микрокомпонентами одного и того же угля, а также их изменениями с ростом стадии метаморфизма.

1. Введение. В последнее время для изучения механических характеристик структурно-неоднородных материалов, таких как композиты с компонентами нано- и микроразмерных масштабов, а также природные композиты — геоматериалы, стали использовать новейшие инструментальные методы, отличающиеся высокими метрологическими характеристиками. К таким приборам относятся, в том числе, современные микро- и наноинденторы. С их помощью стало возможным оценивать величины локальных модулей упругости и твердости, измеренных в приповерхностных слоях. Локальность при этом измеряется в нанометровом и микрометровом масштабах. Таким образом появилась возможность исследовать механические характеристики не только материала в целом, но и его отдельных компонентов. Такие подходы в настоящее время развиваются как для композитов (с точки зрения попытки характеристики особенностей законов деформирования и даже возникновения процессов разрушения) [1, 2], но и (с аналогичными целями) — для скальных пород [3, 4]. За последние пять лет также появились работы по применению техники непрерывного микро- [5] и наноиндентирования [6, 7] для оценки механических свойств микрокомпонентов углей. Целью данной работы является демонстрация возможностей современных методов инструментального индентирования для оценки локальных механических свойств микрокомпонентов углей.

2. Объекты и методы исследования. Эксперименты проводили на двух типах объектов — угле низкой стадии метаморфизма (№ 1) и антраците (№ 2). Измерения проводили на двух типах микрокомпонентов угля — витрините и инертините, а также на микрокомпоненте витрините антрацита. В качестве образцов использовали аншлиф-штуфы угля и антрацита с отполированными поверхностями, предназначенными для индентирования. Подготовку образцов проводили на минералогическом комплексе RotoPol-35 (Struers, Дания), на котором осуществляли шлифование и полировку поверхности.

Инструментальные исследования проводили на следующих приборах: микроинденторе MicroHardness Tester (CSM Instruments) с индентором, представляющим четырехгранную пирамиду Виккерса, а также на наноинденторе Hysitron TI 700 с индентором в виде трехгранной пирамиды Берковича. Измерения проводили в режиме контроля нагружения. В зависимости от вида прибора, максимальная нагрузка составила 500 мН (микроиндентирование) или 10 мН (наноиндентирование). в в различных режимах (контроля нагружения и глубины внедрения в образец). Обработку результатов измерений проводили в соответствии с классическими подходами Оливера и Фарра и др. На каждом из образцов и на каждом из микрокомпонентов проводили не менее 10 измерений для того, чтобы добиться статистически достоверных результатов.

Измерения на отдельных микрокомпонентах угля № 1 и на микрокомпоненте витрините антрацита № 2 проводили на одних и тех же образцах, но на областях, расположенных на достаточном отдалении друг от друга, чтобы не внести погрешности в измеренные величины. Результатами измерений были значения модулей упругости E (ГПа) и твердости H (МПа), а также типичный вид кривых нагружения-разгрузки (P—h диаграмм).

3. Результаты и обсуждение В результате проведения экспериментов по микро- и наноиндентированию образцов были построены кривые нагружения-разгрузки (P—h диаграммы) микрокомпонентов витринита и инертинита угля № 1 и микрокомпонента витринита антрацита № 2. Оказалось, что вне зависимости от типа прибора (микро- или наноиндентор) качественный вид таких кривых сохранялся (рисунок 1). Сравнение P—h диаграмм, полученных на микрокомпонентах инертинита и витринита угля № 1 показало, что поведение инертинита при на-

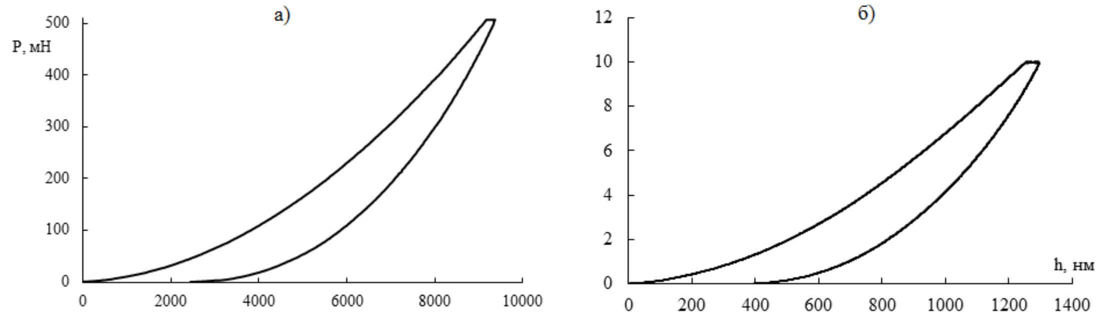


Рисунок 1 – Типичные кривые нагружения-разгрузки микрокомпонента витринита угля № 1 а) микроиндентирование; б) наноиндентирование гружении в нано- и микродиапазоне является более пластическим по сравнению с инертинитом (рисунки 1, 2). При этом микрокомпонент витринит антрацита № 2 продемонстрировал характер указанной кривой, наиболее приближенный к упругому (рисунок 3).

Численные значения определенных при проведении экспериментов по микро- и наноиндентированию величин модулей упругости и твердости представлены в таблице 1.

Из таблицы 1 видно, что при переходе от нано- к микроразмерным индентированиям существует размерный эффект, наиболее ярко проявляющийся в величинах модулей упругости. Так, для угля № 1 величины модуля упругости витринита и инертинита ниже для экспериментов по микроиндентированию по сравнению с наноиндентированием. При этом для антрацита очевидна обратная зависимость.

Величины твердости микрокомпонентов витринита угля № 1, полученные при микро- и наноиндентировании, сравнимы, а для инертинита величина твердости, полученная при микроиндентировании, ниже, чем при наноиндентировании. Для микрокомпонентов витринита антрацита № 2 величины твердости, полученные при микроиндентировании, в 3 раза выше, чем таковые при наноиндентировании.

4. Заключение В работе были приведены результаты серии экспериментов по микро- и наноиндентированию образцов угля низкой стадии метаморфизма и антрацита. Измерения проводили на разных микрокомпонентах угля (инертините и витрините) и микрокомпоненте витрините антрацита.

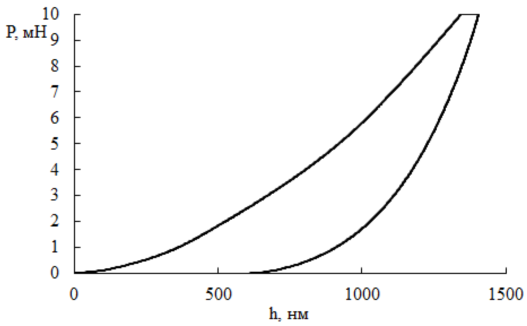


Рисунок 2 – Типичные кривые нагружения — разгрузки микрокомпонента инертинита угля № 1

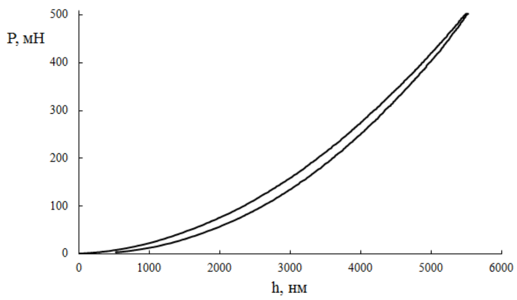


Рисунок 3 – Типичные кривые нагружения — разгрузки микрокомпонента витринита антрацита № 2

Таблица 1 – Значения модулей упругости и твердости микрокомпонентов образцов угля и антрацита при микро- и наноиндентировании

№ угля	Микрокомпонент	Вид индентирования	E, ГПа	H, МПа
1	Витринит	Микроиндентирование	3.66	407.60
		Наноиндентирование	4.56	444.42
1	Инертинит	Микроиндентирование	3.02	251.70
		Наноиндентированиее	4.90	339.03
2	Витринит (антрацита)	Микроиндентирование	8.58	1610.83
		Наноиндентирование	5.15	528.20

Были получены данные о качественных и количественных различиях между механическими свойствами микрокомпонентов углей, в том числе между разными микрокомпонентами одного и того же угля. Отмечены некоторые характерные особенности изменения локальных механических свойств микрокомпонентов углей с ростом стадии метаморфизма.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-17-10217).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Coleman J. N. et al.* Small but strong: A review of the mechanical properties of carbon nanotube–polymer composites // Carbon N. Y. 2006. Vol. 44, № 9. P. 1624–1652.

[2] *Copur H. et al.* A set of indices based on indentation tests for assessment of rock cutting performance and rock properties // J. South African Inst. Min. Metall. 2003. P. 589–600.

[3] *Haftani M. et al.* A new method for correlating rock strength to indentation tests // J. Pet. Sci. Eng. Elsevier. 2013. Vol. 112. P. 24–31.

[4] *Maier P. et al.* Application of nanoindentation technique for structural characterisation of weld materials // Mater. Charact. 2002. Vol. 48. № 4. P. 329–339.

[5] *Kozusnikova A.* Determination of Microhardness and Elastic Modulus of Coal Components by Using Indentation Method // GeoLines. 2009. Vol. 22. P. 40–43.

[6] *Epshtein S. A., Borodich F. M., Bull S. J.* Evaluation of elastic modulus and hardness of highly inhomogeneous materials by nanoindentation // Appl. Phys. A. 2015. Vol. 119, № 1. P. 325–335.

[7] *Borodich F. M., Bull S. J, Epshtein S. A.* Nanoindentation in studying mechanical properties of heterogeneous materials // J. Min. Sci. 2016. Vol. 51, № 3. P. 470–476.

Kossovich E. L., Dobryakova N. N., Minin M. G., Epshtein S. A., Agarkov K. V. *Depth-sensing nano- and microindentation for characterization of coals microcomponents mechanical properties*. Coals mechanical properties at different size scales determine the laws and features of their behavior under external effects of different physical nature. Initiation and growth of defects (including destruction) in coal matter begins at the microcomponents and anomalous inclusions (mineral components, etc.) level. Classical methods for coals mechanical properties characterization do not allow to consider features of coal matter structure at micro- and nanoscale. Recently, a new approach was introduced for coals mechanical properties characterization, based on depth-sensing indentation techniques. The aim of the current work is to demonstrate the possibilities of the modern indentation methods for evaluation of local mechanical properties of coals microcomponents. Experiments were held at two types of objects – bituminous low-rank coal and anthracite. Measurements were made at two types of coal microcomponents – vitrinite and inertinite, and also at vitrinite of anthracite. The results revealed data on qualitative and quantitative differences between coal microcomponents mechanical properties, including their variation in rank.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА КОЛЕБАНИЙ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК В ХАОС

Крылова Е. Ю., Яковлева Т. В.
НИИ механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

В работе исследуется влияние интенсивности стационарного температурного поля на сценарии перехода колебаний гибких прямоугольных в плане оболочек модели Кирхгофа в хаос.

1. Постановка задачи.

Тонкостенные прямоугольные в плане гибкие оболочки, в качестве элементов конструкций находят широкое применение в различных областях инженерного строительства. Для поддержания стабильной работы всей системы необходимо исследование влияния температурных полей на нелинейные колебания ее составных частей. Предполагаем, что нагрев тела не слишком велик и поэтому не изменяет механических свойств материала. Коэффициент теплового расширения предположим не зависящим от температуры, удельная объемная теплоемкость тела и коэффициент теплопроводности считаем постоянными. Положим, что в теле отсутствуют источники тепла. Оболочка находится в стационарном температурном поле, которому отвечает уравнение Лапласа. Математическая модель колебаний оболочки построена на основе теории Кирхгофа. Геометрическая нелинейность учтена в форме Т. Кармана [1]. В безразмерном виде уравнения движения элемента оболочки и совместности деформаций с учетом температурного поля имеют вид:

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left[\nabla_\lambda^4 w + \nabla_\lambda^2 M_t\right] - L(w,F) - \nabla_k^2 F + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \epsilon\frac{\partial w}{\partial t} = 0\ ;$$

$$\nabla_\lambda^4 F + \frac{1}{2}L(w,w) + \nabla_k^2 w + \nabla_\lambda^2 N_t = 0,$$

здесь

$$\nabla_\lambda^4 = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \lambda^2\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial x^2},\ \nabla_\lambda^2 = \lambda^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \nabla_k^2 = k_x\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$L(w,F)$, $L(w,w)$ — известные нелинейные операторы, F — функция усилий, w — функция прогиба, $\lambda = a/b$, где a, b — размеры оболочки в плане, t — время, ν — коэффициент Пуассона, k_x и k_y — кривизна оболочки по x и y, соответственно, $T(x,y)$ — функция температурного поля. Температурные компоненты усилий и моментов имеют вид:

$$N_t = \int_{-h}^{h}\frac{E\alpha_t T}{1-\nu}dz,\ M_t = \int_{-h}^{h}\frac{E\alpha_t T}{1-\nu}zdz.$$

В работе рассмотрены нулевые начальные условия и неоднородные краевые условия, соответствующие шарнирному опиранию на гибкие нерастяжимые ребра [2]:

$$w = 0;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;\ F = 0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0;\ x = 0;\ 1$$

$$w = 0;\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;\ F = 0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = p_x;\ x = 0;\ 1$$

Для нахождения температурной функции к уравнению Лапласа присоединялись однородные граничные условия первого рода. Задача Дирихле методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка сводилась к системе линейных алгебраических уравнений, которая решалась методом обратной матрицы. Система уравнений движения элемента оболочки с учетом граничных и начальных условий сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$ по пространственным переменным. По времени задача Коши решается методом Рунге — Кутта 4-ого порядка. Применение метода конечных разностей позволяет рассматривать оболочку, как систему с большим числом степеней свободы, в данном численном эксперименте их число 196 (14×14).

В работе помимо классического аппарата Фурье-преобразований применяется вейвлет-анализ, что позволяет изучить локальные временные особенности сигналов, полученных в результате численных экспериментов. Преимущества аппарата вейвлет-преобразований и выбор анализирующего вейвлета описаны в работах [3].

2. Численный эксперимент.

Нелинейная динамика прямоугольных в плане оболочек под действием продольных нагрузок рассмотрена в работе [4]. Численные эксперименты направлены на изучение влияния интенсивности стационарного температурного поля на характер колебаний рассматриваемой динамической системы. Продольная нагрузка задавалась в виде $p_x = p_0 \sin \omega_p t$, где ω_p, p_0 — частота и амплитуда внешнего воздействия. Колебания рассматривались на временном интервале $t \in [0; 286]$. Коэффициент диссипации среды $\epsilon = 1$, $\nu = 0{,}3$. Материал пластины — сталь. Отношение размеров панели в плане $\lambda = 1$. Материнский вейвлет основан на 32 производной функции Гаусса (Gauss32).

В численном эксперименте с частотой внешней продольной нагрузки ($\omega_p = 14{,}66$), более чем в два раза превышающей частоту собственных линейных колебаний системы ($\omega_0 = 5{,}9$), был получен сценарий, содержащей черты всех трех классических сценариев перехода колебаний динамических систем к хаосу. С ростом амплитуды внешней продольной нагрузки гармонические колебания сменяются колебаниями, где в вейвлет-спектре преобладает частота, соответствующая первой бифуркации Хопфа. Затем, амплитуда частоты внешней продольной нагрузки начинает нарастать на начальном временном интервале ($p_0 = 2{,}25$). При достижении управляющим параметром значения $p_0 = 2{,}65$ происходит вторая бифуркация системы, при $t > 75$ на вейвлет спектре появляются частоты, соответствующие второй бифуркации Хопфа. Амплитуда внешней силы $p_0 = 2{,}7$ провоцирует перестройку системы по времени, что хорошо иллюстрирует вейвлет спектр. На начальном интервале времени $t < 100$ появляется две пары линейно зависимых частот, амплитуда частот, соответствующих второй бифуркации Хопфа близка к нулю. Далее по времени ($t > 100$) амплитуда пар линейно-зависимых частот резко падает, а амплитуда частот второй бифуркации Хопфа резко нарастает. Дальнейший рост параметра p_0 приводит к появлению хаотических окон в сигнале, что переводит колебания системы в хаос.

Поместим рассматриваемую пластину в температурное поле интенсивности $T = 10$. Нагрев приводит к температурному выпучиванию пластины, вследствие чего меняется частота ее собственных линейных колебаний. При $T = 10$ собственная частота $\omega_0 = 8{,}9$, что более чем в полтора раза меньше частоты внешней продольной нагрузки $\omega_p = 14{,}6$. Численный эксперимент показал, что температурное поле малой интенсивности ($T = 10$) не меняет сценария перехода колебаний пластины в хаос, но ускоряет его по амплитуде внешней продольной нагрузки. Уже при значении $p_0 = 2{,}1$ на спектре присутствует частота первой бифуркации Хопфа по амплитуде соизмеримая с частотой вынуждающей силы. При достижении управляющим параметром значения $p_0 = 2{,}45$ происходит вторая бифуркация системы (бифуркация Хопфа), которая, как и в предыдущем эксперименте, появляется не сразу по времени, а лишь при $t > 100$. Линейно независимые частоты в данном случае появляются при $p_0 = 2{,}5225$ на начальном временном интервале ($t < 120$), однако их амплитуды не постоянны на этом интервале и значительно ниже амплитуды частоты первой бифуркации. Частоты, соответствующие второй бифуркации Хопфа, присутствуют на вейвлет спектре на всем временном интервале, но амплитуда их при $t < 120$ ниже чем при $t > 120$. Хаос в системе наступает уже при $p_0 = 2{,}55$.

Поместим пластину в температурное поле интенсивности $T = 30$, в данном случае частота собственных линейных колебаний совпадет с частотой внешней продольной нагрузки $\omega_p = \omega_0 = 14{,}6$. В этом численном эксперименте переход к хаосу был резким, связан он с явлением перемежаемости. Сценарий содержал черты сценариев Рюэля — Таккенса и Помо — Монневиля. При достижении амплитудой внешней нагрузки значения $p_0 = 0{,}348$ на спектре появляются две линейно-зависимые частоты, их амплитуда значительно ниже амплитуды вынуждающей силы, по этому вейвлет спектры ее не регистрируют. Увеличение амплитуды нагрузки до $p_0 = 0{,}3485$ приводит к появлению на конечном интервале времени $t > 200$ частоты соответствующей удвоению периода колебаний системы и пяти пар линейно-независимых частот. На начальном интервале времени колебания соответствуют гармоническим колебаниям. Рост управляющего параметра приводит к увеличению квазипериодического окна ($p_0 = 0{,}35$, $t > 125$), которое при $p_0 = 0{,}37$ заполняет весь спектр. Дальнейшее движение по амплитуде внешней силы влечет появление узких хаотических областей в сигнале, что приводит колебания системы в хаос ($p_0 = 0{,}394$).

3. Выводы.

Единого сценария перехода колебаний рассматриваемой системы в хаос не обнаружено. Все рассмотренные переходы содержали черты сценария Рюэля — Такенса, то есть в спектре колебаний появлялись пары линейно зависимых частот. Переход к хаосу во всех экспериментах осуществлялся через перемежаемость, то есть через появление и нарастание количества хаотических окон в спектре колебаний системы. Во всех численных экспериментах были получены нестационарные сигналы, где бифуркации системы наступали при фиксированных управляющих параметрах лишь с течением времени.

Температурное поле малой интенсивности $T = 10$ не меняло сценария перехода колебаний прямоугольной пластины в хаос, но ускоряло его. Бифуркации системы и хаотические состояния появлялись при меньших значениях амплитуды внешней продольной нагрузки. В случае интенсивности температурного поля $T = 30$ частота собственных линейных колебаний нагретой пластины совпала с частотой внешней продольной нагрузки, что привело к резкому переходу в хаос. Хаотические колебания появлялись в системе при значении управляющего параметра в 10 раз меньших, чем в двух предыдущих случаях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ проект № 15-19-10039.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Karman Th.* Festigkeits probleme in Maschinenbau // Encykle. D. Math. Wiss. 1910. Vol. 4. № 7. P. 311–385.

[2] *Корнишин М. С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.

[3] *Awrejcewicz J. Krylova E. Y., Papkova I. V., Krysko V. A.* Regular and chaotic dynamics of flexible plates // Shock and Vibration. 2014. Vol. 8. P. 937–967.

[4] *Крылова Е. Ю., Яковлева Т. В., Папкова И. В., Крысько В. А.* Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане пластин при действии продольных нагрузок // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 3. С. 235–243.

Krylova E. Y., Yakovleva T. V. *Investigation of the influence of stationary temperature field intensity on the scenarios of transition oscillation of flexible shells into chaos*. The article is devoted to investigation of the influence of stationary temperature field intensity on the scenarios of transition oscillation of flexible rectangular Kirchhoff shells into chaos.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОФИЛЕЙ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Кузьмина К. С., Марчевский И. К., Морева В. С.
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

При решении сопряженных задач гидроупругости (к примеру, моделирование гидроупругих колебаний профиля в потоке вязкой несжимаемой среды) с помощью вихревых методов одной из ключевых проблем является обеспечение выполнения граничного условия на профиле. Существуют два подхода к учету граничного условия на профиле: обеспечение равенства нормальных либо касательных компонент скоростей среды и профиля. В работе описаны расчетные схемы для обоих подходов. Показано, что схема с касательными компонентами позволяет получать результаты с более высокой точностью и для более широкого класса задач.

1. Введение. Моделирование гидроупругих колебаний — актуальная задача, возникающая во многих технических приложениях при анализе поведения упругих конструкций, помещенных в поток жидкости или газа и воспринимающих нестационарные аэрогидродинамические нагрузки. Во многих случаях рассматриваемые конструкции являются протяженными, а скорость потока — сравнительно малой, поэтому в качестве модельной задачи можно рассмотреть обтекание соответствующего профиля, который может быть подвижным и/или деформируемым, потоком вязкой несжимаемой среды. Необходимость решения сопряженной задачи гидроупругости, когда область течения изменяется на каждом шаге расчета, может серьезно усложнять применение хорошо разработанных сеточных методов в связи с необходимостью перестроения или сильной деформации сетки.

Весьма подходящими для решения подобных задач являются бессеточные лагранжевы вихревые методы, в основе которых лежит переход к завихренности как к первичной расчетной величине. Одним из преимуществ вихревых методов является «концентрация» вычислительных ресурсов на моделировании движения завихренности, которая отлична от нуля только в сравнительно небольшой области вихревого следа вблизи профиля и позади него. Расчет скорости среды производится по закону Био — Савара, а восстановление давления — с использованием обобщения интеграла Коши — Лагранжа для случая вихревых течений вязкой несжимаемой среды.

Выполнение граничного условия на профиле обеспечивается генерацией на его поверхности присоединенного слоя источников и вихревого слоя, часть завихренности в котором является присоединенной, а часть — свободной. Точность расчета интенсивностей этих слоев и их влияния на течение и гидродинамические нагрузки в значительной мере определяет точность решения сопряженной задачи гидроупругости в целом. Проблема разработки эффективных расчетных схем вихревых методов, позволяющих моделировать обтекание подвижных профилей с высокой точностью, является актуальной.

2. Постановка задачи. Течение вязкой несжимаемой среды, обтекающей профиль K, описывается уравнениями Навье — Стокса

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \nu \Delta \vec{V} - \frac{\nabla p}{\rho}, \tag{1}$$

где $\vec{V}(\vec{r}, t)$ — поле скоростей; $p(\vec{r}, t)$ — давление; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность среды; ν — коэффициент кинематической вязкости, с граничными условиями прилипания жидкости на профиле

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_K(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in K; \tag{2}$$

и условиями затухания возмущений на бесконечности

$$\vec{V}(\vec{r}, t) \to \vec{V}_\infty, \quad p(\vec{r}, t) \to p_\infty, \quad |\vec{r}\,| \to \infty.$$

Здесь $\vec{V}_K(\vec{r}, t)$ — скорость точек профиля, которая при решении «гидродинамической подзадачи» предполагается известной.

Уравнения Навье—Стокса (1) могут быть записаны в терминах завихренности $\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{V}(\vec{r}, t)$:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{U}) = 0. \tag{3}$$

Здесь $\vec{U}(\vec{r}, t) = \vec{V}(\vec{r}, t) + \vec{W}(\vec{r}, t)$, $\vec{W}(\vec{r}, t)$ — так называемая диффузионная скорость, пропорциональная коэффициенту вязкости среды [1]:

$$\vec{W}(\vec{r}, t) = -\nu \frac{\nabla \Omega(\vec{r}, t)}{\Omega(\vec{r}, t)}, \qquad \vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \Omega(\vec{r}, t)\vec{k}.$$

Уравнение (3) представляет собой уравнение переноса имеющейся в области течения завихренности со скоростью $\vec{U}$, а «новая» завихренность генерируется только на обтекаемом профиле.

Влияние обтекаемого профиля на течение эквивалентно суперпозиции влияний присоединенного вихревого слоя с интенсивностью $\gamma_{att}(\vec{r}, t)$, присоединенного слоя источников с интенсивностью $q_{att}(\vec{r}, t)$ и свободного вихревого слоя с интенсивностью $\gamma(\vec{r}, t)$. Эти слои располагаются на обтекаемом профиле, присоединенные слои моделируют движение и возможное деформирование профиля, поэтому их интенсивности определяются скоростью движения точек профиля [2, 3]:

$$\gamma_{att}(\vec{r}, t) = \vec{V}_K(\vec{r}, t) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}, t), \quad q_{att}(\vec{r}, t) = \vec{V}_K(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in K,$$

где $\vec{n}(\vec{r}, t)$ и $\vec{\tau}(\vec{r}, t)$ — орт нормали и касательной к профилю, $\vec{n}(\vec{r}, t) \times \vec{\tau}(\vec{r}, t) = \vec{k}$.

По известному распределению завихренности с помощью закона Био — Савара может быть восстановлено поле скоростей среды:

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_{S(t)} \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi}, t) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS + \frac{1}{2\pi} \oint_{K(t)} \frac{\vec{\gamma}(\vec{\xi}, t) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dl_K + $$
$$+ \frac{1}{2\pi} \oint_{K(t)} \frac{\vec{\gamma}^{att}(\vec{\xi}, t) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dl_K + \frac{1}{2\pi} \oint_{K(t)} \frac{q^{att}(\vec{\xi}, t)(\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dl_K. \tag{4}$$

Здесь $S(t)$ и $K(t)$ — область течения и положение границы обтекаемого профиля в момент времени t соответственно; $\vec{\gamma} = \gamma\vec{k}$ и $\vec{\gamma}^{att} = \gamma^{att}\vec{k}$ — векторы интенсивностей свободного и присоединенного вихревых слоев.

Неизвестную интенсивность вихревого слоя $\gamma(\vec{s},\, t)$ можно определить из граничного условия на профиле (2).

3. Интегральные уравнения для определения интенсивности вихревого слоя. «Классический» подход, обычно используемый в реализациях вихревых методов, предполагает, что неизвестную функцию $\gamma(\vec{r},\, t\,)$ следует определять из условия равенства *нормальных* компонент предельного значения поля скоростей на профиле и скорости профиля:

$$\vec{V}(\vec{r},\, t)\cdot\vec{n}(\vec{r},\, t) = \vec{V}_K(\vec{r},\, t)\cdot\vec{n}(\vec{r},\, t), \quad \vec{r}\in K(t). \tag{5}$$

С учетом (4) относительно искомого распределения $\gamma(\vec{r},\, t)$ получается интегральное уравнение I рода, которое является сингулярным; интеграл в нем следует понимать в смысле главного значения по Коши [5]. Численное решение этого уравнения может приводить к значительным погрешностям, а в ряде случаев, и к получению качественно неверного результата.

В то же время известен альтернативный подход, из которого, в частности, следует [4], что условие (2) эквивалентно условию

$$\vec{V}(\vec{r},\, t)\cdot\vec{\tau}(\vec{r},\, t) = \vec{V}_K(\vec{r},\, t)\cdot\vec{\tau}(\vec{r},\, t), \quad \vec{r}\in K(t), \tag{6}$$

которое означает равенство *касательных* компонент предельного значения поля скоростей на профиле и скорости профиля.

Можно показать, что (6) приводит к интегральному уравнению II рода типа Фредгольма (здесь и далее зависимость от времени t опущена для краткости):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\oint_K\left(\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{\xi})}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^2}\cdot\vec{\tau}(\vec{r})\right)\gamma(\vec{\xi})dl_\xi - \frac{\gamma(\vec{r})}{2} = \\
&\quad = -\left(\sum_{w=1}^{n}\frac{\Gamma_w}{2\pi}\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{r}_w)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_w\right|^2}\cdot\vec{\tau}(\vec{r}) + \frac{1}{2\pi}\oint_K\left(\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{\xi})}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^2}\cdot\vec{\tau}(\vec{r})\right)\gamma^{att}(\vec{\xi})dl_\xi + \right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{2\pi}\oint_K\frac{(\vec{r}-\vec{\xi})\cdot\vec{\tau}(\vec{r})}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^2}q^{att}(\vec{\xi})dl_\xi + \left(\vec{V}_\infty - \vec{V}_K(\vec{r})\right)\cdot\vec{\tau}(\vec{r}) + \frac{\gamma^{att}(\vec{r})}{2}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Ядро данного интегрального уравнения в случае гладкого профиля ограничено.

Уравнение (7), так же как и интегральное уравнение I рода, которое следует из (5), имеет бесконечное множество решений. Для выделения единственного решения их следует решать совместно с уравнением, задающим величину суммарной циркуляции γ скорости вокруг профиля, которая обычно известна из постановки задачи:

$$\oint_K \gamma(\vec{s})dl_s = \gamma. \tag{8}$$

4. Расчетная схема для определения интенсивности вихревого слоя. В расчетах профиль аппроксимируется многоугольником, а решение полагается кусочно-постоянной функцией на его сторонах, которые в вихревых методах называют панелями.

При использовании граничного условия для нормальных компонент скорости (5) для численного решения задачи возникает необходимость применения квадратурных формул, позволяющих выделять главное значение сингулярного интеграла. Это накладывает серьезные ограничения на построение расчетной схемы и в общем случае затрудняет получение решения с высокой точностью.

Для нахождения приближенного решения интегрального уравнения (7) потребуем ортогональности его невязки константе (в пространстве интегрируемых с квадратом функций) на каждой из панелей. В результате задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей свободного вихревого слоя на панелях γ_i:

$$\frac{1}{L_i}\left(\int_{K_i}\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j}{2\pi}\left(\int_{K_j}\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{\xi})}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^2}dl_\xi\right)dl_r\right)\cdot\vec{\tau}_i-\frac{\gamma_i}{2}=$$
$$=-\frac{1}{L_i}\left(\int_{K_i}\sum_{w=1}^{n}\frac{\Gamma_w}{2\pi}\left(\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{r}_w)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_w\right|^2}\right)\cdot\vec{\tau}_i\,dl_r+\int_{K_i}\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j^{att}}{2\pi}\left(\int\limits_{K_j}\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{\xi})}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^2}\cdot\vec{\tau}_i\,dl_\xi\right)dl_r+\right.$$
$$\left.+\int_{K_i}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j^{att}}{2\pi}\left(\int\limits_{K_j}\frac{(\vec{r}-\vec{\xi})\cdot\vec{\tau}_i}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^2}dl_\xi\right)dl_r\right)-(\vec{V}_\infty-\vec{V}_{K,i})\cdot\vec{\tau}_i-\frac{\gamma_i^{att}}{2},\quad i=1,\ldots,N. \quad (9)$$

Интегралы, входящие в левую и правую части уравнения (9), для случая прямолинейных панелей могут быть вычислены аналитически [3]. Результаты расчетов показывают, что матрица системы, соответствующей (9), является хорошо обусловленной в отличие от системы, которая получается из условия (5).

Для того, чтобы сравнить N– и T–схемы, было проведено решение модельных задач по расчету обтекания эллиптического профиля и аэродинамического профиля Жуковского. Задачи решались в прямой и обращенной постановке: профиль двигался со скоростью V в покоящейся среде (прямое движение), поток набегал со скоростью V_∞ на неподвижный профиль (обращенное движение). Расчеты показали, что в случае моделирования обтекания эллиптического профиля N-схема позволяет вычислять интенсивность свободного вихревого слоя на профиле с погрешностью порядка $O(N^{-3})\ldots O(N^{-2})$, при этом результаты отличаются для прямого и обращенного движения. T–схема позволяет получать одинаковые результаты для прямого и обращенного движения с погрешностью $O(N^{-3})$. При моделировании обтекания аэродинамического профиля Жуковского, N–схема не позволяет получать приемлемые результаты, T-схема позволяет вычислять интенсивность свободного вихревого слоя на профиле с погрешностью порядка $O(N^{-3})\ldots O(N^{-2})$, при этом, как и в случае эллиптического профиля, результаты совпадают для прямого и обращенного движения.

5. Заключение. Предложенный подход к поиску интенсивности вихревого слоя из условия ортогональности нулю невязки позволяет существенно повысить точность расчета влияния вихревого следа на профиль и наоборот. Все это дает возможность определить распределение давления на профиле и суммарные гидродинамические нагрузки с высокой точностью, что особенно важно при решении сопряженных задач гидроупругости.

Данный подход позволяет существенно повысить точность решения задачи. При сохранении размерности получаемой системы линейных алгебраических уравнений, которая является заполненной и решается методом LU–разложения, улучшается ее обусловленность, а сложность вычисления ее коэффициентов возрастает незначительно.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов Президента Российской Федерации для молодых ученых — кандидатов наук (проекты МК–5357.2015.8, МК–7431.2016.8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Дынникова Г. Я.* Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Известия российской академии наук. Механика жидкости и газа, 2003. № 5. С. 11–19.

[2] *Андронов П. Р., Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.

[3] *Kuzmina K. S., Marchevsky I. K.* On Numerical Schemes in 2D Vortex Element Method for Flow Simulation Around Moving and Deformable Airfoils // Proceedings of Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics 2014». St.-Peterburg, 2014. P. 335–344.

[4] *Kempka S. N., Glass M. W., Peery J. S., Strickland J. H.* Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations // SANDIA REPORT SAND96-0583 UC-700, 1996.

[5] *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

Kuzmina K. S., Marchevsky I. K., Moreva V. S. *Hydroelastic oscillations simulation of the airfoil in viscous incompressible flow by using vortex element method*. When solving FSI problems (for example, simulation of hydroelastic oscillations of the airfoil in viscous incompressible flow) using vortex methods one of the key problem is satisfaction of boundary condition on the camber line of the airfoil. There are two approaches to boundary condition treatment on the camber line of the airfoil: satisfaction of the equality between normal or tangential components of velocities. In this paper numerical schemes are investigated for both approaches. It is shown that scheme with tangential components allows to obtain results with higher accuracy and for wider class of problems.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МИКРОДЕФЕКТОВ В МЕТАЛЛЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Кукуджанов К. В., Левитин А. Л.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Рассматриваются процессы эволюции дефектов типа плоских микротрещин с линейными размерами порядка 10 мкм, протекающие в материале при обработке металлических образцов кратковременными импульсами электрического тока высокой плотности. Исследование осуществляется численно на основе связанной модели воздействия интенсивным электромагнитным полем на предварительно поврежденный термоупругопластический материал с упорядоченной системой дефектов, которая учитывает плавление и испарение металла, а также зависимость всех его физико-механических свойств от температуры. Показано, что при определенных условиях микротрещины могут полностью залечиваться. Этот процесс происходит путем одновременного уменьшения длины микротрещины, выброса струи расплавленного металла из вершины внутрь трещины и смыкания ее берегов. Уменьшение расстояния между трещинами вплоть до 1–2 их линейных размеров (с учетом изменения их взаимного расположения) качественно не меняет процесс залечивания, однако, приводит к его существенному замедлению.

1. Введение. Микродефекты с линейными размерами порядка 10 мкм являются наиболее распространенным типом дефектов в поликристаллическом металле. Их формируют поверхности соседних монокристаллов (зерен). Подобные дефекты всегда в каком-то количестве образуются между зернами после отливки, а также могут возникать и развиваться в металле в процессах технологической обработки или эксплуатации изготовленных из него изделий. Наиболее опасными из микродефектов с точки зрения последующего макроразрушения изделия являются плоские микротрещины.

Гипотеза о том, что в проводящем материале может происходить залечивание (изменение) дефектов под действием кратковременных импульсов высокоэнергетического электромагнитного поля, высказывалась рядом авторов [1–3]. При этом в данных работах под залечиванием понималось как возникновение сжимающих напряжений в вершинах трещин, так и сближение берегов трещин, сопровождаемое выплавлением кратеров (пор) в их вершинах, что создавало препятствия для дальнейшего развития трещин в материале. В настоящее время гипотезу о залечивании дефектов в материале стало возможным перенести в разряд экспериментально наблюдаемого явления [3, 4]. При этом данные эксперименты свидетельствуют о том, что происходит не просто возникновение сжимающих напряжений с выплавлением кратеров (пор) в вершинах, а изменение самой формы дефекта, вплоть до его полного исчезновения. Однако предлагаемые до настоящего времени математические модели не позволяли объяснить этот экспериментальный факт.

2. Постановка задачи. Для решения поставленной задачи предлагается модель воздействия электромагнитного поля на предварительно повреждённый материал с дефектами [5–7]. Решение получающейся системы уравнений ищется методом конечных элементов.

Рассматривается токопроводящий материал, содержащий одинаковые дефекты типа плоских микротрещин с закругленными вершинами. Считается, что дефекты в материале могут располагаться или упорядоченно или хаотически. В первом случае рассматриваются расположения центров микротрещин в узлах кубической или гексагональной решёток. При этом выделение представительного элемента объёма (ячейки периодичности) не представляет труда. Во втором случае считаем, что дефекты распределены по объёму, так что разброс расстояний между центрами микродефектов невелик. При этом примем за представительный элемент шар (в плоском случае круг) радиусом $r_{\text{ср}}$, равным среднему расстоянию между дефектами в материале.

Материал подвергается воздействию электромагнитного поля определённой интенсивности, посредством приложения к наружным границам образца разности потенциалов, вызывающей на этих границах ток с вектором плотности, перпендикулярным плоскости микротрещин. Рассматриваются электромагнитные поля вызывающие в образце ток плотностью от 10^8 до 10^{10} А/м^2 в течение диапазона времени 10^{-5}–10^{-4} с.

В процессе такого воздействия в материале протекают связанные физические процессы: электромагнитный, механический и тепловой. Характерное время каждого из этих процессов приблизительно обратно пропорционально скорости распространения соответствующих возмущений. Для получения электрического потенциала в проводящем материале используется закон сохранения заряда (в предположении, что ток в образце является установившемся) в вариационной постановке. Для проводника считается справедливым закон Ома. Поле перемещений определяется из уравнений равновесия, записанным в форме принципа виртуальной работы. Перемещения предполагаются конечными. Принимается аддитивность скоростей упругих, пластических и температурных деформаций.

Для получения поля температуры используется закон сохранения энергии. Поскольку время электромагнитного воздействия на материал мало (10^{-5}–10^{-4} с), а градиенты температуры в окрестности вершин трещин очень велики (10^7 °C/м) [2], то теплопроводностью следует пренебречь и считать процесс адиабатическим. В получающемся эволюционном уравнении для температуры учитывается тепло, выделяемое в единице объёма в текущей конфигурации тела за единицу времени за счёт протекания электрического тока в соответствие с законом Джоуля — Ленца, тепло, выделяемое при пластическом деформировании, а также скрытое тепло, поглощаемое в процессе плавления и испарения.

Температура в рассматриваемых процессах изменяется в диапазоне от комнатной до температуры испарения металла [2]. Поэтому в модели все физико-механические характеристики материала (плотность, удельная теплоемкость, электропроводность, коэффициент температурного расширения, упругие модули, предел текучести и т. д.) зависят от температуры. В точках, где материал расплавляется, происходит резкое изменение всех физических свойств материала, а где материал полностью испаряется полагалагаются нулевыми вектор плотности тока и тензор напряжений, а температура равной температуре испарения.

В силу симметрии рассматриваемых представительных элементов, используемые области интегрирования состоят из половин или четвертей представительных элементов и включают от 1 до 6 микротрещин (рисунок 1). Граничные условия

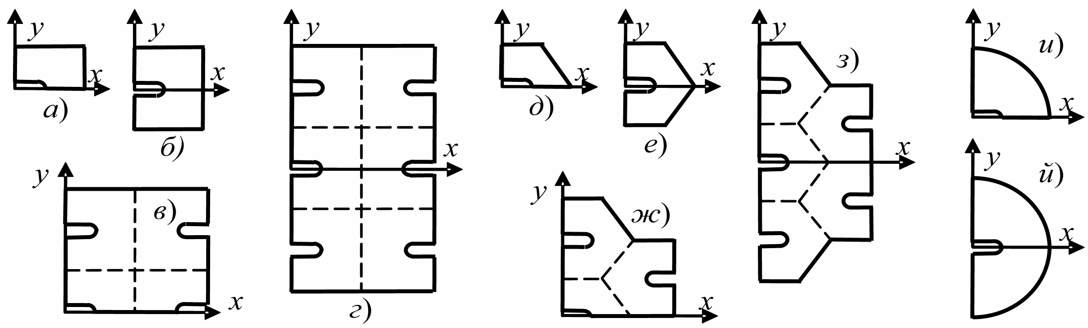


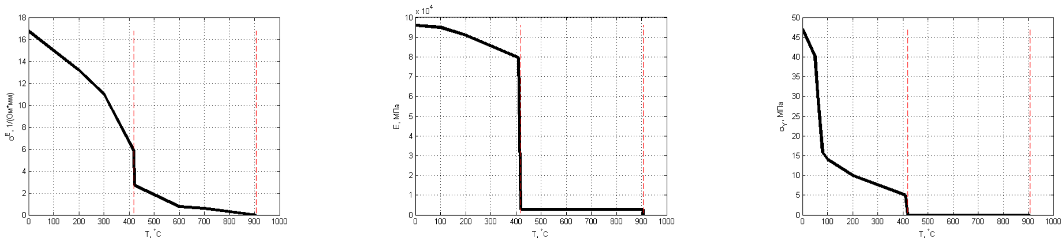
Рисунок 1 – Рассматриваемые области интегрирования для прямоугольных (а–г), гексагональных (д–з) и круговых (и–й) представительных элементов

для потенциала ставятся исходя из предположения, что электрическое поле на границе области интегрирования можно рассматривать, как невозмущенное наличием дефектов (т. е. как если бы дефекты в материале отсутствуют). На границах областей интегрирования, которые не проходят по поверхностям трещин и осям симметрии представительных элементов задаётся или «невозмущенный» потенциал или соответствующая «невозмущенная» плотность тока. Трещина ток не проводит (на ее поверхности условие равенства нулю производной потенциала φ по нормали к границе). Задаваемая на границах разность потенциалов или плотность тока остаётся постоянной в течение всего времени действия электромагнитного импульса τ_0. В качестве механических граничных условий принимаются условия «симметрии» (равенства нулю нормальной к данной границе компоненты вектора перемещений и касательной компоненты тензора напряжений). Поверхность трещины принимается свободной от напряжений. Начальные поля температуры, перемещений и электрического потенциала — нулевые.

Расчеты проводились для плоской деформации с использованием линейных четырехузловых изопараметрических конечных элементов. Перестройка сетки осуществлялась на основе смешанного эйлеро — лагранжева метода.

3. Результаты моделирования. Длина всех микротрещин — 10 мкм, начальное расстояние между берегами — 1 мкм, радиус кривизны — 0.5 мкм. Размеры представительного элемента варьируются в диапазоне 20 мкм – 240 мкм. Свойства материала взяты для цинка и с учётом их зависимости от температуры (рисунок 2).

Расчёты показывают, что под действием импульсов тока происходит сварка трещины и залечивание микродефекта. Залечивание происходит путём одновременного уменьшения длины, выброса расплавленного металла внутрь трещины и смыкания берегов, что приводит к тому, что берега трещины начинают контактировать со струей расплавленного материала, и в конце этих процессов струя оказывается полностью зажатой берегами трещины [5–7].



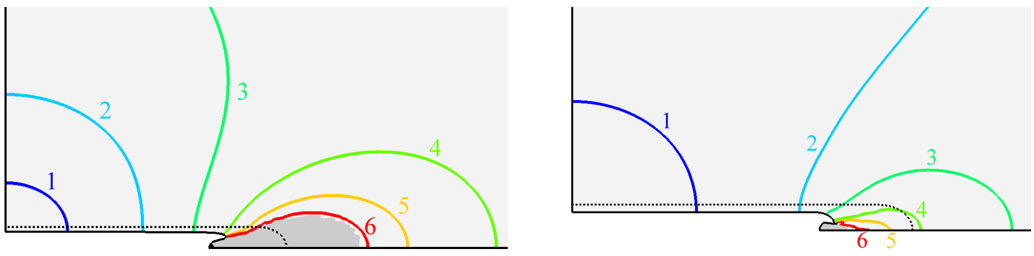
(а) (б) (в)

Рисунок 2 – Зависимость от температуры электропроводности σ^{E} (а), модуля Юнга E (б), предела текучести σ_{Y} (в) (вертикальные пунктирные линии: температура плавления $T_{\text{melt}} = 419°$ C и температура испарения $T_{\text{evap}} = 906°$ C) для монокристала цинка

В процессе моделирования установлено, что при изучении процесса залечивания микротрещин можно без потери точности ограничиться рассмотрением в качестве области интегрирования одного представительного элемента (или одной четверти осесимметричного представительного элемента), задавая на её границах, не являющихся осями симметрии, разность потенциалов, определённую для элемента без дефекта (в состоянии «невозмущенном» наличием микротрещины).

Взаимодействие между микротрещинами начинает заметно сказываться на процессе их залечивания, когда расстояния между ними сокращаются до 5–6 длин микротрещин. Если же расстояние между трещинами превышает шесть и более их длин, то процессы залечивания микротрещин, становятся практически независящими как от расстояния между дефектами, так и от расположения дефектов друг относительно друга.

Уменьшение расстояния между трещинами вплоть до 1–2 их линейных размеров (с учётом изменения их взаимного расположения) качественно не меняет описанный процесс залечивания, однако, приводит к его существенному замедлению: выброс расплавленного материала в трещину сохраняется, но уменьшение трещины особенно в поперечном направлении значительно сокращается (рисунок 3).



(а) (б)

Рисунок 3 – Залечивание микротрещины (штриховой линией показана первоначальная граница трещины) и изолинии температуры °C (1 — 25, 2 — 50, 3 — 100, 4 — 200, 5 — 300, 6 — 400, тёмно-серым цветом показана область плавления ($T \geqslant 419$°C); чёрным (в вершине струи расплава на рис. 3а — область испарения $T = 906$°C)
(а) момент времени $t = 71{,}0$ мкс при расстоянии между микротрещинами 20 мкм,
(б) момент времени $t = 19{,}2$ мкс при расстоянии между микротрещинами 60 мкм.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-08-08693.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Беклемишев Н. Н., Кукуджанов В. Н., Порохов В. А. и др.* Пластичность и прочность металлических материалов с учетом импульсного воздействия высокоэнергетического электромагнитного поля. Препринт № 372. ИПМ АН СССР, М.: 1989. 56 с.

[2] *Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А.* Разрушение вершины трещины силовым электромагнитным полем // Док. АН СССР. 1977. Т. 237. № 2. С. 325–327.

[3] *Song Hui, Wang Zhong-jin, Gao Tie-jun.* Effect of high density electropulsing treatment on formability of TC4 titanium alloy sheet // Trans. Nonferrous Soc. China. 2007. Vol. 17. P. 87–92.

[4] *Atsushi Hosoi, Tomoya Kishi, Yang Ju.* Healing of Fatigue Crack Treated with Surface-Activated Pre-Coating Method by Controlling High-Density Electric Current // Proceding 13th International Conference on Fracture June 16–21, 2013, Beijing, China. P. 233–245.

[5] *Кукуджанов К. В.* Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 4. С. 138–158.

[6] *Kukudzhanov K. V., Levitin A. L.* Modeling the Healing of Microcracks in Metal Stimulated by a Pulsed High-Energy Electromagnetic Field. Part I // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. 2015. Vol. 6. Issue 3. P. 233–250.

[7] *Кукуджанов К. В., Левитин А. Л.* Процессы трансформации и взаимодействия микротрещин в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016. № 2. С. 89–110.

Kukudzhanov K. V., Levitin A. L. *Modelling the transformation and interaction of microdefects in metal stimulated by a pulsed high-energy electromagnetic field*. The processes of transformation and interaction of the flat microcracks with linear sizes about 10 μ m under the processing of metal samples short pulses of high-density current are considered. Investigation on the basis of numerical coupled quasi-stationary model of the impact of high-energy electromagnetic field on the pre-damaged thermal elasticplastic material with defects are carried out. The model accounts for melting and evaporation of the metal and the dependence of its physical and mechanical properties on the temperature. The system of equations is solved numerically by finite elements method with adaptive mesh using on the base of arbitrary Euler—Lagrange's method. The calculations has shown, that welding of the crack and healing of the micro-defects under the treatment of short pulse of current are took place. The healing occurs by simultaneous reduction in the length, the ejection of the molten metal into the cracks and closing of micro-crack shores, that leads to the fact that the shores of the crack come into contact with the jet stream and in the fin of this processes, the jet's material is completely jammed by shores cracks. Decreasing the distance between the cracks up to 1–2 of their linear sizes (taking into account their relative position changes) does not change described process the healing of microcracks qualitatively, however, it results in a considerable slowing down.

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ФРОНТА ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

Куликовский А. Г.[1], **Свешникова Е. И.**[2]
[1]*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва*
[2]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Рассмотрена автомодельная задача об одномерных движениях слабо нелинейной упругой среды, образовавшейся на фронте фазового превращения, в котором поток невзаимодействующих между собой частиц (или идеальной жидкости) превращается в упругую среду. Считается, что упругая среда образуется в результате уплотнения и последующего затвердевания потока, набегающего на плоскую стенку, на которой заданы напряжения. Решение дано для всех возможных параметров набегающего потока и образовавшейся упругой среды и различно в средах с разным типом нелинейности.

Введение. Автомодельная задача с плоскими волнами для слабо нелинейного упругого полупространства, на границе которого внезапно меняются и далее сохраняются постоянными напряжения (и соответствующие им упругие деформации) рассмотрена в [1]. В газовой динамике такая постановка называется «задачей о поршне». Ее решение состоит из последовательности волн, идущих от границы в упругую область с заданными начальными деформациями в порядке уменьшения скоростей с возможными однородными состояниями между ними.

В рассматриваемой ниже задаче в процессе участвует фронт фазового превращения, в котором образуется упругая среда из потока невзаимодействующих между собой частиц, уплотняющегося и объединяющегося в сплошную упругую среду. Упругая среда может образовываться также при затвердевании (замерзании или полимеризации) идеальной жидкости. Образовавшаяся среда накапливается около стенки, которая не движется в направлении своей нормали. Решение задачи состоит из последовательности плоских нелинейных волн. Первым в этой последовательности идет фронт затвердевания, в котором возникают упругие напряжения и деформации. Вслед за ним идут волны, распространяющихся по образовавшейся упругой среде.

Множество возможных состояний за фронтом затвердевания было определено в [2, 3] путем исследования структуры фронта на базе модели вязкоупругой среды Кельвина — Фойхта.

Исходные предположения. Предполагается, что на стенке, которая не движется по нормали, заданы касательные напряжения образовавшейся среды. Нормаль к стенке примем за ось $x = x_3$ декартовой системы координат. Две другие оси x_1 и x_2 лежат в ортогональной плоскости. Образовавшийся плоский фронт затвердевания движется со скоростью W вдоль оси x навстречу потоку. Его скорость определена законом сохранения массы $W = \rho_0 V_x/\rho$, где ρ_0 и V_x —плотность и x —компонента скорости набегающего потока, ρ — плотность образовавшейся среды. Так как указанные параметры набегающего потока могут быть заданы произвольно, то и величина W может принимать любые значения $0 < W < \infty$.

Образовавшаяся при затвердевании сплошная среда считается упругой, несжимаемой, слабонелинейной и слабоанизотропной. Задача определения движения среды одномерная, и все величины зависят от x, t. Вследствие несжимаемости нормальная к фронту составляющая скорости среды $v_x = 0$ и в среде существуют только поперечные волны с изменением компонент деформаций сдвига $u_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x$, $\alpha = 1, 2$, где $\bar{w}(x, t)$ — вектор перемещения. Упругий потенциал для такой среды может быть представлен в виде разложения по компонентам деформаций u_1, u_2, считающимся малыми, с сохранением низших степеней разложения [1]

$$\Phi(u_1, u_2) = \frac{f}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{g}{2}(u_2^2 - u_1^2) - \frac{\varkappa}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2, \qquad \sigma_\alpha = \frac{\partial \Phi}{u_\alpha}$$

где σ_α — касательные напряжения. Здесь $f > 0$ — модуль сдвига, $\varkappa$ — коэффициент нелинейности, который может иметь любой знак. Коэффициент g, характеризующий анизотропию в плоскости фронта, предполагается малым $g \sim u_\alpha^2$. Знак g всегда может быть сделан положительным соответствующим выбором нумерации осей x_1, x_2.

Параметры состояния в упругой среде на стенке — касательные напряжения σ_α^* , или деформации u_α^*, считаются произвольно заданными.

Задача автомодельная, все величины зависят от x/t.

Множество состояний за фронтом затвердевания. Исследование структуры фронта затвердевания [2, 3] показало, что множество состояний за фронтом u_α в фазовом пространстве u_1, u_2, W состоит из областей разной размерности и его вид зависит от соотношения между скоростью фронта W и скоростями двух семейств скоростей малых возмущений — медленных $c_1(u_1, u_2)$ и быстрых $c_2(u_1, u_2)$. Вид этого множества в фазовом пространстве u_1, u_2, W различен для сред с разными типами нелинейности и представлен на рис. 1: a) при $\varkappa > 0$, b) при $\varkappa < 0$.

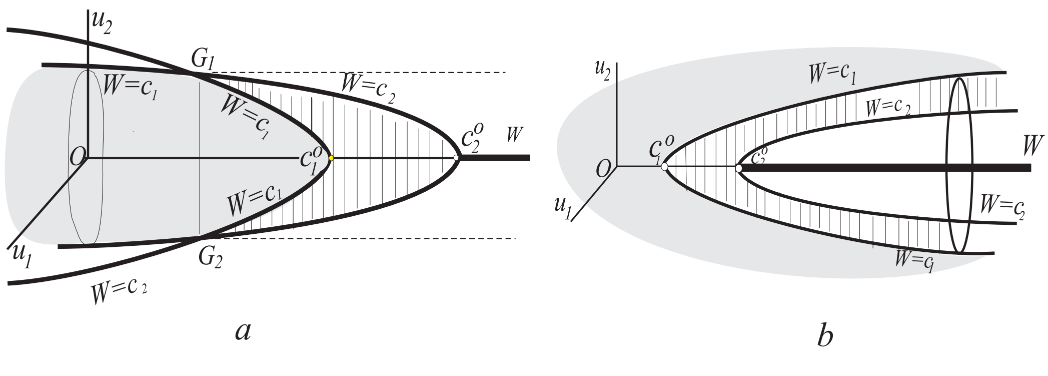


Рисунок 1

Затенением выделены трехмерные области, вертикальной штриховкой — двумерные, лежащие в плоскости u_2, W, и жирной прямой линией по оси W — одномерные множества состояний за фронтами. Если заданное состояние упругой среды у стенки u_α^* принадлежит указанным множествам, то решение «задачи о поршне» состоит из одного фронта затвердевания — медленного $(0 < W \leqslant c_1)$ в трехмерной области, быстрого $(c_1 < W \leqslant c_2)$ в двумерной или сверхбыстрого

($W > c_2^0$) в одномерной области. Точки $c_{1,2}^0 = \sqrt{(f \mp g)/\rho}$ на оси W представляют скорости малых медленных и быстрых возмущений в среде без деформаций ($u_1 = u_2 = 0$).

Вне этих областей решение строится отдельно для каждого диапазона скоростей W и для сред с разными типами нелинейности (разными знаками $\varkappa$).

Среды с $\varkappa > 0$. На рис. 1 (a) показано, что на границе трехмерной области выполняется равенство $W = c_1$ и имеются две точки, обозначенные G_1 и G_2, в которых $c_1 = c_2$. Выражения для $c_1(u_1, u_2), c_2(u_1, u_2)$, полученные в [1, 4], дают координаты этих точек $\{O, \pm\sqrt{g/\varkappa}\}$ на плоскости u_1, u_2 при каждом W. Они не зависят от W. На границе трехмерной области они оказываются при $W = \sqrt{(f - 2g)/\rho}$.

Когда $0 < W < \sqrt{(f - 2g)/\rho}$, за медленными фронтами, движущимися со скоростями $W = c_1$, идут, непосредственно примыкая к ним, медленные волны Римана с соответствующими скоростями $c = c_1$. Их интегральные кривые, начинающиеся от границы трехмерной области, заполняют все пространство вне ее. Вдоль них деформации меняются от значений u_α на фронте до величин u_α^*.

В интервале $\sqrt{(f - 2g)/\rho} < W < c_1^0$ такое же решение занимает не все пространство, а на каждой плоскости u_1, u_2 остается область внутри интегральной кривой, выходящей из точки границы ($W = c_1$) на оси u_2. Для отрезка оси u_2 между линиями $W = c_1$ и $W = c_2$ решение, как сказано выше, состоит из одного быстрого фронта. За ним, после области однородного состояния параметров, идут медленные волны Римана. Но их интегральные кривые тоже не заполняют всей область вплоть до оси u_2, так как нужно решение для участка этой оси выше точки, в которой $W = c_2$, и до точки G_1. Таким решением служит быстрая волна Римана, примыкающая к быстрому фронту со скоростью $W = c_2$ с интегральной линией вдоль оси u_2 до точки G. За этой системой из двух волн идут медленные волны Римана, заполняя интегральными кривыми все недостающее пространство. Картина симметрична относительно плоскости $u_2 = 0$.

При $c_1^0 \leqslant W \leqslant c_2^0$отсутствуют решения с медленными фронтами.

При $W > c_2^0$ (сверхбыстрые фронты) решение в упругой среде без деформаций состоит помимо фронта затвердевания из двух упругих волн Римана. Интегральная линия быстрой волны идет по оси u_2 до точки $u_2 = \sqrt{g/\varkappa}$, где$c_1 = c_2$ (на рис.1(a) штриховые прямые), после чего интегральные кривые медленных волн заполняют все пространство.

Среды с $\varkappa < 0$. При $0 < W \leqslant c_1^0$ решение в виде одного медленного фронта затвердевания существует для все возможных состояний u_α^*.

В диапазоне $c_1^0 < W < c_2^0$ тоже существует трехмерная область с таким же решением, как на предыдущем интервале. Она расположена вне фигуры вращения с осью вдоль W и имеет радиус $r = \sqrt{(W^2 - (c_2^0)^2)/\varkappa}$. Часть плоскости u_2, W внутри этой поверхности вращения представляет состояния за быстрыми фронтами. На каждой плоскости u_1, u_2 при фиксированном W это отрезок оси u_2 внутри окружности радиуса r. Медленные упругие ударные волны, имеющие начальные состояния на этом отрезке, дают решение для всех u_α^* внутри окружности, и следовательно, всей фигуры вращения. А снаружи решение в виде одного медленного фронта уже существует.

В случае $W > c_2^0$ внутри поверхности вращения радиуса r существует область, куда нельзя попасть с помощью описанных выше двух ударных волн. Однако в этом случае решение задачи строится с участием фронта затвердевания, за которым $u_\alpha = 0$. За ним с меньшими скоростями следуют быстрая и медленная упругие ударные волны. Состояния за первой, быстрой ударной волной лежат на отрезке оси u_2 между точками ее пересечения с поверхностью $W = c_2$. За ней следует медленная ударная вола в любое состояние внутри поверхности $W = c_2$. За пределами этой поверхности решение такое же как описано выше для области $c_1 < W < c_2$.

Если точка u_1^*, u_2^* лежит вне поверхности вращения, то решение представляется только медленным фронтом.

Заключение. Исследована задача об образовании упругой среды во фронтах затвердевания. Условия на фронтах затвердевания были сформулированы ранее на основании определенных предположений о процессах, происходящих в структуре фронта. В проведенном исследовании путем построения решения автомодельной задачи было выяснено, что постулированные граничные условия на фронтах затвердевания хорошо согласуются с уравнениями теории упругости, описывающими движение среды за фронтом затвердевания. Такой вывод можно сделать на основании того, что построенное решение при любых параметрах, входящих в постановку задачи, существует и единственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14-01-00049, 15-01-00361)

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.

[2] *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Образование анизотропной упругой среды на фронте уплотнения потока частиц // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 739–755.

[3] *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Фронты образования нелинейной упругой среды из среды без касательных напряжений // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 6. С. 22–26.

[4] *Свешникова Е. И.* Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642–646.

Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. *The self-similar problem of elastic medium motion in the presence of phase-transition front*. The self-similar problem of one-dimensional motion of weakly nonlinear medium which is created on a phase-transition front is considered. It is assumed that the flow of particles contracts and converts into an elastic medium. Elastic medium is supported by a wall at which the stresses are prescribed. The solutions are given for all governing parameters of the problem and for two qualitatively different nonlinearities of the elastic media.

РОЛЬ РАЗМЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕШЕНИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ СРЕДАХ

Леви М. О., Белянкова Т. И., Лыжов В. А.
Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Предлагается метод исследования динамической емкости электромагнитоупругого слоистого полупространства с разными комбинациями материалов в составе структуры. Исследуется влияние соотношения толщин электроупругого и магнитоупругого слоя на динамическую емкость всей структуры. Сама среда геометрически выполнена из электроупругого слоя оксида титаната бария ($BaTiO_3$), магнитоупругого слоя феррита кобальта ($CoFe_2O_4$), и подстилающего их полупространства. В качестве материала полупространства взяты оксид магния MgO и $BaTiO_3$. В роли нагрузки среды выступает невесомый электрод, расположенный на поверхности структуры. Характер распространения волн в среде соответствует условиям распространения волн Рэлея. Граничные условия между слоями предполагают полное сцепление. Аналитически построена функция Грина трехслойной электромагнитоупругой среды. С помощью метода фиктивного поглощения было решено интегральное уравнение, построены графики распределения реальной и мнимой части электрического заряда под невесомым электродом на поверхности структуры. Получены значения общего электрического заряда при изменении соотношения высоты между электроупругим и магнитоупругим слоями.

1. Постановка задачи.

Рассматривается двухмерная задача о колебаниях электромагнитоупругой полосы $|x_1| \leqslant \infty$; $x_3 \leqslant h_2$ представляющей собой два слоя $0 < x_3 \leqslant h_1$,$h_1 < x_3 \leqslant h_2$ (n=1,2) с толщиной $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ соответственно, лежащих на подстилающем полупространстве $x_3 \leqslant 0$ (n=3). Материалы могут иметь класс осевой симметрии 6 mm или 2 mm. Предполагаем, что выполняются условия распространения плоских волн: $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$, $u_2 = 0$, $u_n = u_n(x_1, x_3)$, $n = 1, 3, 4, 5$. Колебания в полупространстве инициируются осциллирующей нагрузкой $q(x_1, t) = q_0(x_1)e^{-i\omega t}$, распределенной в области $|x_1| \leqslant a$. ($q = \{q_1, q_3, q_4, q_5\}$, здесь q_1, q_3 — компоненты вектора механической нагрузки, q_4 — электрическая нагрузка, q_5 — магнитная нагрузка). Вне области $|x_1| \leqslant a$ поверхность свободна от механических напряжений.

Уравнения движения и квазистатические уравнения Максвелла запишем в виде [1]:

$$\nabla \cdot T^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot D^{(n)} = 0. \tag{2}$$

$$\nabla \cdot B^{(n)} = 0. \tag{3}$$

Здесь $u^{(n)} = \left\{u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}, u_5^{(n)}\right\}$ — расширенный вектор среды ($u_1^{(n)}$ и $u_3^{(n)}$ компоненты вектора механических смещений вдоль x_1 и x_3 соответственно, $u_4^{(n)} = \varphi$ — электрический потенциал, $u_5^{(n)} = \psi$ — магнитный потенциал).

Уравнения движения (1), (2) и (3) дополняются материальными уравнениями электромагнитоупругой среды:

$$\begin{bmatrix} T^{(n)} \\ D^{(n)} \\ B^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(n)} & -e^{(n)} & -f^{(n)} \\ e^{T^{(n)}} & \varepsilon^{(n)} & g^{(n)} \\ f^{T^{(n)}} & g^{(n)} & \mu^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S^{(n)} \\ E^{(n)} \\ H^{(n)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

где $T^{(n)}$ и $S^{(n)}$ — компоненты тензоров напряжения и деформации второго порядка в упрощенном виде при использовании обозначений Фойгта, $D^{(n)}$ и $B^{(n)}$ — векторы электрической и магнитной индукции, $E^{(n)}$ и $H^{(n)}$ — векторы напряжения электрического и магнитного полей, $c^{(n)}$, $e^{(n)}$, $f^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $g^{(n)}$ — упругие, пьезоэлектрические, пьезомагнитные, диэлектрические, магнитной проницаемости и магнитоэлектрические коэффициенты соответственно.

Решение краевой задачи для верхних слоев ($x_3 \geqslant 0$) будем искать в виде ($m = 3, 4, 5, p = 1, 2$) [2]:

$$\begin{aligned} &U_1^{(p)}(\alpha, x_3) = -i\alpha \textstyle\sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(p)}[c_k^{(p)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(p)} x_3 + c_{k+4}^{(p)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(p)} x_3]; \\ &U_m^{(p)}(\alpha, x_3) = \textstyle\sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(p)}[c_k^{(p)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(p)} x_3 + c_{k+4}^{(p)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(p)} x_3] \end{aligned} \tag{5}$$

Для полупространства ($x_3 \leqslant 0$) ($m = 3, 4, 5$):

$$U_1^{(3)}(\alpha, x_3) = -i\alpha \sum_{k=1}^4 c_k^{(3)} y_{1k}^{(3)} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3); U_m^{(3)}(\alpha, x_3) = \sum_{k=1}^4 c_k^{(3)} y_{mk}^{(3)} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3); \tag{6}$$

Здесь $\sigma_k^{(n)}$ удовлетворяют характеристическому уравнению [3].

Неизвестные $y_{pk}^{(n)}$ являются решением тривиальной системы уравнений [3].

Неизвестные коэффициенты $c_k^{(n)}$, участвующие в представлениях (5) и (6), удовлетворяют матричному уравнению:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Q} \tag{7}$$

где $\mathbf{C} = \left\{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)} ... c_4^{(3)}\right\}$ — искомые коэффициенты,

$\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3, ...Q_{20}\}$ — компоненты вектора нагрузки.

2. Граничные условия.

Граничные условия на поверхности:

$$x_3 = h^{(1)} - h^{(2)}: \; T_{31}^{(1)} = 0, \; T_{33}^{(1)} = 0, \; D_3^{(1)} = 0, \; B_3^{(1)} = 0.$$

Условия внутри среды предполагают полное сцепление:

$$T_{31}^{(n)} = T_{31}^{(n+1)}, \; T_{33}^{(n)} = T_{33}^{(n+1)}, \; D_3^{(n)} = D_3^{(n+1)}, \; B_3^{(n)} = B_3^{(n+1)}, \; U_p^{(n)} = U_p^{(n+1)}.$$

Здесь $n = 1, 2$; $p = 1, 3, 4, 5$.

3. Решение контактной задачи. Решение краевой задачи представляется в виде:

$$u\left(x_1,x_3\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}k\left(x_1-\xi,x_3,\omega\right)\,q\left(\xi\right)\,d\xi \tag{8}$$

$$k\left(s,x_3,\omega\right)=\int_{\Gamma}K\left(\alpha_1,x_3,\omega\right)e^{-i\alpha_1 s}d\alpha_1 \tag{9}$$

В случае, когда в области $x_1\in[-1,1]$ на поверхности верхнего слоя задано распределение потенциала $\varphi(x_1)=\varphi_0$, в выражении (8) необходимо положить $x_3=h_2$. В этом случае формулы (8) и (9) представляются в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}k_{44}\left(x_1-\xi,h_2,\omega\right)q_4\left(\xi\right)\,d\xi=\varphi_0 \tag{10}$$

$$k_{44}\left(s,h_2,\omega\right)=\int_{\Gamma}K_{44}\left(\alpha_1,h_2,\omega\right)e^{-i\alpha_1 s}d\alpha_1 \tag{11}$$

Равенство (10) представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции q_4.

Функция $K_{44}\left(\alpha_1,h_2,\omega\right)$ имеет следующую асимптотику на бесконечности:

$$K_{44}\left(\alpha_1,x_3,\omega\right)=c\left|\alpha\right|^{-1}\left(1+O\left(\alpha^{-1}\right)\right),\quad \alpha\to\infty.$$

Это позволяет применить к интегральному уравнению (10) метод фиктивного поглощенияи [4, 5] и искать решение в виде:

$$Q\left(\alpha_1\right)=\frac{T\left(\alpha_1\right)}{\Pi\left(\alpha_1\right)}+\sum_{k=1}^{2M}C_k e^{i\alpha_1 z^k};\Pi\left(\alpha_1\right)=\prod_{k=1}^{M}\frac{\alpha_1^2-\gamma_k^2}{\alpha_1^2-\zeta_k^2}; \tag{12}$$

где ζ_k и γ_k $(k=1,2,...,M)$ — комплексные полюсы и нули символа $K_{44}\left(\alpha_1,h_2,\omega\right)$, лежащие в полосе $|Im\alpha_1|\leqslant\varepsilon_0$, z^k — координаты точек, делящих отрезок $[-1,1]$ на $2M$ равных частей, $T(\alpha_1)$ — трансформанта Фурье функции

$$t\left(z\right)=t_0\left(z\right)+\sum_{k=1}^{2M}C_k\,t_k\left(z\right);t_k\left(z\right)=\sum_{p=1}^{N}\beta_k^p\psi_p\left(z\right),\ k=0,1,...,2M \tag{13}$$

$\psi_p\left(z\right)$ — система координатных функций, заданных на отрезке $[-1,1]$, коэффициенты β_k^p удовлетворяют системе $2M+1$ алгебраических уравнений

$$AB_k=F_k,\quad k=0,1,...,2M \tag{14}$$

$$A=\left\|A_{pl}\right\|_{p,l=1}^{N},A_{pl}=\int_{\Gamma}K_0\left(\alpha_1\right)\Psi_p\left(\alpha_1\right)\Phi_l^*\left(\alpha_1\right)d\alpha_1,K_0\left(\alpha_1\right)=\frac{K_{44}\left(\alpha_1\right)}{\Pi\left(\alpha_1\right)}$$

$$F_k=\left\{f_k^l\right\}_{l=1}^{N},f_0^l=\int_{-1}^{1}f_0\left(z\right)\,\varphi_l\left(z\right)\,dz,f_k^l=\int_{\Gamma}K\left(\alpha_1\right)\Phi_l\left(\alpha_1\right)e^{-i\alpha_1 z^k}d\alpha_1$$

$$B_k=\{\beta_k^p\}_{p=1}^{N}$$

$\Psi_p(\alpha_1)$и $\Phi_l(\alpha_1)$ — преобразования Фурье систем координатных функций $\psi_p(z)$ и $\varphi_l(z)$, звездочкой отмечена комплексно сопряженная величина. Коэффициенты C_k в формуле (12) удовлетворяют алгебраической системе

$$\sum_{p=1}^{N} \beta_0^p \Psi_p(\pm\gamma_n) - \sum_{k=1}^{2M} C_k \sum_{p=1}^{N} \beta_k^p \Psi_p(\pm\gamma_n) = 0, \quad n = 0, 1, ..., 2M. \tag{15}$$

Формулы (11) – (14) позволяют получить распределение электрического заряда в зоне контакта при заданном в этой области электрическом потенциале.

4. Численные результаты. В качестве исследуемой среды были выбраны слоистые полупространства $BaTiO_3/CoFe_2O_4/MgO$ и $BaTiO_3/CoFe_2O_4/BaTiO_3$ (далее BCM и BCB соответственно). Материальные константы взяты из работы [6].

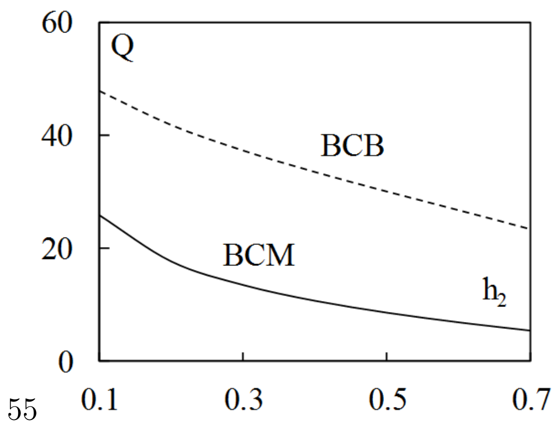


Рисунок 1 – Сравнение динамической емкости при разных толщинах магнитоупругого слоя

Рисунок 1 иллюстрирует сравнение динамических емкостей структур BCB и BCM при различных значениях толщины магнитного слоя. В случае структуры BCB изменение толщины показывает почти линейную зависимость для динамической емкости. Для структуры BCM наоборот уменьшение толщины среднего слоя усиливает влияние верхнего электроупругого слоя. Наличие электроупругого полупространства так же увеличивает общую динамическую емкость, несмотря на присутствие магнитоупругой прослойки между слоями.

Работа выполнена при поддержки Российского Фонда Фундаментальных Исследований, номера проектов: № 16-48-230068, 16-01-00647, 15-08-06074, 14-08-01213.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н.* Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 389 с.

[2] *Калинчук В. В, Белянкова Т. И.* Динамика поверхностных неоднородных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 78 с.

[3] *Леви М. О., Леви Г. Ю., Тимошенко П. Е., Панькин А. В., Татарков Д. А., Богомолов А. С.* О моделировании динамических процессов в тонкопленочных гетероструктурах // Вестник Южного Научного Центра. 2015. Vol. 11. № 4. P. 3–8.

[4] *Babeshko V. A., Belyankova T. I., Kalinchuk V. V.* The method of fictitious absorption in problems of the theory of elasticity for an inhomogeneous half-space // Applied Mathematics and Mechanics. 2002. Vol. 66. № 2. P. 267–274.

[5] *Babeshko V. A., Kalinchuk V. V.* The method of fictitious absorption in coupled mixed problems of the theory of elasticity and mathematical physics for a multilayered inhomogeneous half-space // Applied Mathematics and Mechanics. 2002. Vol. 66. № 2. P. 275–281.

[6] *Giordanoa S., Goueygoua M., Tiercelina N., Talbi A., Pernoda P., Preobrazhenskya V.* Magneto-electro-elastic effective properties of multilayered artificial multiferroics with arbitrary lamination direction // International Journal of Engineering Science. 2014. Vol. 78. P. 134–153.

Levi M. O., Belyankova T. I., Lyzhov V. A. *Dynamic capacity problem of layered electro-magneto-elastic medium.* This paper propose the method of study the dynamic capacitance of electro–magneto–elastic layered half-space with different combinations of materials in the structure. The thickness effect of electroelastic/magnetoelastic layer height ratio on the dynamic capacity of the entire structure is studied. Geometrically medium is made from electroelastic layer of barium titanate oxide ($BaTiO_3$), magneto-elastic layer made from cobalt ferrite oxide ($CoFe_2O_4$), and their underlying half-space. The material of half-space is of barium titanate oxide or magnesium oxide (MgO). Medium oscillation is performed by weightless electrode on the top of the medium. The character of wave propagation in the medium is corresponds to the conditions of propagation of Rayleigh waves. The boundary conditions between layers, layers and half-space assume full grip for mechanical part, electric and magnetic fields. The Green's function is constructed analytically for layered electro–magneto–elastic environment. Fictitious absorption method is used for solving integral equation. Shown graphs of the distribution of the real and imaginary parts of the electric charge under weightless electrode on the top of the structure. Total value of the electric charge when changing the ratio between the height and electroelasticity magnetoelastic layers is obtained.

О ВЛИЯНИИ ДЕФОРМАЦИИ НЕСООТВЕТСТВИЯ НА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Леви М. О., Леви Г. Ю., Татарков Д. А.
Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Изучается модель электроупругой среды $|x_1| \leqslant \infty$, представляющей собой тонкий слой $0 < x_3 \leqslant h_1$, лежащий на подстилающем его полупространстве $x_3 \leqslant 0$. В качестве осциллирующей нагрузки может быть задана механическая или электрическая нагрузка. Вне области воздействия поверхность предполагается полностью свободной от механических напряжений.

Условия на границе слоя и полупространства задают полное механическое сцепление, а так же неразрывность электрической индукции и потенциала. В полупространстве условия соответствуют условиям затухания механических и электрических полей на бесконечности.

Все исследования проводились в безразмерных параметрах. Были получены коэффициенты электромеханической связи для первых мод электроупругой волны. Исследовано поведение волны в пленке титаната бария-стронция при различной деформации несоответствия, получены графики коэффициентов электромеханической связи на поверхности среды. Полученные результаты могу быть использованы при проектировании тонкопленочных устройств основанных на ПАВ.

1. Краевая задача о колебаниях электроупругой среды.
Изучается электроупругая среда, представляющая собой слой $0 < x_3 \leqslant h_1$ $(n = 1)$ и подстилающее его полупространство $x_3 \leqslant 0$ $(n = 2)$. Колебания внутри среды инициируются внешней осциллирующей нагрузкой $q(x_1, t) = q_0\, e^{-i\omega t}$ ($q_0 = \{q_1, q_3, q_4\}$, q_1 и q_3 — компоненты вектора механических напряжений вдоль x_1 и x_3 соответственно, $q_4 = -g$, g — плотность распределения электрического заряда), распределенной в области $|x_1| \leqslant a$. Вне этой области поверхность свободна от механических напряжений.

Краевая задача о колебаниях n-го слоя электроупругой среды описывается уравнениями движения и квазистатическими уравнениями Максвелла [1]:

$$\nabla \cdot T^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot D^{(n)} = 0. \tag{2}$$

Здесь $u^{(n)} = \left\{u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}\right\}$ — расширенный вектор среды ($u_1^{(n)}$ и $u_3^{(n)}$ компоненты вектора механических смещений вдоль x_1 и x_3 соответственно, $u_4^{(n)} = \varphi$ — электрический потенциал).

Уравнения движения (1) и (2) дополняются материальными уравнениями электроупругой среды:

$$\begin{bmatrix} T^{(n)} \\ D^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(n)} & -e^{(n)} \\ e^{T^{(n)}} & \varepsilon^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S^{(n)} \\ E^{(n)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

где $T^{(n)}$ и $S^{(n)}$ — тензоры напряжения и деформации второго порядка, $D^{(n)}$ — вектор электрической индукции, $E^{(n)}$ — вектор напряженности электрического поля ($E_i = -\partial\varphi/\partial x_i = -\partial u_4/\partial x_i$), $c^{(n)}$, $e^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ — тензоры упругих, пьезоэлектрических, и диэлектрических коэффициентов.

Для более лучшего описания результатов перейдем к безразмерным параметрам [2] , используя формулы: $\omega' = \omega h^{(1)}/V_{se}^{(n)}$, ${c'}_{ij}^{(n)} = c_{ij}^{(n)}/c_{44}^{(2)}$, ${e'}_{ij}^{(n)} = {e_{ij}}^{(n)}k_e/c_{44}^{(2)}$, ${\varepsilon'}_{ij}^{(n)} = {\varepsilon_{ij}}^{(n)}k_\varepsilon/c_{44}^{(2)}$. Здесь $V_{se}^{(n)}$ — скорость сдвиговой волны в n-ом слое электроупругой среды, k_e — специальные обезразмеривающие константы. Линейные параметры отнесены к суммарной высоте двух верхних слоев, плотности — к плотности полупространства.

Колебания в среде предполагаются установившимися и происходящими по гармоническому закону. Все функции представляются в виде $F = F_0 \exp(-i\omega' t')$. Далее, для удобства описания, будут опущены временной множитель и штрихи у безразмерных величин.

Применяя преобразование Фурье по координате x_1, получим

$$c_{11}^{(n)}\left(-\alpha^2 U_1^{(n)}\right) + c_{55}^{(n)}\frac{\partial^2 U_1^{(n)}}{\partial x_3^2} + \left(c_{13}^{(n)} + c_{55}^{(n)}\right)\left(-i\alpha\frac{\partial U_3^{(n)}}{\partial x_3}\right) + \\ + \left(e_{31}^{(n)} + e_{15}^{(n)}\right)\left(-i\alpha\frac{\partial U_4^{(n)}}{\partial x_3}\right) = \rho^{(n)}\frac{\partial^2 U_1^{(n)}}{\partial t^2}; \tag{4}$$

$$c_{55}^{(n)}\left(-\alpha^2 U_3^{(n)}\right) + c_{33}^{(n)}\frac{\partial^2 U_3^{(n)}}{\partial x_3^2} + \left(c_{13}^{(n)} + c_{55}^{(n)}\right)\left(-i\alpha\frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial x_3}\right) + \\ + e_{15}^{(n)}\left(-\alpha^2 U_4^{(n)}\right) + e_{33}^{(n)}\frac{\partial^2 U_4^{(n)}}{\partial x_3^2} = \rho^{(n)}\frac{\partial^2 U_3^{(n)}}{\partial t^2}; \tag{5}$$

$$\left(e_{15}^{(n)} + e_{31}^{(n)}\right)\left(-i\alpha\frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial x_3}\right) + e_{15}^{(n)}\left(-\alpha^2 U_3^{(n)}\right) + \\ + e_{33}^{(n)}\frac{\partial^2 U_3^{(n)}}{\partial x_3^2} - \varepsilon_{11}^{(n)}\left(-\alpha^2 U_4^{(n)}\right) - \varepsilon_{33}^{(n)}\frac{\partial^2 U_4^{(n)}}{\partial x_3^2} = 0; \tag{6}$$

2. Граничные условия. Граничные условия в среде в трансформантах Фурье будут иметь вид [3]:

$$\begin{aligned} x_3 = h^{(1)}: \quad & T_{31}^{(1)} = c_{5,5}^{(1)}(U_{3,1}^{(1)} + U_{1,3}^{(1)}) + e_{15}^{(1)}U_{4,1}^{(1)} + f_{15}^{(1)}U_{5,1}^{(1)} = q_1(x_1, x_3); \\ & T_{33}^{(1)} = c_{13}^{(1)}U_{1,1}^{(1)} + c_{33}^{(1)}U_{3,3}^{(1)} + e_{33}^{(1)}U_{4,3}^{(1)} + f_{33}^{(1)}U_{5,3}^{(1)} = q_3(x_1, x_3); \end{aligned} \tag{7}$$

Электро-открытый случай:

$$D_3^{(1)} = e_{31}^{(1)}U_{1,1}^{(1)} + e_{33}^{(1)}U_{3,3}^{(1)} - \varepsilon_{33}^{(1)}U_{4,1}^{(1)} - g_{33}^{(1)}U_{5,3}^{(1)} = q_4(x_1, x_3); \tag{8}$$

Электро-закрытый случай:

$$U_4^{(1)} = 0; \tag{9}$$

$$\begin{aligned} x_3 = 0: \quad & T_{31}^{(2)} = T_{31}^{(1)}; T_{31}^{(2)} = T_{31}^{(1)}; U_3^{(2)} = U_3^{(1)}; \\ & U_1^{(2)} = U_1^{(1)}; D_3^{(2)} = D_3^{(1)}; U_4^{(2)} = U_4^{(1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

3. Решение краевой задачи.

Решение уравнений движения (4), (5) и (6) для слоя будем искать в виде [5]:

$$\begin{aligned} & U_1^{(1)}(\alpha, x_3) = -i\alpha \textstyle\sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(1)}[c_k^{(1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} x_3 + c_{k+4}^{(1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} x_3], \\ & U_m^{(1)}(\alpha, x_3) = \textstyle\sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(1)}[c_k^{(1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} x_3 + c_{k+4}^{(1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} x_3]. \end{aligned} \tag{11}$$

Для полупространства:

$$\begin{aligned} & U_1^{(2)}(\alpha, x_3) = -i\alpha \textstyle\sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(2)} c_k^{(2)} \exp(\sigma_k^{(2)} x_3) \\ & U_m^{(2)}(\alpha, x_3) = \textstyle\sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(2)} c_k^{(2)} \exp(\sigma_k^{(2)} x_3) \end{aligned} \tag{12}$$

В выражениях (11) и (12) $m = 3, 4$.

Неизвестные $y_{pk}^{(n)}$ находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} B_{11} y_{1k} + B_{12} y_{3k} + B_{13} y_{4k} = 0, \\ B_{21} y_{1k} + B_{22} y_{3k} + B_{23} y_{4k} = 0, \\ B_{31} y_{1k} + B_{32} y_{3k} + B_{33} y_{4k} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь B_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — компоненты характеристической матрицы $\mathbf{B}$,

$$B_{11} = -\alpha^2 c_{11}^{(n)} + c_{55}^{(n)} \sigma_k{}^{(n)(2)} + \rho^{(n)} \omega^2, \; B_{12} = \left(c_{13}^{(n)} + c_{55}^{(n)}\right)\left(-\alpha^2 \sigma_k^{(n)}\right), \; B_{21} = -\alpha^2 B_{12},$$

$$B_{13} = \left(e_{31}^{(n)} + e_{15}^{(n)}\right) \sigma_k^{(n)}, \quad B_{31} = -\alpha^2 B_{13}, \quad B_{22} = -\alpha^2 c_{55} + c_{33} \sigma_k{}^{(n)(2)} + \rho^{(n)} \omega^2,$$

$$B_{23} = B_{32} = -\alpha^2 e_{15}^{(n)} + e_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)^2}, \quad B_{33} = \alpha^2 \varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{33}^{(n)} \sigma_k{}^{(n)(2)}, \tag{14}$$

где $\sigma_k^{(n)}$ удовлетворяют уравнению $\det \mathbf{B} = 0$.

Подставляя представления решения (11) и (12) в граничные условия (7)–(10), получим [4] дисперсионную матрицу $\mathbf{A}$. Приравнивая ее определитель к нулю, мы найдем полюса функции Грина и фазовые скорости. Коэффициент электромеханической связи рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{K} = (V_f^{(o)^2} - V_f^{(c)^2}) / V_f^{(o)^2}, \tag{15}$$

где $V_f^{(o)}$ и $V_f^{(c)}$ — скорости моды для электро-открытого и электро-закрытого случаев соответственно.

4. Численные результаты. В качестве исследуемого материала слоя рассматривается титанат бария–стронция (80% бария и 20% стронция) [6, 7]. Материал полупространства предполагается выполненным из диэлектрика — оксида магния. Разница в жесткости материалов слоя и полупространства создает сильную дисперсию в среде. Различные температурные режимы и способы влияют на характер распределения атомов электроупругого слоя, на границе с твердым полупространством. Благодаря этому создаются начальные напряжения в тонкопленочных структурах, зависящие от величины деформации несоответствия (misfit strain, далее mfs). Эти значения соответствуют в C-фазе кристалла. При этом значение mfs = 0 является граничным значением для C-фазы.

Рисунок 1 показывает общий вид фазовых скоростей для электро-открытого случая. Из графика видно, что первая мода выделяется сильнее остальных, и при увеличении частоты ложится на асимптотику гораздо ниже остальных мод. Рисунки 2, 3, 4 показывают влияние деформации несоответствия на коэффициент электромеханической связи для первых четырех мод. Из рисунка 2 видно, что наибольшее влияние на коэффициент наблюдается в частотной области выхода второй моды. Рисунок 3 показывает, что при mfs = −2 коэффициент электромеханической связи достигает максимального значения по сравнению с mfs = −4 для всех мод. Однако, как видно из рисунка 4, при mfs = 0 коэффициент имеет заметный рост только для первой моды, в то время как для остальных он изменяется незначительно.

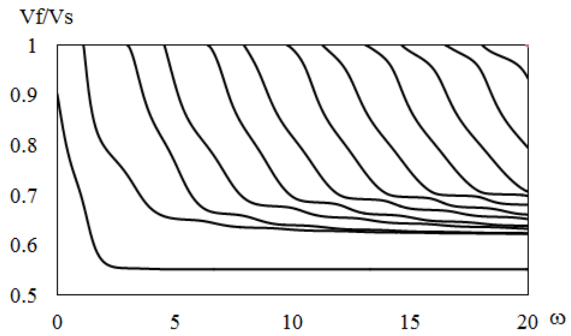


Рисунок 1 – Общий вид фазовых скоростей (mfs = −4)

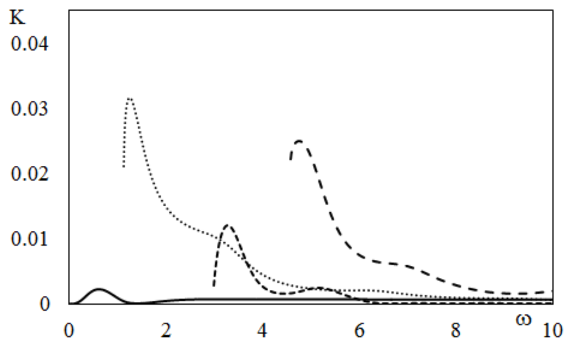


Рисунок 2 – Коэффициенты электромеханической связи для mfs = −4

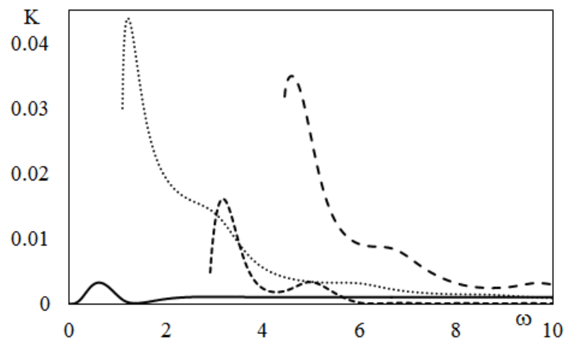


Рисунок 3 – Коэффициенты электромеханической связи для mfs = −2

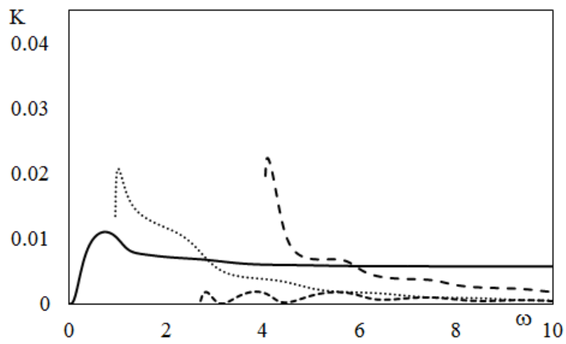


Рисунок 4 – Коэффициенты электромеханической связи для mfs = 0

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 16-48-230068, 16-01-00647, 15-08-06074, 14-08-01213.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах // Пер. с польского В. А. Шачнева. М.: Мир, 1986. 126 с.

[2] *Белянкова Т. И., Лыжов В. А.* Некоторые особенности динамики слабонеоднородных пьезоактивных структур // Вестник Южного научного центра. 2010. 6(2): 3–10.

[3] *Белянкова Т. И., Калинчук В. В., Лыжов В. А.* Связанная смешанная задача для системы электродов на поверхности преднапряженного электроупругого структурно неоднородного полупространства // Прикладная математика и механика. 2010. 74(6). P. 897–910.

[4] *Леви М. О., Анджикович И. Е., Ворович Е. И., Михайлова И. Б.* Влияние граничных условий на динамику электромагнитоупругой полуограниченной среды // Вестник Южного Научного Центра. 2012. 8(4): 14–21.

[5] *Калинчук В. В, Белянкова Т. И.* Динамика поверхностных неоднородных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 312 с.

[6] *Широков В. Б., Юзюк Ю. И., Калинчук В. В., Леманов В. В.* Материальные константы твердых растворов (Ba,Sr)TiO3 // ФТТ. 2013.55(4): 709–714.

[7] *Houzet G., Blary K., Lepilliet S, Lippens D., Burgnies L., Velu G., Carru J.-C., Nguema E; Mounaix P.* Dielectric dispersion of BaSrTiO3 thin film from centimeter to submillimeter wavelengths // Journal of Applied Physics. 2011. 109. P: 014116.

Levi M. O., Levi G. Y., Tatarkov D. A. *The influence of misfit strain on electromechanical characteristics in electro-elastic medium.* The problem of misfit strain influence on electromechanical characteristics in electro-elastic medium is considered. All studies were performed in dimensionless parameters. As material of thin film we take the barium-strontium titanate (80% of barium and 20% strontium). Thin film is layed on rigid halfspace made of dielectric – magnesium oxide. The difference in hardness thin film material and halfspace creates a strong dispersion.Electromechanical coupling coefficients for the first modes of electroelastic waves were obtained. The behavior of barium titanate-strontium thin film at different misfit strain is studied. Obtainded the graphs of electromechanical coupling coefficients on the surface of the medium. The results can be used in the design of thin film based devices surfactant.

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ОБРАЗЦА ТРАПЕЦЕВИДНОЙ ФОРМЫ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ С УЧЕТОМ ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Локшина Л. Я., Костандов Ю. А.
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь

Получены уравнения для вычисления предельного напряжения в трапецевидных образцах из хрупких материалов при одноосном сжатии с учетом контактного трения на поверхности приложения нагрузки и внутреннего трения материала образцов. Установлена связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона касательных к траекториям максимальных эффективных касательных напряжений, получены формулы для определения углов их поворота за счет действия контактного касательного напряжения.

Предел прочности горных пород и строительных материалов при одноосном сжатии является одним из основных параметров оценки напряжённо-деформированного состояния горных массивов и строительных конструкций и их разрушения. Поэтому актуальной является разработка метода его аналитического расчёта. Авторами ранее были проведены исследования предельного состояния образцов из хрупких материалов прямоугольной формы [1, 2]. Однако в реальных условиях выемки полезного ископаемого выработки, забои и откосы, а также строительные конструкции имеют не только прямоугольную форму, но и усеченно-конусную форму. Учитывая это, представляет интерес исследование предела прочности образцов трапецевидной формы из хрупкого материала.

В данной работе рассматривается напряженно-деформированное состояние образца трапецевидной формы из хрупкого материала при одноосном сжатии между плитами пресса с учетом внутреннего трения материала и контактного трения на поверхности приложения нагрузки в предположении, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [3]. Материал образца представляет собой однородную изотропную среду, деформирующуюся по упругому закону, характеризующуюся упругими константами и коэффициентом внутреннего трения, в данном случае отличном от нуля. Под понятием эффективного касательного напряжения τ_{ef} понимается активное касательное напряжение τ_α за вычетом фрикционной составляющей. Для описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона

$$\tau_{ef} = \tau_\alpha - \mu\sigma_\alpha \leqslant k \tag{1}$$

где $\mu = \operatorname{tg}\rho$ — коэффициент внутреннего трения материала, ρ — угол внутреннего трения материала, σ_α — нормальное напряжение на ТМЭКН, k — предельная сопротивляемость материала сдвигу. Критерий (1) означает, что при $\tau_{ef} = k$ происходит разрушение, а при $\tau_{ef} < k$ материал находится в упругом состоянии.

Рассмотрим образец из хрупкого материала трапецевидной формы с верхним основанием трапеции l, высотой h, равными между собой боковыми гранями при одноосном сжатии вдоль оси OY с учетом действия контактного трения на поверхности приложения нагрузки и внутреннего трения материала образца. Поскольку нагружение и деформирование образца симметрично относительно его продольной оси, то будем рассматривать только левую половину образца. Проведем ТМЭКН ab в виде произвольной кривой и касательные к ней в точках a и b и ТМЭКН cd в виде произвольной кривой и касательные к ней в точках c и d, как показано на рис.1.

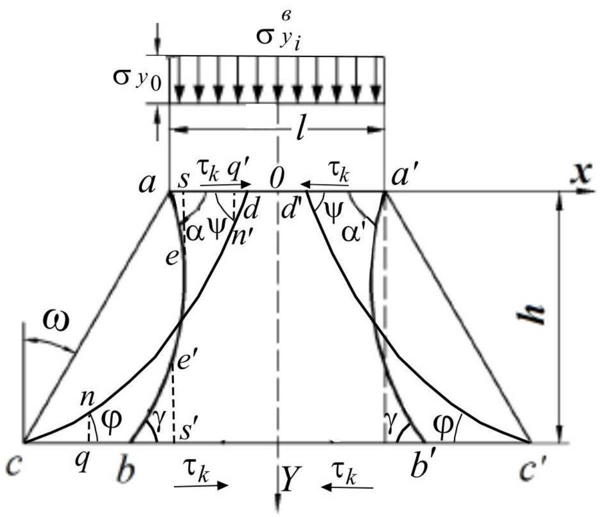


Рисунок 1

Расположим начало системы координат посредине верхней контактной поверхности образца. Ось OY совпадает с вертикальной осью симметрии образца. Примем следующее распределение нормальных напряжений $\sigma^v_{y_i}$ на верхней контактной поверхности:

$$\sigma^v_{y_i} = \sigma_{y_0} \tag{2}$$

где σ_{y_0} — нормальное напряжение на верхней контактной поверхности.

Распределение касательных напряжений τ^v_k на верхней контактной поверхности:

$$\tau^v_k = f\sigma_{y_0} \tag{3}$$

где f — коэффициент контактного трения.

Распределение нормальных напряжений $\sigma^H_{y_i}$ на нижней поверхности образца при $y = h$, с учётом увеличения ширины образца, имеет вид:

$$\sigma^H_{y_i} = \sigma_{y_0}\left(1 - \frac{L_H}{1 + L_H}\right), \tag{4}$$

где $L_H = 2\frac{h}{l}ctg\omega$, ω — угол между нормалью и боковой гранью образца, определяющий различие размеров верхней и нижней контактных поверхностей.

Распределение касательных напряжений τ_k^H на нижней контактной поверхности:

$$\tau_k^H = f\sigma_{y_i}^H \tag{5}$$

Найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона α и γ к оси OX касательных к ТМЭКН ab в точках a и b.

Силы, приложенные к верхнему треугольнику aes и нижнему треугольнику $be's'$ спроецируем на площадку на ТМЭКН, и нормаль к ней. В результате суммирования проекций сил и ряда математических действий с учетом закона Кулона получим важные дифференциальные уравнения для верхнего треугольника, образованного касательной к ТМЭКН ab в точке a и нормалью aes, и нижнего треугольника $be's'$ соответственно: $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha)$ и $\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)$.

Каждое из этих уравнений является уравнением состояния материала на ТМЭКН. Их решение сводится к интегрированию на ТМКЭН между точками a и b. В результате интегрирования получим: $\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha)|_a^b = -2\mu\alpha|_a^b$.

Из практических наблюдений известно, что в ряде случаев разрушение образца начинается из угла. Поэтому для этих случаев можно полагать, что условие разрушения материала $\tau_{ef} = k$ выполняется в точке a и достигается в треугольнике aes раньше, чем в треугольнике $be's'$. Следовательно,

$$\frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = \exp 2\mu\,(\alpha - \gamma)\,. \tag{6}$$

Для решения уравнения (6) необходимо найти углы α и γ наклона касательных к ТМЭКН в точках a и b соответственно. В результате ряда математических действий получим: $\alpha = \pi/4 + \rho/2 - \beta, \gamma = \pi/4 + \rho/2 - \theta$, где $\beta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\tau_{k_a}}{(\sigma_{x_a} + \sigma_{y_a})}$, $\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\tau_{k_b}}{\left(\sigma_{x_b} - \sigma_{y_b}\right)}$.

Индексы a и b указывают, что значения определены в соответствующих точках ТМЭКН. Из сравнения выражений для углов β и θ, с учетом того, что $\sigma_x < \sigma_y$, следует, что $\beta > \theta$. Тогда из сравнения выражений для углов α и γ получаем, что $\alpha < \gamma$. Следовательно, ТМЭКН ab является выпуклой кривой.

По методике опубликованной в [2], с учетом того, что в точке a $\sigma_{x_a} = 0$, находим σ_α, σ_γ, σ_{y_a}, σ_{x_b}, σ_{y_b} и получаем уравнение для определения τ_{ef}:

$$b^2\left[I^2 + (\tau_{k_b}\sin\rho)^2\right] - 2\tau_{k_b} bI + \tau_{k_b}^2\cos^2\rho = 0, \tag{7}$$

где $b = \frac{\tau_{k_b}}{\tau_{ef} + \mu\sigma_{y_b}}$, $\quad \sigma_{y_a} = 2k\mu + \frac{2}{\cos\rho}\sqrt{k^2 - \tau_{k_a}^2}$,

$I = (k + \sin\rho\sqrt{k^2 - \tau_{k_a}^2})\exp 2\mu\,(\theta - \beta)$,

$\beta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\tau_{k_a}\cos\rho}{k\sin\rho + \sqrt{k^2 - \tau_{k_a}^2}}$, $\quad \theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b\cos\rho}{\sin\rho - \sqrt{1 - b^2}}$,

τ_{k_a} и τ_{k_b} определяется граничными условиями (3) и (5) соответственно.

Для выполнения условия $\sigma_{x_b} < \sigma_{y_b}$ на параметр b накладывается ограничение $b^2 < \cos^2\rho$. Уравнение (7) решается численным методом. При этом значения ρ, μ и k определяются из таблиц свойств материалов. Вычисление τ_{ef}, β, θ позволяет полностью определить вид ТМКЭН ab и углы наклона касательных к ней в точках a и b.

Найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона φ и ψ к оси OX касательных к ТМЭКН cd. Силы, приложенные к нижнему треугольнику cnq и верхнему треугольнику $dn'q'$, спроецируем на площадку на ТМЭКН и нормаль к ней. В результате суммирования проекций сил и ряда математических действий с учетом закона Кулона и по аналогии с треугольниками образованными касательными к ТМЭКН ab получим важное дифференциальное уравнение, которое после интегрирования от точки d к точкеc имеет вид: $\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\psi)|_d^c = -2\mu\psi|_d^c$. Как и ранее полагаем, что условие разрушения материала $\tau_{ef} = k$ выполняется в точке c и достигается в треугольнике cnq раньше, чем в треугольнике $dn'q'$. Следовательно:

$$\frac{(k + \mu\sigma_\varphi)}{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\psi)} = \exp 2\mu\,(\zeta - \phi) \tag{8}$$

Для решения уравнения (8) необходимо найти углы φ и ψ наклона касательных к ТМЭКН в точках c и d соответственно. В результате математических действий получим: $\psi = \pi/4 + \rho/2 - \zeta, \varphi = \pi/4 + \rho/2 - \phi$, где $\zeta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{k_d}}{\left(\sigma_{x_d} + \sigma_{y_d}\right)}$,
$\phi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{k_c}}{(\sigma_{x_c} - \sigma_{y_c})}$.

Индексы c и d указывают, что значения определены в соответствующих точках ТМЭКН. Из сравнения выражений для ζ и ϕ, следует, что $\zeta < \phi$. Тогда из сравнения выражений для ψ и φ получаем, что $\psi > \varphi$. Следовательно, ТМЭКН cd в данном случае является выпуклой кривой. Для выполнения условия $\sigma_{x_d} < \sigma_{y_d}$ на параметр b накладывается ограничение $b^2 > \cos^2\rho$.

По методике опубликованной в [2], с учетом того, что в точке c $\sigma_{x_c} = 0$ и $\sigma_{y_c} = \sigma_{y_0}\left(1 - \frac{L_H}{1+L_H}\right)$, что следует из (4), находим σ_φ, σ_ψ, σ_{x_d},σ_{y_d} и получаем уравнение для определения τ_{ef}:

$$b^2\left[I^2 + (\tau_k \sin\rho)^2\right] - 2\tau_k bI + \tau_k^2\cos^2\rho = 0, \tag{9}$$

где $\frac{\tau_{k_d}}{\tau_{ef} + \mu\sigma_{y_d}} = b$, $\sigma_{y_c} = \sigma_{y_0}\left(1 - \frac{1}{1+L_H}\right)$,
$I = (k + \sin\rho\sqrt{k^2 - \tau_k^2})\exp 2\mu\,(\phi - \zeta)$,
$\phi = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{k_c}}{\sigma_{y_c}}$, $\zeta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b\cos\rho}{\sqrt{1-b^2} - \sin\rho}$,
τ_{k_c} и τ_{k_d} определяются из граничных условий (3) и (5) соответственно.

Уравнение (9), как и уравнение (7), решается численным методом. Вычисление τ_{ef}, ϕ, ζ позволяет полностью определить вид ТМКЭН cd и углы наклона касательных к ней в точках c и d.

В точке c $\sigma_{x_c} = 0$ и тогда получаем, что $\operatorname{tg}(2\phi) = -(2\tau_{k_c}/\sigma_{y_c})$. Откуда следует, что $2\phi > (\pi/2)$. И, следовательно, $\phi > (\pi/4)$. Пусть $\phi = \frac{\pi}{4} + \delta$, где δ некоторый острый угол, тогда $\varphi = \pi/4 + \rho/2 - \pi/4 - \delta = \rho/2 - \delta$. При этом $\alpha = \pi/4 + \rho/2 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2f\sigma_{y_0}}{\sigma_{y_a}}$. Из сравнения этих выражений очевидно, что $\alpha > \varphi$. Это означает, что ТМЭКН cd проходит ближе к нижнему основанию, чем ТМЭКН ab к верхнему. Следовательно ТМЭКН ab откалывает больший фрагмент образца, чем ТМЭКН cd и точка пересечения траекторий находится ниже средней линии трапеции.

В результате проведенных экспериментов по разрушению трапецевидных образцов с размерами $l = 49$ мм, $h = 44$ мм и $\omega = 30°$ установлено, что разрушение образца начинается из точки a. Откалывающиеся фрагменты образца имеют форму, близкую к треугольной, и трапецевидный образец в результате приобретает практически прямоугольную форму (Рис.2).

Рисунок 2

Таким образом, решение уравнений (7) и (9) позволяет получить предельные разрушающие напряжения на траекториях, сделать выводы о форме и размерах откалывающихся фрагментов образца и изменении его прочности в связи с изменением формы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Локшина Л. Я.* Расчет предела прочности хрупких материалов с учетом внутреннего трения // Геотехническая механика. Межвед. сб. научн. трудов. Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2009. №82. С. 199–206.

[2] *Костандов Ю. А., Локшина Л. Я.* Влияние внешнего и внутреннего трения на параметры предельного состояния образца горной породы при сжатии // Физико-технические проблемы горного производства. Сб. науч. трудов. 2011. №13. С. 42–47.

[3] *Васильев Л. М., Васильев Д. Л.* Метод расчёта предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями // Геотехническая механика. Межвед. сб. науч. трудов. Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2003. №42. С. 73–80.

Lokshina L. Ya., Kostandov Yu. A. *The limiting state of the specimen of trapezoidal form at uniaxial compression taking into account an external and internal friction.* The equations for calculating limiting stress in trapezoidal specimens of brittle materials under uniaxial compression, taking into account the friction on the surface of load application and internal friction of the material specimen are received. The correlation between normal and tangential stresses through the inclination angles of tangents to the trajectories of maximum effective tangential stresses was set. The formulas for determining the angles of their rotation of due to the action of the contact tangential stress are received.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Лычев С. А.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

В работе развиваются геометрические методы моделирования конечных несовместных деформаций твердых тел. Несовместность деформаций может быть вызвана различными физическими явлениями, например, распределенными дислокациями и дисклинациями, точечными дефектами, неоднородными температурными полями, усадкой, ростом, и т. п. Следствиями несовместных деформаций являются остаточные напряжения и искажение геометрической формы тела. Эти факторы определяют критические параметры современных высокоточных технологий, в частности, в технологиях аддитивного изготовления. В этой связи развитие методов их количественного описания является актуальной проблемой современной механики деформируемого твердого тела. Геометрические методы основаны на представлении тела и физического пространства гладкими многообразиями: материальным и физическим. На этих многообразиях задаются специальные метрики и связности, в общем случае, неевклидовы, наделяющие их свойствами неевклидовых пространств.

1. Геометрические методы математического моделирования континуума основаны на теоретических положениях современной геометрии и теории гладких многообразий [1]. Плодотворность геометрического подхода для описания тел с дефектами (дислокациями, дисклинациями и т. д.) убедительно продемонстрирована в ряде классических работ [2–4]. Геометрические методы успешно применяются для решения нелинейных задач теории растущих тел [5–12]. Рост интереса к этим методам продиктован, в частности, следующими соображениями. В настоящее время интенсивно развиваются аддитивные технологии, основанные на изготовлении деталей путем последовательного нанесения материала на подложку, которая может иметь весьма сложную геометрическую форму. Несмотря на привлекательность идеи послойного изготовления детали, при её реализации неизбежно возникают искажения финальной формы, вызванные усадкой при отверждении материала. Один из способов уменьшения искажений — их компенсация начальными искажениями, учитываемыми в проекте. Образно говоря, для изготовления требуемого тела следует передать в технологическую машину цифровую модель тела более сложной формы, такой, что ее отличия от требуемой нивелировались бы искажениями, возникающими при солидификации в ходе процесса.

Для теоретического определения компенсирующих искажений следует использовать модели тел, для которых отсутствует натуральная конфигурация в классическом смысле. Эффекты, возникающие из-за отсутствия натуральной конфигурации, могут быть математически формализованы различными понятиями, такими, как несовместность деформаций, плотность полей дефектов, источники внутренних напряжений [3, 13]. Такие понятия взаимосвязаны и могут быть описаны в рамках единого представления о деформации, как о геометрическом преобразовании объектов в пространствах с неевклидовой структурой.

Связность материального пространства отражает внутренние свойства (собственную геометрию) тела и определяется полем локальных единообразных конфигураций, осуществляющих его «сборку» из идентичных единообразных блоков. Единообразность понимается в том смысле, что функционал отклика дает для них один и тот же дескриптор отклика на всевозможных гладких деформациях. В результате сборки получается тело, которое не может быть погружено без деформации в физическое пространство, что является характерной чертой самонапряженных тел, получаемых в аддитивных процессах. По этой причине для его формализации удобно использовать погружение в неевклидово пространство (материальное многообразие с неевклидовой связностью).

Поясним этот вопрос подробнее. Предположим, что на материальном многообразии $\mathfrak{M}^n$ задано гладкое поле невырожденных $n \times n$ матриц, определяемое отображениями $\Omega^i{}_j \in \mathscr{C}^r(\mathfrak{M}^n;\, \mathbb{R})$. Значения этого поля характеризуют линейные трансформации элементарных объемов в единообразное состояние. Поле $\boldsymbol{\Omega}$ определяет неголономное поле реперов

$$\mathfrak{M}^n \ni p \mapsto (\boldsymbol{z}_i|_p)_{i=1}^n, \quad \boldsymbol{z}_i = \Omega^j{}_i \partial_j,$$

которые представляют результаты действий $\boldsymbol{\Omega}$ на стандартный репер, соответствующий единообразному состоянию простого материала (его архетипу [1]). Преобразование к единому архетипу математически определяет абсолютный параллелизм, поэтому будем искать такую связность ∇, чтобы для векторов этого репера

$$\nabla_{\boldsymbol{z}_i} \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}, \quad i,\, j = 1,\, \ldots,\, n,$$

т. е. $\Gamma'^i{}_{jk} = 0$. Поскольку имеется соотношение ($\mho^i{}_m$ — матрица, обратная к $\Omega^m{}_j$):

$$\Gamma'^i{}_{jk} = \Gamma^m{}_{sq} \mho^i{}_m \Omega^s{}_j \Omega^q{}_k + \mho^i{}_m \Omega^s{}_j \partial_{x^s} \Omega^m{}_k,$$

определяющее преобразование связности при переходе от поля голономных реперов к полю новых неголономных реперов, то искомые коэффициенты связности в голономном репере определяются из уравнения

$$\Gamma^m{}_{sq} \mho^i{}_m \Omega^s{}_j \Omega^q{}_k + \mho^i{}_m \Omega^s{}_j \partial_s \Omega^m{}_k = 0.$$

Путём несложных преобразований его можно привести к виду:

$$\Gamma^k{}_{ij} = \Omega^k{}_m \partial_i \mho^m{}_j. \tag{1}$$

Заметим, что пространству с абсолютным параллелизмом может быть единственным образом поставлено в соответствие пространство Римана со связностью Леви—Чивиты ∇^* таким образом, что эти связности в фиксированных точках многообразия задают операторы, совпадающие с точностью до поворота. Это делается за счет введения особой метрики

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{K} = \partial_s \otimes \boldsymbol{z}^s = \mho^s{}_k \partial_s \otimes dx^k$ — имплант. Разность $\nabla - \nabla^*$ определяется лишь поворотом репера и отклик простого материала не различаются на этих связностях.

Обратим внимание на соответствие между математическим описанием несовместных деформаций в простых материалах и геометрией пространств аффинной связности. Трансформация каждого элементарного объема в единообразное состояние осуществляется линейным преобразованием; в совокупности эти преобразования определяют непрерывное поле. Построение пространства аффинной связности методом подвижного репера также определяется полем линейных преобразований, действующих на координатные реперы. Таким образом, построение пространства, вмещающего произвольные искаженные элементарные объемы в совместной форме, сводится к процедуре построения пространства Картана.

В рамках развиваемого формализма классическое понятие деформации формализуется как как вложение $\varkappa_t$ (или, в особом случае, погружение) материального многообразия в физическое. При этом аналогом градиента деформации $\boldsymbol{F}$ является касательное отображение, локально представляющего вложение тела в физическое пространство. Меры локальной деформации, пригодные для описания отклика простого материала, представлены как обратный образ («pull–back») пространственной метрики и прямой образ («push–forward») материальной метрики. Силы интерпретируются как ковекторы, т. е. как линейные функционалы, действие которых на векторы скорости точек среды определяют мощность. Соответственно, поля напряжений $\boldsymbol{T}$ интерпретируются как ковекторнозначные внешние два-формы, а массовые силы b — как скалярнозначные три-формы. Абстрактная теория интегрирования, основанная на исчислении внешних форм, адаптирована для элементов этой структуры, что позволяет сформулировать уравнения баланса мощности как на материальном многообразии (аналог отсчетного описания в классической механике совместных деформаций), так и на физическом многообразии (аналог пространственного описания). Законы сохранения устанавливаются с использованием общего принципа ковариантности. Именно, пусть ковариантное преобразование определяется зависимым от τ отображением

$$\xi_\tau : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}, \quad \xi_\tau \Big|_{\tau=t} = \mathrm{Id}, \tag{3}$$

где Id — тождественное преобразование. Отображение (3) определяет новое картирование физического пространства $\mathfrak{P}$. Все величины в новых картах обозначим штрихованными символами. Баланс мощности принимает вид:

$$\int\limits_{\xi_\tau \circ \varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \langle \boldsymbol{v}', b' \rangle \rho' \boldsymbol{\mu}' + \int\limits_{\xi_\tau \circ \varkappa_t(\partial \mathfrak{B}_0)} \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{T} \rangle = \frac{d}{dt} \left(\int\limits_{\xi_\tau \circ \varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}') + e' \right\} \rho' \boldsymbol{\mu}' \right),$$

$$\boldsymbol{T}' = \xi_{\tau *} \boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{v}' = \xi_{\tau *} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \quad e'(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{G}, \boldsymbol{g}' \circ \varkappa') = e(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \xi_\tau^* \boldsymbol{g} \circ \varkappa),$$

где $\boldsymbol{w} = \partial / \partial \tau \xi_\tau$, ρ — плотность массы, e — массовая плотность свободной энергии, $\boldsymbol{g}$ — метрика физического пространства. Кроме того, при $\tau = t$

$$\frac{d}{dt} e' = \left(*_2 \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{g}} \right) \dot{\wedge} \mathscr{L}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{g}, \quad b' - (\dot{\boldsymbol{v}}')^\flat = \xi_{t*}(b - \dot{\boldsymbol{v}}^\flat).$$

Здесь $\mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}$ — производная Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{w}$, $*$ — оператор Ходжа, $^\flat$, $^\sharp$ — музыкальные изоморфизмы [14]. В результате преобразований, основанных на обобщенной теореме Стокса, приходим к равенству

$$\int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left\{ \mathscr{L}_{\boldsymbol{v}}(\rho\boldsymbol{\mu}) \left[\langle \boldsymbol{v}^\flat,\, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{w}^\flat,\, \boldsymbol{w}\rangle + \rho\boldsymbol{\mu}\left(\left(*_2 \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{g}}\right) \dot{\wedge} \mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{g} + \langle \boldsymbol{w}^\flat,\, \dot{\boldsymbol{v}}\rangle \right)\right]\right\} =$$
$$= \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left\{ \langle \boldsymbol{w},\, \mathfrak{d}\boldsymbol{T}\rangle + \nabla\boldsymbol{w} \dot{\wedge} \boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{\mu}\langle b,\, \boldsymbol{w}\rangle \right\}. \quad (4)$$

Здесь $\mathfrak{d}$ — внешняя ковариантная производная Картана [14]. В виду разложения $(\nabla\boldsymbol{w})^\flat = \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{g} + d(\boldsymbol{w}^\flat)$ и в силу того, что часть тела $\mathfrak{B}_0$ выбирается произвольным образом, интегральное равенство (4) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется локальное соотношение

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{v}}(\rho\boldsymbol{\mu}) \left(\langle \boldsymbol{v}^\flat,\, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{w}^\flat,\, \boldsymbol{w}\rangle \right) + \frac{1}{2}\left(*_2 \left(2\rho\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{g}}\right) - \boldsymbol{T}\right) \dot{\wedge} \mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{g} =$$
$$= \langle \boldsymbol{w},\, \mathfrak{d}\boldsymbol{T} + (b - \dot{\boldsymbol{v}}^\flat)\rho\boldsymbol{\mu}\rangle + d\boldsymbol{w}^\flat \dot{\wedge} \boldsymbol{T}. \quad (5)$$

Поскольку величины $\boldsymbol{w}$, $\langle \boldsymbol{w}^\flat, \boldsymbol{w}\rangle$, $d\boldsymbol{w}^\flat$, $\mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{g}$ могут принимать произвольные значения (с физической точки зрения первая из них отвечает значению произвольного векторного поля, вторая — его магнитуде, третья — его ротации, четвертая — градиенту), равенство (5) эквивалентно системе четырех независимых уравнений

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{v}}(\rho\boldsymbol{\mu}) = 0, \quad (6)$$
$$\mathfrak{d}\boldsymbol{T} + b\otimes\rho\boldsymbol{\mu} = \dot{\boldsymbol{v}}^\flat \otimes \rho\boldsymbol{\mu}, \quad (7)$$
$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\dot{\wedge}\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})\dot{\wedge}\boldsymbol{T}, \quad (8)$$
$$*_2\left(2\rho\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{g}}\right) = \boldsymbol{T}. \quad (9)$$

Уравнение (6) представляет собой закон сохранения массы, уравнение (7) – баланс импульса, (8) – баланс момента импульса (здесь $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in T\mathfrak{P}$ — произвольны), (9) – аналог соотношения Doyle — Ericksen, известного в нелинейной теории упругости.

Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ № 14-01-00741 и № 15-08-06330.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Epstein M.* The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge University Press, 2010. 312 p.

[2] *Noll W.* Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. 1967. Vol. 27. № 1. P. 1–32.

[3] *Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций // Новое в зарубежной науке. М.: Мир. 1977. № 9. 208 с.

[4] *Кадич А., Эделен Д.* Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М.: Мир, 1987. 168 с.

[5] *Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э.* Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.

[6] *Yavari A.* A geometric theory of growth mechanics // Journal of Nonlinear Science. 2010. Vol. 20, № 6. P. 781–830.

[7] *Лычев С. А., Манжиров А. В.* Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. № 77. С 585–604.

[8] *Лычев С. А., Манжиров А. В.* Отсчетные конфигурации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С 86–95.

[9] *Лычев С. А.* Универсальные деформации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2011. Т. 6. С. 63–79.

[10] *Лычев С. А., Марк А. В.* Осесимметричное наращивание полого гиперупругого цилиндра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 2. С. 209–226.

[11] *S. Lychev* «Equilibrium equations for transversely accreted shells» // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014. Vol. 94 (1-2). P. 118–129.

[12] *Lychev S. A., Manzhirov A. V., Bychkov P. S.* Discrete and Continuous Growth of Deformable Cylinder // Transactions on Engineering Technologies. World Congress on Engineering. 2014. (Springer Netherlands. 2015). P. 239–254.

[13] *Eckart C.* The thermodynamics of irreversible processes. iv. the theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. 1948. Vol. 73, № 4. P. 373–382.

[14] *Marsden J. E., Hughes T. J.* Mathematical foundations of elasticity. Dover Publications, 1994. 556 p.

Lychev S. A. *Geometric methods in mechanics of bodies of variable composition.* The present paper provides a systematic treatment of modern differential-geometrical methods for modeling of incompatible finite deformations in solids. The incompatibility of deformations may be caused by a variety of physical phenomena; among them are: distributed dislocations and disclinations, point defects, non-uniform thermal fields, shrinkage, growth, etc. Incompatible deformations results in residual stresses and distortion of geometrical shape. These factors are associated with critical parameters in modern high-precision technologies, particularly, in additive manufacturing, and considered to be Ipso Facto essential constituents in corresponding mathematical models. In this context, the development of methods for their quantitative description is the actual problem of modern solid mechanics. The methods in question are based on the representation of a body and physical space in terms of differentiable manifolds, namely material manifold and physical manifold. These manifolds are equipped with specific metrics and connections, non–Euclidian in general.

САМОНАПРЯЖЕННЫЕ ПОЛИМЕМБРАНЫ

Лычев С. А., Койфман К. Г.
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Работа посвящена моделированию напряженно-деформированного состояния системы, возникающей в результате процессов послойного нанесения материала на подложку. Такие процессы используются в аддитивных технологиях (например, в стереолитографии и молекулярной эпитаксии). В качестве модели предложена система криволинейных мембран, попарно механически связанных континуальной совокупностью одномерных связей. Напряженное состояние таких систем определяется несовместными деформациями пакета мембран, возникающих в процессе солидификации граничного слоя, и последующей деформацией в составе тела. В работе предлагается вариационная формулировка задачи в предположении, что полные деформации малы, напряжения в мембранах определяются двумерными линейными законами состояния, а напряжения в связях — одномерными линейными соотношениями. В рамках этих предположений сформулирован функционал действия системы, получены уравнения Эйлера — Лагранжа и соответствующие естественные краевые условия.

1. Введение. В настоящее время происходит интенсивное развитие технологий многослойных тонких покрытий, используемых при изготовлении микроэлектронных, фотоэлектронных и микроэлектромеханических устройств [1–4]. Примерами таких технологий являются электронно-лучевое нанесение покрытий методом осаждения из паровой фазы (Physical Vapor Deposition, EB/PVD) и молекулярно-пучковая эпитаксия (Molecular Beam Epitaxy, MBE). Эти технологии позволяют создавать тонкие слои материала с высокой степенью химической чистоты, что является определяющим параметром в производстве интегральных схем с высокой степенью интеграции. Однако процессу создания сверхтонких покрытий сопутствуют проблемы, связанные с возникновением собственных напряжений в слоях: собственные напряжения изменяют их физические свойства, в частности, электрическую проводимость, а концентрация напряжений в многослойных структурах может привести к их расслаиванию и разрушению. Собственные напряжения невозможно полностью снять ввиду технологических особенностей процессов, в частности, термомеханических эффектов, усадки при химических и фазовых превращениях и т. п. Кроме того, собственные напряжения могут возникать из–за различия периодов кристаллической структуры слоев (Mismatch Effect). В этой связи задача моделирования физико-механического состояния многослойных сверхтонких структур является актуальной проблемой современной физики твердого тела. Следует отметить, что в настоящее время появляются технологии, в которых «нежелательные» факторы, связанные с собственными напряжениями, оказываются полезными. Речь идет о новой технологии изготовления микросхем высокой плотности — технологии Strained Silicon. Эта технология предполагает начальное деформирование слоев и (или) подложки, нацеленное на создание предписанной анизотропии физических свойств покрытия и оптимизации его производительности (структурная анизотропия проводимости, снижение тепловых потерь).

2. Предлагаемая модель. В настоящей работе развивается модель *полимембраны* — многослойной структуры, образованной мембранными слоями, которые связаны в пакет распределенными трансверсальными связями (рис. 1). Предполагается, что вся масса структуры распределена на мембранных слоях, а связи невесомы. Каждый мембранный слой в отдельности от структуры обладает натуральной (свободной от напряжений) формой, но вся структура в целом не имеет таковой: связи удерживают систему мембран в самонапряженном состоянии при любой гладкой деформации полимембраны. Это свойство структуры подобно характерному свойству растущих тел, в которых несовместные деформации, обусловленные технологическими процессами, вызывают собственные (внутренние) напряжения [5].

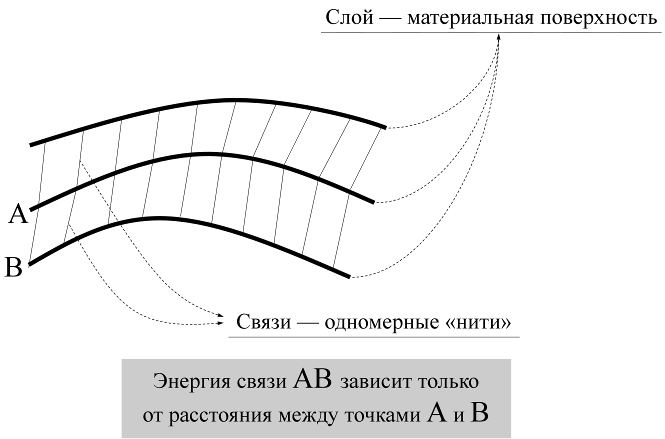


Рисунок 1 – Полимембрана: слои и связи

Собственные напряжения в мембранных слоях полностью определяются трансверсальными связями, а именно, их натуральными формами (образами конфигураций). В рамках модели эти формы определяются последовательно, согласно сценарию процесса создания многослойной структуры. Для этой цели решается *эволюционная задача*, в которой рассматривается последовательность n–слойных полимембран, каждый элемент (с $(n+1)$ слоями) которой отличается от предыдущего (с n слоями) добавленным слоем. Эта последовательность аналогична последовательности гладких тел, определяющих растущее трехмерное тело [6].

Для каждой полимембраны, представляющей элемент эволюционной последовательности, формулируется начально-краевая задача, в которой начальные данные определяются финальным состоянием предыдущей полимембраны, а трансверсальные связи между структурой и добавленным слоем «запоминают» ее финальное деформированное состояние.

Рассмотрим подробнее формулировку задачи для одного элемента эволюционной последовательности. Воспользуемся вариационным принципом Остроградского — Гамильтона, согласно которого движение n–слойной полимембраны определяется из условия стационарности действия, $\delta\mathfrak{J} = 0$, где

$$\mathfrak{J} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \{\mathfrak{L}_i + \mathfrak{P}_i\}\, dt.$$

Здесь $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{K}_i - \mathfrak{W}_i - \mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{P}_i$ — работа сил, приложенных к i–й мембране, $\mathfrak{W}_i$ — энергия деформации i–й мембраны, $\mathfrak{K}_i$ — кинетическая энергия i–й мембраны, а $\mathfrak{T}_i$ — энергия, соответствующая деформации i–й мембраны за счет взаимодействия с остальными, входящими в рассматриваемую систему:

$$\mathfrak{P}_i = \iint\limits_{S_i} \rho_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, dS, \quad \mathfrak{W}_i = \iint\limits_{S_i} W_i\, dS, \quad \mathfrak{K}_i = \frac{1}{2} \iint\limits_{S_i} \rho_i \dot{\boldsymbol{u}}_i^2\, dS, \quad \mathfrak{T}_i = \iint\limits_{S_i} T_i\, dS.$$

Для простоты полагаем, что все слои S_i полимембраны диффеоморфны некоторому универсальному многообразию S, атлас которого будет использоваться далее для картрирования всех слоев. Считаем, что материал мембран прост [7]. Тогда плотность упругой энергии может быть представлена выражением

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Big[W_i(\boldsymbol{D}_j) - T_i(\|(\boldsymbol{u}_p - \boldsymbol{u}_p^0) - (\boldsymbol{u}_q - \boldsymbol{u}_q^0)\|) \Big],$$

где $\boldsymbol{D}_p$, $\boldsymbol{u}_p$ — соответственно мера деформации и перемещение p–го слоя. Поля перемещений $\boldsymbol{u}_p^0$ определяют натуральное (свободное от напряжений) состояние трансверсальных связей. В дальнейшем индекс s снизу указывает на то, что соответствующий оператор действует на поверхности. Остальные малые латинские нижние индексы указывают на номер мембраны.

3. Линейное приближение. Для формулировки задачи в линейном приближении рассмотрим квадратичное приближение для плотности действия, т. е.

$$2W = \sum_{p=1}^{n} \big\{ 2\mu_p \boldsymbol{D}_p : \boldsymbol{D}_p + \lambda_p (\operatorname{tr} \boldsymbol{D}_p)^2 \big\} + \sum_{p,\, q=1}^{n} \gamma_{pq} \|(\boldsymbol{u}_p - \boldsymbol{u}_p^0) - (\boldsymbol{u}_q - \boldsymbol{u}_q^0)\|^2,$$

где $\boldsymbol{D}_p = [(\boldsymbol{\nabla}_{sp} \boldsymbol{u}_p) \cdot \boldsymbol{P}_p]^{\mathrm{sym}}$ — тензор малых деформаций p–го слоя, λ_p, μ_p — его поверхностные упругие характеристики, $\boldsymbol{\nabla}_{sp} = \boldsymbol{e}_p^{\alpha} \partial_\alpha$ — поверхностный градиент [8]. Упругие характеристики трансверсальных связей определяются коэффициентами γ_{pq} (при этом, $\gamma_{pp} = 0$). Оператор $\boldsymbol{P}_p$ — проектор на касательную плоскость, определенный равенством: $\boldsymbol{P}_p = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{n}_p \otimes \boldsymbol{n}_p$, где $\boldsymbol{1}$ — единичный тензор объемлющего трехмерного пространства, $\boldsymbol{n}_p$ — единичная нормаль p–й мембраны.

Вариация действия, $\delta\mathfrak{J}$, с учетом теоремы о дивергенции [9],

$$\int\limits_{S} \boldsymbol{\nabla}_s \cdot \boldsymbol{u}\, dS = \oint\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{u}\, d\Gamma - 2 \int\limits_{S} H \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}\, dS, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad H = \frac{1}{2} \boldsymbol{P} : \boldsymbol{K},$$

имеет вид:

$$\delta\mathfrak{J} = \sum_{p=1}^{n} \iint\limits_{S} \rho_p \dot{\boldsymbol{u}}_p \cdot \delta \boldsymbol{u}_p \Big|_{t_1}^{t_2} dS - \sum_{p=1}^{n} \int\limits_{t_1}^{t_2} \oint\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{T}_p \cdot \delta \boldsymbol{u}_{sp} \, d\Gamma \, dt +$$
$$+ \sum_{p=1}^{n} \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{S} \Bigg\{ \Bigg[\mathscr{L}_{sp}[\boldsymbol{u}_p] + \mu_p \boldsymbol{f}_p \boldsymbol{P}_p : \boldsymbol{K}_p + \rho_p \boldsymbol{p}_p - \rho_p \ddot{\boldsymbol{u}}_{sp} - \sum_{q=1}^{n} \gamma^*_{pq} [\boldsymbol{u}_{sp} - \boldsymbol{u}_{sq} - w_q \boldsymbol{n}_q - \boldsymbol{l}_{pq}] \Bigg] \cdot \delta \boldsymbol{u}_{sp} +$$
$$+ \Bigg[\boldsymbol{T}_p : \boldsymbol{K}_p + \rho_p \boldsymbol{p}_p \cdot \boldsymbol{n}_p - \rho_p \ddot{w}_p - \sum_{q=1}^{n} \gamma^*_{pq} [w_p - \boldsymbol{u}_{sq} \cdot \boldsymbol{n}_p - w_q \boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q - \boldsymbol{l}_{pq} \cdot \boldsymbol{n}_p] \Bigg] \delta w_p \Bigg\} dS \, dt, \tag{1}$$

где

$$\mathscr{L}_{sp}[\boldsymbol{u}_p] = \mu_p \boldsymbol{\nabla}_{sp}^2 \boldsymbol{u}_p + (\lambda_p + \mu_p) \boldsymbol{\nabla}_{sp} \boldsymbol{\nabla}_{sp} \cdot \boldsymbol{u}_p,$$
$$\boldsymbol{T}_p = \mu_p (\boldsymbol{\nabla}_{sp} \boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{\nabla}_{sp} \boldsymbol{u}_p^T) + \lambda_p (\boldsymbol{\nabla}_{sp} \cdot \boldsymbol{u}_p) \boldsymbol{P}_p.$$

Здесь $\gamma^*_{s pq} = \gamma_{spq} + \gamma_{sqp}$, $\boldsymbol{l}_{pq} = \boldsymbol{u}_p^0 - \boldsymbol{u}_q^0$, $\boldsymbol{u}_p = \boldsymbol{u}_{sp} + w_p \boldsymbol{n}_p$ — разложение перемещения p–й мембраны на касательную и нормальную составляющие, точка сверху обозначает производную по времени, $\boldsymbol{K}_p = -\boldsymbol{\nabla}_{sp} \boldsymbol{n}_p$ — оператор Вейнгартена, относящейся к p–й мембране, векторы $\boldsymbol{f}_p$ определены выражением

$$\boldsymbol{f}_p = \boldsymbol{\nabla}_{sp} w_p + \boldsymbol{u}_{sp} \cdot \boldsymbol{K}_p.$$

Уравнения поля (система $2n$ уравнений), соответствующие (1), имеют вид (здесь $i = 1, \ldots, n$)

$$\Big\{ \mathscr{L}_{si}[\boldsymbol{u}_i] + \mu_i \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{P}_i : \boldsymbol{K}_i + \rho_i \boldsymbol{p}_i - \sum_{q=1}^{n} \gamma^*_{iq} [\boldsymbol{u}_{si} - \boldsymbol{u}_{sq} - w_q \boldsymbol{n}_q - \boldsymbol{l}_{iq}] \Big\} \cdot \boldsymbol{P}_i - \rho_i \ddot{\boldsymbol{u}}_{si} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{T}_i : \boldsymbol{K}_i + \rho_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{n}_i - \sum_{q=1}^{n} \gamma^*_{iq} [w_i - \boldsymbol{u}_{sq} \cdot \boldsymbol{n}_i - w_q \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}_q - \boldsymbol{l}_{iq} \cdot \boldsymbol{n}_i] - \rho_i \ddot{w}_i = 0,$$

а терминальные и естественные краевые условия:

$$(\rho_i \dot{\boldsymbol{u}}_i \cdot \delta \boldsymbol{u}_i) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad \big(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{T}_i \cdot \delta \boldsymbol{u}_{si}\big) \Big|_{\Gamma} = \boldsymbol{0}.$$

Решение эволюционной задачи осуществляется следующим образом. Вначале рассматривается пара мембран, связанная ненапряженными трансверсальными связями ($\boldsymbol{u}_1^0 = \boldsymbol{0}$), которая начинает совершать колебания в силу ненулевых начальных данных и внешних поверхностных нагрузок. В момент времени t_1 к деформированной бимембране присоединяется третья мембрана, причем $\boldsymbol{u}_1^0$ определяются по актуальным позициям бимембраны в момент времени t_1. Полученная таким образом тримембрана не обладает натуральным состоянием; в силу начальных данных, соответствующим финальным позициям и скоростям бимембраны, и внешних поверхностных нагрузок она совершает колебательные движения до момента t_p. Расчет итерационно повторяется.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 14-01-00741 и ОЭММПУ-12.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hoffmann W., Pellkofer T.* Thin films in photovoltaics: Technologies and perspectives // Thin Solid Films. 2012. Vol. 520. № 12. P. 4094–4100.

[2] *Subasri R., Soma Raju K. R. C., Reddy D. S., et al.* Sol–gel derived solar selective coatings on SS 321 substrates for solar thermal applications // Thin Solid Films. 2016. Vol. 598. P. 46–53.

[3] *Jiashen Wei, Poh Lam Ong, Francis E.H. Tay, Ciprian Iliescu* A new fabrication method of low stress PECVD SiNx layers for biomedical applications // Thin Solid Films. 2008. Vol. 516. № 16. P. 5181–5188.

[4] *Mederos M., Mestanza S. N. M., Lang R., et al.* Germanium nanoparticles grown at different deposition times for memory device applications // Thin Solid Films. 2016. Vol. 611. P. 39–45.

[5] *Лычев С. А., Манжиров А. В.* Отсчетные конфигурации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 86–95.

[6] *Лычев С. А., Манжиров А. В.* Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. Т. 77. № 4. С. 585–604.

[7] *Truesdell C., Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics/Die Nicht-Linearen Feldtheorien der Mechanik // Springer Science & Business Media. 1965.

[8] *Lebedev L. P., Cloud M. J., Eremeyev V. A.* Tensor Analysis With Applications in Mechanics // World Scientific Publishing Co. 2010. 363 p.

[9] *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1975. Vol. 57, № 4. P. 291–323.

Lychev S. A., Koifman K. G. *Polymembranes with internal stresses*. The work is devoted to modeling of stress–strain state of the system, resulting from processes of layering material on the substrate. Such processes are used in additive technologies (e.g., stereolithography and molecular epitaxy). As a model, a system of curved membranes mechanically coupled by one-dimensional continuum set of constraints is suggested. Stress–strain state of such systems depends on incompatible deformations of polymembrane, considered as a stack of material surfaces. Such incompatibility results due to solidification of the boundary layer in technological process. The paper proposes a variational formulation of the problem, under the assumption that the total deformation is infinitesimal, stresses in membranes are defined by two-dimensional linear constitutive equations, and the tension in constraints are defined by one–dimensional linear relations. Under these assumptions the action functional of the system is formulated, the Euler–Lagrange equation and the corresponding natural boundary and terminal conditions are obtained.

ЗАМКНУТЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Лычёва Т. Н.
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

В работе развиваются математические методы моделирования нестационарных колебаний линейно-вязкоупругих тел. Актуальность этих исследований, в частности, объясняется тем, что теоретические зависимости, определяемые решениями соответствующих начально–краевых задач, используются при идентификации реологических моделей материалов в динамических методах испытаний. Для построения таких теоретических зависимостей предпочтительным являются замкнутые (в рядах) решения модельных задач, поскольку они, в отличие от численных решений, допускают строгие оценки погрешности. Однако построение аналитических решений сопряжено со следующими трудностями аналитического и вычислительного характера. Как правило, принимается гипотеза о пропорциональности операторов релаксации, соответствующих первому и второму модулям Ламе, что равносильно гипотезе о постоянстве коэффициента Пуассона. Представление решений трёхмерных задач в форме разложений по собственным функциям приводит к необходимости учёта большого числа собственных значений; при этом велика вероятность пропуска близко расположенных и кратных корней. В настоящей работе предлагаются способы решения этих проблем.

1. Пусть $\mathscr{B}$ — исследуемое вязкоупругое деформируемое тело, отклик которого требуется определить. Полагаем, что отсчётная форма свободна от напряжений. Тогда из баланса импульса

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} + \rho\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0},$$

где ρ —плотность массы, $\boldsymbol{K}$ —плотность массовых сил и из закона состояния

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\sigma} = 2\mathscr{B}_\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{I}\mathscr{B}_\lambda\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}_\mu$, $\mathscr{B}_\lambda$ — дифференциальные операторы:

$$\mathscr{A} = \sum_{k=0}^{n} a_k\frac{d^k}{dt^k}, \quad \mathscr{B}_\mu = \sum_{k=0}^{m} \mu_k\frac{d^k}{dt^k}, \quad \mathscr{B}_\lambda = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k\frac{d^k}{dt^k},$$

a_k, μ_k, λ_k — константы, определяющие реологические свойства материала ($a_n{=}1$), вытекает уравнение движения

$$\mathscr{M}\nabla^2\boldsymbol{u} + \mathscr{L}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} + \rho\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

Это уравнение интегродифференциальное [1, 2]. Действуя на левую и правую части этого уравнения оператором $\mathscr{A}$, приходим к дифференциальному уравнению:

$$\mathscr{B}_\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\mathscr{B}_\mu + \mathscr{B}_\lambda)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \rho\mathscr{A}\ddot{\boldsymbol{u}} + \rho\mathscr{A}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Заметим, что уравнение (2) имеет производные более высоких порядков, чем (1), и множество его решений может оказаться более широким.

Для постановки начально–краевой задачи определим краевые условия

$$\boldsymbol{n}\cdot\Sigma(\boldsymbol{u})\big|_{\Gamma} = \Xi\cdot\boldsymbol{u}\big|_{\Gamma}, \tag{3}$$

где Ξ — тензорное поле второго ранга, заданное на Γ и определяющее упругие характеристики закрепления тела на его границе, $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности Γ. Начальные условия могут быть записаны следующим образом

$$\boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{V}_0, \quad \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{V}_1, \ldots, \frac{\partial^k\boldsymbol{u}}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{V}_k, \tag{4}$$

где $k = \max(m, n+2)$, $\boldsymbol{V}_0$, $\boldsymbol{V}_1, \ldots, \boldsymbol{V}_k$ —начальные смещения, скорости и т. д.

Систему уравнений (2) удобно представить в виде:

$$\mathscr{M}_1\nabla^2\boldsymbol{u} + \mathscr{M}_2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \mathscr{M}_3\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{f} = -\rho\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{d^k}{dt^k}\boldsymbol{K}, \tag{5}$$

$$\mathscr{M}_1 = \sum_{k=0}^{m}\mu_k\frac{d^k}{dt^k}, \quad \mathscr{M}_2 = \sum_{k=0}^{m}(\mu_k+\lambda_k)\frac{d^k}{dt^k}, \quad \mathscr{M}_3 = -\rho\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{d^{k+2}}{dt^{k+2}}.$$

Уравнения (5) определяют начально–краевую задачу, которая может быть представлена как задача Коши с операторными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{r}\mathscr{P}_k\frac{\partial^k}{\partial t^k}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f},$$

где $r = \max(m, n+2)$, а $\mathscr{P}_k$ — дифференциальные операторы по пространственным переменным, подобные оператору Ламе:

$$\mathscr{P}_k\boldsymbol{u} = \widehat{\mu}_k\nabla^2\boldsymbol{u} + (\widehat{\mu}_k + \widehat{\lambda}_k)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \rho\widehat{a}_{k-2}\boldsymbol{u}. \tag{6}$$

Здесь $\{\mu_k\}_{k=0}^{r}$, $\{\lambda_k\}_{k=0}^{r}$ —реологические модули, упорядоченные на одном и том же множестве индексов $(0,\ldots,r)$ с добавлением нулей там, где это необходимо:

$$\widehat{\mu}_k = \begin{cases}\mu_k, & k\leqslant m\\ 0, & k>m\end{cases}, \quad \widehat{\lambda}_k = \begin{cases}\lambda_k, & k\leqslant m\\ 0, & k>m\end{cases}, \quad \widehat{a}_k = \begin{cases}a_k, & 0\leqslant k\leqslant n\\ 0, & k<0\wedge k>n\end{cases}.$$

2. Пусть $L^2(\mathfrak{B})$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор–функций, определённых в области $\mathfrak{B}$ со скалярным произведением

$$\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in L^2(\mathfrak{B}) \quad \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \int\limits_{\mathfrak{B}}\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}dV,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Будем отыскивать решения $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ краевой задачи (3)–(5) в форме разложения по функциям пространственных переменных $\boldsymbol{x}$, образующих базис $\{\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{x})\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $L^2(\mathfrak{B})$, т. е.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi(t)\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{x}).$$

Разделение переменных можно осуществить, если преобразовать уравнения (5) к системе уравнений первого порядка по переменной t, а именно:

$$\begin{cases} \mathscr{P}_0\boldsymbol{v}_0 + \mathscr{P}_1\dot{\boldsymbol{v}}_0 + \mathscr{P}_2\dot{\boldsymbol{v}}_1 + \mathscr{P}_3\dot{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + \mathscr{P}_m\dot{\boldsymbol{v}}_{m-1} = \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{v}_1 - \dot{\boldsymbol{v}}_0 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v}_2 - \dot{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{0} \\ \ldots \\ \boldsymbol{v}_{m-1} - \dot{\boldsymbol{v}}_{m-2} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{7}$$

где функция $\boldsymbol{v}_0$ совпадает с искомым решением (т. е. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_0$). При этом

$$(\mathscr{B}_\mu \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{def}\boldsymbol{v}_k + \mathscr{B}_\lambda \boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_k)\cdot\Xi_{k,1}\Big|_{\Gamma_k} = \mathscr{A}\,\Xi_{k,2}\cdot\boldsymbol{v}_k\Big|_{\Gamma_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{v}_0\Big|_{t=0} = \boldsymbol{V}_0, \quad \boldsymbol{v}_1\Big|_{t=0} = \boldsymbol{V}_1, \quad \ldots \quad \boldsymbol{v}_{m-1}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{V}_{m-1}. \tag{9}$$

Для разделения переменных (отделения переменной t) рассмотрим обобщенную задачу Штурма—Лиувилля:

$$\mathscr{W}_\nu = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \ldots & \boldsymbol{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \mathscr{P}_1 & \mathscr{P}_2 & \mathscr{P}_3 & \ldots & \mathscr{P}_{m-1} & \mathscr{P}_m \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ldots & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{W}_\nu \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0 \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}_{m-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}, \tag{10}$$

$$\left(\widetilde{\mathscr{B}}_\mu\, \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{def}\boldsymbol{e}_i + \widetilde{\mathscr{B}}_\lambda \boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{e}_i\right)\cdot\Xi_{k,1}\Big|_{\Gamma_k} = \widetilde{\mathscr{A}}\,\Xi_{k,2}\cdot\boldsymbol{e}_i\Big|_{\Gamma_k}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{11}$$

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \sum_{k=0}^{n} a_k\nu^k, \quad \widetilde{\mathscr{B}}_\mu = \sum_{k=0}^{m} \mu_k\nu^k, \quad \widetilde{\mathscr{B}}_\lambda = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k\nu^k.$$

Если из этих уравнений исключить $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{m-1}$, выразив их через $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}$, то получим дифференциальное уравнение, в которое параметр ν входит в различных целых степенях. Дифференциальный оператор, порождаемый этим уравнением в области из $L^2(\mathfrak{B})$, определяемой краевыми условиями (11), будем называть полиномиальный пучком $\mathscr{V}_\nu$:

$$\mathscr{V}_\nu = \mathscr{P}_0 + \nu\mathscr{P}_1 + \nu^2\mathscr{P}_2 + \ldots + \nu^m\mathscr{P}_m.$$

В рамках рассматриваемой задачи о движении вязкоупругого тела выражение для $\mathscr{V}_\nu$ упрощается. Поскольку все $\mathscr{P}_i$, $i = 0, \ldots, m$ имеют вид (6), то уравнение $\mathscr{V}_\nu\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ может быть записано в виде

$$\nabla^2\boldsymbol{e} + K(\nu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{e} - P(\nu)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},$$

где $K(\nu) = \frac{Z_2(\nu)}{Z_1(\nu)}$, $P(\nu) = \frac{Z_3(\nu)}{Z_1(\nu)}$, а $Z_1(\nu)$, $Z_2(\nu)$, $Z_3(\nu)$ —многочлены от ν .

Для определения дифференциальных операторов, порождаемых расширенной системой (10), введем расширенное пространство $\widetilde{L}^2(\mathfrak{B})$, элементы которого — m компонентные кортежи векторов $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{m-1})$ со скалярным произведением

$$\langle\!\langle(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{m-1}), (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m-1})\rangle\!\rangle = \int\limits_{\mathfrak{B}} \sum_{k=0}^{m-1} \boldsymbol{u}_k\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_k dV.$$

Дифференциальное выражение для $\mathscr{W}_\nu$ (10) и краевые условия (8) определяют в $\widetilde{L}^2(\mathfrak{B})$ дифференциальный оператор, который будем обозначать тем же символом $\mathscr{W}_\nu$. Оператор $\mathscr{W}_\mu^*$, сопряжённый к $\mathscr{W}_\nu$, определяется соотношением

$$\langle\!\langle \mathscr{W}_\nu\left(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{m-1}\right),\left(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{m-1}\right)\rangle\!\rangle=\langle\!\langle\left(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{m-1}\right),\mathscr{W}_\nu^*\left(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{m-1}\right)\rangle\!\rangle.$$

Используя теорему о дивергенции, имеем:

$$\mathscr{W}_\mu^* = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_0^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} + \overline{\mu} \begin{pmatrix} \mathscr{P}_1^* & -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathscr{P}_2^* & \mathbf{0} & -\boldsymbol{I} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathscr{P}_3^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathscr{P}_m^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{W}_\mu^* \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0^* \\ \boldsymbol{e}_1^* \\ \boldsymbol{e}_2^* \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}_{m-1}^* \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\mathscr{B}_k^*\boldsymbol{e}_k^*\Big|_\Gamma = \mathbf{0}, \quad k = 0,1,\ldots,m-1.$$

Здесь $\mathscr{P}_k^*$ — дифференциальное выражение, сопряжённое к $\mathscr{P}_k$, а $\mathscr{B}_k^*$, — сопряжённые оператор краевых условий. Последние находятся из условия обращения в ноль интегралов по границе тела, получаемых при переходе к сопряжённому выражению [3–5]. Сопряжённому оператору соответствует сопряжённый пучок

$$\mathscr{P}_0^*\boldsymbol{e}^* + \overline{\mu}\mathscr{P}_1^*\boldsymbol{e}^* + \overline{\mu}^2\mathscr{P}_2^*\boldsymbol{e}^* + \ldots + \overline{\mu}^m\mathscr{P}_m^*\boldsymbol{e}^* = \mathbf{0}.$$

Решение $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$ будем отыскивать в виде разложения

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi(t)\boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{E}_k = \left(\boldsymbol{e}_0^k,\boldsymbol{e}_1^k,\ldots,\boldsymbol{e}_{m-1}^k\right)$ — решения задачи (10), соответствующее значению спектрального параметра $\nu = \nu_k$. Подстановка этого представления в уравнения (7) и в начальные данные (9) приводит к следующим соотношениям

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(\dot\varphi_k - \nu_k\varphi_k)\begin{pmatrix} \mathscr{P}_1 & \mathscr{P}_2 & \mathscr{P}_3 & \ldots & \mathscr{P}_{m-1} & \mathscr{P}_m \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{E}_k\right\} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \ldots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\boldsymbol{E}_k\Big|_{t=0} = \left(\boldsymbol{V}_0,\boldsymbol{V}_1,\ldots,\boldsymbol{V}_{m-1}\right).$$

Действуя операторами проектирования $Pr_k = \langle\!\langle\boldsymbol{E}_k^*,\cdot\rangle\!\rangle$ на левую и правую части уравнения (12) приходим с счетной последовательности независимых задач Коши

$$\dot\varphi_k - \nu_k\varphi_k = \Phi_k, \quad \varphi_k\Big|_{t=0} = \varphi_k^0, \quad \Phi_k = \langle\!\langle\left(\boldsymbol{f},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}\right),\boldsymbol{E}_k^*\rangle\!\rangle = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_k^*\rangle,$$

$$\varphi_k^0 = \langle\mathscr{P}_0\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{e}_k^*\rangle + \langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{e}_{k,1}^*\rangle + \ldots + \langle\boldsymbol{u}_{m-1},\boldsymbol{e}_{k,m-1}^*\rangle.$$

3. В рамках развиваемой методики построены замкнутые решения трёхмерной линейной динамической задачи для вязкоупругого конечного цилиндра. Краевые условия соответствуют жестко–гладкому контакту на основаниях цилиндра и отсутствию напряжений на цилиндрической поверхности. Для случая постоянного коэффициента Пуассона решения представлены в форме разложений по ортогональным системам собственных функций самосопряжённого оператора, определяемого начально–краевой задачей. В общем случае разложения строятся по собственным функциям пучка дифференциальных операторов. Получены алгоритмически эффективные соотношения для компонент разложения, определяющие нормировку собственных функций, координатные функции, а также асимптотические формулы для начальных приближений корней частотного уравнения, исключающие их пропуск при вычислениях, в том числе в случаях кратных корней. Предложен способ построения частичных сумм, члены которых ранжируются по их энергетическому вкладу.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 16-58-52033.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

[2] *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязко–упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

[3] *Лычёв С. А., Сеницкий Ю. Э.* Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2002. Специальный выпуск. С. 16–38.

[4] *Лычёв С. А.* Связанная динамическая задача термовязкоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 5. С. 95–113.

[5] *Лычёв С. А., Манжиров А. В., Юбер С. В.* Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 138–154.

Lycheva T. N. *Closed solutions of nonstationary problems of viscoelasticity for finite cylinder*. Theoretical relations obtained by solutions of dynamic problems of viscoelasticity, represent an effective framework for experimental identification of dynamic rheological properties of materials. For the construction of such relations closed solutions of boundary value problems (i. e. written in the form of convergent series or integrals) are preferred, because they, unlike solutions obtained by numerical methods, allow strict error estimates. However the construction of analytical solutions is associated with the following difficulties. As a rule, the hypothesis of proportionality for relaxation operators corresponding to the first and second Lamé moduli, which is equivalent to the hypothesis of a constant Poisson's ratio. This significantly reduces the generality of consideration. Representation of solutions of three–dimensional problems in the form of expansions in eigenfunctions leads to the necessity of taking into account the large eigenvalues, which in the vast majority of problems can be found only numerically, as the roots of transcendental equations; thus it is likely to skip closely spaced and multiple roots. In this paper we suggest ways to overcome these difficulties.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХСЛОЙНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СПАЕ СТЕКЛА С МЕТАЛЛОМ ПРИ РЕЗКОМ ОХЛАЖДЕНИИ

Любимова О. Н., Солоненко Э. П.
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

В работе рассмотрены технологические напряжения в двухслойном цилиндрическом спае представляющие модель стеклометаллокомпозитных стержней со стеклянным сердечником. Технология изготовления включает нагрев, выдержку и охлаждение с различными скоростями. В рассматриваемой технологии спаивание стекла с металлом происходит при температурах выше температуры стеклования, при этом стекло находится в состоянии вязкой жидкости. При резком охлаждении (температурном скачке) в стекле возможно формирование слоистой структуры с различными свойствами, при дальнейшей выдержке эти свойства стабилизируются, и стекло достигает нового равновесного состояния.

Математическая модель.

Решается задача о деформировании осесимметричного длинного цилиндрического спая при резком одновременном, с учетом гипотезы осевой симметрии и плоского деформированного состояния (выполняемого вдали от торцов). Запишем в общем виде математическую модель, представленную в теории термоупругости.

Все сделанные предположения в [1, 2] позволяют получить аналитические зависимости для тензора напряжений, деформаций и перемещений в каждом слое от температуры, механических характеристик материалов и коэффициентов линейного температурного расширения. Компоненты тензора деформаций в соотношениях Коши в цилиндрических координатах, при условии осевой симметрии и с учетом гипотезы о плоском состоянии имеют вид:

$$\varepsilon_{rr}^{(k)}(r,t) = \frac{\partial u_r^{(k)}(r,t)}{\partial r}, \qquad \varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r,t) = \frac{u_r^{(k)}(r,t)}{r}, \qquad \varepsilon_{zz}^{(k)}(r,t) = 0,$$

здесь $k = 1, 2$, слой 1 обозначает стекло, слой 2 обозначает металл. Уравнения состояния в задачах термоупругости записываются через соотношения Дюамеля — Неймана [1]

$$\sigma_{rr}^{(k)}(r,t) = \lambda_k(\varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r,t) + \varepsilon_{rr}^{(k)}(r,t)) + 2\mu_k\varepsilon_{rr}^{(k)}(r,t) - 2(\lambda_k + \mu_k)\cdot\alpha_k(r,t)\cdot(T(r,t) - T_0),$$
$$\sigma_{\phi\phi}^{(k)}(r,t) = \lambda_k(\varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r,t) + \varepsilon_{rr}^{(k)}(r,t)) + 2\mu_k\varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r,t) - 2(\lambda_k + \mu_k)\cdot\alpha_k(r,t)\cdot(T(r,t) - T_w),$$
$$\sigma_{zz}^{(k)}(r,t) = \lambda_k(\varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r,t) + \varepsilon_{rr}^{(k}(r,t)) - 2(\lambda_k + \mu_k)\cdot\alpha_k(r,t)\cdot(T(r,t) - T_w),$$

где α_k — коэффициент температурного расширения соответствующего материала, $\alpha_1 = \alpha_1(r,t)$ и $\alpha_2 = \alpha_2(r,t)$, λ_k, μ_k — параметры Ламе, $T(r,t)$ — температура в композите, T_w — температура размягчение стекла.

Уравнение равновесия в перемещениях имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_r^{(k)} = \frac{2\lambda_k + 2\mu_k}{\lambda_k + 2\mu_k} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial r} \cdot (T(r,t) - T_w).$$

В результате решение представляется в виде:

$$u_r^{(k)} = C_1^{(k)}(t) \cdot r + \frac{C_2^{(k)}(t)}{r} + \frac{2\lambda_k + 2\mu_k}{\lambda_k + 2\mu_k} \cdot \frac{1}{r}\int\limits_R^r r \cdot \alpha_k \cdot (T(r,t) - T_w)dr$$

здесь $R = 0$ при $k = 1$, $R = r_1$ при $k = 2$.

При определении технологических напряжений с учетом релаксационного вклада предлагается использовать дискретный алгоритм расчета изложенный в [3]. Разбив стеклометаллокомпозитный цилиндр на l слоев, на n-ом шаге по времени напряжения для каждого слоя $\sigma_{res}^{(k)}(r_i, t_n)$ могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{res}^{(k)}(r_i, t_n) = \sigma^{(k)}(r_i, t_n) - \sigma_{rel}^{(k)}(r_i, t_n), \tag{1}$$

где i — подслой по координате, $\sigma^{(k)}(r_i, t_n)$ — напряжения, получаемые на каждом шаге по времени из решения задачи термоупругости, $\sigma_{rel}^{(k)}(r_i, t_n)$ — отрелаксированные напряжения к данному моменту времени.

При произвольном температурно-временном режиме изменение любого свойства p с учетом релаксации имеет вид [4]

$$p(r,t) = p(r,0) + \Delta p_i + \Delta p_s \cdot (1 - M_p(r,t)), \tag{2}$$

где изменение свойства стекла Δp_e состоит из мгновенного Δp_i и релаксационного Δp_s, $M_p(r,t)$ — ядро релаксации свойства p

$$M_p(r,t) = exp\left(-\left(\tfrac{\xi(r,t)}{\tau_0}\right)^b\right),$$

$$\xi(r,t) = \int\limits_0^t \tfrac{\eta_0}{\eta(r,t')}dt',$$

где $\xi(r,t)$ — приведенное время, $\tau_0 = \frac{\eta_0}{K}$, η_0 — вязкость сравнения, b, K — кинетические параметры модели.

Учитывая структурные параметры модели (соотношение (2)) отрелаксированные напряжения к данному моменту времени определяются как

$$\sigma_{rel}^{(k)}(r_i, t_n) = \sum_{j=0}^{n-1}(1 - M(\xi(r_i, t_n) - \xi(r_i, t_j))) \cdot \Delta\sigma^{(k)}(r_i, t_j),$$

$$\Delta\sigma^{(k)}(r_i, t_0) = 0, \qquad \Delta\sigma^{(k)}(r_i, t_n) = \sigma^{(k)}(r_i, t_n) - \sigma^{(k)}(r_i, t_{n-1}),$$

здесь ξ — приведенное время зависящее от времени релаксации свойства τ' при произвольно выбранном температурном режиме. Время релаксации τ' и вязкость η определяются в виде

$$\tau' = \left(\frac{\eta(T,T_f)}{K'}\right),$$
$$\lg(T,T_f) = \lg(T_0) + (T_f^{-1} - T_0^{-1})B_e + (T^{-1} - T_f^{-1})B_m,$$

где T_0, $\lg(T_0)$ — начальные значения температуры и вязкости, при этом начальная температура должна удовлетворять условию метастабильного равновесия, B_e, B_m — параметры, характеризующие температурные зависимости вязкости в условиях равновесной и замороженной структуры стекла, T_f — фиктивная температура.

Напряженное состояние (1) характеризуется наличием констант интегрирования $C_1^{\prime k}$ и C_2^k, $k = 1, 2$. Определение этих постоянных происходит на каждом шаге по времени из следующих граничных условий

$$\begin{cases} \sigma_{rel_{rr}}^{(1)} \mid_{U_1} = \sigma_{rel_{rr}}^{(2)} \mid_{U_1}, \\ u_r^1 \mid_{U_1} = u_r^2 \mid_{U_1}, \\ \sigma_{rel_{rr}}^{(2)} \mid_{U_2} = 0, \end{cases}$$

здесь граница U_1 обозначается границу между стеклом и металлом, границей U_2 обозначена наружная поверхность металла.

Обсуждение результатов.

Расчеты напряженно-деформированного состояния выполнялись для модельного цилиндрического спая на основе стекла С52–1 и стали 20. Постоянные, используемые для расчета: $r_1 = 4$ мм, $r_2 = 5$ мм, $T_w = 585$ °C, $E_1 = 0{,}67 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}2$. При резком охлаждении считалось, на границе металл-окружающая среда температура $T \mid_{U_2}$ соответствует температуре окружающей T_{env} среды. Распределение температуры в композите соответствует выражению $T(r,t) = T_0(t) + T_1(t) \cdot r + T_2(t) \cdot r^2 + T_3(t) \cdot r^3$, полное охлаждение от 600 °C до 20 °C происходит за 20 мин. В расчете учитывалась зависимость температурного коэффициента стали от температуры $\alpha_2 = 0{,}6 \cdot 10^{-8}T + 0{,}1 \cdot 10^{-4}$ 1/°C.

На рис. 1 представлены результаты расчета напряжений в компонентах при резком охлаждении. Видно, что на границе стекло-металл разрыв в окружных напряжениях составляет около 100 МПа. Напряжения в стекле соответствуют сжимающим напряжениям, а в металле - растягивающим, это соответствует отрыву металла от стекла в зоне соединения или расслоению композита. На рис. 2 представлены результаты эксперимента при испытаниях образцов на термостойкость. По результатам микроскопии при резком охлаждении в стекле выявлено наличие слоистой структура (рис. 2 б).

Напряженно-деформированное состояния цилиндрических слоистых образцов моделирующих термоудар показывает, что наибольшие растягивающие напряжения появляются на поверхности металла. При охлаждении от 600 °C до 20 °C наибольшее растягивающее напряжение получилось 1.8 ГПа. Это значение превышает предел прочности стали на разрыв в 4 раза, что соответствует появлению трещин в металле и его дальнейшему растрескиванию. При определении термостойкости стеклометаллокомпозитных цилиндрических образцов данной геометрии выявлен оптимальный температурный перепад в 100 °C. Это говорит о том, что необходимо уделять особое внимание механическим характеристикам металла.

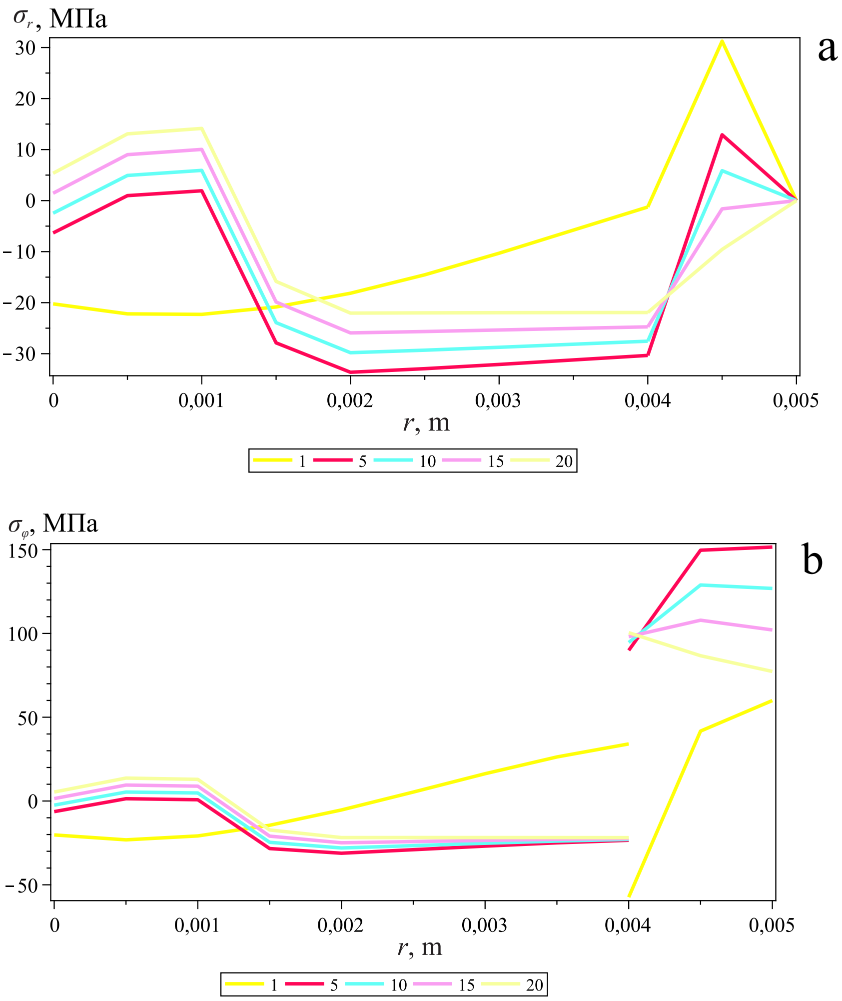
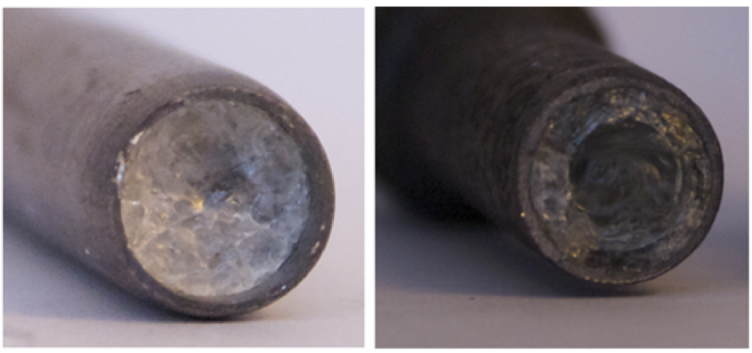


Рисунок 1 – а) распределение радиальных напряжений; б) распределение тангенциальных напряжений. В подписи к рисункам показано время после начала охлаждения в мин.



а *б*

Рисунок 2 – Характер разрушения спая: а — медленное охлаждение; б — быстрое охлаждение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.* Математические модели термомеханики. М.: ФИЗМАЛИТ, 2002. 168 с.

[2] *Коваленко А. Д.* Термоупругость. Киев: Изд-во АН УССР, 1975. 216 с.

[3] *Мазурин О. В.* Отжиг спаев стекла с металлом. Л.: Энергия, 1980. 140 с.

[4] *Бартенев Г. М., Сандитов Д. С.* Релаксационные процессы в стеклообразных системах. Н.: Наука, 1986. 239 с.

Lyubimova O. N., Solonenko E. P. *The relaxation processes in two–layered cylindrical junction of glass and metal with a sharp cooling*.The technological stresses in the two-layer cylinder representing the glass-metal composite rods with a glass core have been considered. The technological process includes heating phase, stable period and cooling process with different rates. The temperatures of soldering glass with metal is above the glass transition temperature in the considering technology wherein the glass is in a viscous liquid state. It is possible to form the layered structure with different properties during a sharp cooling of composite then this properties stabilize during a stable phase and the glass reaches a new equilibrium state.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Ляпин А. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваемая работа посвящена моделированию контактного взаимодействия жесткого параболического штампа и пористой пластины на упругом основании. Основное внимание уделено построению математической модели деформирования пористой пластины. Вывод уравнений осуществлен на основе общих уравнений движения пороупругой среды, а также аналога вариационного принципа Лагранжа. В основе вывода лежат гипотезы Кирхгофа для упругих перемещений пластины и линейное распределение функции пористости по толщине.

1. Введение.

Теория линейной деформации материалов с порами является крайне важным обобщением классической теории упругости. Данная теория находит своё практическое применение для исследования различных типов геологических и биологических материалов, для которых теория упругости неадекватна. Пористый материал состоит из упругой матрицы, которая в своей структуре имеет множество пустот – пор, отношение объема которых к общему объему тела в каждой точке является одной из кинематических переменных и называется функцией пористости. Наличие пор в упругом теле приводит к значительным изменениям в картинах деформации как в статических, так и в динамических задачах.

Теория упругих материалов с пустотами разработана Коуином и Нунциато и описана в работе [1]. Данная теория основывается на ранее разработанной общей модели пороупргих материалов, насыщенных жидкостью, основанной Био в 1956 г. [2]. В работах Коуина и Нунциато рассматриваются однородные деформации, чистый сдвиг пористых стержней и акустические волны малых амплитуд. Значительная часть дальнейших трудов Коуина посвящена уже линейной теории материалов с пустотами, где были использованы концепции, изложенные в совместной работе с Гудманом [3].

Контактным задачам для пластин и тел с покрытиями посвящена работа [4], где рассмотрены базовые вопросы моделирования контактного взаимодействия.

2. Вывод уравнений изгиба пористой пластины на основе общих уравнений.

Определяющие соотношения для пороупругого материала имеют вид [1]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \beta\phi_0, \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \nu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \beta\phi_0,$$
$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right);$$

E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, u_0, v_0 — компоненты вектора смещений среды, β — параметр связанности полей, ϕ — функция пористости материала, μ — модуль сдвига.

Для вывода уравнений изгиба пористой пластины введем гипотезы, аналогичные гипотезам Кирхгофа [5], а также линейное распределение пористости по толщине:

$$\begin{gathered} w_0(x,y,z) = w(x,y), \quad u_0(x,y,z) = u(x,y) - z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}, \\ v_0(x,y,z) = v(x,y) - z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}, \quad \phi_0(x,y,z) = \phi(x,y) + z\psi(x,y); \end{gathered} \tag{1}$$

С учетом введенных гипотез (1) и после интегрирования по толщине получим следующие выражения для продольных усилий и изгибающих моментов.

$$\begin{aligned} &T_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \beta h\phi_0, \quad &&T_y = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta h\phi_0, \\ &T_{xy} = \mu h\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right), &&M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + C\psi, \\ &M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + C\psi, \quad &&M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \tag{2}$$

где введены обозначения: $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $C = \dfrac{\beta h^3}{12}$.

Обозначим касательные и нормальные напряжения на поверхностях $z = \pm h/2$ следующим образом $\sigma_z(\pm h/2) = q_z^\pm$, $\tau_{xz}(\pm h/2) = q_x^\pm$, $\tau_{yz}(\pm h/2) = q_y^\pm$.

Уравнения равновесия в терминах моментов и усилий остаются неизменными [5]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \qquad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + q_y = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_y = 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

С учетом введенных величин и уравнений равновесия (3), уравнения изгиба для пористой пластины примут вид:

$$\Delta^2 w - \frac{C}{D}\Delta\psi = \frac{1}{D}(q_z + \nabla\cdot\mathbf{m}) \tag{4}$$

где вектор $\mathbf{m}$ характеризует распределение касательных напряжений на поверхностях пластины: $q_x = q_x^+ - q_x^-$, $\mathbf{m} = \{m_x, m_y\}$, $m_x = \dfrac{h}{2}(q_x^+ + q_x^-)$, $m_y = \dfrac{h}{2}(q_y^+ + q_y^-)$, а q_z — распределение нормальных напряжений: $q_z = q_z^+ - q_z^-$.

Уравнения для описания изменения пористости в общем случае имеют вид [1]:

$$\nabla\cdot(\alpha\nabla\phi_0) - \xi\phi_0 - \beta\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = 0$$

α, ξ — параметры пористой среды.

С учетом гипотез (1) и после интегрирования по толщине, уравнение относительно пористости пластины ψ примет вид:

$$-\alpha\Delta\psi + \xi\psi - \beta\Delta w = 0 \tag{5}$$

3. Вывод уравнений изгиба пористой пластины на основе вариационного принципа.

Свободная энергия для материала с пустыми порами имеет вид:

$$W_0 = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{kk}^2 + \frac{1}{2}\xi\phi^2 + \frac{1}{2}\alpha\phi_{,k}^2 + \beta\phi\varepsilon_{kk} \tag{6}$$

где ε_{ij} — компоненты тензора малых деформаций, λ, μ — параметры Ламе материала. Путем введения гипотез и интегрирования полученного выражения по толщине функция энергии представима в виде:

$$\begin{aligned} W = W_1 + W_2 = &\frac{1}{2}\int_{-l}^{l} D_1 w_{,xx}^2 + D_3\psi^2 + D_5\psi_{,x}^2 - 2D_7\psi w_{,xx} dx + \\ &+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l} D_2\phi^2 + D_4\phi_{,x}^2 dx \end{aligned}$$

где введены обозначения: $D_1 = (\lambda + 2\mu)\dfrac{h^3}{12}$, $D_2 = \xi h$, $D_3 = \xi\dfrac{h^3}{12} + \alpha h$, $D_4 = \alpha h$, $D_5 = \alpha\dfrac{h^3}{12}$, $D_7 = \beta\dfrac{h^3}{12}$.

После варьирования полученного выражения и приравнивания коэффициентов при одинаковых вариациях уравнения изгиба пористой пластины примут вид:

$$\begin{aligned} (D_1 w'')'' - (D_7\psi)'' &= \sigma^+ - cw \\ D_3\psi - (D_5\psi')' - D_7 w'' &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

4. Решение контактной задачи.

Рассмотрим контактную задачу об индентировании параболическим штампом с параметром кривизны γ пористой пластины толщины h бесконечной длины, изображенной на Рис. 1. Сила вдавливания равна P, пластина расположена на упругом основании с коэффициентом постели c.

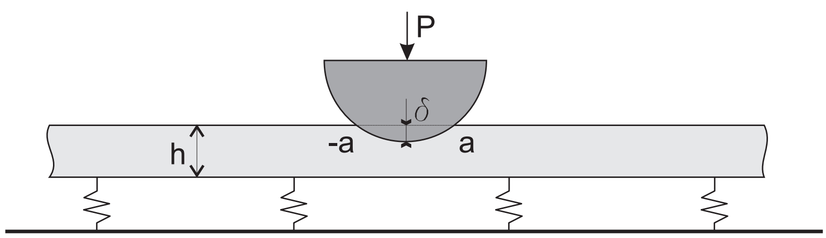


Рисунок 1 – Схематическое изображение исследуемой задачи

В таком случае напряжения на верхней грани в области контакта $-a \leqslant x \leqslant a$ обозначим $q_z^+(x) = \sigma_1(x)$, для $|x| > a$ — $q_z^+(x) = 0$, на нижней грани напряжения пропорциональны прогибам с коэффициентом постели: $q_z^-(x) = cw(x)$. Тогда, с учетом введенного, уравнения можно разрешить относительно функции пористости ψ:

$$\psi = \frac{D\mu}{C} w^{IV} + \frac{\beta}{\xi} w'' - \sigma_1 \frac{\mu}{C\xi} + lw \frac{\mu}{C\xi} \tag{8}$$

В результате дифференциальное уравнение для определения функции прогиба пластины w примет вид:

$$D\mu w^{VI} + (\beta C - \xi D) w^{IV} + l\mu w'' - l\xi w = \mu\sigma_1'' - \xi\sigma_1 \tag{9}$$

В зоне контакта $-a \leqslant x \leqslant a$ известна функция прогиба пластины:

$$w = \delta - \gamma x^2 \tag{10}$$

где δ — перемещение штампа, γ — параметр кривизны штампа.

С учетом (10) и (9) можно определить распределение контактных напряжений на поверхности пластины при $-a \leqslant x \leqslant a$:

$$\sigma_1(x) = \frac{P - 2l\delta a + \dfrac{2}{3} l\gamma a^3}{2\operatorname{sh}(\lambda_0 a)} \lambda_0 \operatorname{ch}(\lambda_0 x) + l\delta - l\gamma x^2, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{\xi}{\mu}}$$

Аналогично можно определить распределение функции пористости ψ в контактной зоне $-a \leqslant x \leqslant a$:

$$\psi(x) = -2\gamma\frac{\beta}{\xi} - \frac{\mu\lambda_0}{\xi C} \frac{P - 2l\delta a + \dfrac{2}{3} l\gamma a^3}{2\operatorname{sh}(\lambda_0 a)} \operatorname{ch}(\lambda_0 x)$$

Для дальнейшего решения задачи необходимо определить значения изгибающего момента и перерезывающей силы:

$$M_x = 2\gamma D - 2\gamma\frac{\beta C}{\xi} - \frac{P - 2l\delta a + \dfrac{2}{3} l\gamma a^3}{2\operatorname{sh}(\lambda_0 a)} \frac{\operatorname{ch}(\lambda_0 x)}{\lambda_0}$$

$$Q_x = M_x' = -\frac{P - 2l\delta a + \dfrac{2}{3} l\gamma a^3}{2\operatorname{sh}(\lambda_0 a)} \operatorname{sh}(\lambda_0 x)$$

Вне зоны контакта необходимо строить решение дифференциального уравнения (9), которое для $|x| > a$ является однородным. Характеристическое уравнение можно представить в виде:

$$D\mu\zeta^6 + (\beta C - \xi D)\zeta^4 + l\mu\zeta^2 - l\xi = 0$$

Корни характеристического уравнения имеют определенную структуру и могут быть представлены в виде $\zeta_{1,2} = \pm\eta, \zeta_{3..6} = \pm\rho \pm i\theta$. В таком случае решение уравнения изгиба пористой пластины (9) при $\sigma_1(x) = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} w = A^- e^{\eta(x+a)} + A^+ e^{\eta(x-a)} &+ e^{\rho(x+a)} \big(B^- \cos\theta(x+a) + C^- \sin\theta(x+a)\big) + \\ &+ e^{\rho(x-a)} \big(B^+ \cos\theta(x-a) + C^+ \sin\theta(x-a)\big) \end{aligned}$$

Изгибающий момент и перерезывающее усилие для $|x| > a$ можно представить в виде:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MC_1 \\ QC_1 \end{Bmatrix} A^+ e^{-\eta(x-a)} + e^{-\rho(x-a)} \begin{Bmatrix} MC_2 \\ QC_2 \end{Bmatrix} \cdot \left(B^+ \cos\theta(x-a) + C^+ \sin\theta(x-a)\right) +$$

$$+ e^{-\rho(x-a)} \begin{Bmatrix} MC_3 \\ QC_3 \end{Bmatrix} \cdot \left(-B^+ \sin\theta(x-a) + C^+ \cos\theta(x-a)\right) \qquad (11)$$

$$\begin{gathered} MC_1 = C\frac{\beta\eta^2}{\xi} + D\frac{\eta^4\mu}{\xi} - D\eta^2 + \frac{l\mu}{\xi}, \\ MC_2 = C\frac{\beta\left(\rho^2-\theta^2\right)}{\xi} + D\frac{\mu\left(\rho^4 - 6\rho^2\theta^2 + \theta^4\right)}{\xi} - D\left(3\rho\theta^2 - \rho^3\right) + \frac{l\mu}{\xi}, \\ MC_3 = -C\frac{2\beta\rho\theta}{\xi} + D\frac{4\mu\left(\rho\theta^3 - \rho^3\theta\right)}{\xi} - D\left(3\rho^2\theta + \theta^3\right), \\ QC_1 = -\eta MC_1, QC_2 = -\rho MC_2 - MC_3, QC_3 = -\rho MC_3 + MC_2; \end{gathered} \qquad (12)$$

Неизвестные константы определяются из условий непрерывности соответствующих функций в точке $x = a$: $w_c(a) = w^+(a)$, $w_c'(a) = w'^+(a)$, $Q_{xc}(a) = Q_x^+(a)$.

После выражения неизвестных констант в задаче остается три неизвестных параметра: сила вдавливания P, глубина вдавливания δ и размер зоны контакта a. Фиксируя величину глубины вдавливания, оставшиеся два параметра будут найдены из условий непрерывности в точке $x = a$ момента и поперечной силы.

Работа выполнена при поддержке гранта ЮФУ БЧ 213.01-2014/03-ВГ, РНФ № 16-17-10217.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Biot M. A. Theory of Propagation of Acoustic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. Part I. Low-Frequency Range // J. Acoustic. Soc. Am. 1956. Vol. 28. № 2. P. 168–178.

[2] *Cowin S. C., Nunziato J. W.* Linear theory of elastic material with voids // Journal of Elasticity. 1983. Vol. 13. P. 125–147.

[3] *Goodman M. A., Cowin S. C.* A continuum theory for granular material // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1972. Vol. 44. P. 248–265.

[4] *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

[5] *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 412 с.

Lyapin A. A. *Contact problem for porous plate on elastic foundation*. Contact problem for interaction of porous plate, based on elastic foundation, and rigid indentor of parabolic shape is considered. Basic equation of deformation for plate are constructed on the basis of 3D equations for porous media and Lagrange variational principle. The problem is solved using method of satisfying boundary conditions for free and contact zones of plate.

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ: ИСТОКИ, ДОСТИЖЕНИЯ, ПРОБЛЕМЫ

Манжиров А. В.
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
Московский государственный университет им. Н. Э. Баумана,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва
Московский технологический университет

Рассматриваются задачи механики контактных взаимодействий для тел с покрытиями. Дается краткий обзор публикаций по данной проблематике, включающий основополагающие статьи и монографии профессора В. М. Александрова, его учеников и соавторов. Обсуждаются основные направления развития данной области, а также методы решения возникающих смешанных задач механики.

Первыми задачами в рассматриваемой области стали контактные задачи для упругих однородных покрытий (см., например, [1–5]). Основное интегральное уравнение таких контактных задач для плоского случая имеет вид:

$$\begin{gathered} q(x,t) + \int_{-1}^{1} k(x,\xi) q(\xi,t)\, d\xi = \delta(t) + \alpha(t) - g(x), \\ \int_{-1}^{1} q(\xi,t)\, d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^{1} q(\xi,t)\xi\, d\xi = M(t), \end{gathered} \tag{1}$$

в котором функция $q(x,t)$ связана с контактным давлением под штампом, $P(t)$ и $M(t)$ — с действующей силой и моментом ее приложения, $\delta(t)$ и $\alpha(t)$ — с осадкой и углом поворота штампа, $g(x)$ — с формой основания штампа, а $k(x,\xi)$ является ядром плоской контактной задачи. Первое уравнение представляет из себя уравнение Фредгольма, в котором переменная выступает в роли параметра и в соотношения (1) введена только для удобства дальнейшего изложения. Учет износа такого основания приводит к интегральному уравнению

$$q(x,t) + V\int_{1}^{t} q(x,\tau)\, d\tau + \int_{-1}^{1} k(x,\xi) q(\xi,t)\, d\xi = \delta(t) + \alpha(t) - g(x), \tag{2}$$

где скаляр V характеризует среднюю скорость износа покрытия. Дополнительные условия остаются прежними. Таким образом, математическая модель износоконтактной задачи для упругого основания с покрытием представляет из себя интегральное уравнение, которое содержит как интегралы с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования.

Естественным развитием задач, упомянутых выше, стали задачи для однородных вязкоупругих материалов, а затем и задачи для упругих и вязкоупругих тел с неоднородными по глубине покрытиями (см., например, [6–13]). Усложнились и их математические модели. Например, уравнения для задачи о контакте вязкоупругого основания с неоднородным по глубине покрытием имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\int_{-1}^{1}k(x,\xi)q(\xi,t)\,d\xi=\delta(t)+\alpha(t)-g(x),\\
&\int_{-1}^{1}q(\xi,t)\,d\xi=P(t),\quad \int_{-1}^{1}q(\xi,t)\xi\,d\xi=M(t),\\
&\mathbf{V}_k f(x,t)=\int_{1}^{t}K_k(t,\tau)f(x,\tau)\,d\tau,\quad k=1,2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где функция $c(t)$ и ядра $K_k(t,\tau)$ операторов Вольтера $\mathbf{V}_k$ связаны с изменяющимися по глубине характеристиками покрытия.

Дальнейшее развитие рассматриваемой проблематики было продолжено по пути исследования множественного контакта и износа тел со сложными свойствами и рассмотрены эволюционные системы контактирующих тел. Подобного рода задачи привели к необходимости исследования системы n интегральных уравнений и $2n$ дополнительных условий (n — количество штампов, действующих на слой):

$$
\begin{aligned}
&c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q^i(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\sum_{j=1}^{n}\int_{-1}^{1}k^{ij}(x,\xi)q^j(\xi,t)\,d\xi=\delta^i(t)+\alpha^i(t)-g^i(x),\\
&\int_{-1}^{1}q^i(\xi,t)\,d\xi=P^i(t),\quad \int_{-1}^{1}q^i(\xi,t)\xi\,d\xi=M^i(t),\quad i=1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Полученную систему интегральных уравнений можно записать в виде операторного уравнения с тензорным ядром

$$
\begin{aligned}
&c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\mathbf{q}(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\int_{-1}^{1}\mathbf{k}(x,\xi)\cdot\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)-\mathbf{g}(x),\\
&\int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\mathbf{P}(t),\quad \int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi=\mathbf{M}(t),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\mathbf{q}(x,t)=q^i(x,t)\mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\delta}(t)=\delta^i(t)\mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\alpha}(t)=\alpha^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{g}(x)=g^i(x)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{k}(x,\xi)=k^{ij}(x,\xi)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^j$, $\mathbf{P}(t)=P^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{M}(t)=M^i(t)\mathbf{i}^i$. Во всех упомянутых задачах построенное решение было эффективным в случае, когда форма участвующих в процессах контактного взаимодействия и износа тел была гладкой. Другими словами, в задачах о штампах можно было рассмотреть, фактически, только прямолинейную поверхность покрытия и гладкую прямолинейную форму штампа, что безусловно является сильной идеализацией реального явления. Большинство современных исследований продолжают следовать в фарватере упомянутых задач, используя чаще всего численные методы и полагая свойства материалов однородными, а поверхности достаточно гладкими (см., например, [12–22]).

В то же время развитие новых технологий с очевидностью показало, что поверхностные слои деталей после обработки (температурной, лазерной, ионно–лучевой) сильно изменяют свои свойства от точки к точке поверхности, а геометрия самой поверхности может быть описана сложной быстро изменяющейся функцией (см., например, [23–27]). В этой связи развивались новые теоретические методы и подходы для адекватного описания деформирования, контактного взаимодействия и износа поверхностно модифицированных материалов и конструкций для их применения в разнообразных приложениях. Безразмерные уравнения для задач о поверхностно неоднородном покрытии и о контакте шероховатых тел имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&c(t)m(x)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\int_{-1}^{1}k(x,\xi)q(\xi,t)\,d\xi=\delta(t)+\alpha(t)-g(x),\\
&\int_{-1}^{1}q(\xi,t)\,d\xi=P(t),\quad \int_{-1}^{1}q(\xi,t)\xi\,d\xi=M(t),\\
&\mathbf{V}_k f(x,t)=\int_{1}^{t}K_k(t,\tau)f(x,\tau)\,d\tau,\quad k=1,2,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $m(x)$ — быстро изменяющаяся функция, характеризующая неоднородность покрытия или форму основания штампа.

Естественным продолжением направления исследования стали задачи о множественном контакте вязкоупругих тел с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярной системы шероховатых штампов. Интегральное уравнение и дополнительные условия для таких задач имеют вид

$$
\begin{aligned}
&c(t)m(x)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\mathbf{q}(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\int_{-1}^{1}\mathbf{k}(x,\xi)\cdot\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)-\mathbf{g}(x),\\
&\int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\mathbf{P}(t),\quad \int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi=\mathbf{M}(t),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Для решения задач, описываемых уравнениями (6) и (7), был развит проекционный метод, позволяющий эффективно описывать деформирование, контактное взаимодействие и износ поверхностно модифицированных материалов и конструкций. В обобщенном виде его можно кратко представить следующим образом [27]:

- симметризация ядра и выделение особенности решения в явном виде,
- приведение контактной задачи к обобщенной проекционной задаче для операторного уравнения,
- построение решения в рядах в конкретном гильбертовом пространстве по заданному алгоритму.

Предложенный метод дает приближенное решения высокой точности при удержании небольшого числа членов разложения. Другие известные методы дают ошибку до 100% даже при удержании максимально возможного числа членов в полученных на их основе разложениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01280).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

[2] *Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П.* Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. №4. С. 60–67.

[3] *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.

[4] *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

[5] *Горячева И. Г., Добычин М. Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.

[6] *Коваленко Е. В., Манжиров А. В.* Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания // ПММ. 1982. Т. 46. №4. С. 674–682.

[7] *Манжиров А. В.* Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ. 1983. Т. 47. №4. С. 684–693.

[8] *Александров В. М., Коваленко Е. В., Манжиров А. В.* Некоторые смешанные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих сред // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1984. Т. 37. № 2. С. 12–25.

[9] *Манжиров А. В.* Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // ПММ. 1985. Т. 49. №6. С. 1019–1025.

[10] *Александров В. М., Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.* Контактные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел // Аналит. и числ. методы решения краевых задач пластич. и вязкоупругости. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 3–13.

[11] *Александров В. М., Манжиров А. В.* О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ. 1987. №5. С. 146–152.

[12] *Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Манжиров А. В.* Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.

[13] *Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.* Контактные задачи теории ползучести. Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.

[14] *Горячева И. Г., Солдатенков И. А.* Контактные задачи с учетом износа. М.: Физматлит, 2001. С. 438–458.

[15] *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

[16] *Солдатенков И. А.* Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.

[17] *Манжиров А. В.* Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // ПММ. 1987. Т. 51. № 4. С. 670–685.

[18] *Манжиров А. В.* О некоторых постановках и решениях контактных задач теории ползучести для произвольных систем штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 139–151.

[19] *Манжиров А. В., Черныш В. А.* Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 101–109.

[20] *Манжиров А. В., Черныш В. А.* О последовательном усилении неоднородных вязкоупругих цилиндрических тел системами жестких элементов. М.: ИПМ АН СССР, 1991. 56 с.

[21] *Манжиров А. В., Черныш В. А.* Контактная задача дискретного наращивания неоднородного вязкоупругого стареющего цилиндра системой жестких втулок // ПММ. 1991. Т. 55. № 6. С. 1018–1025.

[22] *Манжиров А. В.* Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 549–565.

[23] *Казаков К. Е.* Контактные задачи для тел с покрытиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54). С. 176–196.

[24] *Казаков К. Е., Манжиров А. В.* О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 227–240.

[25] *Kazakov K. E.* Modeling of contact interaction for solids with inhomogeneous coatings // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. Vol. 181.P. 012013.

[26] *Manzhirov A. V., Kazakov K. E.* Contact problem for a foundation with rough coating // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2016. Vol. 2224. № 1. P. 877–882.

[27] *Манжиров А. В.* Смешанное интегральное уравнение механики и обобщенный проекционный метод его решения // Доклады АН. 2016. Т. 470. № 4.

Manzhirov A. V. *Contact problems for solids with coatings: fundamentals, developments, and perspectives*. Contact interaction problems for solids with coatings are considered. Brief survey of publications on the matter is given which includes fundamental papers and monographs by Professor V. M. Alexandrov as well as by his pupils and co-authors. Main developments in the area and methods of solution for arising mixed boundary value problems are under discussion.

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ КОНТРОЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ, ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОГРУЖЕННЫХ ГРАНИЦ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЧАСТИЦАМИ ПРИ РЕШЕНИИ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ГИДРОУПРУГОСТИ

Марчевский И. К., Кузьмина К. С., Пузикова В. В.
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Рассмотрена модельная задача о моделировании явления ветрового резонанса упругозакрепленного кругового профиля. Проведено сравнение возможностей различных эйлеровых и лагранжевых численных методов и эффективности их программных реализаций. Рассмотренные методы позволяют получать качественно верные результаты. Показано, что вихревые методы позволяют получить приемлемые по точности результаты с меньшими затратами вычислительных ресурсов по сравнению с пакетом OpenFOAM.

1. Постановка задачи. Моделирование явления ветрового резонанса упругозакрепленного кругового профиля является хорошей модельной задачей для сравнения эффективности различных численных методов. Для данной задачи известно множество результатов экспериментальных и численных исследований для большого диапазона параметров: числа Рейнольдса, величины шероховатости поверхности профиля, степени турбулентности набегающего потока и т. д. [1]

В настоящей работе рассмотрена следующая задача: моделирование обтекания гладкого кругового профиля диаметром d, закрепленного посредством линейного вязкоупругого элемента Кельвина — Фойгта (рисунок 1), при малом значении числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 150$, когда течение можно считать ламинарным.

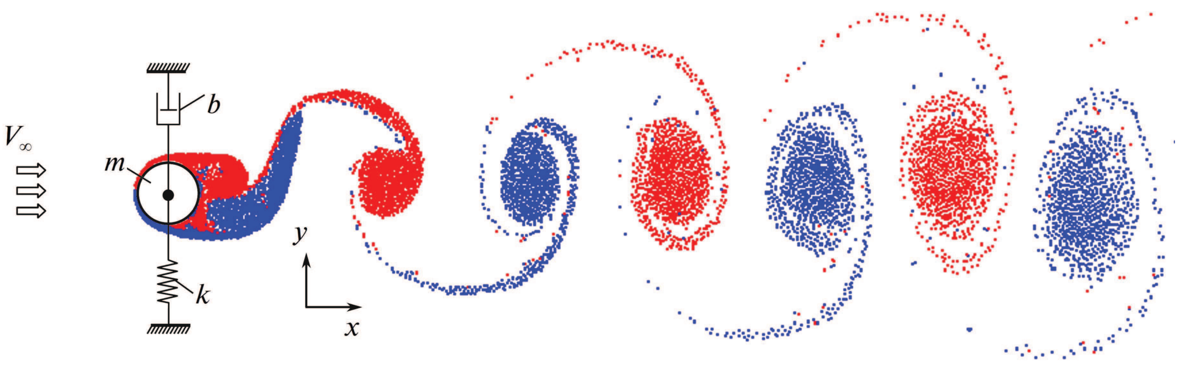


Рисунок 1 – Расчетная схема для моделирования ветрового резонанса профиля в потоке

Течение несжимаемой среды плотностью $\rho = \mathrm{const}$ считается неограниченным, возмущаемым только профилем, и описывается уравнениями Навье — Стокса

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \vec{V}$$

с граничными условиями на бесконечности и на профиле

$$\vec{V}\Big|_{|\vec{r}|\to\infty} \to \vec{V}_\infty, \qquad p\Big|_{|\vec{r}|\to\infty} \to p_\infty, \qquad \vec{V}\Big|_{\vec{r}\in K} = \vec{V}_K,$$

где $\vec{V}_K$ — скорость точек контура колеблющегося профиля, которая в рассматриваемом случае одинакова для всех точек окружности.

Движение профиля описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_{ya},$$

где y — отклонение от положения равновесия; m — масса профиля; b и k коэффициенты демпфирования и жесткости связи соответственно; F_{ya} — подъемная сила, действующая на профиль.

При переходе к безразмерным величинам примем диаметр цилиндра и плотность среды равными единице; скорость набегающего потока примем равной $V_\infty = 3$. Рассмотрим случай относительно тяжелого тела ($m = 39.15$), что позволяет использовать упрощенный подход к решению сопряженной задачи гидроупругости: каждый временно́й шаг разбивается на два подшага; на первом моделируется обтекание тела, движущегося с известной скоростью, на втором — движение профиля под действием известной гидродинамической силы.

Известно, что в установившемся режиме обтекания неподвижного цилиндра с его поверхности происходит периодический срыв вихрей с частотой f, соответствующей числу Струхаля $\mathrm{Sh} = fd/V_\infty \approx 0.185$. Жесткость упругой связи будем выбирать так, чтобы безразмерная собственная частота колебаний системы

$$\mathrm{Sh}_\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{d}{V_\infty}$$

изменялась в диапазоне $0.160\ldots 0.220$ (вязкость связи выбрана достаточно малой, $b = 0.731$, и она практически не влияет на собственную частоту системы).

Срыв вихрей с профиля вызывает периодическое изменение подъемной силы, что возбуждает колебания профиля с амплитудой, которая в резонансном режиме может быть соизмеримой с диаметром профиля. Правильное воспроизведение явления ветрового резонанса в вычислительном эксперименте является хорошей валидационной задачей для различных численных методов.

2. Рассматриваемые численные методы. В настоящей работе рассмотрены четыре численных метода и их соответствующие реализации:

- метод контрольных объемов (МКО) — программный комплекс `OpenFOAM` с открытым исходным кодом с использованием библиотеки (`functionObject`) собственной разработки [2];
- модификация метода вихревых элементов [3] — программный комплекс собственной разработки [4];
- метод погруженных границ (LS-STAG — Level-Set STAGgered Method) — программный комплекс собственной разработки [5];
- метод конечных элементов с частицами (PFEM2 — Particle Finite Element Method [6]) — программный комплекс `Kratos` с открытым исходным кодом.

Методы контрольных объемов и погруженных границ являются сеточными, метод вихревых элементов — бессеточным чисто лагранжевым, метод конечных элементов с частицами — смешанным лагранжево-эйлеровым, в котором частицы используются для аппроксимации нелинейного конвективного слагаемого. Подробное описание перечисленных методов выходит за рамки данной работы; оно может быть найдено по приведенным ссылкам. Отметим лишь, что из указанных методов только метод контрольных объемов и пакет OpenFOAM являются широко распространенными и достаточно универсальными (используются для решения широкого класса задач); остальные методы применяются в узких областях либо их разработка в настоящее время носит исследовательский характер.

3. Расчет обтекания неподвижного цилиндра. Прежде всего, указанные численные методы были верифицированы на задаче о моделировании обтекания неподвижного цилиндра. В начале расчета цилиндр покоился, затем производился «разгон» набегающего потока и выполнялось моделирование обтекания до выхода на квазистационарный режим, сопровождаемый периодическим срывом вихрей. В расчете определялась величина безразмерного коэффициента силы лобового сопротивления, безразмерной частоты схода вихрей и безразмерной амплитуды подъемной силы. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты расчета характеристик обтекания неподвижного цилиндра

	C_{xa}	Sh	C_{ya}^{ampl}
Эксперимент	$1.15\dots1.45$	$0.175\dots0.195$	$0.50\dots0.65$
OpenFOAM	1.44	0.190	0.60
Kratos	1.20	0.190	0.53
Vortex Method	1.31	0.177	0.51
LS-STAG	1.32	0.191	0.63

Расчеты показывают, что все методы позволяют в целом адекватно воспроизводить обтекание неподвижного цилиндра. При этом следует отметить, что в методе конченых элементов с частицами PFEM2, реализованном в пакете Kratos, имеется определенная погрешность в виде завышенного значения давления в точке торможения потока. Кроме того, при расчете колебаний профиля с достаточно большой амплитудой наблюдается завышенная амплитуда подъемной силы, что приводит к нефизичным результатам, поэтому данный метод в настоящее время может быть использован лишь для расчета колебаний профиля с небольшой (порядка единиц процентов от диаметра) амплитудой.

Метод LS-STAG обладает богатыми возможностями по моделированию обтекания произвольно движущихся профилей со сложной геометрией, но имеет весьма высокую вычислительную сложность. К настоящему времени не существует его параллельной реализации, позволившей бы «сгладить» этот недостаток.

4. Расчет ветрового резонанса профиля. По результатам расчетов были построены зависимости безразмерной амплитуды колебаний (в установившемся режиме) профиля A/d от безразмерной собственной частоты системы Sh_ω. На рисунке 2 приведены зависимости, полученные при помощи метода контрольных объемов (OpenFOAM) и вихревого метода.

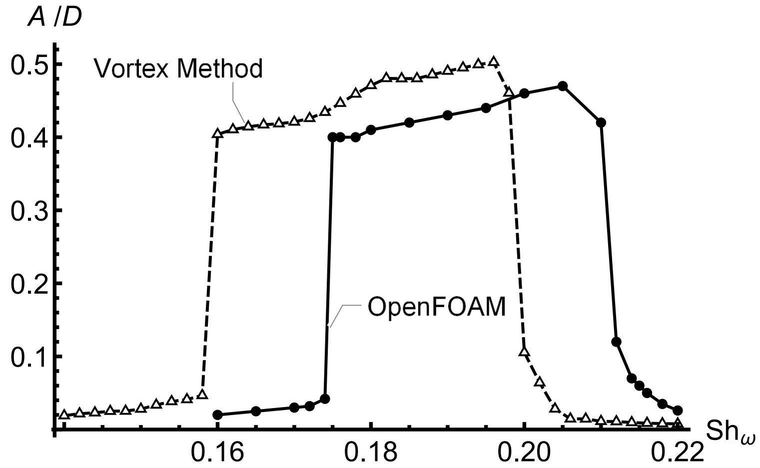


Рисунок 2 – Амплитуда колебаний профиля в потоке в зависимости от собственной частоты системы

Видно, что полученные зависимости качественно близки и отличаются лишь «сдвигом» по частоте, что согласуется с результатами определения данными методами числа Струхаля — безразмерной частоты схода вихрей (см. таблицу 1).

В таблице 2 приведено время, затраченное на выполнение расчета при использовании возможности распараллеливания вычислений при моделирования резонансного режима колебаний и вдали от резонанса.

Таблица 2 – Время выполнения расчета (в часах) в OpenFOAM и вихревым методом

	1 CPU	2 CPU	4 CPU	8 CPU	16 CPU
	OpenFOAM				
Нет резонанса	58.1	36.0	24.3	15.5	9.8
Резонанс	74.4	45.8	30.1	19.6	13.7
	Вихревой метод				
Нет резонанса	41.3	22.6	12.0	7.1	4.7
Резонанс	63.4	34.7	17.9	10.1	6.6

Таблица 3 – Сравнительная характеристика методов

	OpenFOAM	Vortex Method	Kratos	LS-STAG
Время счета	$\pm$	$+$	$+$	$-$
Точность	$+$	$\pm$	$-$	$+$
Движение профиля	$\pm$	$+$	$\pm$	$+$
Распараллеливание	$+$	$+$	$-^*$	$-^*$
Автовыбор шага	$+$	$-$	$-$	$\pm$
Турбулентные течения	$+$	$-$	$-$	$+$
3-мерные течения	$+$	$-^*$	$+$	$-^*$

При проведении расчетов методом LS-STAG в непараллельном режиме время выполнения расчета составило около 110 и 150 часов для нерезонансного и резонансного режимов соответственно; время нерезонансного расчета в Kratos методом PFEM2 составило 55 часов (16 часов при использовании технологии OpenMP и распараллеливании вычислений на 4 ядра).

В таблице 3 произведено «сводное сравнение» рассмотренных методов. Знак «+» означает, что данное качество присуще методу и реализовано эффективно; «±» значит, что по данному качеству метод уступает другим; «−» говорит о его отсутствии; звездочкой «*» обозначено, что данное свойство реализовано не в полной мере (для отдельных случаев) или находится в стадии разработки.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов Президента РФ (проекты МК-5357.2015.8, МК-7431.2016.8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Klamo J. T., Leonard A., Roshko A.* On the maximum amplitude for a vibrating cylinder in cross-flow // J. of Fluids and Struct. 2005. V. 21, № 4. P. 429–434.

[2] *Kraposhin M., Marchevsky I.* Implementation of Simple FSI Model with functionObject // 11th OpenFOAM Workshop. Porygal, Guimaraes, 2016.

[3] *Kuzmina K. S., Marchevsky I. K.* The Modified Numerical Scheme for 2D Flow-Structure Interaction Simulation Using Meshless Vortex Element Method // 4th Intern. Conf. on Particle Meth. (PARTICLES-2015). Barcelona, 2015. P. 680–691.

[4] *Марчевский И. К., Морева В. С.* Параллельный программный комплекс Polara для моделирования обтекания профилей и исследования расчетных схем метода вихревых элементов // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2012): Труды междунар. науч. конф. Новосибирск, 2012. С. 236–247.

[5] *Пузикова В. В.* Разработка модификации метода погруженных границ LS-STAG для математического моделирования в сопряженных задачах гидроупругости: дис. канд. физ.-мат. наук. М., 2016. 150 с.

[6] *Becker P., Idelsohn S. R., Onate E.* A Unified Monolithic Approach for Multi-fluid Flows and Fluid-structure Interaction Using the Particle Finite Element Method with Fixed Mesh // Computational Mechanics. 2015. V. 55, № 6. P. 1091–1104.

Marchevsky I. K., Kuzmina K. S., Puzikova V. V. *Efficiency comparison of control volume method, vortex element method, immersed boundary method and finite element method with particles for coupled hydroelastic problems solving*. The model problem of numerical simulation of wind resonance is considered for circular airfoil with elastic constraints. A comparison of the various features of Eulerian and Lagrangian numerical methods and efficiency of their software implementations is carried out. All these methods allow to obtain qualitatively correct results. It is shown that the vortex methods allow to get the solution with acceptable accuracy with less computational resources than the package OpenFOAM.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ ИЗ Gd И Tb

Моисеенко И. А., Сидаш О. Ю., Сторожев В. И.

Донецкий национальный университет

Рассмотрена проблема анализа уровней нелинейных ангармонических возмущений, генерируемых при распространении осесимметричных монохроматических нормальных волн крутильного типа вдоль осевого направления в протяженных трансверсально-изотропных цилиндрах со свободной либо жестко закрепленной граничной поверхностью. Модель базируется на представлении упругого потенциала с квадратичными и кубическими членами по конечным деформациям, коэффициенты которого выражаются через пять независимых упругих постоянных второго порядка и девять независимых упругих постоянных третьего порядка. Задача описания ангармонических возмущений сведена к рекуррентной последовательности краевых задач первого линейного и второго нелинейного приближения. Проанализированы зависимостей кинематических характеристик нелинейных возмущений от факторов относительной длины и номера моды линейной нормальной волны кручения для волноводов из редкоземельных тяжелых металлов гадолиния (Gd) и тербия (Tb).

1. Введение. Анализ нелинейных ангармонических эффектов при распространении нормальных волн деформаций в цилиндрических телах остается актуальной малоисследованной научной проблемой [1–4]. Он реализован в случаях распространения осесимметричных крутильных и продольно-сдвиговых волн в изотропных цилиндрах кругового сечения [2, 3] в рамках модели геометрически и физически нелинейного деформирования, а также для случая волн кручения в трансверсально изотропных цилиндрах на базе модели геометрически нелинейного деформирования [4]. В представляемой работе рассматривается численно–аналитическое исследование малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении монохроматических осесимметричных волн кручения вдоль трансверсально–изотропных цилиндров с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования.

1. Постановка задачи. Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндр кругового сечения с радиусом R, который занимает область

$$V = \{0 \leqslant r \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ \ -\infty < z < \infty\} = \left\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1,\ \ -\infty < x_3 < \infty\right\}$$

в безразмерных координатах с нормирующим параметром $R_* \equiv R$. Деформирование цилиндра из материала с ориентированной вдоль Oz осью упругой симметрии описывается упругим потенциалом $U = (1/2) \cdot c_{jqlm}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{lm} + (1/6) \cdot c_{jqlmnp}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{lm}\varepsilon_{np}$ с квадратичными и кубическими членами по конечным деформациям $\varepsilon_{jq} = (1/2) \cdot (u_{j,q} + u_{q,j} + u_{p,j}u_{p,q})$, а коэффициенты c_{jqlm} и c_{jqlmnp} выражаются через пять независимых упругих констант c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44} второго порядка и девять независимых матричных упругих постоянных c_{111}, c_{112}, c_{113}, c_{123}, c_{133}, c_{144}, c_{155}, c_{344}, c_{333} третьего порядка [5]. В соответствии с концепцией анализа малых нелинейных ангармонических эффектов [1–4] для компонентов вектора волновых перемещений u_α $(\alpha = r, \theta, z)$ вводятся представления $u_\alpha = u_\alpha^{(l)} + \delta u_\alpha^{(n)}$, содержащие линейные составляющие $u_\alpha^{(l)}$, нелинейные ангармонические возмущения $u_\alpha^{(n)}$ и малый параметр $\delta = u_*/R_{\,*} (\delta << 1)$, $u_* = \max\limits_{\{r,\theta,z,t,\alpha\}} |\tilde{u}_\alpha(r,\theta,z,t)|$. Выражения для компонентов тензора динамических напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ при таком варианте представлений u_α имеют вид

$$\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}\left(u_\alpha^{(l)}\right)\delta + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}\left(u_\alpha^{(n)}\right) + \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right)\right)\delta^2 \quad (\alpha, \beta = r, \theta, z), \tag{1}$$

где для случая осесимметричного деформирования

$$\sigma_{rr}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{13}\partial_z u_z^{(q)} + c_{12} r^{-1} u_r^{(q)} + c_{11}\partial_r u_r^{(q)}, \ \ldots, \ \sigma_{\theta z}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_\theta^{(q)} \quad (q = l; n);$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr}^{(n)} = -\left(k^2/2\right)(c_{133} + c_{13})\, {u_3}^2 + ikc_{123} r^{-1} u_r u_3 + \\
+\left((1/2)(c_{112} + c_{12})\, r^{-2} - \left(k^2/2\right)(c_{155} + c_{11})\right) {u_r}^2 + \\
+\left((1/8)(c_{111} - c_{112} + 4c_{11})\, r^{-2} - \left(k^2/2\right)(c_{144} + c_{12})\right) {u_\theta}^2 + ik(c_{155} + c_{44})\, u_r \partial_r u_3 + \\
+(1/2)(c_{155} + c_{13} + 2c_{44})(\partial_r u_3)^2 + ik(c_{113} + c_{13})\, u_3 \partial_r u_r + (c_{112} + c_{12})\, r^{-1} u_r \partial_r u_r + \\
+(1/2)(c_{111} + 3c_{11})(\partial_r u_r)^2 + (1/4)(c_{112} - c_{111} - 2c_{11} + 2c_{12})\, r^{-1} u_\theta \partial_r u_\theta + \\
+(1/8)(c_{111} - c_{112} + 4c_{11})(\partial_r u_\theta)^2, \ \ldots, \\
\sigma_{zz}^{(n)} = -\left(k^2/2\right)(c_{333} + 3c_{33})\, {u_3}^2 + ik(c_{133} + c_{13})\, r^{-1} u_r u_3 + \\
+\left((1/2)(c_{113} + c_{13})\, r^{-2} - \left(k^2/2\right)(c_{344} + c_{13} + 2c_{44})\right) {u_r}^2 + \\
+\left((1/4)(c_{113} - c_{123} + 2c_{13})\, r^{-2} - \left(k^2/2\right)(c_{344} + c_{13} + 2c_{44})\right) {u_\theta}^2 + \\
+ik(c_{344} + c_{44})\, u_r \partial_r u_3 + (1/2)(c_{344} + c_{33})(\partial_r u_3)^2 + ik(c_{133} + c_{13})\, u_3 \partial_r u_r + \\
+c_{123} r^{-1} u_r \partial_r u_r + (1/2)(c_{113} + c_{13})(\partial_r u_r)^2 + \\
(1/2)(c_{123} - c_{113})\, r^{-1} u_\theta \partial_r u_\theta + (1/4)(c_{113} - c_{123} + 2c_{13})(\partial_r u_\theta)^2.
\end{gathered}$$

Подстановка представлений (1) в уравнения движения

$$\begin{gathered}
r^{-1}\partial_r(r\sigma_{rr}) + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} - r^{-1}\sigma_{\theta\theta} - \delta\left(\rho R_*^2/c_*\right)\partial_t^2 u_r = 0, \\
r^{-1}\partial_r(r\sigma_{\theta r}) + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} - r^{-1}\sigma_{r\theta} - \delta\left(\rho R_*^2/c_*\right)\partial_t^2 u_\theta = 0, \\
r^{-1}\partial_r(r\sigma_{zr}) + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{z\theta} + \partial_z \sigma_{zz} - \delta\left(\rho R_*^2/c_*\right)\partial_t^2 u_z = 0,
\end{gathered}$$

а также в граничные условия на свободной либо закрепленной боковой поверхности цилиндра

$$(\sigma_{r\alpha})_{r=1} = 0 \quad \text{либо} \quad (u_\alpha)_{r=1} = 0 \quad (\alpha = r, \theta, z)$$

и последующее приравнивание слагаемых одинакового порядка малости по малому параметру δ приводит к рекуррентной последовательности краевых задач определения амплитудных составляющих в функциях перемещений $u_\alpha^{(l)}$ и $u_\alpha^{(n)}$.

2. Решение задач первого и второго приближения. При определении вторых гармоник для монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения с круговой частотой ω в свободном либо закрепленном по боковой поверхности цилиндре после введения исходных представлений

$$u_\theta^{(l)} = u_\theta^{(0,l)}(r)\exp(-i(\omega t - kz)), \quad u_r^{(l)} = u_z^{(l)} = 0,$$

$$u_\alpha^{(n)} = u_\alpha^{(0,n)}(r)\exp(-2i(\omega t - kz)) \quad (\alpha = r, \theta, z)$$

задача сводится к последовательному определению амплитудных составляющих $u_\theta^{(0,l)}(r)$, $u_\alpha^{(0,n)}(r)$ из граничных задач

$$r^2\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'' + r\left(u_\theta^{(0,l)}\right)' + \left((\beta r)^2 - 1\right)u_\theta^{(0,l)} = 0; \tag{2}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0,l)}(1) = 0 \quad \text{либо} \quad u_\theta^{(0,l)}(1) = 0; \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\left(\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)}r^{-2}\right)u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)}r^{-1}\left(u_r^{(0,n)}\right)' + \Delta_{14}^{(1)}\left(u_z^{(0,n)}\right)' + \Delta_{15}^{(1)}\left(u_r^{(0,n)}\right)'' = \\ = \Delta_1^{n1}r^{-3}{u_\theta}^2 + \Delta_2^{n1}r^{-1}{u_\theta}^2 + \Delta_3^{n1}u_\theta\partial_r u_\theta + \Delta_4^{n1}r^{-2}u_\theta\partial_r u_\theta + \\ +\Delta_5^{n1}r^{-1}(\partial_r u_\theta)^2 + \Delta_6^{n1}r^{-1}u_\theta\partial_r^2 u_\theta + \Delta_7^{n1}(\partial_r u_\theta)\partial_r^2 u_\theta, \qquad (4) \\ \Delta_{21}^{(1)}u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)}r^{-1}u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)}\left(u_r^{(0,n)}\right)' + \Delta_{24}^{(1)}r^{-1}\left(u_z^{(0,n)}\right)' + \Delta_{25}^{(1)}\left(u_z^{(0,n)}\right)'' = \\ = \Delta_1^{n2}{u_\theta}^2 + \Delta_2^{n2}r^{-2}{u_\theta}^2 + \Delta_3^{n2}r^{-1}u_\theta\partial_r u_\theta + \Delta_4^{n2}(\partial_r u_\theta)^2 + \Delta_5^{n2}\, u_\theta\partial_r^2 u_\theta;\end{gathered}$$

$$\left(\sigma_{r\alpha}^{(0,n)}\left(u_\theta^{(l)}\right) + \sigma_{r\alpha}^{(0,l)}\left(u_\alpha^{(n)}\right)\right)_{r=1} = 0 \quad \text{либо} \quad u_\alpha^{(0,n)}(1) = 0 \quad (\alpha = r, z). \tag{5}$$

Решения задачи первого приближения (2) – (3), описывающие моды крутильных волн с номером p, имеют вид $u_\theta^{(0,l)}(r) = u^{(0)}\beta_p^* J_1\left(\beta_p^* r\right)$, где β_p^* $\left(p = \overline{1,\infty}\right)$ в случае цилиндра со свободной поверхностью — это корни трансцендентного дисперсионного уравнения $\beta^* J_0(\beta^*) - 2J_1(\beta^*) = 0$, а в случае цилиндра с закрепленной поверхностью — корни дисперсионного уравнения $J_1(\beta^*) = 0$. Структура соотношений (4) – (5) показывает, что вторые гармоники осесимметричных нормальных волн кручения являются осесимметричными волнами продольно-сдвигового типа с удвоенной частотой. Для построения частных решений системы (4) используется прием замены их правых частей степенными рядами по переменной r с использованием степенных разложений для входящих в выражение $u_\theta^{(0,l)}(r)$ цилиндрических функций Бесселя первого рода. В результате система (4) принимает вид

$$\left(\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)}r^{-2}\right)u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)}r^{-1}\left(u_r^{(0,n)}\right)' + \Delta_{14}^{(1)}\left(u_z^{(0,n)}\right)' + \Delta_{15}^{(1)}\left(u_r^{(0,n)}\right)'' = \left(u^{(0)}\right)^2\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p r^p$$

$$\Delta_{21}^{(1)}u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)}r^{-1}u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)}\left(u_r^{(0,n)}\right)' + \Delta_{24}^{(1)}r^{-1}\left(u_z^{(0,n)}\right)' + \Delta_{25}^{(1)}\left(u_z^{(0,n)}\right)'' = \left(u^{(0)}\right)^2\sum_{p=1}^{\infty}\beta_p r^p$$

$$\tag{6}$$

с аналитическими представлениями для коэффициентов α_p и β_p. Тогда полное решение (4) записывается в форме

$$u_r^{(0,n)} = \left(-D_1\xi_1 J_1(\xi_1 r) - D_2\xi_2 J_1(\xi_2 r) + \left(u^{(0)}\right)^2 F_1(r)\right)\exp\left(-2i(\omega t - kz)\right),$$

$$u_z^{(0,n)} = \left(D_1\eta_1 J_0(\xi_1 r) + D_2\eta_2 J_0(\xi_2 r) + \left(u^{(0)}\right)^2 F_2(r)\right)\exp\left(-2i(\omega t - kz)\right),$$

где η_j и ξ_j — величины с аналитическими представлениями, приводимыми в работе [4]; D_j — произвольные постоянные коэффициенты, определяемые из краевых условий (5) при допущении, что точки $(2k, 2\Omega)$ не принадлежат какой-либо из мод соответствующего дисперсионного спектра линейных осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового типа в данном цилиндре; $F_j(r)$ — частные решения системы уравнений (6) в виде рядов $F_1(r) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p r^p$, $F_2(r) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p r^p$ с коэффициентами, определяемыми из явных рекуррентных формул.

3. Численные результаты. С использованием построенного решения исследованы амплитудные формы колебательных смещений в сечениях цилиндров из гадолиния (Gd) и тербия (Tb) для вторых гармоник крутильных волн различной относительной длины $\tilde{\lambda} = 2\pi/\left(\tilde{k}R\right)$. Независимые безразмерные матричные упругие постоянные второго и третьего порядка c_{jq} и c_{jql} для рассматриваемых материалов приведены в [6]. В частности, на рис. 1–2 представлены результаты расчетов отнесенных к $\left(u^{(0)}\right)^2$ амплитуд радиальных и осевых колебательных смещений во вторых гармониках крутильных волн низшей моды с одинаковой относительной длиной $\tilde{\lambda} = 1.8$ в цилиндрах с закрепленной поверхностью из Gd и Tb.

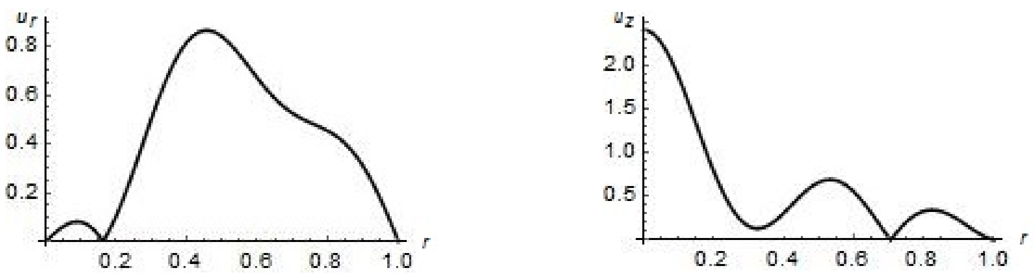


Рисунок 1 – *Амплитуды волновых перемещений во вторых гармониках (материал Gd)*

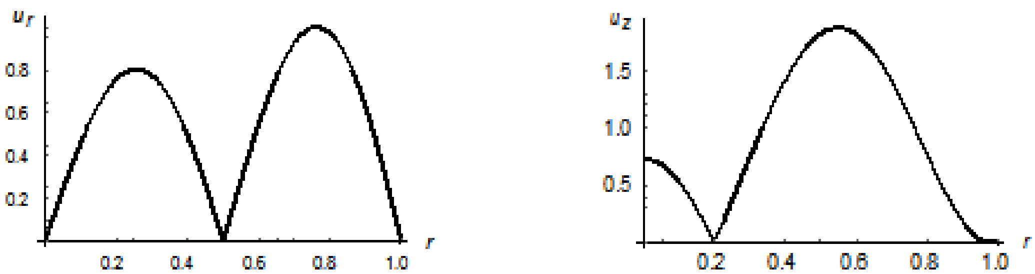


Рисунок 2 – *Амплитуды волновых перемещений во вторых гармониках (материал Tb)*

Анализ представленных распределений указывает на то, что в обоих случаях в составе вторых гармоник доминирующими по величине являются осевые продольные составляющие. Вместе с тем, имеются существенные различия в формах данных распределений, в частности различие в расположении зон локализации максимальных радиальных и осевых перемещений, а также в их соотношениях. Примечательным является локализация максимума амплитуд продольных смещений для цилиндра из Gd в центре сечения, в то время как для цилиндра из Tb максимумы локализуются на окружности с радиусом, приблизительно равным половине радиуса сечения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Sugimoto N., Hirao M.* Nonlinear mode coupling of elastic waves // J. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 62. №1. P. 23–32.

[2] *Елагин А. В., Сторожев В. И.* Нелинейные ангармонических возбуждения при распространении осесимметричных продольно-сдвиговых нормальных волн в упругом цилиндре // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. 2010. Вып. 2. С. 77–83.

[3] *Yelagin A. V., Storozhev V. I.* Nonlinear second harmonics axisymmetric waves of torsion in a cylindrical waveguide with a clamped surface // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. 2010. Вып. 14. С. 347–353.

[4] *Елагин А. В, Моисеенко И. А.* Анализ вторых гармоник нормальных волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре с фиксированной боковой поверхности: модель геометрической нелинейности // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А. Естественные науки. 2014. Вып. 1. С. 35–42.

[5] *Fritz I. J.* Third-Order Elastic Constants for Materials with Transversely Isotropic Symmetry // Journal of Applied Physics. 1977. V. 48. P. 812–814.

[6] *Yadawa P. K., Singh1 D., Pandey D. K., Yadav R. R.* Elastic and Acoustic Properties of Heavy Rare-Earth Metals // The Open Acoustics Journal. 2009. V. 2, P. 61–67.

Moiseyenko I. A., Sidash O. Y., Storozhev V. I. *Kinematic characteristics of nonlinear anharmonic perturbations for monochromatic normal waves of torsion in anisotropic cylinders of Gb and Tb*. The problem of analysis of nonlinear anharmonic perturbations generated by the propagation of monochromatic axisymmetric normal waves of torsion type along the axial direction in extended transversely isotropic cylinders with free or rigidly fixed boundary surface are investigated. The model is based on the representation of the elastic potential with quadratic and cubic terms at the finite deformations. The coefficients of the elastic potential expressed in terms of five independent elastic constants of the second order, and nine independent elastic constants of the third order. The problem of describing the anharmonic perturbation is reduced to a recurrent sequence of linear boundary value problems of the first and second non-linear approximation. The dependence of kinematic characteristics of nonlinear perturbations on factors relative length and number of mode of normal linear wave of torsion for waveguides from a rare heavy metal gadolinium (Gd) and terbium (Tb) are described.

ТИПЫ ВЕТВЛЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ

Моршнева И. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о возникновении конвективных режимов в горизонтальном бесконечном слое двухкомпонентной смеси. Предполагается, что границы слоя свободные и на них заданы постоянные значения температуры и концентрации. Данная работа посвящена изучению автоколебаний, которые возникают при колебательной потере устойчивости основного режима. Уравнения для плоских возмущений инвариантны относительно группы O(2). Возникновение автоколебаний в системах с такой симметрией изучено в работах Юдовича В. И. и Моршневой И. В. Доказано, что при переходе параметра через критическое значение колебательной потери устойчивости от основного режима могут ответвиться автоколебательные режимы двух видов: бегущие навстречу друг другу волны, а также нелинейная смесь пары бегущих волн. Характер ветвления и устойчивость этих автоколебаний зависит от коэффициентов системы уравнений разветвления. В данной работе были получены аналитические выражения этих коэффициентов для рассматриваемой задачи. Показано, что все пять теоретически возможных типов ветвления реализуются при определенных значениях параметров.

1. Постановка задачи. В настоящей работе исследуется возникновение конвекции в бесконечном горизонтальном слое бинарной смеси, состоящей из нереагирующих компонент. Расход жидкости через поперечное сечение предполагается равным нулю. Перекрестные эффекты — термодиффузия и диффузионная теплопроводность — не учитываются. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции смеси в приближении Обербека — Буссинеска [1]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} + (\widetilde{\mathrm{Gr}}T - \widetilde{\mathrm{Gr}_\mathrm{s}}S)\mathbf{k},\\
&\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \mathrm{Pr}^{-1}\Delta T,\\
&\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla S = \mathrm{Pr_d}^{-1}\Delta S,\\
&\mathrm{div}\mathbf{v} = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ — поле скорости, $\mathrm{T} = \mathrm{T}(x_1, x_2, x_3, t)$ — поле температуры, $\mathrm{S} = \mathrm{S}(x_1, x_2, x_3, t)$ — поле концентрации тяжелой компоненты смеси, $\mathrm{p} = \mathrm{p}(x_1, x_2, x_3, t)$ — давление , $\mathbf{k} = (0, 0, -1)^T$.

Система (1) содержит четыре безразмерных параметра: $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля, $\mathrm{Pr_d} = \dfrac{\nu}{D}$ — диффузионное число Прандтля (число Шмидта), $\widetilde{\mathrm{Gr}} = \dfrac{g\beta h^4 Q}{\varkappa\nu^2}$ — число Грасгофа, $\widetilde{\mathrm{Gr_s}} = \dfrac{g\beta_s h^3 \bar{S}}{\nu^2}$ — концентрационное число

Грасгофа. Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — коэффициент температуропроводности смеси, D — коэффициент диффузии, g — величина ускорения силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения смеси, β_s — концентрационный коэффициент плотности, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности смеси, Q — поток тепла, $\bar{S}$ — средняя концентрация.

Предполагается, что границы слоя свободные, плоские и на них отсутствуют касательные напряжения. Значения температуры и концентрации примеси на границах считаются фиксированными. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\bigg|_{\substack{x_3=1\\x_3=0}} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\bigg|_{\substack{x_3=1\\x_3=0}} = v_3\Big|_{\substack{x_3=1\\x_3=0}} = 0,\\ &\mathrm{T}\big|_{x_3=1} = \tau_1, \quad \mathrm{T}\big|_{x_3=0} = \tau_0,\ \mathrm{S}\big|_{x_3=1} = \sigma_1, \quad \mathrm{S}\big|_{x_3=0} = \sigma_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Задача (1) с граничными условиями (2) имеет следующее стационарное (основное) решение, соответствующее покоящейся смеси, в предположении, что градиенты температуры и концентрации постоянны и вертикальны:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_0 = 0,\ \mathrm{T}_0(x_3) = a_1 x_3 + a_0,\ \mathrm{S}_0(x_3) = b_1 x_3 + b_0,\\ &\mathrm{p}_0(x_3) = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathrm{Gr}}\, a_1 - \widetilde{\mathrm{Gr_s}}\, b_1)x_3^2 + (\widetilde{\mathrm{Gr}}\, a_0 - \widetilde{\mathrm{Gr_s}}\, b_0)x_3 + \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $a_1 = \tau_1 - \tau_0, a_0 = \tau_0, b_1 = \sigma_1 - \sigma_0, b_0 = \sigma_0$.

Линейная устойчивость основного решения (3) была изучена Гершуни Г. З., Жуховицким Е. М. и др. [1]. Обнаружено, что возможна как монотонная, так и колебательная потеря устойчивости основного режима.

2. Ветвление автоколебаний. Будем искать решение задачи (1) с граничными условиями (2) в виде

$$\check{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \quad \check{\mathrm{T}} = \mathrm{T}_0 - a_1\mathrm{T}, \quad \check{\mathrm{S}} = \mathrm{S}_0 - b_1\mathrm{S}, \quad \check{\mathrm{p}} = \mathrm{p}_0 + \mathrm{p}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1)–(2), получим систему для возмущений $\mathbf{v}$, T, S, p с однородными граничными условиями. Далее будем предполагать, что возмущения плоские и $2\pi/\alpha$— периодические по горизонтальной переменной x_1, где α — волновое число. Вводя функцию тока

$$v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_3},\ v_3 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

и исключая давление, получаем систему для ψ, T, S

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\mathrm{D}(\Delta\psi,\psi)}{\mathrm{D}(x_1,x_3)} = \Delta^2\psi - \mathrm{Gr}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x_1} + \mathrm{Gr_s}\frac{\partial S}{\partial x_1},\\ &\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t} + \frac{\mathrm{D}(\mathrm{T},\psi)}{\mathrm{D}(x_1,x_3)} = \mathrm{Pr}^{-1}\Delta\mathrm{T} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1},\\ &\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial t} + \frac{\mathrm{D}(\mathrm{S},\psi)}{\mathrm{D}(x_1,x_3)} = \mathrm{Pr_d}^{-1}\Delta\mathrm{S} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \end{aligned} \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$\psi\Big|_{\substack{x_3=1\\x_3=0}} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\Big|_{\substack{x_3=1\\x_3=0}} = T\Big|_{\substack{x_3=1\\x_3=0}} = S\Big|_{\substack{x_3=1\\x_3=0}} = 0, \tag{6}$$

где $\dfrac{\mathrm{D}(f,g)}{\mathrm{D}(x_1,x_3)} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial g}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$, $\mathrm{Gr} = -a_1\widetilde{\mathrm{Gr}}$, $\mathrm{Gr_s} = -b_1\widetilde{\mathrm{Gr_s}}$ — новые число Грасгофа и концентрационное число Грасгофа соответственно.

Заметим, что задача (5)–(6) инвариантна относительно преобразования инверсии

$$\mathrm{L}(\psi,\mathrm{T},\mathrm{S}))(x_1,x_3) = (-\psi,\mathrm{T},\mathrm{S})(-x_1,\,x_3),$$

а также инвариантна относительно преобразования горизонтальной трансляции

$$\mathrm{R}_\xi(\psi,\mathrm{T},\mathrm{S})(x_1,x_3) = (\psi,\mathrm{T},\mathrm{S})(x_1+\xi/\alpha,\,x_3),\ \ \xi\in[0,2\pi].$$

Таким образом, задача (5)–(6) инвариантна относительно группы O(2). Ветвление автоколебаний в системах с такой симметрией изучено в работах Юдовича В. И. и Моршневой И. В. [2, 3]. Воспользуемся результатами этих работ для изучения возникновения автоколебаний в рассматриваемой задаче.

Для отыскания автоколебаний применим метод Ляпунова–Шмидта для систем с круговой симметрией $O(2)$ [2]. Представим число Грасгофа в виде $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}_* + \delta$, где Gr_* — критическое значение колебательной потери устойчивости. Запишем задачу (5)–(6) в операторном виде

$$\frac{d}{dt}\mathrm{M}\mathbf{v} + \mathrm{A}\mathbf{v} = \delta\mathrm{B}\mathbf{v} + \mathrm{K}(\mathbf{v},\mathbf{v}), \tag{7}$$

где

$$\mathbf{v} = (\psi,\ \mathrm{T},\ \mathrm{S})^T \in \mathrm{H},$$

H — замыкание множества гладких вектор-функций с граничными условиями (6) в метрике, порожденной скалярным произведением

$$\big(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\big)_{\mathrm{H}} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2^*\,d\Omega,$$

$$\Omega = \Big\{(x_1,\,x_3)\in\mathbb{R}:\ 0\leqslant x_1\leqslant\frac{2\pi}{\alpha},\ 0\leqslant x_3\leqslant 1\Big\}$$

A, B, M — линейные операторы, K — билинейный оператор. Подставляя $\tau=\omega t$ в (7), где ω — неизвестная циклическая частота, которую ищем в виде $\omega=\omega_0+\mu$, получаем

$$\omega_0\frac{d}{d\tau}\mathrm{M}\mathbf{v} + \mathrm{A}\mathbf{v} + \mu\frac{d}{d\tau}\mathrm{M}\mathbf{v} = \delta\mathrm{B}\mathbf{v} + \mathrm{K}(\mathbf{v},\mathbf{v}). \tag{8}$$

Ищем 2π-периодическое по τ решение (8) в виде

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{u}_0(\tau) + \mathbf{u}(\tau),$$

$$\mathbf{u}_0(\tau) = (\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1)e^{i\tau} + (\alpha_0^*\varphi_0^* + \alpha_1^*\varphi_1^*)e^{-i\tau},$$

α_0, α_1 — неизвестные амплитуды, $\varphi_0, \varphi_1 = \mathrm{L}\varphi_0$ — собственные функции следующей задачи

$$(\mathrm{A} + i\omega_0\mathrm{M})\varphi_k = 0 \ \ (k = 0, 1).$$

Бифуркационные уравнения(уравнения разветвления), наследующие симметрию исходной задачи, имеют вид

$$\begin{aligned} g(\alpha_0, \alpha_1) &\equiv \alpha_0(-i\mu + a\delta + b|\alpha_0|^2 + c|\alpha_1|^2 + \dots) = 0, \\ g(\alpha_1, \alpha_0) &\equiv \alpha_1(-i\mu + a\delta + b|\alpha_1|^2 + c|\alpha_0|^2 + \dots) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} a &= (\mathrm{B}\varphi_{\mathbf{0}}, \mathbf{\Phi_0}), \\ b &= (\mathrm{K}^0(\mathbf{u}_1, \varphi_{\mathbf{0}}) + \mathrm{K}^{\mathbf{0}}(\mathbf{w_1}, \varphi_{\mathbf{0}}^*), \mathbf{\Phi_0}), \\ c &= (\mathrm{K}^0(\mathbf{w}_2, \varphi_{\mathbf{1}}) + \mathrm{K}^{\mathbf{0}}(\mathbf{u_2}, \varphi_{\mathbf{1}}^*) + \mathrm{K}^{\mathbf{0}}(\mathbf{u_3}, \varphi_{\mathbf{0}}), \mathbf{\Phi_0}). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\mathbf{\Phi_0}$ — собственная функция сопряженного оператора A^*, $\mathrm{K}^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathrm{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathrm{K}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ — решения ряда неоднородных задач (см.[2]).

В работе [2] исследование системы уравнений разветвления (9) показало, что в ситуации общего положения возможно ответвление следующих периодических режимов:

1. пары L-связанных простых волн, бегущих навстречу друг другу

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^0(x_1, x_3 - ct), \ \ \mathbf{v}^1(\tau) = \mathbf{v}^1(x_1, x_3 + ct),$$

$$\mathbf{v}^0(\tau) = (T + I)\mathbf{u}_0^0(\tau), \ \ \mathbf{v}^1(\tau) = L\mathbf{v}^0(\tau),$$

$$\mathbf{u}_0^0 = \mathbf{u}_0|_{\alpha_0 = \alpha,\, \alpha_1 = 0}, \ \alpha = \sqrt{-\delta \mathrm{Re}a/\mathrm{Re}b} + O(\delta),$$

$$\mu = \delta\,(\mathrm{Im}a - \mathrm{Re}a\mathrm{Im}b/\mathrm{Re}b) + O(\delta^2), \ \ \delta \to 0,$$

2. периодического решения, представляющего собой нелинейную смесь бегущих навстречу друг другу L-связанных простых волн

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_3 - ct, x_3 + ct),$$

$$\mathbf{v}(\tau) = (T + I)\mathbf{u}_0^1(\tau), \mathbf{u}_0^1(\tau) = \mathbf{u}_0(\tau)|_{\alpha_0 = \alpha_1 = \beta}$$

$$\beta = \sqrt{-\delta \mathrm{Re}a/\mathrm{Re}(b + c)} + O(\delta),$$

$$\mu = \delta\,(\mathrm{Im}a - \mathrm{Re}a\mathrm{Im}b/\mathrm{Re}(b + c)) + O(\delta^2), \ \ \delta \to 0.$$

В [2, 3] доказано, что в ситуации общего положения в зависимости от значений коэффициентов (10) возможны следующие пять типов ветвления описанных выше периодических режимов: I. если $\mathrm{Re}\, b > 0, \mathrm{Re}(b + c) > 0$, то бегущие волны и нелинейная смесь волн ответвляются в докритическую область и неустойчивы; II. если $\mathrm{Re}\, b > 0, \mathrm{Re}(b + c) < 0$, то бегущие волны ответвляются в докритическую область и неустойчивы, а нелинейная смесь волн - в сверхкритическую область и неустойчив; III. если $\mathrm{Re}\, b < 0, \mathrm{Re}(b + c) > 0$, то бегущие волны ответвляются в сверхкритическую область, а нелинейная смесь волн - в докритическую область и неустойчивы; IV.если $\mathrm{Re}\, b < 0, \mathrm{Re}(b + c) < 0, \mathrm{Re}(b - c) > 0$, то бегущие волны ответвляются в сверхкритическую область и устойчивы, а нелинейная смесь волн - в сверхкритическую область и неустойчива; V. если $\mathrm{Re}\, b < 0, \mathrm{Re}(b + c) < 0, \mathrm{Re}(b - c) < 0$, то бегущие волны ответвляются в сверхкритическую область и неустойчивы, а нелинейная смесь волн — в сверхкритическую область и устойчива.

Для определения характера ветвления и устойчивости возникающих автоколебательных режимов в рассматриваемой задаче найдены аналитические выражения для $\mathrm{Re}\, a$, $\mathrm{Re}\, b$, $\mathrm{Re}\, c$. При различных значениях параметров проведен анализ знаков соотношений между этими коэффициентами. Показано, что и бегущие волны, и нелинейная смесь волн могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. Может происходить как сверхкритическое, так и докритическое ветвление автоколебаний. Для обоих типов автоколебательных режимов найдены первые два члена ряда по степеням параметра надкритичности.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 1.1398.2014/K)

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

[2] *Моршнева И. В., Юдович В. И.* Об ответвлении циклов от равновесий инверсионно- и вращательно-симметричных динамических систем // Сиб.мат.журнал. 1985. Т. 26. № 1. С. 124–133.

[3] *Моршнева И. В., Юдович В. И.* О фазовом портрете динамических систем с инверсионно–вращательной симметрией в окрестности теряющего устойчивость фокуса // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. Науки. 1984. Т. 3. С. 30–32.

Morshneva I. V. *Types of branching oscillatory convection in a horizontal layer of a binary mixture*. The present work investigates the onset of convection in an infinite horizontal layer of a binary fluid mixture consisting of two non-reacting components. A constant temperature and concentration distribution is specified on the boundaries. In the model under consideration the effects of thermal diffusion and diffusive heat conductivity are neglected. This research is devoted to the study of branching and stability of time-periodic flow regimes arising from oscillatory stability loss of the basic regime relatively plane perturbations. The perturbation equations are invariant under the group O(2), and the Andronov–Hopf bifurcation theory in the systems with such symmetry is suitable. This theory has been developed by V. Yudovich and I. Morshneva. Investigation of the branching equations has reveal that three types of self-oscillating modes are arising: two traveling simple waves moving in the opposite direction to each other and the nonlinear mixture of couple simple waves. The type of branching and stability of these regimes depends on the relations between the coefficients of the branching equations. The coefficients were found analytically for the problem of binary mixture convection in the horizontal layer. Computations for a wide range of parameters showed that all five theoretically possible branching types of periodic modes are realized.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ

Моршнева И. В., Петрова Е. И.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Изучается задача ветвления пространственных периодических по времени режимов конвекции в бинарной смеси, находящейся между двумя твердыми изотермическими вертикальными границами. Предполагается, что границы слоя непроницаемы для вещества, поддерживаются при постоянных разных температурах и задан горизонтальный градиент концентрации, обусловленный эффектом термодиффузии. Эффект диффузионной теплопроводности не учитывается. Уравнения пространственных возмущений, периодических по однородным пространственным переменным, инвариантны относительно группы $O(2) \times O(2)$, и применима теория бифуркации рождения циклов в системах с такой симметрией, развитая в работах Моршневой И. В. Из результатов теории следует, что при переходе параметра через критическое значение от основного режима могут ответвляться периодические решения следующих пяти типов: автоколебания, представляющие собой бегущие вдоль вертикального направления волны; автоколебания вида бегущих вдоль горизонтального направления волн; автоколебания вида косой бегущей волны; периодические режимы, представляющие собой нелинейную смесь пары косых бегущих волн; периодические режимы, симметричные относительно инверсий и являющиеся нелинейной смесью косых бегущих волн, связанных инверсионной симметрией. Характер ветвления и устойчивость этих режимов зависит от соотношений между коэффициентами системы уравнений разветвления. Вычисления коэффициентов системы уравнений разветвления показали, что при определенных значениях параметров задачи возможно появление описанных выше автоколебаний. Также исследована устойчивость возникающих автоколебаний.

1. Постановка задачи.

Рассматривается задача о возникновении конвекции в вертикальном бесконечном слое двухкомпонентной смеси, состоящей из нереагирующих компонент. Предполагается, что границы слоя непроницаемы для вещества, поддерживаются при постоянных разных температурах и задан горизонтальный градиент концентрации, обусловленный эффектом термодиффузии. Эффект диффузионной теплопроводности не учитывается. Также предполагается замкнутость потока. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции смеси в приближении Обербека –Буссинеска в форме, выписанной И. Г. Шапошниковым [1]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + Gr(\mathbf{v},\, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \triangle \mathbf{v} + (T + C)\mathbf{k},\\
&\frac{\partial T}{\partial t} + Gr\mathbf{v}\nabla T = \frac{1}{Pr}\triangle T,\\
&\frac{\partial C}{\partial t} + Gr\mathbf{v}\nabla C = \frac{1}{Pr_d}(\triangle C - \varepsilon \triangle T),\\
&\operatorname{div} \mathbf{v} = 0
\end{aligned} \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$y = \pm 1 : \mathbf{v} = 0, \;\; T = \mp 1, \;\; \frac{\partial C}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial T}{\partial y}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — скорость течения, T — температура, C — концентрация легкой компоненты, p — давление, $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Задача (1), (2) содержит четыре безразмерных параметра: $Gr = \dfrac{g\beta_1\theta d^3}{\nu^2}$ — число Грасгофа, $Pr = \dfrac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля, $Pr_d = \dfrac{\nu}{D}$ — диффузионное число Прандтля (число Шмидта), $\varepsilon = -\dfrac{\hat{\alpha}\beta_2}{\beta_1}$ — параметр термодиффузии, где ν, χ, D — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности смеси, диффузии соответственно, β_1 — коэффициент теплового расширения смеси, β_2 — концентрационный коэффициент плотности, $\hat{\alpha}$ — параметр термодиффузии.

Уравнения движения (1) с краевыми условиями (2) имеют стационарное (основное) плоскопараллельное решение с кубическим профилем скорости, линейным распределением температуры и концентрации, постоянным давлением:

$$\mathbf{v_0} = (0, \; 0, \; \frac{1}{6}(1+\varepsilon)(y^3 - y)), \;\; T_0 = -y, \;\; C_0 = -\varepsilon y, \;\; p_0 = const. \tag{3}$$

Линейная устойчивость этого решения изучалась Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицким и Л. Е. Сорокиным [1–3]. Ими показано, что возможна как монотонная, так и колебательная потеря устойчивости.

2. Ветвление автоколебаний. Данная работа посвящена исследованию ветвления периодических по времени режимов конвекции при колебательной потере устойчивости основного стационарного режима (3) относительно пространственных возмущений. Решение, отличное от (3), будем разыскивать в виде

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \quad T_1 = T_0 + T, \quad C_1 = C_0 + C, \quad p_1 = p_0 + p.$$

Предположим, что возмущения $\mathbf{v} = (v_x(x,y,z,t), \, v_y(x,y,z,t), \, v_z(x,y,z,t))$, $T(x,y,z,t)$, $C(x,y,z,t)$, $p(x,y,z,t)$ — $2\pi/\alpha$-периодичны по x и $2\pi/\beta$-периодичны по z, где α, β — волновые числа. Нелинейные уравнения для возмущений запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Av + \delta Bv - (G_0 + \delta)K(v, \, v) = 0, \tag{4}$$

где $v = (\mathbf{v}, \, T, \, C) \in H$; A, B — линейные операторы, K — квадратичный оператор, они задаются следующими дифференциальными выражениями

$$Av = \Pi \begin{pmatrix} Dv_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Dv_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Gr_0 \dfrac{dw}{dy} v_y & Dv_z & -T & -C \\ 0 & -Gr_0 v_y & 0 & D_1 T & 0 \\ 0 & -\varepsilon Gr_0 v_y & 0 & \dfrac{\varepsilon}{Pr_d}\Delta T & D_2 C \end{pmatrix},$$

$$Bv = \Pi \begin{pmatrix} w\dfrac{\partial v_x}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w\dfrac{\partial v_y}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{dw}{dy}v_y & w\dfrac{\partial v_z}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & -v_y & 0 & w\dfrac{\partial T}{\partial z} & 0 \\ 0 & -\varepsilon v_y & 0 & 0 & w\dfrac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$K(u,v) = -\Pi((\mathbf{u},\nabla)v_x, (\mathbf{u},\nabla)v_y, (\mathbf{u},\nabla)v_z, \mathbf{u}\cdot\nabla T, \mathbf{u}\cdot\nabla C).$$

Здесь $D = -\Delta + Gr_0 w\dfrac{\partial}{\partial z}$, $D_1 = -\dfrac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta + Gr_0 w\dfrac{\partial}{\partial z}$, $D_2 = -\dfrac{1}{\mathrm{Pr_d}}\Delta + Gr_0 w\dfrac{\partial}{\partial z}$, $w = \dfrac{1}{6}(1+\varepsilon)(y^3 - y)$, пространство H — замыкание множества определенных в области $\Omega = \{(x,\, y,\, z) : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi/\alpha,\ |y| \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\pi/\beta\}$ достаточно гладких периодических вектор-функций $v = (\mathbf{v},\, T,\, C)$, исчезающих при $y = \pm 1$, по норме, порожденной скалярным произведением

$$(v_1,\, v_2) = \int\limits_{\Omega} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* + T_1 \cdot T_2^* + C_1 \cdot C_2^*)\, dx\, dy\, dz,$$

символ $*$ означает комплексное сопряжение, Π — оператор ортогонального проектирования из H в подпространство H_0 с соленоидальными $\mathbf{v}$, Gr_0 — критическое значение числа Грасгофа, при котором спектр устойчивости основного решения содержит пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 \neq 0$), $\delta = Gr - Gr_0$.

Уравнение (4) инвариантно относительно преобразований инверсии L_1, L_2, $L_3 = L_1 L_2$:

$$\begin{aligned} (L_1 v)(x,y,z) &= (-v_x, v_y, v_z, T, C)(-x, y, z), \\ (L_2 v)(x,y,z) &= (v_x, -v_y, -v_z, -T, -C)(x, -y, -z), \\ (L_3 v)(x,y,z) &= (-v_x, -v_y, -v_z, -T, -C)(-x, -y, -z) \end{aligned}$$

и относительно представлений R_ξ и R_θ группы вращения окружности:

$$\begin{aligned} (R_\xi v)(x,\, y,\, z) &= v(x + \xi/\alpha, y,\, z), \\ (R_\theta v)(x,\, y,\, z) &= v(x,\, y,\, z + \theta/\beta), \end{aligned}$$

где ξ, θ — угловые переменные на окружности.

Таким образом, группа симметрии уравнения (4) есть $\mathrm{O}(2)\times\mathrm{O}(2)$ (двойная круговая симметрия).

В силу симметрии задачи относительно инверсий L_k, ($k = 1,2,3$) при критическом значении числа Грасгофа Gr_0 каждому собственному значению $-i\omega_0$ и $i\omega_0$ ($\omega_0 \neq 0$) отвечает четыре комплексные независимые нейтральные моды. Для описания нелинейного взаимодействия этих мод в [4] в системах с двойной круговой симметрией применяется метод Ляпунова — Шмидта. Решение задачи (4) разыскивается $2\pi/\omega$-периодическим по t (ω — неизвестная циклическая частота) в виде

$$v(\tau) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \varphi_k e^{i\tau} + \sum_{k=0}^{3} \alpha_k^* \varphi_k^* e^{-i\tau} + u(\tau),$$

где $\tau = \omega t$; $\varphi_0, \varphi_k = L_k \varphi_0$ $(k = 1, 2, 3)$ — собственные векторы оператора A , отвечающие собственному значению $-i\omega_0$; α_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ — неизвестные комплексные амплитуды; $\omega = \omega_0 + \mu$.

Система уравнений разветвления для α_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, наследующая симметрию исходной задачи, имеет вид

$$\begin{aligned} g(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 0, \\ g(\alpha_1, \alpha_0, \alpha_3, \alpha_2) &= 0, \\ g(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_0, \alpha_1) &= 0, \\ g(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где функция g в окрестности нуля имеет представление

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_0(-i\mu + a\delta + b|\alpha_0|^2 + c|\alpha_1|^2 + d|\alpha_2|^2 + d|\alpha_3|^2) + f\alpha_1\alpha_2\alpha_3^* + \ldots$$

Выражения для коэффициентов a, b, c, d, e, f системы уравнений разветвления (5) приведены в [4]. Они представляют собой функционалы, которые выражаются через собственные функции линейной и сопряженной задач устойчивости, а также через решения ряда неоднородных краевых задач с правыми частями, явно зависящими от этих же собственных функций.

Исследование системы (5) показало [4], что в случае общего положения возможно возникновение пяти семейств циклов. Эти семейства порождаются следующими периодическими режимами под действием симметрии задачи:

1. бегущей вдоль вертикального направления волной $\mathbf{v}(x, y, z - ct)$;
2. бегущей вдоль горизонтального направления волной $\mathbf{v}(x - ct, y, z)$;
3. косой бегущей волной $\mathbf{v}(\alpha x + \beta z - ct, y)$;
4. периодическим режимом $\mathbf{v}(\alpha x + \beta z, y, t)$, представляющим собой нелинейную смесь пары косых бегущих волн, и имеющим в линейном приближении вид $f(y)e^{i(\alpha x + \beta z - ct)} - f(-y)e^{i(-\alpha x - \beta z - ct)} + c.c.$
5. периодическим режимом $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, симметричным относительно инверсий и являющимся нелинейной смесью косых бегущих волн, связанных инверсионной симметрией, который в линейном приближении имее вид $f_+(y)e^{i(\alpha x + \beta z - ct)} + f_-(y)e^{i(-\alpha x + \beta z - ct)} - f_+(-y)e^{i(-\alpha x - \beta z - ct)} - f_-(-y)e^{i(\alpha x - \beta z - ct)} + c.c.$

Для определения характера ветвления периодических режимов 1–5 вычисляются коэффициенты a, b, c, d, e, f уравнений разветвления (5) при различных критических значениях параметров, соответствующих колебательной потере устойчивости основного режима. Для их вычисления решаются однородные и неоднородные краевые задачи методом стрельбы, а также задачи Коши методом Рунге — Кутты — Фельберга. Результаты расчета показали, что при малых значениях волнового числа α при определенных значениях других параметров задачи возможно появление описанных выше автоколебаний 1-5. Возможно как сверхкритическое, так и докритическое ветвление этих режимов. При сверхкритическом ветвлении они могут быть устойчивыми для определенных значений параметров.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 1.1398.2014/K)

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.

[2] *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Сорокин Л. Е.* Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией // ПММ. 1982. Т. 46 № 1. С. 66–71.

[3] *Сорокин Л. Е.* Устойчивость конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией относительно длинноволновых возмущений // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т. 1983. С. 72–76.

[4] *Моршнева И. В.* Бифуркация рождения цикла в динамических системах с симметрией и её приложения в гидродинамике. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. 140 с.

Morshneva I. V., Petrova E. I. *The occurrence of 3D periodic convective flows in a vertical layer of a binary mixture* . The problem of the branching of 3D time-periodic convective modes in a binary mixture between two rigid isothermal vertical plates is investigated. In the model under consideration the thermal diffusion effect is taken into account, diffusive thermal conductivity is neglected. The equations of 3D perturbations, periodic on the homogeneous horizontal variable and on the vertical variable, are invariant under the group $O(2) \times O(2)$ and the Andronov–Hopf bifurcation theory in the systems with such symmetry is suitable. This theory has been developed by I. Morshneva. It is found that five of self–oscillating modes are arising: the nonlinear mixtures of various types of waves and various types of traveling waves. The results of numerical analysis of the branching character are presented. For that purpose coefficients of the branching equations have been considered. Computations for a wide range of parameters showed that different types of bifurcation of periodic modes are realized.

О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Мхитарян С. М.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

При антиплоской деформации рассматривается одна смешанная граничная задача нелинейной теории установившейся ползучести (НТУП) при степенном законе связи между напряжениями и скоростями деформаций для полупространства, когда на одной части его граничной плоскости заданы скорости деформаций, а на остальной части касательные напряжения равны нулю. Построено замкнутое решение задачи. Для сравнительного анализа построено ее приближенное решение. Рассмотрен частный случай.

Введение. В работах [1, 2] в постановке НТУП при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций на основании обобщенного принципа суперпозиции перемещений (ОПСП) или скоростей (ОПСС) исследована плоская контактная задача о сжатии двух тел. Некоторые оценки точности этого принципа приведены в [3–5]. В нелинейных по степенному закону задачах при антиплоской деформации в [6] по аналогии с [7] введена функция псевдонапряжений. Там же этим методом построено точное решение первой граничной задачи НТУП для полупространства при антиплоской деформации.

В настоящей статье на основании результатов работы [6] указан метод построения замкнутого ограниченного на концах интервала решения смешанной граничной задачи НТУП при степенной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций для полупространства при антиплоской деформации. При этом на полосе граничной плоскости полупространства заданы скорости деформаций, а вне полосы на остальной части границы касательные напряжения равны нулю. Решение этой задачи, как в [6], сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения (НСИУ). Для сравнительного анализа эта же задача решается также на основании ОПСП. Рассмотрен частный случай, когда на полосе скорости деформаций заданы параболическим законом.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть отнесенное к системе координат $Oxyz$ полупространство $y < 0$ находится в условиях установившейся ползучести при антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Для полупространства примем степенной физический закон [8]:

$$\begin{gathered}\tau_{xz} = \frac{T\,(\Gamma)}{\Gamma}\gamma_{xz},\ \tau_{yz} = \frac{T\,(\Gamma)}{\Gamma}\gamma_{yz};\ T = T\,(\Gamma) = K_0\Gamma^m \quad (K_0 > 0,\ 0 < m \leqslant 1)\,; \\ T = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}; \quad \Gamma = \sqrt{\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2};\ \gamma_{xz} = \partial w/\partial x;\ \gamma_{yz} = \partial w/\partial y.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь T и Γ — интенсивности касательных напряжений и скоростей деформаций, соответственно, K_0 — физическая постоянная материала полупространства,

m — показатель ползучести, τ_{xz} и τ_{yz} — компоненты касательных напряжений, γ_{xz} и γ_{yz} — компоненты скоростей деформаций, а $w = w\,(x, y)$ — единственная отличная от нуля компонента скорости в направлении оси Oz при антиплоской деформации.

Для базовой полуплоскости $\Pi_- = \{-\infty < x < \infty;\ -\infty < y < 0\}$, подчиняющейся степенному закону (1), ставим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} w\,(x, y)\,|_{y=-0} = f\,(x) - \delta\ (x \in L)\,;\ \tau_{yz}\,|_{y=-0} = 0\ (x \in L')\,; \\ w\,(x, y) \to 0\,\text{при}\ x^2 + y^2 \to \infty; L = \{y = 0;\ -a \leqslant x \leqslant a\}\,;\ L' = R/L. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $f\,(x)$ $(x \in [-a, a])$ — заданная достаточно гладкая функция, δ — абсолютная величина жесткой составляющей компоненты скорости в отрицательном направлении оси Oz, подлежащая определению, L — след полосы на замкнутой полуплоскости $\overline{\Pi}_- = \{-\infty < x < \infty,\ y \leqslant 0\}$. В граничной задаче (2) должна быть задана равнодействующая T напряжений $\tau\,(x)$:

$$\int\limits_{-a}^{a} \tau\,(x)\,dx = T \quad (\tau_{yz}\,|_{y=-0} = -\tau\,(x)\ x \in [-a, a])\,. \tag{3}$$

Решение задачи (2)–(3) сведем к решению НСИУ. С этой целью воспользуемся результатами работы [6], считая, что введенные там функция напряжений $\Phi\,(x, y)$ и функция псевдонапряжений $\Lambda\,(x, y)$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывны в замкнутой полуплоскости. По [6]

$$\begin{gathered} w\,(x, -0) = -\frac{K\,(m)}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}\,(x - u)\,\varphi\,(u)\,du\ (-\infty < x < \infty)\,;\ \varphi\,(x) = \tfrac{\partial \Lambda}{\partial x}\,|_{y=-0}; \\ \varphi\,(x) = \frac{2^{\frac{m-1}{m}}}{\pi} \int\limits_{-a}^{a} \tfrac{\tau(u)du}{u-x} \left\{ \tau^2\,(x) + \left[\tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-a}^{a} \tfrac{\tau(u)du}{u-x} \right]^2 \right\}^{\frac{1-m}{2m}}, \end{gathered} \tag{4}$$

откуда

$$dw\,(x, -0)\,/dx = -K\,(m)\,\varphi\,(x)\ (-\infty < x < \infty)\,;\ K\,(m) = 1/2\,(2/K_0)^{1/m}\,. \tag{5}$$

Теперь при помощи (4)–(5) реализуем первое граничное условие из (2), предварительно продифференцировав это условие по x. В результате, придем к следующему определяющему НСИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-a}^{a} \tfrac{\tau(u)du}{u-x} \left\{ \tau^2\,(x) + \left[\tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-a}^{a} \tfrac{\tau(u)du}{u-x} \right]^2 \right\}^{\frac{1-m}{2m}} = -\tfrac{2^{\frac{1-m}{m}}}{K(m)} f'\,(x)\ (-a < x < a)\,. \tag{6}$$

Решение НСИУ должно удовлетворять условию (3).

2. Решение определяющего НСИУ (6). В соответствии с функциональными свойствами функций $\Phi\,(x, y)$ и $\Lambda\,(x, y)$ необходимо построить ограниченное на концах интервала $(-a, a)$ решение НСИУ (6). Поступив совершенно аналогично сделанному в [6] и воспользовавшись известным методом нахождения ограниченного решения краевой задачи Римана [9], получим нужное решение (6):

$$\tau(x)=\frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi\left[2K(m)\right]^m}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f'(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}(s-x)}\left\{\left[f'(x)\right]^2+\frac{a^2-x^2}{\pi^2}\left[\int\limits_{-a}^{a}\frac{f'(s)ds}{s-x}\right]^2\right\}^{\frac{m-1}{2}}; \qquad (7)$$

причем функция $f(x)$ должна удовлетворять условию

$$\int\limits_{-a}^{a}f'(s)\,ds/\sqrt{a^2-s^2}=0. \qquad (8)$$

Рассмотрим важный частный случай когда $f(x)=Ax^2$ $(A>0)$. Очевидно, что в этом случае условие (8) удовлетворяется автоматически, а из (7) и (3) после элементарных вычислений находим

$$\tau(x)=\left[aA/K(m)\right]^m(2/a)\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\leqslant x\leqslant a);\quad\left[aA/K(m)\right]^m=T/\pi a. \qquad (9)$$

Вторая из формул (9) устанавливает зависимость между полудлиной интервала $(-a,a)$, физической константой $K(m)$ и заданной силой T.

В (9) введем безразмерные величины

$$\xi=x/a;\ A_0^{(m)}=aA;\ T_0=T/aK_0;\ S_0=AT/\pi K_0=A_0T_0/\pi;\ \tau_0^{(m)}(\xi)=\tau(a\xi)/K_0.$$

В результате формулы (9) примут, соответственно, вид

$$\tau_0^{(m)}(\xi)=\left(2A_0^{(m)}\right)^{1-\mu}\sqrt{1-\xi^2}\ (|\xi|\leqslant 1;\ \mu=1-m);\ A_0^{(m)}=\left(2^\mu S_0\right)^{1/(2-\mu)}. \qquad (10)$$

Далее займемся вопросом определения параметра δ. С этой целью сначала при помощи (9) по формуле (4) вычисляем функцию $\varphi(x)$. При этом будем считать, согласно постановке задачи, $\tau(x)=0$ при $|x|\geqslant a$. Воспользовавшись выражением известного интеграла с ядром Коши, по (4) вычислим функцию $\varphi(x)$ и ее выражение подставим опять в формулу (4) для $w(x,-0)$. После элементарных преобразований и перехода к безразмерным величинам получим

$$\begin{gathered}w_0^{(m)}(\xi,-0)=A_0^{(m)}\xi^2-\delta_0^{(m)};\ w_0^{(m)}(\xi,-0)=w(a\xi,-0)/a;\ (\xi=x/a;\ |\xi|\leqslant 1);\\ \delta_0^{(m)}=\delta/a=A_0^{(m)}\frac{1+m^2}{1-m^2}=A_0^{(m)}\frac{\mu^2-2\mu+2}{\mu(2-\mu)}\ (\mu=1-m;\ 0\leqslant\mu<1).\end{gathered} \qquad (11)$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае точные выражения основных величин поставленной нелинейной смешанной граничной задачи в безразмерной форме выражаются формулами (10) и (11).

3. Решение нелинейной смешанной граничной задачи по ОПСП. Методом ОПСП построим также приближенное решение рассматриваемой нелинейной смешанной задачи. Для получения основных уравнений сначала найдем решение задачи типа Фламана для нелинейного по степенному закону полупространства при антиплоской деформации, когда на границе полупространства в начале координат по отрицательному направлению оси Oz действует касательная сосредоточенная сила Q. С этой целью в формулу, получающуюся из (4) и (5), положим $\tau(x) = Q\delta(x)$, где $\delta(x)$ — известная дельта-функция. Будем иметь

$$-w(x,-0) = (Q/\pi)^{1/m} K(m)\, 2^{(m-1)/m} (m/(1-m))\, |x|^{(m-1)/m} \quad (|x| < \infty).$$

Отсюда, вводя в рассмотрение обобщенные перемещения или скорости $w_{\text{об}} = [-w(x,-0)]^m$ $(w(x,-0) < 0)$, линейно зависящие от Q, для распределенных касательных сил интенсивности $\tau(x)$ применим обычный линейный принцип суперпозиции, а затем вернемся к $w(x,-0)$. Далее, реализуя первое условие граничной задачи (2), придем к интегральному уравнению (ИУ) Карлемана относительно $\tau(x)$:

$$\frac{H(m)}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\tau(s)\,ds}{|x-s|^{1-m}} = [\delta - f(x)]^m \quad (-a < x < a);\ H(m) = \frac{1}{K_0}\left(\frac{m}{1-m}\right)^m. \qquad (12)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условию (3).

В ИУ (12) и в условии (3) перейдем к безразмерным величинам: $\xi = x/a$, $\eta = s/a$; $\tau_0(\xi) = \tau(a\xi)/K_0$. В результате они перейдут, соответственно, в ИУ

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\tau_0(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{\mu}} = g_0(\xi) \quad (-1 < \xi < 1; 0 < \mu < 1)\\ g_0(\xi) = (\mu/(1-\mu))^{1-\mu}\,[\delta_0 - f_0(\xi)]^{1-\mu};\ f_0(\xi) = f(a\xi)/a;\ \delta_0 = \delta/a\end{gathered} \qquad (13)$$

и в условие

$$\int_{-1}^{1} \tau_0(\xi)\,d\xi = T_0 \quad (T_0 = T/aK_0). \qquad (14)$$

Считая функцию $f(x)$ четной, решение ИУ (13) можно представить в форме бесконечного ряда с неизвестными коэффициентами x_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$:

$$\tau_0(\xi) = \left(1-\xi^2\right)^{(\mu-1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} x_n C_{2n}^{\mu/2}(\xi) = \left(1-\xi^2\right)^{(\mu-1)/2} G(\xi) \quad (-1 < \xi < 1),$$

где $C_{2n}^{\mu/2}(\xi)$ — многочлены Гегенбауэра. Далее используя известные спектральные соотношения для многочленов Гегенбауэра из [10], при помощи условия $G(1) = 0$ можно построить ограниченное на отрезке $[-1, 1]$ решение ИУ (13) при условии (14). Однако для простоты здесь такое решение построим в указанном выше частном случае, когда $f_0(\xi) = A_0\xi^2$ $(A_0 = aA)$, взяв функцию $g_0(\xi)$ из (13) в виде

$$g_0(\xi) = (\mu/(1-\mu))^{1-\mu}\left[\delta_0^{1-\mu} - A_0(1-\mu)\,\delta_0^{-\mu}\xi^2\right] \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1). \qquad (15)$$

Чтобы найти решение ИУ (13) при правой части (15) воспользуемся упомянутыми спектральными соотношениями для $C_0^{\mu/2}(\xi)$, $C_2^{\mu/2}(\xi)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d\eta}{|\xi-\eta|^{\mu}(1-\eta^2)^{(1-\mu)/2}} = \frac{1}{\cos(\pi\mu/2)}; \quad (-1 < \xi < 1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{C_2^{\mu/2}(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{\mu}(1-\eta^2)^{(1-\mu)/2}} = \frac{\Gamma(\mu+2)}{2\Gamma(\mu)\cos(\pi\mu/2)} C_2^{\mu/2}(\xi);\ C_2^{\mu/2}(\xi) = \mu\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\xi^2 - \frac{\mu}{2},$$

где $\Gamma(x)$ — известная гамма-функция Эйлера, и реализуем условия ограниченности решения в точках $\xi = \pm 1$. В результате находим

$$\tau_0(\xi) = \left[2A_0^{1-\mu}/(1+\mu)\right]\cos(\pi\mu/2)\left(1-\xi^2\right)^{(\mu+1)/2}; \ \delta_0 = (1-\mu)A_0/\mu. \tag{16}$$

Для определения безразмерной полудлины $A_0 = aA$ интервала, при которой имеет место ограниченное решение (16), подставляем это решение в условие (14). После несложных выкладок будем иметь

$$A_0 = \left[\sqrt{\pi}\mu(\mu+2)\Gamma(\mu/2)S_0/4\Gamma((1+\mu)/2)\cos(\pi\mu/2)\right]^{1/(2-\mu)}. \tag{17}$$

Таким образом, характеристики нелинейной задачи по методу ОПСП даются формулами (16)–(17). Сравнительный анализ точных и приближенных характеристик задачи показывают, что при m, близких к нулю (при μ, близких к 1) отклонения между ними значительны, а по мере приближения m к 1 (μ к 1) эти отклонения заметно уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 901–924.

[2] *Арутюнян Н. Х.* Плоская задача теории пластичности со степенным упрочнением материала // Изв АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат.наук 1959. Т. 12.2. С. 75–105.

[3] *Atkinson C. A.* Note on crack problems in power-law elastic materials and contact problems in non-linear creep // Int. J. Engng. Sci. 1971. V. 9. № 8. P. 729–739.

[4] *Александров В. М., Сумбатян М. В.* Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости // МТТ. 1983. № 1. С. 107–113.

[5] *Александров В. М., Брудный С. Р.* О методе обобщенной суперпозиции в контактной задаче антиплоского сдвига // МТТ. 1986. № 1. С. 71–78.

[6] *Мхитарян С. М.* О решении первой граничной задачи нелинейной теории установившейся ползучести для полупространства при антиплоской деформации // МТТ. 2012. № 6. С. 58–66.

[7] *Lee Y. S., Gong H.* Application of complex variables and pseudostress function to power-law materials and stress analisys of single rigid inclusion in power-law materials subjected to simple tension and pure shear // Int. J. Mech. Sci. 1987. V. 29. № 10/11. P. 669–694.

[8] *Качанов Л. М* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.

[9] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

[10] *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам // ПММ. 1963. Т. 27. Вып.5. С. 821–832.

Mkhitaryan S. M. *On solution to the mixed boundary-value problem of nonlinear theory of steady creep for half-space under antiplane deformation.* A mixed boundary value problem of the nonlinear theory of steady creep under antiplane deformation is considered when for the half-space a power-law relationship between stresses and strain rates occurs. On one part of half-space boundary plane, strain rates are given, and on the rest part, tangential stresses are zero. A closed solution of the problem is constructed. For a comparative analysis, an approximate solution of the problem is built. A particular case is considered.

О МОДЕЛЯХ МИКРОПОРИСТЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ТРАНСПОРТА МЕТАЛЛОСОДЕРЖАЩИХ МИКРОЧАСТИЦ

Наседкин А. В., Наседкина А. А., Рыбянец А. Н.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе представлена техника определения эффективных характеристик микропористого пьезокерамического материала с полностью металлизированными поверхностями пор, основанная на моделировании структуры представительного объема, методе эффективных модулей механики композитов и на методе конечных элементов. Для численного решения задачи гомогенизации применялся конечно-элементный комплекс ANSYS. Для моделирования металлизации на границах пор с керамической матрицей задавались граничные условия свободных электродов. Численно исследовано влияние металлизации поверхностей пор на значения важнейших эффективных модулей для пористой пьезокерамики PZT-4.

Введение. Пьезокерамические композиционные материалы и, в частности, пористые пьезокерамические материалы с улучшенными эксплуатационными характеристиками активно разрабатываются в последние годы [1, 2]. Недавно в [3] был предложен оригинальный метод транспорта микро- и наночастиц различных веществ в, соответственно, микро- и нанопористые пьезокерамические материалы. В результате применения данного метода можно получать пористые пьезокерамические материалы, внутри которых на границах керамической матрицы с порами осажены микро- или наночастицы из металла.

В настоящей работе представлены численные результаты по расчету эффективных свойств таких микропористых пьезокерамических материалов. Исследование проведено на основе комплексного подхода [4], включающего метод эффективных модулей, моделирование представительных объемов, конечно-элементное решение набора статических задач теории пьезоэлектричества со специальными граничными условиями и постпроцессорную обработку результатов.

1. Технология моделирования. Для определения эффективных модулей на первом этапе моделировался представительный объем Ω пористого пьезоэлектрического материала 3-0 связности в виде кубической решетки размера $L \times L \times L$, состоящей по каждой из сторон решетки из n_c геометрически идентичных элементарных кубических ячеек Ω_c размера $l_c \times l_c \times l_c$ ($l_c = L/n_c$). Каждая из элементарных ячеек в свою очередь состоит из 27 гексаэдральных восьмиузловых конечных элементов (рис. 1, *а*, *б*). Центральный кубический элемент ячейки имеет линейный размер l_p, определяемый через коэффициент k_p и длину l_c стороны ячейки: $l_p = k_p l_c$. Этот центральный элемент может иметь материальные свойства плотной пьезокерамики или может быть объявлен порой, в то время как остальные 26 элементов составляют каркас ячейки и могут иметь только пьезоэлектрические свойства плотной пьезокерамики.

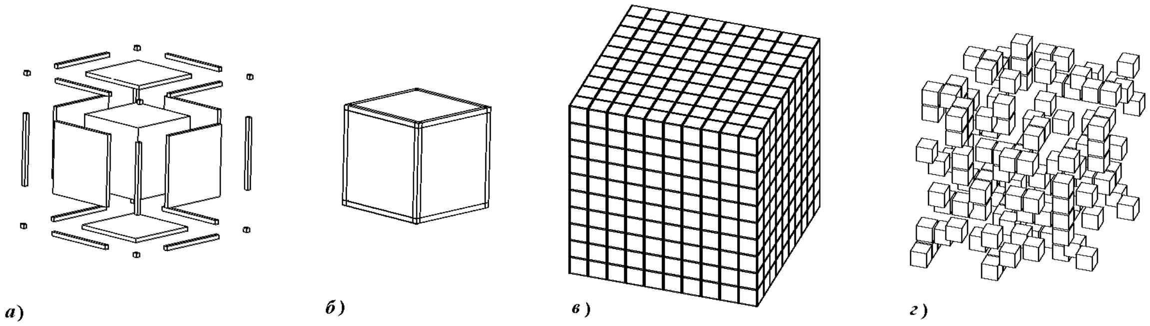


Рисунок 1 – Элементарная ячейка: (*а*) составляющие элементы ячейки, (*б*) ячейка в сборке; и пример представительного объема: (*в*) весь объем, (*г*) элементы — поры (рисунки *а*, *б* и *в*, *г* приведены в разных масштабах).

После трансляции элементарной ячейки по трем координатным осям по n_c раз генерируется кубическая решетка Ω. Затем в соответствие с предполагаемой пористостью p_s датчиком случайных числе выбираются N_p центральных конечных элементов ячеек, и их материальные свойства модифицируются на свойства пор. Если принять $N_p = [p_s(k_p/n_c)^3]$, где [...] — целая часть числа, то истинная пористость $p = (N_p l_p^3)/(n_c^3 l_c^3) = N_p(k_p/n_c)^3$ будет немного отличаться от p_s, но, например, при $n_c = 10$, $k_p = 0.9$ для $p_s = 0.1$ — $p = 0.09987$, а для $p_s = 0.5$ — $p = 0.50009$. Таким образом, можно считать, что $p_s \approx p$.

Один из вариантов представительного объема, построенного по описанному алгоритму при $n_c = 10$, $k_p = 0.9$, $p_s = 0.1$ приведен на рис. 1 (*в*, *г*). Отметим, что элементы — поры Ω_{pi} ($i = 1, 2, ..., N_p$) выбираются среди центральных элементов ячеек случайным образом, и поэтому при следующем проходе алгоритма их расположение (рис. 1, *в*) меняется.

В результате получается представительный объем пористого пьезоэлектрического материала с замкнутой пористостью (пористостью 3-0) стохастической структуры. В этом объеме имеется N_p элементов — пор Ω_{pi}, все грани $\Gamma_{pi} = \partial\Omega_{pi}$ которых полностью контактируют с границами соседствующих элементов матрицы композитного материала.

В соответствие с методом эффективных модулей рассмотрим систему дифференциальных уравнений статической теории электроупругости в объеме Ω

$$\mathbf{L}^*(\nabla)\cdot\mathbf{T} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{T} = \mathbf{c}^E\cdot\mathbf{S} - \mathbf{e}^*\cdot\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S\cdot\mathbf{E}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla)\cdot\mathbf{u},\ \mathbf{E} = -\nabla\varphi,\ \nabla = \left\{\begin{array}{c}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\end{array}\right\},\ \mathbf{L}^*(\nabla) = \left[\begin{array}{cccccc}\partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2\\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1\\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0\end{array}\right], \quad (2)$$

где $\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ — массив компонент напряжений σ_{ij}; $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции; $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ 2\varepsilon_{23},\ 2\varepsilon_{13},\ 2\varepsilon_{12}\}$ — массив компонент деформаций ε_{ij}; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{u}$ — вектор-функция перемещений; φ — функция электрического потенциала; $\mathbf{c}^E$ — 6×6 матрица упругих жесткостей, измеренных при постоянном электрическом поле; $\mathbf{e}$ —

3×6 матрица пьезомодулей; $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ — 3×3 матрица диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянных деформациях; $\mathbf{x}$ — вектор пространственных координат; $(...)^*$ — операция транспонирования для матриц и векторов.

На внешней границе $\Gamma = \partial\Omega$ представительного объема примем граничные условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_0, \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{3}$$

где $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{E}_0$ — постоянные массивы (векторы) размерности 6 и 3, соответственно.

Для обычной пористой пьезокерамики на границах пор и матрицы должны выполняться краевые условия

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{pi}, \quad i = 1,\, 2,\, ...,\, N_p\,. \tag{4}$$

Однако в задаче с полной металлизацией пор границы Γ_{pi} нужно считать эквипотенциальными поверхностями, и для них вместо (4) нужно использовать условия

$$\varphi = \Phi_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{pi}, \quad \int_{\Gamma_{pi}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}\, d\Gamma = 0\,, \tag{5}$$

где Φ_i — неизвестное значение потенциала, единое на каждой поверхности Γ_{pi}.

Таким образом, переход от задачи с обычной пористостью к задаче с металлизацией границ пор формально состоит в замене граничных условий (4) для неэлектродированных поверхностей на условия (5) для свободных электродов Γ_{pi}.

В случае пористой пьезокерамики класса 6mm, чтобы определить десять ее независимых эффективных констант ($c_{11}^{E\,\mathrm{eff}}$, $c_{12}^{E\,\mathrm{eff}}$, $c_{13}^{E\,\mathrm{eff}}$, $c_{33}^{E\,\mathrm{eff}}$, $c_{44}^{E\,\mathrm{eff}}$, e_{15}^{eff}, e_{31}^{eff}, e_{33}^{eff}, $\varepsilon_{11}^{S\,\mathrm{eff}}$, $\varepsilon_{11}^{S\,\mathrm{eff}}$), достаточно решить пять статических задач (1)–(4) или (1)–(3), (5) с различными $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{E}_0$, положив в краевых условиях (3) одну из компонент $S_{0\alpha}$, E_{0i} ($\alpha = 1, ..., 6$; $i = 1, 2, 3$) отличной от нуля ($\langle ... \rangle = (1/|\Omega|) \int_\Omega (...)\, d\Omega$):

I) $S_{01} = \varepsilon_0,\ S_{0\beta} = 0,\ \beta \neq 1,\ \mathbf{E}_0 = 0\ \Rightarrow\ c_{1j}^{E\,\mathrm{eff}} = \langle \sigma_{jj} \rangle / \varepsilon_0,\ j = 1, 2, 3, \quad e_{31}^{\mathrm{eff}} = \langle D_3 \rangle / \varepsilon_0$;

II) $S_{03} = \varepsilon_0,\ S_{0\beta} = 0,\ \beta \neq 3,\ \mathbf{E}_0 = 0\ \Rightarrow\ c_{j3}^{E\,\mathrm{eff}} = \langle \sigma_{jj} \rangle / \varepsilon_0,\ j = 1, 2, 3, \quad e_{33}^{\mathrm{eff}} = \langle D_3 \rangle / \varepsilon_0$;

III) $S_{04} = 2\varepsilon_0,\ S_{0\beta} = 0,\ \beta \neq 4,\ \mathbf{E}_0 = 0\ \Rightarrow\ c_{44}^{E\,\mathrm{eff}} = \langle \sigma_{23} \rangle / (2\varepsilon_0), \quad e_{15}^{\mathrm{eff}} = \langle D_2 \rangle / (2\varepsilon_0)$;

IV) $\mathbf{S}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0\, \mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad e_{15}^{\mathrm{eff}} = -\langle \sigma_{13} \rangle / E_0, \quad \varepsilon_{11}^{S\,\mathrm{eff}} = \langle D_1 \rangle / E_0$;

V) $\mathbf{S}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0\, \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad e_{3j}^{\mathrm{eff}} = -\langle \sigma_{jj} \rangle / E_0,\ j = 1, 2, 3,\ \varepsilon_{33}^{S\,\mathrm{eff}} = \langle D_3 \rangle / E_0$.

Для численного решения краевых задач теории пьезоэлектричества использовался метод конечных элементов и программный комплекс ANSYS, причем вся технология моделирования была реализована программно на языке APDL ANSYS.

2. Результаты и обсуждение. Расчеты эффективных модулей были проведены в ANSYS 11.0 для пористой пьезокерамики PZT-4 со следующими значениями материальных констант матрицы материала: $c_{11}^E = 13.9 \cdot 10^{10}$, $c_{12}^E = 7.78 \cdot 10^{10}$, $c_{13}^E = 7.74 \cdot 10^{10}$, $c_{33}^E = 11.5 \cdot 10^{10}$, $c_{44}^E = 2.56 \cdot 10^{10}$ (Н/м^2); $e_{33} = 15.1$, $e_{31} = -5.2$, $e_{15} = 12.7$ (Кл/м^2); $\varepsilon_{11}^S = 730\varepsilon_0$, $\varepsilon_{33}^S = 635\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ (Ф/м) — диэлектрическая проницаемость вакуума. Для пор задавались пренебрежимо малые величины упругих модулей $c_{\alpha\beta,p}^E = \kappa c_{\alpha\beta}^E$, пьезомодулей $e_{i\alpha,p} = \kappa$ ($\times 1$ Кл/м^2) и $\varepsilon_{ii,p}^S = \varepsilon_0$. Представительный объем генерировался при числе ячеек $n_c = 10$ по каждой стороне с коэффициентом $k_p = 0.9$.

Некоторые результаты вычислений иллюстрируют рис. 2, 3, где $r(c_{\alpha\beta}^E) = c_{\alpha\beta}^{E\,\mathrm{eff}} / c_{\alpha\beta}^E$ — значения эффективных модулей $c_{\alpha\beta}^{E\,\mathrm{eff}}$, отнесенные к соответствующим значениям модулей $c^E_{\alpha\beta}$ сплошной керамики, и т. д. Нижний индекс «u» обозначает относительные величины для композитного материала без металлизации пор, а нижний индекс «m» — относительные величины для материала с полной металлизацией поверхностей пор.

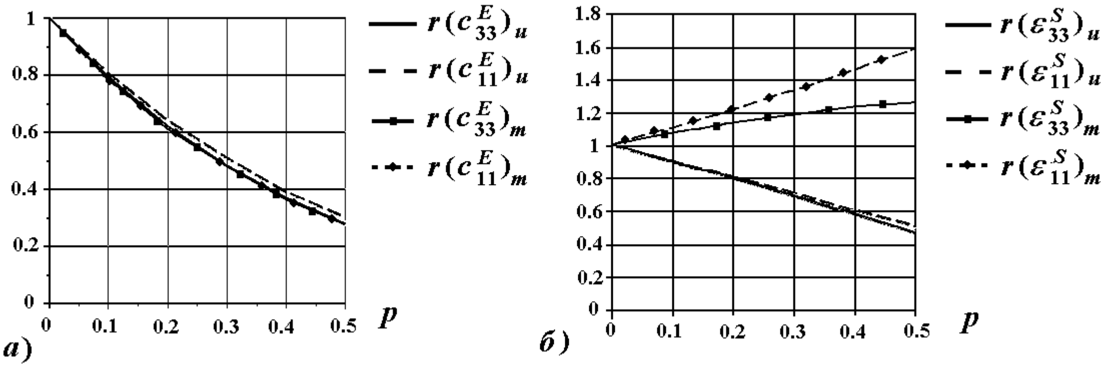


Рисунок 2 – Зависимости эффективных упругих жесткостей (a) и диэлектрических проницаемостей (b) от пористости.

Как видно (рис. 2, *а*), значения эффективных жесткостей $c^{E\,\mathrm{eff}}_{\alpha\beta}$ убывают с ростом пористости p, как для обычного пористого материала, так и для пористого материала с металлизацией пор, причем это убывание немного более сильное для модулей $(c^{E\,\mathrm{eff}}_{11})_m$, чем для модулей $(c^{E\,\mathrm{eff}}_{33})_m$. Между тем (рис. 2, *б*), эффективные модули диэлектрических проницаемостей обычной пористой пьезокерамики убывают с ростом пористости, но эффективные модули диэлектрических проницаемостей пьезокерамики с металлизированными порами, наоборот, возрастают с ростом пористости, причем модуль $(\varepsilon^{S\,\mathrm{eff}}_{11})_m$ растет быстрее, чем модуль $(\varepsilon^{S\,\mathrm{eff}}_{33})_m$.

Еще более интересно поведение пьезомодулей (рис. 3). Так, пьезомодули $(e^{\mathrm{eff}}_{33})_u$ и $(e^{\mathrm{eff}}_{31})_u$ для обычной пористой пьезокерамики убывают с ростом пористости. Однако, для пьезокерамики с металлизированными поверхностями пор пьезомодуль $(e^{\mathrm{eff}}_{33})_m$ также убывает с ростом p, причем более быстро, чем $(e^{\mathrm{eff}}_{33})_u$, в то время как пьезомодуль $(e^{\mathrm{eff}}_{31})_m$ возрастает с ростом пористости. Для пьезомодуля $(d^{\mathrm{eff}}_{33})_u$ обычной пористой пьезокерамики известно [2, 4, 5] его важное свойство слабой зависимости от пористости, хотя значения пьезомодуля $(d^{\mathrm{eff}}_{31})_u$ убывают по модулю с ростом p. Для пористой пьезокерамики с металлизированными порами, как видно из рис. 3, *б*), значения пьезомодулей $(d^{\mathrm{eff}}_{33})_m$ и $(-d^{\mathrm{eff}}_{31})_m$ возрастают с ростом p, причем $(-d^{\mathrm{eff}}_{31})_m$ растет быстрее, чем $(d^{\mathrm{eff}}_{33})_m$. Так, при пористости 50 % ($p = 0.5$) эффективный пьезомодуль $(-d^{\mathrm{eff}}_{31})_m$ почти в два раза превосходит аналогичное значение для сплошной керамики.

Существенные отличия в зависимостях модулей от пористости, связанные с направлением поляризации керамики x_3 и поперечным направлением x_1, можно объяснить тем, что рассматривались поры с одинаковыми размерами по трем координатным осям. В этом случае площади металлизованных поверхностей пор в направлении поляризации керамики x_3 оказываются меньше, чем в совокупности трансверсальных направлений x_1 и x_2. Поэтому интегральное граничное условие (5) будет давать различные эффекты связанности в направлении поляризации

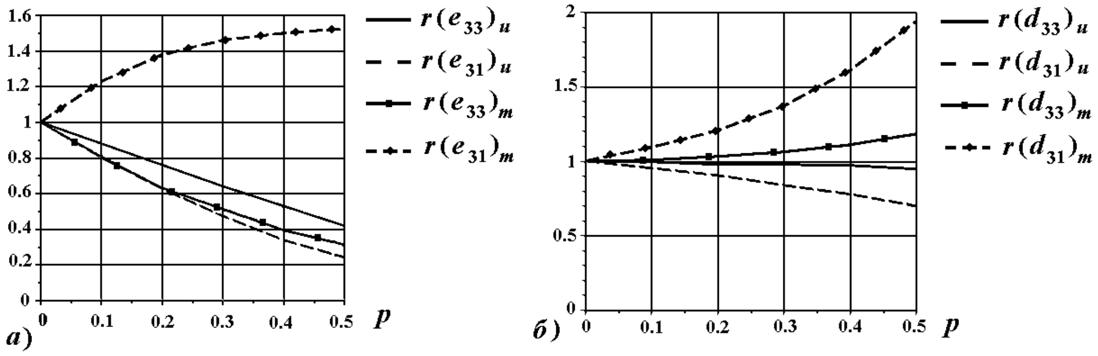


Рисунок 3 – Зависимости эффективных пьезомодулей e_{3j} (*а*) и d_{3j} (*б*) от пористости.

и в трансверсальных направлениях. Однако объяснение многих других поведений материальных модулей от пористости требует еще более полного анализа.

Итак, представленные результаты демонстрируют, что микропористая пьезокерамика с металлизированными поверхностями пор имеет целый ряд необычных свойств, перспективных для многих практических применений. Дальнейшее развитие исследований может быть связано с более адекватными структурами представительным объемов, с учетом механических свойств металлизированных поверхностей пор и размерных эффектов при переходе на наноуровень.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 16-01-00785.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Topolov V. Yu., Bowen C. R.* Electromechanical Properties in Composites Based on Ferroelectrics. London: Springer, 2009. 202 p.

[2] *Rybyanets A.* Porous piezoelectric ceramics — A historical overview // Ferroelectrics. 2011. V. 419 (1). P. 90–96.

[3] *Rybyanets A. N., Naumenko A. A.* Nanoparticles transport in ceramic matrixes: a novel approach for ceramic matrix composites fabrication / Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. Eds. I. A. Parinov, S.-H. Chang. N.-Y.: Nova Science Publishers, 2013. P. 3–18.

[4] *Nasedkin A. V., Shevtsova M. S.* Some finite element methods and algorithms for solving acousto-piezoelectric problems / Piezoceramic materials and devices. Ed. I. A. Parinov. N.-Y.: Nova Science Publishers, 2011. P. 231–254.

[5] *Rybyanets A. N., Nasedkin A. V.* Complete characterization of porous piezoelectric ceramics properties including losses and dispersion // Ferroelectrics. 2007. V. 360 (1). P. 57–62.

Nasedkin A. V., Nasedkina A. A., Rybyanets A. N. *Models of microporous piezoelectric composites produced by the method of transport of metal-containing microparticles*. The paper considers the technique of determining effective characteristics of microporous piezoceramic material with fully metallized pore surfaces based on the simulation of the structure of the representative volume, the effective moduli method and the finite element approach. Finite element package ANSYS has been used for the numerical solution of the homogenizing problem. The influence of the pore surface metallization on the values of the most important effective moduli for porous piezoceramics PZT-4 is investigated numerically.

К ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Недин Р. Д.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Владикавказский научный центр РАН

Представлены различные формулировки краевой задачи о колебаниях неоднородного пьезоэлектрического тела, находящегося в предварительном напряженно–деформированном состоянии. На основе сформулированного вариационного принципа построена постановка краевой задач об установившихся продольных колебаниях неоднородного пьезоупругого предварительно напряженного стержня.

1. Введение. Задачи о распространении упругих и электроупругих волн в изотропных, анизотропных и пьезоэлектрических материалах изучаются довольно давно [1–3]. В пьезоэлектриках часто образуется неучтенное напряженно деформированное состояние (ПНДС) в процессе производства, проведения технологических операций, в результате механических или температурных воздействий. Несмотря на существование различных с точки зрения механики сплошных сред подходов к моделированию ПНДС в телах, на сегодняшний день в мировой литературе наблюдается нехватка обзорных статей или монографий по этой теме. Один из наиболее полных обзоров по этой теме был составлен Ж. Б. Куангом [4], в котором приводится общая модель ПН для задачи электроупругости. В то же время вопрос о том, какие именно модели адекватно описывают наличие ПН в упругих и электроупругих телах, представляет собой важную проблему механики деформируемого твердого тела [5].

В настоящей работе представлена общая линеаризованная постановка о колебаниях электроупругого предварительно напряженного тела, сформулированы общая слабая постановка и один вариант вариационного принципа. В качестве примера, на основе полученных общих теоретических принципов сформулирована постановка задачи об установившихся продольных колебаниях пьезоупругого неоднородного предварительно напряженного стержня.

2. Общая линеаризованная постановка. Рассмотрим пьезоэлектрическое тело, которое в начальной деформированной конфигурации κ_0 содержит предварительные напряжения (ПН) и деформации. Возмущая тело в начальной конфигурации и накладывая на нее малые деформации, получим возмущенную (текущую) конфигурацию κ, в которой тело имеет объем V, ограниченный кусочно-гладкой границей $S = S_u \cup S_\sigma$, $S = S_D \cup S_\pm$, где S_u — защемленная часть поверхности, S_σ — часть поверхности, нагруженная механической нагрузкой, S_D и $S_\pm$ — соответственно неэлектродированная и электродированная части поверхности. При этом в качестве отсчетной будем считать естественную недеформированную конфигурацию. На основе результатов, изложенных в монографии [4], можно сформулировать линеаризованную постановку краевой задачи о колебаниях электроупругого тела при учете предварительных напряжений и деформаций в метрике возмущенной конфигурации κ:

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{T}}=\rho\ddot{\mathbf{u}},\ \nabla\cdot\mathbf{D}=0,\ \tilde{\mathbf{T}}=\sigma+\sigma\cdot\nabla\mathbf{u}^0+\sigma^0\cdot\nabla\mathbf{u},$$
$$\sigma=\hat{\mathbf{C}}\odot\varepsilon-\hat{\mathbf{e}}\odot\mathbf{E},\ \mathbf{D}=\mathbf{e}^*\odot\varepsilon+\epsilon^*\odot\mathbf{E}, \tag{1}$$
$$\mathbf{n}\cdot\tilde{\mathbf{T}}\Big|_{S_\sigma}=\mathbf{P},\ \mathbf{u}|_{S_u}=0,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}|_{S_D}=0,\ \varphi|_{S_\pm}=\pm V_0.$$

где $\nabla\ .=\mathbf{i}_k\frac{\partial\ .}{\partial x_k}$ — набла-оператор в метрике естественной недеформированной конфигурации в декартовой системе координат, при этом градиент деформации определяется по формуле $\mathbf{F}=\nabla\mathbf{R}=\mathbf{i}_m\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x_m}=\frac{\partial X_n}{\partial x_m}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n$, $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ — ортонормированный базис, $\tilde{\mathbf{T}}=\tilde{T}_{ij}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$ — несимметричный добавочный тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{D}=D_k\mathbf{i}_k$ — вектор электрической индукции, $\sigma=\sigma_{ij}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$ — добавочный тензор объективных напряжений, $\sigma^0=\sigma^0_{ij}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$ — тензор ПН, $\mathbf{u}=u_k\mathbf{i}_k$ — добавочный вектор малых перемещений, $\mathbf{u}^0=u^0_k\mathbf{i}_k$ — вектор предварительных перемещений (ПП), ρ — плотность тела, $\mathbf{n}=n_k\mathbf{i}_k$ — единичный вектор нормали к границе тела S, $\mathbf{P}=P_k\mathbf{i}_k$ — вектор активной механической нагрузки, приложенной к телу, $\Delta\varphi=\varphi|_{S_+}-\varphi|_{S_-}=2V_0$ — подведенная к электродам разность потенциалов. В этой постановке введены тензоры эффективных модулей $\hat{\mathbf{C}}=\hat{C}_{ijkl}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$, $\hat{\mathbf{e}}=\hat{e}_{mij}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$, $\mathbf{e}^*=e^*_{mij}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$ и $\epsilon^*=\epsilon^*_{mn}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n$, компоненты которых в декартовой системе координат определяются следующим образом:

$\hat{C}_{ijkl}=C_{ijkl}+C^0_{ijkl}$, $\hat{e}_{mij}=e_{mij}+\hat{e}^0_{mij}$, $e^*_{mij}=e_{mij}+e^0_{mij}$, $\epsilon^*_{mn}=\epsilon_{mn}+\epsilon^0_{mn}$, $C^0_{ijkl}=C_{ijml}u^0_{k,m}+C_{ijklmn}u^0_{m,n}+e_{mijkl}\varphi^0_{,m}$, $\hat{e}^0_{mij}=e_{mijkl}u^0_{k,l}-l_{mnij}\varphi^0_{,n}$, $e^0_{mij}=e_{mnj}u^0_{i,n}+e_{mijkl}u^0_{k,l}-l_{mnij}\varphi^0_{,n}$, $\epsilon^0_{mn}=l_{mnij}u^0_{i,j}-\epsilon_{mnj}\varphi^0_{,j}$.

При этом компоненты C_{ijkl} образуют тензор классических упругих постоянных, C_{ijklmn} — тензор нелинейных упругих постоянных 6-го ранга, e_{mij} — тензор пьезоэлектрических постоянных, e_{mijkl} — тензор нелинейных пьезоэлектрических постоянных, ϵ_{mn} — тензор диэлектрических проницаемостей, ϵ_{mnj} — тензор нелинейных диэлектрических проницаемостей, l_{mnij} — тензор электрострикционных постоянных.

Постановка (1) позволяет моделировать предварительно напряженный пьезоэлектрический материал с произвольным типом материальной неоднородности, в частности, с ее помощью можно описывать поведение различных функционально-градиентных пьезоэлектриков (ФГПЭ), задавая неоднородные законы изменения упругих и электрических модулей, входящих в состав эффективных характеристик.

3. Слабая постановка. В ряде случаев удобно переформулировать постановку исходной задачи в слабой форме; это полезно при решении частных задач с помощью метода конечных элементов, а также для вывода уравнений для решения обратных задач по идентификации механических или электрических свойств [5]. В случае установившихся колебаний пьезоупругого тела, представляя перемещения и потенциал в виде $u_i(x_k,t)=u_i(x_k)e^{-i\omega t}$ и $\varphi(x_k,t)=\varphi(x_k)e^{-i\omega t}$, после отделения временного множителя $e^{-i\omega t}$ уравнения из (1) для возмущенной конфигурации примут вид

$$T_{ij,j}+\rho\omega^2u_i=0,\ D_{i,i}=0. \tag{2}$$

Представим определяющее соотношение для тензора Пиолы в виде

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + \Gamma_{ij},\ \Gamma_{ij} = u^0_{i,m}\sigma_{mj} + u_{i,m}\sigma^0_{mj}.$$

Введем в рассмотрение пробные функции v_i и ψ, удовлетворяющие следующим главным граничным условиям: $v_i|_{S_u} = 0$, $\psi|_{S_\pm} = 0$. Используя стандартную технику, можно получить слабую постановку исходной задачи, разделив интеграл внутренней энергии на две части, соответствующие начальному и текущему состояниям:

$$\int\limits_V \left(t_{ij}\varepsilon^v_{ij} + d_k\psi_{,k}\right) dV + \int\limits_V \left(\left[t^0_{ij} + \Gamma_{ij}\right] v_{i,j} + d^0_k\psi_{,k}\right) dV = \int\limits_{S_\sigma} P_i v_i dS + \int\limits_V \rho\omega^2 u_i v_i dV, \quad (3)$$

где $\varepsilon^v_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)$ — тензор малых деформаций для пробной функции v_i, $v_{i,j}$ — тензор дисторсии для пробной функции v_i, $\sigma_{ij} = t_{ij} + t^0_{ij}$, $t_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} + e_{mij}\varphi_{,m}$, $t^0_{ij} = C^0_{ijkl}u_{k,l} + \hat{e}^0_{mij}\varphi_{,m}$, $D_k = d_k + d^0_k$, $d_k = e_{kij}u_{i,j} - \epsilon_{kn}\varphi_{,n}$, $d^0_k = e^0_{kij}u_{i,j} - \epsilon^0_{kn}\varphi_{,n}$, $\Gamma_{ij} = u^0_{i,m}\left(t_{mj} + t^0_{mj}\right) + u_{i,m}\sigma^0_{mj}$.

4. Вариационный принцип. На основе приведенной слабой постановки (3) можно сформулировать общий вариационный принцип для пьезоупругого неоднородного тела в условиях предварительного напряженно-деформированного состояния. Для этого возьмем в качестве пробных функций v_i и ψ вариации соответствующих функций перемещения δu_i и потенциала $\delta\varphi$, удовлетворяющие главным граничным условиям задачи. В ряде случаев удобно разложить квадратичный функционал $\hat{\Pi}$ на две части, соответствующие начальному и возмущенному состояниям. В этом случае получаем формулировку вариационного принципа в следующем виде:

$$\delta\left(\Pi + \Pi^0 - \omega^2 K - R\right) = 0, \quad (4)$$

$$\Pi = \int\limits_V \left(\frac{1}{2}C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + e_{kij}\varphi_{,k}u_{i,j} - \frac{1}{2}\epsilon_{kn}\varphi_{,k}\varphi_{,n}\right) dV,$$

$$\Pi^0 = \int\limits_V \left(\frac{1}{2}\tilde{C}^0_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + e^0_{kij}\varphi_{,k}u_{i,j} - \frac{1}{2}\epsilon^0_{kn}\varphi_{,k}\varphi_{,n}\right) dV,$$

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho u_i^2 dV,\ R = \int\limits_{S_\sigma} P_i v_i dS,$$

где Π и Π^0 — энергии возмущенного и начального состояния, соответственно. В этом случае эффективные модули определяются следующим образом:

$\tilde{C}^0_{ijkl} = \left(\delta_{im} + u^0_{i,m}\right) C^0_{mjkl} + u^0_{i,m}C_{mjkl} + \delta_{ik}\sigma^0_{lj}$, $C^0_{ijkl} = C_{ijml}u^0_{k,m} + C_{ijklmn}u^0_{m,n} + e_{mijkl}\varphi^0_{,m}$, $e^0_{mij} = e_{mnj}u^0_{i,n} + e_{mijkl}u^0_{k,l} - l_{mnij}\varphi^0_{,n}$, $\epsilon^0_{mn} = l_{mnij}u^0_{i,j} - \epsilon_{mnj}\varphi^0_{,j}$.

Исходя из полученного вариационного принципа, сформулируем следующее утверждение. Среди всех кинематически возможных полей смещений и потенциала, истинные доставляют стационарное значение следующему функционалу:

$$\Lambda_3 = \Pi + \Pi^0 - \omega^2 K - R.$$

На основе построенных общих слабых и вариационных постановок можно получать различные частные постановки задач о колебаниях предварительно напряженных электроупругих тел, приняв соответствующие упрощающие гипотезы. Также эти постановки можно использовать для построения обобщенных соотношений взаимности, операторных уравнений и итерационных процессов для постановки и решения обратных задач по идентификации факторов начального напряженно-деформированного состояния или электрических полей.

5. Задача о продольных колебаниях предварительно напряженного неоднородного пьезоупругого стержня. Рассмотрим пьезоупругий стержень длины l, консольно закрепленный одним концом, в режиме установившихся колебаний, вызываемых продольной силой $Pe^{i\omega t}$, приложенной к свободному концу. Стержень находится в условиях неоднородного одноосного ПНДС, характеризуемого компонентой тензора ПН $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x)$ и продольной компонентой вектора ПП $u_1^0 = u_1^0(x)$, остальные компоненты тензора ПН и вектора ПП положим равными нулю. Будем считать, что неоднородность материала стержня характеризуется тем, что модуль Юнга E и пьезомодуль d неоднородны в направлении осевой координаты x. Таким образом, примем следующие гипотезы:

$\varphi = \varphi(x)$, $u_1 = u(x)$, $u_2 = u_3 = 0$, $u_1^0 = u^0(x)$, $u_2^0 = u_3^0 = 0$, $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x) \neq 0$.

Рассмотрим граничные условия, соответствующие отсутствию электродов на торцах стержня: $D(0) = 0$, $D(l) = 0$. На основе вариационного принципа (4) можно получить постановку задачи для описанного стержня, применив вышеописанные гипотезы. В случае поставленных граничных условий можно выразить производную потенциала через перемещение, удовлетворив соответствующим граничным условиям: $\varphi' = \frac{d^*}{\epsilon} u'$. Тогда постановку задачи можно записать относительно функции перемещения, исключив потенциал:

$$\left[\left(E^* + \frac{d^{*2}}{\epsilon}\right) u' F\right]' + \rho F \omega^2 u = 0, \ u(0) = 0,$$

$$\left(E^* + \frac{d^{*2}}{\epsilon}\right) u'(l) = P,$$

где $E^* = E\left[(1 + u'_0)^2 + \sigma_0\right]$, 1 $d^* = d(1 + u'_0)$ — эффективный модуль упругости и эффективный пьезомодуль, соответственно.

Задавая определенный вид неоднородности законов изменения модуля Юнга и пьезомодуля, получим постановку задачи для конкретного типа пьезоэлектрического стержня, в частности, выполненного из ФГПЭ-материала. В случае отсутствия ПНДС в стержне, полученная постановка задачи совпадет с классической постановкой для пьезоэлектрического стержня.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (114072870112) «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур», Гранта Президента Российской Федерации МК-5440.2016.1, РФФИ (№ 16-01-00354, № 16-38-60157 мол_а_дк).

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований

по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (114072870112) «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур», Гранта Президента Российской Федерации МК-5440.2016.1, РФФИ (№ 16-01-00354, № 16-38-60157 мол_а_дк).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Auld B. A.* Acoustic fields and waves in solids. NY.: Wiley, 1973. 421 p.

[2] *Dieulesaint E., Royer D.* Elastic waves in solids. NY.: Wiley, New York, 1980, 390 p.

[3] *Fischer, F. A.* Fundamentals of electroacoustics. NY.: Interscience, New York, 1955, 481 p.

[4] *Kuang Z. B.* Theory of Electroelasticity. Heidelberg, New York: Springer, 2014, 541 p.

[5] *Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д.* Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Монография. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2014. 206 с.

Nedin R. D. *On the theory of inhomogeneous prestressed piezoelectric bodies*. Different formulations of the boundary problems on vibrations of inhomogeneous piezoelectric body under residual stress-strain state are presented. On the basis of the variational principle obtained, the statement of the boundary-value problem on longitudinal vibration of inhomogeneous piezoelectric prestressed rod.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВБЛИЗИ ВЫРАБОТКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

Нескородев Р. Н.
Донецкий национальный университет

С помощью преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к временным уравнениям закона Гука в докладе предложено решение задач ползучести горных пород в условиях обобщенной плоской деформации анизотропного полупространства с протяженной выработкой. Представлены численные исследования для выработки эллиптического сечения.

Введение. В работе [1] приведены результаты экспериментов по деформированию образцов различных изотропных горных пород. Показано, что свойства ползучести горных пород подчиняются уравнениям линейной наследственности Вольтерра. При применении принципа Вольтерра к решению задач ползучести большое значение имеет аналитическая форма задания ядер ползучести и релаксации. Экспериментально найденные значения этих ядер задаются дискретным набором значений, соответствующим некоторым временам. По этим экспериментальным значениям строят аналитические аппроксимации ядер в специальной форме. Такая аппроксимация часто является источником дополнительных погрешностей.

В работе [2] показано, что построение алгебры операторов Вольтерра не связано с каким либо их специальным видом и может быть осуществлено для любых резольвентных операторов. Это обстоятельство делает возможным реализацию решений граничных задач теории вязкоупругости во времени проводить алгебраическими методами. Решение может быть осуществлено с использованием произвольных исходных операторов и выражено через значения этих операторов, заданных непосредственно таблицей экспериментальных данных.

Горные породы по своей структуре анизотропны. В работе [3] предложена методика преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости для случая деформации анизотропного массива горных пород к временным уравнениям закона Гука. Предложенный подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме.

В настоящей работе предлагается метод решения задач вязкоупругости для случая обобщенной плоской деформации анизотропного массива горных пород с протяженной выработкой.

1. Модель массива горных пород. Массив горных пород рассматривается как нижнее полупространство, отнесенное к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Начало системы поместим на глубине H, ось Ox_2 направим вертикально вверх, а плоскость Ox_1x_3 параллельна плоскости, ограничивающей полупространство. Массив обладает анизотропией общего вида. Наиболее часто массив горных пород является трансверсально-изотропной средой. Такая среда может служить моделью слоистого массива осадочного происхождения с плоскостями изотропии, параллельными слоям. В предположении, что толщина слоя на порядок меньше характерного поперечного размера горной выработки, модель допускает ее использование при исследовании напряженно-деформированного состояния вблизи горных выработок. Рассмотрим более подробно такую среду. При испытании образцов горных пород на ползучесть их относят к системе координат $Oxyz$, когда плоскость Oxy совпадает с плоскостью изотропии и она горизонтальна, а ось Oz — нормальна к этой плоскости. В этой системе координат уравнения закона Гука имеют вид

$$\varepsilon_m^1 = C_{mk}\sigma_k^1 \quad (m, k = \overline{1,6}). \tag{1}$$

Ниже приведены значения элементов матрицы C_{mk}, отличные от нуля:

$$C_{11} = C_{22} = 1/E_1,\ C_{12} = C_{21} = -\nu_1/E_1,\ C_{33} = 1/E_2,\ C_{44} = C_{55} = 1/G_2,$$
$$C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = -\nu_2/E_2,\ C_{66} = 1/G_1 = 2(1+\nu_1)/E_1; \tag{2}$$

E_1, E_2 — модули Юнга для растяжения-сжатия в направлении плоскости изотропии и нормальном к ней; ν_1 — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости, а ν_2 — при растяжении в направлении нормальном к плоскости изотропии; G_1, G_2 — модули сдвига для плоскости изотропии и нормальной к ней.

Пусть на глубине H пройдена горизонтальная выработка эллиптического поперечного сечения. Полагаем, что плоскость изотропии расположена под углом φ к горизонту, а выработка направлена под углом ψ к плоскости изотропии. Систему координат $Ox_1x_2x_3$ удобнее связать с выработкой. Плоскость Ox_1x_2 совместим с поперечным сечением выработки, ось Ox_2 направим вертикально вверх, а Ox_3 вдоль выработки. Переход от системы координат $Oxyz$ к системе $Ox_1x_2x_3$ осуществляется путем поворота на угол φ вокруг оси $Oy = Ox_3$, а затем вокруг оси $Oz = Ox_2$ на угол ψ. Упругие постоянные a_{mk} получаются из постоянных C_{mk} путем преобразований, возникающих при повороте координатных осей на углы φ и ψ [4]. Если угол наклона плоскости изотропии отличен от нуля ($\varphi \neq 0$), то в зависимости от направления оси выработки к плоскости изотропии (угол ψ — произволен) уравнения закона Гука в системе координат $Ox_1x_2x_3$ будут иметь вид уравнений для материала, обладающего общей анизотропией.

При решении задач вязкоупругости уравнения закона Гука (1) необходимо трансформировать в уравнения состояния следующего вида

$$e_m^1 = \overline{C}_{mk}s_k^1 \quad (m, k = \overline{1,6}). \tag{3}$$

Упругие постоянные C_{mk} заменяются операторами вида $\overline{C}_{mk} = C_{mk}(1 + p_{mk}^*)$, а напряжения и деформации определяются соотношениями $s_k^1(t = 0) = \sigma_k^1$, $e_m^1(t = 0) = \varepsilon_m^1$. Интегральный оператор p_{mk}^* имеет вид

$$p_{mk}^* s_k(t) = \int\limits_0^t \frac{dp_{mk}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_k(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Значения функции $p_{mk}(t)$ находятся из эксперимента.

Рассмотрение задач установившейся ползучести осуществляется при нагрузках, постоянных во времени. Если нагрузки постоянны, то напряжения $s_k(\tau)$ в (4) можно принять зависимыми от верхнего предела и вынести из под знака интеграла. Оператор (4) в этом случае будет таким:

$$p_{mk}^{*} \bullet 1 = \int\limits_{0}^{t} \frac{dp_{mk}\,(t-\tau)}{d\,(t-\tau)} \bullet 1 \; d\tau = p_{mk}\,(t) - 1 \tag{5}$$

Рассмотрим задачу определения значений интегральных операторов p_{mk}^{*}, входящих в представления для величин $\overline{C}_{mk}$. Матрица $\overline{C}_{mk}$ формируется с помощью технических упругих постоянных (2), которые в процессе длительного нагружения заменяются временными интегральными операторами. Из экспериментов на ползучесть определяются операторы технических упругих постоянных. В работе [1] приведены результаты экспериментов на ползучесть для образцов различных изотропных горных пород. Экспериментам были подвергнуты образцы наиболее распространенных видов донбасских горных пород: алевролит, аргиллит, песчаник и известняк. В результате опытов установлено, что горные породы под воздействием нагрузок, не превосходящих 70 % разрушающих, обнаруживают свойства ползучести. Величины деформаций ползучести ко времени ее стабилизации достигают 150-370 % упругих деформаций. Продолжительность ползучести алевролита и аргиллита составляет до 600 час., песчаника — до 860, а известняка — 50 час. Процесс ползучести горных пород подчиняется общему закону линейного деформирования, определяемого уравнениями состояния теории наследственности Вольтерра. Из элементов C_{mk} матрицы (1) формируются временные операторы $\overline{C}_{mk}$ в форме $\overline{C}_{mk} = C_{mk}[1 + p_{mk}^{*}(\delta_{mk})]$, где δ_{mk} — регулярная точка [2].

Предположим, что из опыта получена кривая ползучести для величины

$$\overline{C}_{11} = \overline{C}_{22} = 1/\overline{E}_1 = \frac{1}{E_1}\;[1 + p_{11}^{*}\,(\delta_{11})] = \frac{1}{E_1} p_{E1}(t). \tag{6}$$

Здесь p_{E1} — таблично заданная кривая ползучести для величины $1/E_1$, полученная из эксперимента.

Из соотношения (6) найдем значение интегрального оператора

$$p_{11}^{*}(\delta_{11}) = p_{E1}(t) - 1. \tag{7}$$

При решении граничных задач анизотропной теории вязкоупругости возникают трудности, связанные с экспериментальным определением реологических параметров материалов. Опытные данные, которые имеются в литературе, не содержат полной информации о величинах, необходимых для решения задач вязкоупругости. Поэтому используются различные допущения относительно реологических параметров. Например, если экспериментальные значения величины $\overline{\nu_1}$ не известны, то они могут быть определены согласно предположению, что оператор объемного сжатия является постоянной величиной [5]. Это означает, что имеет место равенство $(1 - 2\overline{\nu}_1)/\overline{E}_1 = (1 - 2\nu_1)/E_1$ из которого находим

$$\overline{C}_{12} = \overline{C}_{21} = -\frac{\overline{\nu}_1}{\overline{E}_1} = -\frac{\nu_1}{E_1}\left[1 + \frac{1}{2\nu_1}\,(p_{E1}(t) - 1)\right]. \tag{8}$$

Предполагая, что $1/E_1 - 2\nu_2/E_2 = 1/\overline{E_1} - 2\overline{\nu}_2/\overline{E}_2$, находим

$$\frac{\overline{\nu}_2}{\overline{E}_2} = \frac{\nu_2}{E_2}\left[1 + \frac{E_2}{2E_1\nu_2}\left(p_{E1}(t) - 1\right)\right], \frac{1}{\overline{E}_2} = \frac{1}{E_2}\left[1 + \frac{E_2}{E_1}\left(p_{E1}(t) - 1\right)\right]. \tag{9}$$

Значение оператора $\overline{C}_{66}$ определяется через известные операторы по формуле

$$\overline{C}_{66} = 2\left(\frac{1}{\overline{E}_1} + \frac{\overline{\nu}_1}{\overline{E}_1}\right). \tag{10}$$

Экспериментальные данные о ползучести элементов матрицы $C_{44} = C_{55} = 1/G_2$ отсутствуют. Поэтому будем считать, что $1/G_2 = 1/\overline{G}_2$.

Таким образом, получены значения интегральных операторов для компонент матрицы (1). Дальнейшее преобразование матрицы $\overline{C}_{mk}$ осуществляется при переходе к другим системам координат, поворотом на угол φ, а затем на угол ψ. В результате получается матрица операторных функций a_{mk}.

Как видно, в предложенной методике не ставится вопрос о выборе ядер ползучести или релаксации для реальных материалов, обладающих ползучестью. На основе свойств резольвентных операторов для интегральных уравнений с ядрами произвольного вида, предложен метод получения решения задач вязкоупругости путем использования непосредственно экспериментальных данных, заданных таблично.

2. Численные результаты. В работе [1] даны результаты экспериментов по ползучести образцов некоторых изотропных горных пород. Измерялась только продольная деформация. Оператор $1/\overline{E}_1$ аппроксимировался с помощью соотношения

$$\frac{1}{\overline{E}_1} = \frac{1}{E_1}\left[1 + \frac{\delta}{1-\alpha}\,t^{1-\alpha}\right]. \tag{11}$$

Значения реологических параметров для материала алевролит равны $\alpha = 0.726$, $\delta = 0.0094\,\text{сек}^{(\alpha-1)}$.

Операторный коэффициент Пуассона $\overline{\nu}_1$ не определялся. Поэтому матричные элементы $\overline{C}_{12} = \overline{C}_{21}$ следует определять из представления (8). Операторный коэффициент $\overline{C}_{66} = 1/\overline{G}_1$ определяется из соотношения (10). Поскольку для изотропного материала имеют место равенства $\nu_1 = \nu_2$, $E_1 = E_2$, то матрица уравнений состояния изотропного материала сформирована.

Горные породы по своей структуре анизотропны. Экспериментальные данные о параметрах ползучести пород малочисленны. В пределах точности измерений для образцов транстропных пород не установлены различия параметров ползучести по разным направлениям [6]. В данной работе при проведении расчетов для транстропных пород используются реологические постоянные, полученные для изотропных материалов. В качестве такой породы взят алевролит транстропный со следующими упругими постоянными [7]:

$$e_1 = 1.074, \quad e_2 = 0.523, \quad g_2 = 0.120, \quad \nu_1 = 0.413, \quad \nu_2 = 0.198.$$

Значения величин E_1, E_2, G_2 выражаются через безразмерные величины e_1, e_2, g_2 по формулам $E_1 = e_1 \cdot 9.8 \cdot 10^3$ МПа, $E_2 = e_2 \cdot 9.8 \cdot 10^3$ МПа, $G_2 = g_2 \cdot 9.8 \cdot 10^3$ МПа.

Исследование напряженно-деформированного состояния проводились для выработки эллиптического сечения в любой момент времени по методике, изложенной в работе [4]. Ниже даны результаты расчетов для алевролита в моменты времени $t = 0$, соответствующего упругому состоянию и для $t_{st} = 600$ час., которое для алевролита считается временем стабилизации процесса ползучести. Полуоси эллипса: a — вдоль оси x_1 и b — вдоль оси x_2. Вычислялись максимальные по модулю нормальные перемещения $u_n/\text{м}$ и напряжения $\sigma_\theta/(\rho g H)$, где $\rho = 2500\,\text{кг}/\text{м}^3$ - плотность, $g = 9.8\,\text{м}/\text{с}^2$, $H = 1000\,\text{м}$ — глубина заложения выработки. Примеры расчетов:

1) $a = 2\,\text{м},\ b = 1\,\text{м},\ \varphi = \psi = 0,\ u_n(0) = -0.0241,\ u_n(t_{st}) = -0.0307,$
$\sigma_\theta\,|_{\theta=0}(0) = -3.6556, \quad \sigma_\theta\,|_{\theta=0}(t_{st}) = -2.8030.$

2) $a = 1\,\text{м},\ b = 2\,\text{м},\ \varphi = \psi = 0,\ u_n(0) = -0.0202,\ u_n(t_{st}) = -0.0250,$
$\sigma_\theta\,|_{\theta=0}(0) = -2.4391, \quad \sigma_\theta\,|_{\theta=0}(t_{st}) = -1.7708.$

Максимальные перемещения возникают в почве и кровле. Перемещения, увеличиваясь по модулю приводят к заполнению выработки (ползучесть), а напряжения релаксируют, что приводит к уменьшению напряженного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ержанов Ж. С.* Теория ползучести горных пород и ее приложения. Алма-Ата: Наука, 1964. 175 с.

[2] *Громов В. Г.* Алгебра операторов Вольтерра и ее применения в задачах вязкоупругости // Доклады АН СССР. 1968. Т. 182. № 1. С. 56–59.

[3] *Нескородев Р. Н.* Вязкоупругое поведение анизотропного массива горных пород вблизи протяженной выработки // Материалы I Международной научной конференции «Донецкие чтения 2016». 16-18 мая 2016. г. Донецк. Т. 1. С. 38–40.

[4] *Нескородев Н. М., Нескородев Р. Н.* Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве. Донецк: ДонНУ, 2003. 148 с.

[5] *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

[6] *Айталиев Ш. М.* Развитие механики подземных и специальных сооружений в Казахстане за последние 40 лет //Прикладная механика. 2004. Т. 40. № 10. С. 3–36.

[7] *Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Масанов Ж. К.* Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1980. 212 с.

Neskorodev R. N. *The stress-strain state near elliptical cross section development in the creep anisotropic rocks*. With the conversion of integral equations of viscoelasticity of state tasks to the equation of time Hooke's law, the report proposes a solution to rock creep problems under generalized plane deformation of an anisotropic half-space with an extended elaboration. Numerical studies to develop an elliptical cross section.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАВЕДЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА В НЕОДНОРОДНОМ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОМ СЛОЕ

Нестеров С. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Поставлена задача о нахождении наведенного потенциала в неоднородном термоэлектроупругом слое. Задача сводится к численному решению начально-краевой задачи термоупругости с модифицированными термомеханическими характеристиками. Рассмотрено влияние различных законов неоднородности на наведенный электрический потенциал.

Введение. В настоящее время важной технической проблемой является расчет параметров для конструирования различных температурных датчиков на основе функционально-градиентных пироматериалов. В пироматериалах в результате теплового воздействия, наводится разность потенциалов, которая подлежит определению с учетом взаимного влияния теплового, электрического и упругих полей. В настоящее время задачи термоэлектроупругости для однородных тел изучены достаточно хорошо [1–3]. Однако в последнее время стали широко распространяться функционально-градиентные пироматериалы, в которых материальные свойства изменяются непрерывно. В этом случае решения задач термоэлектроупругости получены только для степенных и экспоненциальных законов неоднородности [4]. В данной работе рассмотрена процедура определения потенциала, который наводится в результате воздействия тепловым потоком на верхнюю грань неоднородного термоэлектроупругого слоя из пьезокерамики класса 6mm. Рассмотрено влияние различных законов неоднородности на наведенный потенциал.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о тепловом воздействии на неоднородный слой из пьезокерамики класса 6mm толщиной $2H$, поляризованный вдоль оси x_3. Нижняя плоскость жестко защемлена и заземлена, а верхняя свободна от напряжений. На верхней плоскости в силу пироэффекта наводится электрический потенциал. Начально-краевая задача описывается следующей системой:

$$(c_{33}u')' + (e_{33}\varphi')' - (\gamma_{33}\theta)' = \rho\ddot{u}, \tag{1}$$

$$(e_{33}u')' + (э_{33}\varphi')' + (g_3\theta)' = 0, \tag{2}$$

$$-T_0(\gamma_{33}\dot{u}' - g_3\dot{\phi}') + (k_{33}\theta')' - c_\varepsilon\dot{\theta} = 0, \tag{3}$$

$$u(-H,t) = 0, \quad \theta(-H,t) = 0, \quad \varphi(-H,t) = 0; \tag{4}$$

$$\sigma(+H,t) = 0, \quad -k_{33}\theta'(+H,t) = q(t), \quad \varphi(+H,t) = +\varphi_0(t), \tag{5}$$

$$\theta(x_3,0) = u(x_3,0) = \varphi(x_3,0) = \dot{u}(x_3,0) = 0. \tag{6}$$

Условие для тока:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{S_+}(e_{33}u' - э_{33}\varphi' + g_3\theta)|_{x_3=H}dS = -I(t). \tag{7}$$

Здесь u — перемещение, θ — приращение температуры, σ — напряжение, c_{33} — компонента тензора модулей упругости, ρ — плотность, c_ε — удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации, γ_{33} — компоненты тензора температурных напряжений, e_{33} — компонента тензора пьезокоэффициентов, $э_{33}$ — компонента тензора диэлектрических проницаемостей, g_3 — компонента тензора пирокоэффициентов, $q(t)$ — плотность теплового потока.

Обезразмерим задачу (1)–(6) согласно формулам:

$$z = \tfrac{x_3}{H}, \quad U = \tfrac{u}{H}, \quad W = \tfrac{\theta}{\theta_0}, \quad \theta_0 = \sqrt{\tfrac{T_0 s_0}{c_0}},$$
$$Q = \tfrac{q}{q_0}, \quad q_0 = \tfrac{k_0\theta_0}{H}, \quad V = \tfrac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \phi_0 = H\sqrt{\tfrac{s_0}{э_{33}}},$$
$$J(t) = \tfrac{I(t)}{I_0}, \quad I_0 = \tfrac{k_0 S\sqrt{э_{33}s_0}}{c_0 H^2}, \quad v_0 = \sqrt{\tfrac{s_0}{\rho_0}}, \quad c_{33}^* = c_{33} + \tfrac{e_{33}^2}{э_{33}},$$
$$\gamma_{33}^* = \gamma_{33} - \tfrac{e_{33}g_{3}}{э_{33}}, \quad c_\varepsilon^* = c_\varepsilon - \tfrac{T_0 g_3^2}{э_{33}}, \quad t_1 = \tfrac{H}{v_0},$$
$$t_2 = \tfrac{H^2 c_0}{k_0}, \quad \tau = \tfrac{t}{t_2}, \quad \bar{s}(z) = \tfrac{c_{33}^*(x_3)}{s_0}, \quad \bar{k}(z) = \tfrac{k_{33}(x_3)}{k_0},$$
$$\bar{\rho}(z) = \tfrac{\rho(x_3)}{\rho_0}, \quad \bar{c}(z) = \tfrac{c_\varepsilon^*(x_3)}{c_0}, \quad \bar{\gamma}(z) = \tfrac{\gamma_{33}^*(x_3)}{\gamma_0},$$
$$k_0 = \max_{x_3\in[0,l]} k_{33}(x_3), \quad c_0 = \max_{x_3\in[0,l]} c_\varepsilon^*(x_3), \quad \gamma_0 = \max_{x_3\in[0,l]} \gamma_{33}^*(x_3),$$
$$\rho_0 = \max_{x_3\in[0,l]} \rho(x_3), \quad s_0 = \max_{x_3\in[0,l]} c_{33}^*(x_3), \quad \delta_0 = \tfrac{t_1}{t_2},$$
$$d_1 = \gamma_0\sqrt{\tfrac{T_0}{s_0 c_0}}, \quad d_2 = g_3\sqrt{\tfrac{T_0}{э_{33}c_0}}, \quad d_3 = \tfrac{e_{33}}{\sqrt{c_0 э_{33}}}, \quad d_4 = \tfrac{d_2}{d_3},$$
$$d_5 = \tfrac{1}{d_3}, \quad \Omega = \tfrac{\sigma}{s_0}. \tag{8}$$

После обезразмеривания и исключения потенциала, задача термоэлектроупругости (1)–(6) сводится к задаче термоупругости с модифицированными коэффициентами:

$$(\bar{s}(z)U')' - d_1(\bar{\gamma}(z)W)' = \delta_0^2\rho\ddot{U}, \tag{9}$$
$$(\bar{k}(z)W')' - \bar{c}(z)\dot{W} - d_1\bar{\gamma}(z)\dot{U}' + d_2 J(t) = 0, \tag{10}$$
$$U(-1,\tau) = W(-1,0) = 0, \tag{11}$$
$$\Omega(1,\tau) = 0, \quad -k(1)W'(1,\tau) = Q(\tau), \tag{12}$$
$$W(z,0) = U(z,0) = \dot{U}(z,0) = 0. \tag{13}$$

Здесь $\Omega(z,\tau) = U'(z,\tau) - d_1\bar{\gamma}W(z,\tau) + d_3\int\limits_0^\tau J(y)dy$ — напряжение.

Неизвестный наведенный потенциал находят в результате интегрирования условия для тока:

$$V_0(\tau) = d_2\int\limits_{-1}^{1} W(\xi,\tau)d\xi + d_3 U(1,\tau) + \int\limits_0^\tau J(y)dy. \tag{14}$$

После применения преобразования Лапласа по времени к (9)–(12) полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений в трансформантах решается методом Рунге — Кутта для набора значений параметра преобразования Лапласа. Обращение преобразования Лапласа осуществлено на основе разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра [5].

В вычислениях принято: $\delta_0 = 10^{-8}$, $d_1 = 0.004$, $d_2 = 0.02$, $d_3 = 0.3$. Т, к. параметр δ_0 мал, то значение потенциала может быть найдено из решения квазистатической задачи, если в (9)–(13) положить $\delta_0 = 0$. В работе проведено сравнение результатов точного и приближенного подходов. Оказалось, что квазистатический и динамический подходы дают величины потенциала, различающиеся менее чем на 1% при $\tau > 10^{-7}$.

2. Результаты вычислительных экспериментов. В первой серии вычислительных экспериментов проведено исследование влияния различных типов тепловой нагрузки на характер изменения наведенного электрического потенциала неоднородного слоя. Выяснено, что для нагрузки $Q(\tau) = \delta(\tau)$ при $\tau \to \infty$ потенциал экспоненциально убывает; для нагрузки $Q(\tau) = H(\tau)$ потенциал монотонно растет от нуля и со временем выходит на некоторое значение; для нагрузки $Q(\tau) = H(\tau) - H(\tau - \tau_1)$ потенциал монотонно растет от нуля до пикового значения, достигаемого при $\tau = \tau_1$, а затем быстро стремится к нулю с ростом τ.

Во второй серии экспериментов исследовалось влияние различных законов наиболее распространенных на практике типов градиентных зависимостей (степенных, экспоненциальных) коэффициента теплопроводности слоя на электрический потенциал.

На рис. 1 представлен график изменения электрического потенциала, наводящегося под воздействием тепловой нагрузки $Q(\tau) = H(\tau) - H(\tau - 0.02)$. При этом сплошной линией изображено изменение наведенного потенциала при $\bar{k}(z) = cos(2z)$; штрихпунктирной — при $\bar{k}(z) = e^{-2z}$.

Выяснено, что различные законы неоднородности коэффициента теплопроводности (рисунок 1), удельной теплоемкости и коэффициента температурного на-

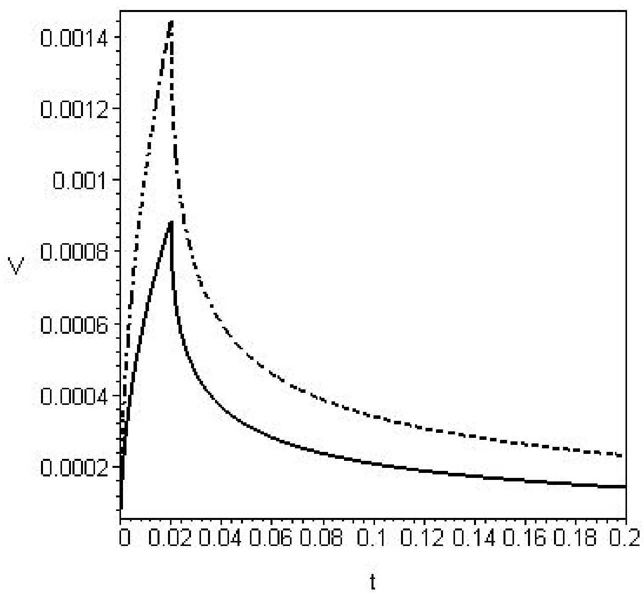


Рисунок 1 – Изменение электрического потенциала при тепловой нагрузке $Q(\tau) = H(\tau) - H(\tau - \tau_1)$.

пряжения сильно влияют на характер изменения наведенного потенциала. В тоже время различные законы неоднородности модуля упругости и плотности материала не оказывают влияния на характер изменения наведенного потенциала.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00354-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Mindlin R.* Equations of high frequency, vibrations of thermopiezoelektric crystal plates // Int. J. Solid. Structures. 1974. Vol. 10. № 1. P. 625–637.

[2] *Ватульян А. О.* Тепловой удар по термоэлектроупругому слою // Вестник ДГТУ. 2001. Т. 1(7).№ 1. С. 82–89.

[3] *Bassionn E., Youssef H.* Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings // Int. J. Thermoelasticity. 2013. Vol. 1. № 1. P. 4–12.

[4] *Yoshihiro O., Yoshinobu T.* Transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat supply // Arch Appl. Mech. 2005. Vol. 74. P. 449–465.

[5] *Крылов В. И., Скобля Н С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.

Nesterov S.A. *Determination of the induced potential in the thermoelectroelastic layer*. The problem of determination the induced potential in the inhomogeneous layer is supplied. The problem is reduced to the numerical solution of initial-boundary value problem of thermoelasticity with modified thermo-mechanical characteristics. The influence of various laws of heterogeneity on the induced electric potential is considered.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТРАСТРОМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ФОРМЫ РОГОВИЦЫ ГЛАЗА

Никитин И. С.[1,2], Журавлев А. Б.[2], Ирошников Н. Г.[3], Якушев В. Л.[1]

[1]*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*
[2]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*
[3]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

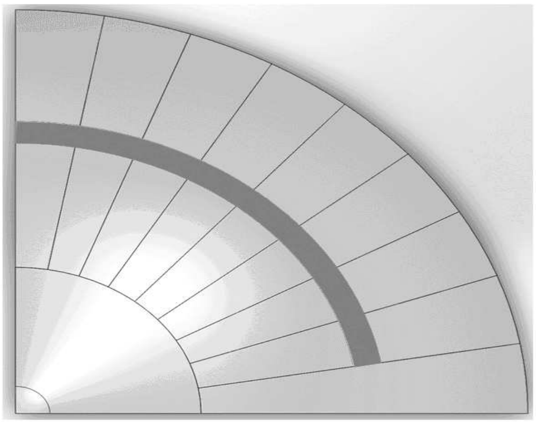
Разработана комплексная механико-математическая модель коррекции кератоконуса роговицы глаза. Модель состоит в решении задачи совместного контактного деформирования гибких кольцевых сегментов и роговицы глаза. Деформирование кольцевых сегментов описывается дифференциальным уравнением изгиба криволинейного стержня, а деформирование роговицы глаза с дефектом рассчитывается как трехмерная упругая задача для слоя сферического сегмента со сглаженным коническим выступом на вершине методом конечных элементов. На основе предложенной модели разработан программный комплекс, позволяющий оценивать геометрические и механические параметры кольцевого сегмента, вставляемого в роговицу для коррекции дефекта.

Кератоконус (от др.-греч. $\kappa\varepsilon\rho\alpha\varsigma$ — «рог» и $\kappa\omega\nu o\varsigma$ — «конус») — заболевание глаза, при котором роговица принимает коническую форму. Кератоконус может привести к серьёзному ухудшению зрения. Суть операции коррекции формы роговицы состоит в следующем. В ходе операции фемтосекундным лазером в структуре роговице выполняют два полукруглых микроканала для последующего помещения туда имплантов. Импланты представляют собой два кольцевых сегмента с радиусом, большим, чем радиус подготовленных каналов. Материал имплантов — полиметаметилкрилат. Эти гибкие кольцевые сегменты, вставленные в микроканалы, стремятся восстановить свою начальную форму, тем самым деформируя и растягивая роговицу. Предполагается, что при растяжении роговицы может разгладиться дефект ее формы — кератоконус.

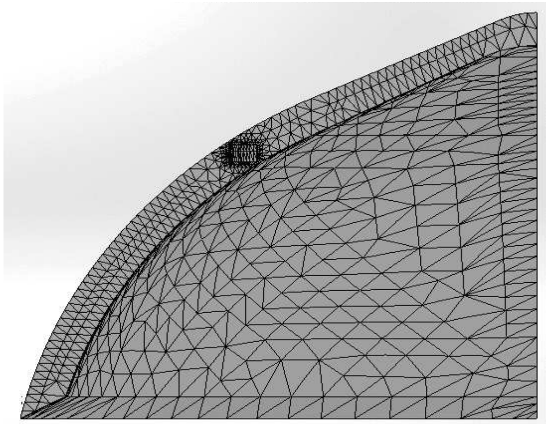
1. Механико-математическая модель деформирования роговицы и гибкого кольцевого сегмента

С использованием конечно-элементного программного комплекса была создана геометрическая модель склеры глаза и роговицы (Рис. 1) с рассматриваемым дефектом кератоконуса. Этот дефект может располагаться как на оси роговицы (создавая «конусность» ее формы), так и сместиться с оси на какой-то участок ее боковой поверхности. Будем исследовать случай осевого расположения дефекта. Поскольку для этого случая задача обладает четырехсторонней симметрией, в расчетах будет рассматриваться одна четверть полной конструкции.

Роговица разбита на несколько секторов для того, чтобы сформировать отдельные участки разреза под имплант, к которым можно прикладывать различное по величине контактное давление. Расположение импланта показано на рис. 1а. Трехмерная конечно-элементная модель роговицы с дефектом и фрагмент сетки



а)

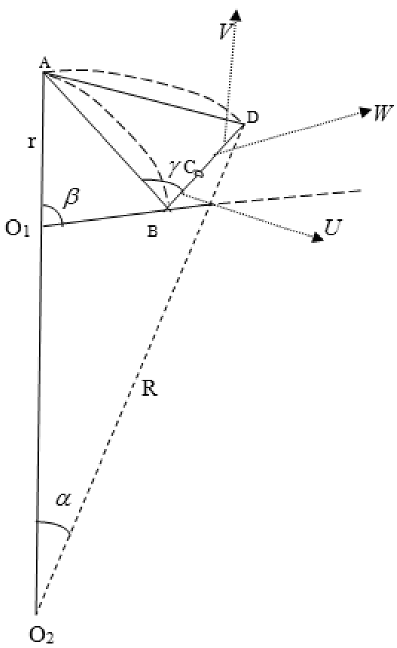


б)

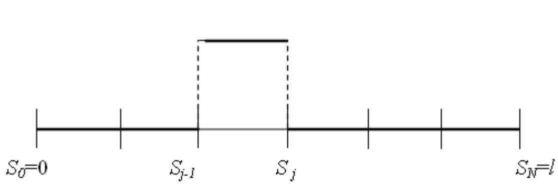
Рисунок 1 – Вид на роговицу с кольцевым имплантом (а) и фрагмент конечно-элементной сетки вокруг микроканала в роговице со сгущением (б)

вокруг микроканала в роговице со сгущением более подробно можно увидеть на рис. 1б.

Рассмотрим упрощенную геометрическую схему деформирования роговицы и кольцевого сегмента. Начальная форма кольцевого сегмента — дуга AD, начальная форма канала в роговице — дуга AB (Рис. 2а). В этот канал в ходе операции вставляется кольцевой сегмент, который стремится восстановить начальную форму и занимает положение AC (Рис. 2а), тем самым деформируя и растягивая оболочку роговицы.



а)



б)

Рисунок 2 – Геометрическая схема смещения роговицы и изгиба импланта (а) и схема нагружения импланта с единичной погонной нагрузкой в j-ом элементе (б)

Введем обозначения (Рис. 2а): r — радиус сечения роговицы, R — радиус кривизны импланта (кольцевого сегмента), α — угол раствора импланта до операции, $l = R\alpha = r\beta$ — длина импланта. Разобьем дугу импланта на N элементов (Рис. 2б): $\beta_k = s_k/r$, $\alpha_k = s_k/R$, $s_k = \frac{k}{M}l$, $V_k = (R_k^2 + r_k^2 - 2R_k r_k cos\frac{\beta_k - \alpha_k}{2})^{1/2}$, $R_k = 2Rsin\frac{\alpha_k}{2}$, $r_k = 2rsin\frac{\beta_k}{2}$. Уравнение и граничные условия для изгибного смещения импланта имеют вид:

$$\frac{d^4W}{ds^4} = \frac{q(s)}{EJ_x}$$

где $W = W^I = 0$ при $s = 0$ и $W^{II} = W^{III} = 0$ при $s = l$, E — модуль Юнга для импланта. J_s — момент инерции его сечения, $q(s)$ — погонная нагрузка. Решение дифференциального уравнения для изгибного смещения импланта с единичной погонной нагрузкой в j-ом элементе (Рис. 2б), $j = 0, 1, 2, ..N$:

$$s \in [0, s_{j-1}] \ : \quad w_j = \frac{1}{6}(s_{j-1} - s_j)s^3 + \frac{1}{4}(s_j^2 - s_{j-1}^2)s^2$$

$$s \in [s_{j-1}, s_j] \ : \quad w_j = \frac{1}{24}s^4 - \frac{1}{6}s_j^2 s^3 + \frac{1}{4}s_j^2 s^2 - \frac{1}{6}s_{j-1}^3 s + \frac{1}{24}s_{j-1}^4$$

$$s \in [s_j, l] \ : \quad w_j = \frac{1}{6}(s_j^3 - s_{j-1}^3)s - \frac{1}{24}(s_j^4 - s_{j-1}^4)$$

Смещение импланта в k-ом узле при погонных нагрузках в j-х элементах, равных $q_j = dp_j$:

$$W_k = \sum_{j=1}^{N} \omega_{kj} p_j, \quad \omega_{kj} = \frac{d}{EJ_z} w_j(s_k), \quad J_z = dh^3/12$$

Смещение роговицы U_k в k-ом узле при нагрузках в j-х элементах, равных p_j:

$$U_k = \sum_{j=1}^{N} u_{kj} p_j$$

Смещения роговицы $u_{kj} = u_j(s_k)$ находятся в результате решения трехмерной упругой задачи для слоя сферического сегмента со сглаженным коническим выступом на вершине с использованием МКЭ при единичной нагрузке в j-ом элементе микроканала. Из геометрической схемы следует (Рис. 2б):$W_k + U_k = V_k$.

Отсюда возникает система линейных алгебраических уравнений для определения контактных нагрузок P_j :

$$\sum_{j=1}^{N} (\omega_{kj} + u_{kj}) p_j = V_k$$

Из этой системы находим значения p_j, затем функции $U(s)$, и, наконец, поле смещений роговицы с помощью МКЭ. Этот метод расчета можно считать вариантом метода коллокаций, так как мы требуем равенства смещений импланта и роговицы в дискретном числе точек N.

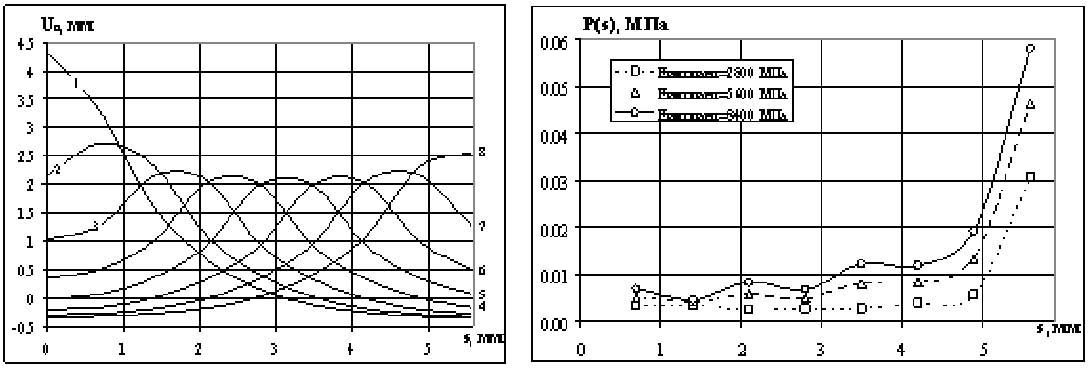
2. Расчеты деформирования роговицы и кольцевого сегмента.

Основные расчеты проводились для треугольного сечения кольцевого сегмента, используемого в медицинской практике. Результаты расчетов смещений и нового профиля роговицы представлены на следующей серии рисунков. Были выбраны следующие параметры расчетов. Модуль Юнга импланта (полиметаметилкрилат) равен $E_{imp} = 2800$ МПа. Для модуля Юнга роговицы существует большая неопределенность, отмеченная в [1].

В предварительных расчетах использовались значения $E_{rog} = 1.2$ МПа [2], $E_{rog} = 0.54$ МПА [[1], ссылка на Woo, 1972], $E_{rog} = 0.34$ МПа [[1][, ссылка на Hoeltzel, 1992]. Ниже приведены результаты для среднего значения $E_{rog} = 0.34$ МПа. Также прикладывалось внутреннее давление на склеру и роговицу, соответствующее величине внутриглазного давления $P_{rog} = 0.00267$ МПа [2] (20 мм рт. ст.). Были выбраны следующие геометрические параметры задачи: $r = 4$ мм, $R = 5.2$ мм, $\beta = 80^o$, $h = 0.3$ мм, $d = 0.2$ мм.

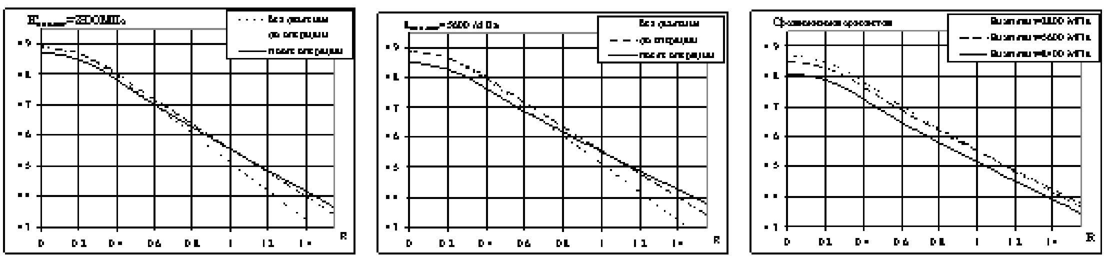
Для сравнения представлены также расчеты для более жестких имплантов $E_{imp} = 5600$ МПа и $E_{imp} = 8400$ МПа. Приведем распределение нормальных (радиальных) перемещений по длине импланта для $E_[imp] = 2800$ МПа (Рис. 3а). Маркеры на кривых соответствуют номеру элемента, к которому приложена нагрузка.

Распределение контактных давлений по дуге импланта показаны на рис. 3б.



а) б)

Рисунок 3 – Конечно-элементные решения для радиальных смещений при единичной нагрузке в j-ом элементе (а), распределение контактных давлений по длине импланта (б)



а) б) в)

Рисунок 4 – Изменение профиля роговицы для различных жесткостей импланта

Более жестким имплантам соответствуют большие значения растягивающего давления, следовательно, в этих случаях следует ожидать более значительного сглаживания профиля роговицы.

На рис. 4 представлены данные расчетов профиля роговицы при использовании имплантов различной жесткости. Показан верхний центральный участок профиля, приблизительно соответствующий протяженности дефекта.

Из приведенных графиков изменения формы роговицы видно, что наибольшее проседание роговицы наблюдается в ее центральной части. Предложенный метод моделирования операции коррекции кератоконуса позволяет проводить численную оценку механических свойств и геометрических параметров кольцевого импланта для достижения желаемого эффекта — разглаживания дефекта роговицы глаза.

Выводы.

Предложенная механико-математическая модель позволяет численно моделировать деформацию и изменение формы роговицы глаза при внедрении гибкого кольцевого сегмента в заранее подготовленный для него канал. С помощью этой хирургической операции возможно разглаживание дефекта роговицы (кератоконуса). Расчеты показали, что подобная процедура наиболее эффективна для коррекции дефекта при его центральном положении на оси роговицы. Для коррекции дефекта при его смещенном положении необходим индивидуальный подбор уровня расположения импланта, его угла раствора и начального радиуса кривизны.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ №15-29-03895офи_м.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Смотрич Е. А.* Топография роговицы и распределение механических напряжений в ней при различных видах корнеальной хирургии. Дисс. на соискание уч. ст. к.м.н. 2014. URL: http://www.mntk.ru/files/upload/dis-smotrich.pdf

[2] *Хусаинов Р. Р., Цибульский В. Р., Якушев В. Л.* Моделирование деформации глаза при измерении внутриглазного давления оптическим методом // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51. №2. С. 349–362.

Nikitin I. S., Zhuravlev A. B., Iroshnikov N. G., Yakushev V. L. *Mathematical model of intrastromal corneal shape correction.* The complex mechanical-mathematical model of corneal keratoconus correction is developed. The model includes the solution of the contact interaction problem for flexible ring segments and cornea. Deformation of the ring segments is described by differential equations of the curved bar bending, deformation of the cornea with a defect is calculated by the finite element method as the three-dimensional elastic problem for a spherical segment layer with rounded conical rising on the top.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Оконечников А. С.[1], **Тарлаковский Д. В.**[2], **Федотенков Г. В.**[1]
[1]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*
[2]*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

Рассматривается упругая изотропная полуплоскость, подверженная воздействию касательной подвижной сосредоточенной нагрузки. В начальный момент времени нагрузка приладывается вдоль границы полуплоскости и движется вдоль нее, в общем случае, по произвольному закону. Целью работы является отыскание распределения касательных перемещений границы полуплоскости под в зависимости от координаты и времени.

1. Постановка задачи. Введем декартову систему координат Oxz, так, что ось Ox направлена вдоль границы упругой полуплоскости, а ось Oz — вглубь нее. Вектор перемещения имеет вид:

$$\mathbf{u}(x,z,t) = u(x,z,t)\mathbf{e}_1 + w(x,z,t)\mathbf{e}_3;$$

где u, w — перемещения вдоль оси Ox и Oz соответственно, t — время, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ — орты системы координат.

К границе невозмущенной полуплоскости прикладывается сосредоточенная касательная нагрузка $q(x,\tau) = \delta(x - Vt)$, двигающаяся в положительном направлении оси Ox со скоростью V (рисунок 1), $\delta(\bullet)$ — дельта-функция Дирака.

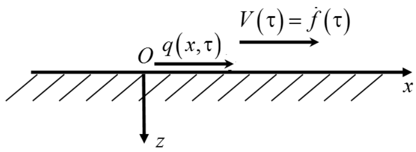


Рисунок 1 – Постановка задачи

Для описания математической постановки исследуемого процесса используются уравнения движения Ламе [1]:

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где λ, μ и ρ — упругие постоянные Ламе и плотность среды;

Соотношения Коши, закон Гука и условия на границе полуплоскости имеют вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}, \tag{2}$$

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\theta, \ \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \ \sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\theta; \tag{3}$$

$$\sigma_{13}|_{z=0} = -q(x,t),\, \sigma_{33}|_{z=0} = 0.$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций. Граничные условия соответствуют отсутствию нормальных напряжений и равенству касательных напряжений приложенной нагрузке.

Предполагается, что перемещения в бесконечно удаленной точке ограничены:

$$u = O(1),\, \sigma_{ij} = O(1) \quad \text{z} \to \infty, \quad (i,j = 1,3).$$

В силу отсутствия возмущения в начальный момент времени, имеем однородные начальные условия:

$$u(x,z,0) = 0,\, \sigma_{ij}(x,z,0) = 0; \;\; (i,j = 1,3).$$

Для перехода от уравнений Ламе к двум независимым уравнениям, представим вектор перемещения как сумму потенциальной и соленоидальной составляющих:

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\boldsymbol{\psi} \tag{4}$$

где $\varphi(x,z,t)$ — скалярный, а $\boldsymbol{\psi}(x,z,t)$ — векторный потенциалы упругих смещений. В плоском случае имеется только одна ненулевая компонента $\psi_2 = \psi(x,z,t)$ векторного потенциала. С учетом (4), математическая подстановка задачи будет включать следующие соотношения:

уравнения движений в потенциалах:

$$\ddot{\varphi} = \Delta\varphi, \quad \eta^2\ddot{\psi} = \Delta\psi, \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}, \tag{5}$$

где Δ — оператор Лапласа;

граничные условия:

$$\begin{gathered} \sigma_{33}|_{z=0} = 0,\;\; \sigma_{13}|_{z=0} = -H\left(\tau\right)\delta\left[x - f(\tau)\right], \\ u = O\left(1\right),\;\; w = O\left(1\right),\;\; r \to \infty,\;\; r = \sqrt{x^2+z^2}; \end{gathered} \tag{6}$$

начальные условия

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = 0,\;\; \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}\Big|_{\tau=0} = 0. \tag{7}$$

Также в постановку задачи входят связи компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений с упругими потенциалами, вытекающие из (4),(2) и (3), В математической постановке, включающей выражения (5)–(7) использована следующая система безразмерных величин (штрихи обозначают размерные величины):

$$x = \frac{x'}{L}, z = \frac{z'}{L}, \tau = \frac{c_1 t}{L}, u = \frac{u'}{L},\;\; w = \frac{w'}{L}, \varphi = \frac{\varphi'}{L^2},\;\; \psi = \frac{\psi'}{L^2},$$

$$\eta = \frac{c_1}{c_2},\;\; c_R = \frac{c'_R}{c_1},\;\; \sigma_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\lambda+2\mu},\;\; \kappa = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = 1 - \frac{2}{\eta^2}.$$

Здесь τ — безразмерное время, c_R — скорость поверхностных волн Рэлея, L — некоторый линейный размер.

2. Метод решения. Для решения задачи (5)–(7) согласно принципу суперпозиции касательные перемещения границы полуплоскости $u(x,0,t) = u_0(x,t)$, представим так:

$$u_0\,(x,\tau) = -G_{11}\,(x,\tau) **H\,(\tau)\,\delta\,[x - f(\tau)]\,, \tag{8}$$

Где знаком $**$ обозначена двойная свертка функций по времени и пространственной координате, $G(x,\tau)$ — функция влияния для упругой полуплоскости, является решением задачи (5) с однородными начальными условиями и следующими граничными условиями:

$$\sigma_{13}|_{z=0} = -\delta(x)\delta(\tau),\ \ \sigma_{33}|_{z=0} = 0, u = O(1),\ \ \sigma_{ij} = O(1), \quad z \to \infty,\ (i,j = 1,3).$$

Функция влияния имеет структуру:

$$\begin{gathered}
G(x,\tau) = \sum_{j=1}^{2} G_j(x,\tau),\\
G_j(x,\tau) = \frac{g_j\,(x^2,\tau^2)\,k_j\,(x^2,\tau^2)}{\pi\eta^4 P_3\,(x^2,\tau^2)} H\,(\tau - \eta_j\,|x|)\,, \\
g_1\left(x^2,\tau^2\right) = 4\tau\left(\tau - \eta^2 x\right), g_2\left(x^2,\tau^2\right) = \left(\eta^2 x - 2\tau\right)^2,\\
k_j(x,\tau) = \sqrt{\tau - \eta_j^2 x}, P_3\left(x^2,\tau^2\right) = P_1\,(x,\tau)\,P_2\,(x,\tau)\,,\\
P_1\,(x,\tau) = x - c_R^2\tau,\ \ P_2\,(x,\tau) = x^2 - 2\alpha^2 x\tau + \beta^2\tau^2,\\
\alpha^2 = \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2},\ \ \beta^2 = \frac{16\,(\eta^2 - 1)}{\eta^8 c_R^2},\ \ \eta_1 = 1,\ \ \eta_2 = \eta,
\end{gathered} \tag{9}$$

где $H(\bullet)$ — функция Хевисайда.

При учете свойств дельта-функции, двойная свертка из (8) сводится к следующему интегральному представлению:

$$u_0\,(x,\tau) = -\int\limits_0^{\tau} G(x - f(t), \tau - t)dt. \tag{10}$$

Далее, учитывая однородность функции влияния и вводя замену переменной $y = x - f(t)/\,(\tau - t)$, расчетная формула для перемещения границы полуплоскости примет вид:

$$\begin{aligned}
u_0(x,\tau) &= -\sum_{j=1}^{2} u_j\,(x,\tau),\\
u_j\,(x,\tau) &= \int\limits_{y_{j1}}^{y_{j2}} \tilde{G}_j\,(y)\,\sqrt{1 - \eta_j^2 y^2} dy,\\
\tilde{G}_j\,(y) &= \frac{G_j\,(y,1)}{\left(y - \dot{f}\,[t\,(y;x,t)]\right)\sqrt{1 - \eta_j^2 y^2}},
\end{aligned} \tag{11}$$

где пределы интегрирования y_{j1}, y_{j2} определяются носителями функции влияния из (10) при $t \in [0, \tau]$.

3. Движение нагрузки с постоянной скоростью. Для дальнейшего исследования необходимо задать закон движения. Ограничимся рассмотрением случая движения нагрузки с постоянной скоростью $V = const$ по закону $f(\tau) = V\tau$. Для удобства разложим функцию влияния, в выражении (11) на элементарные дроби:

$$\tilde{G}_j\left(y\right) = \sum_{l=1}^{7} \frac{a_{jl}}{y - b_l}, \tag{12}$$

$$b_1 = V,\ b_2 = c_R,\ b_3 = -c_R,\ b_4 = c,\ b_5 = \bar{c},\ b_6 = -c,\ b_7 = -\bar{c},$$

$$a_{jl} = \frac{1}{\pi\eta^4} \frac{g_j(b_l^2, 1)}{\prod\limits_{\substack{r=1 \\ r\neq l}}^{7} (b_l - b_r)},$$

где c, $\bar{c}$ — комплексно спряженные корни многочлена $P_2\left(x, \tau\right)$:

$$P_2\left(x, \tau\right) = Q_2\left(y\right) Q_2\left(-y\right)$$

$$Q_2\left(y\right) = y^2 + \gamma y + \beta = \left(y + c\right)\left(y + \bar{c}\right),$$

$$\gamma = \sqrt{2\left(\alpha^2 + \beta\right)},\ c = \frac{\gamma + i\sqrt{2\left(\beta - \alpha^2\right)}}{2}.$$

Выражение (11) при учете замены $z = \eta_j y$ приходит к виду:

$$u_0(x, \tau) = -\sum_{j=1}^{2} u_j\left(x, \tau\right),\ \ u_j\left(x, \tau\right) = \sum_{l=1}^{7} a_{jl} I_{jl}\left(x, \tau; c_{jl}\right),$$

$$I_{jl}\left(x, \tau; c_{jl}\right) = \int\limits_{z_{j1}}^{z_{j2}} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z - c_{jl}} dz,\ c_{jl} = \eta_j b_l.$$

Входящие в выражение для перемещений интегралы носят как регулярный, так и сингулярный характер. В последнем случае они понимаются в смысле главного значения по Коши.

На рисунках (2) и (3) представлены распределения касательных перемещений границы полуплоскости в момент времени $\tau = 1$ при различных скоростных режимах движения нагрузки. Здесь штриховые асимптоты соответствуют положению фронта движения нагрузки (длинный штрих) и фронтам волны Рэлея (короткий штрих). Штриховые пунктирные асимптоты соответствуют положению фронтов волны сдвига.

Полученные решения схожи с результатами работы [2], в которой рассматривается воздействие нормальной к границе полуплоскости подвижной нагрузки, что объясняется схожестью структур ядер интегральных представлений решений [3].

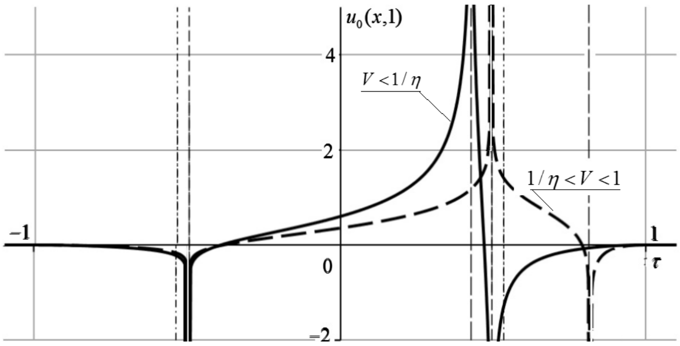


Рисунок 2 – Распределение касательных перемещений по оси Ox при $V < 1/\eta$ и $1/\eta < V < 1$ в момент времени $\tau = 1$

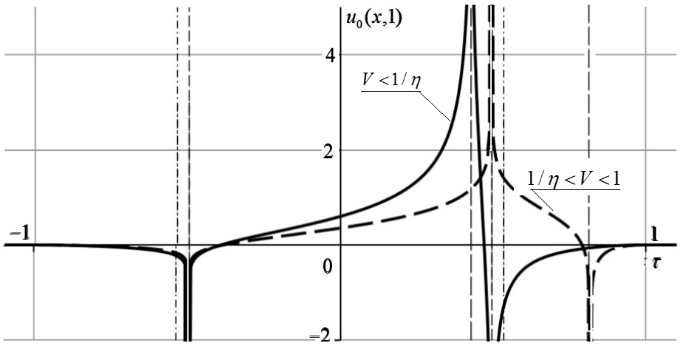


Рисунок 3 – Распределение касательных перемещений по оси Ox при $V > 1$ момент времени $\tau = 1$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-58-00260, 16-08-00034).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами // М.: Наука, Физматлит, 1995. 352 с.

[2] *Оконечников А. С., Тарлаковский Д. В.,Федотенков Г. В.* Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Электронный журнал Труды МАИ. 2015. №82

[3] *Горшков А. Г., Медведский А. Л.,Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В.* Волны в сплошных средах // Учеб. Пособ.: Для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.

Okonechnikov A. S., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. *Trunsient impact of the tangentional moving concentrated force on the elastic half-space*. In this paper the elastic half-space is considered. In initial moment, the concentrated force is applied to the boundary of the half-space. The force has only tangential to the half-space component, and it moves along it's boundary. This paper's goal is to obtain the tangential displacements of the boundary and analyze the solutions.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИНОВИДНОЙ ДЕГИДРАТАЦИИ ВЫСЫХАЮЩЕЙ КАПЛИ КРОВИ

Полякова Н. М.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Приведены соотношения, позволящие сконструировать имитационную математическую модель поведения коагулирующих частиц в испаряющейся капле жидкости. Построенная система уравнений гиперболического типа решалась численно при помощи метода конечных объемов.

1. Введение. Метод клиновидной дегидратации биологических жидкостей (кровь, слезная жидкость, ликвор и др.) используется для медицинской диагностики различных заболеваний. Метод основан на формировании пространственных структур в высыхающей капле жидкости, расположенной на горизонтальной поверхности [1].

Адекватная физико-математическая модель для описания процессов клиновидной дегидратации до сих пор не построена. Причина этого достаточно ясна — отсутствие понимания того, какие именно процессы (физические, химические, биологические) приводят к образованию структур. Собственно говоря, отсутствует и достаточно хорошая математическая модель, описывающая поведение испаряющейся капли жидкости. Попытки построения такой модель, были в частности, предприняты в [2], где достаточно подробно изложены проблемы, возникающие при конструировании модели, а также имеется обзор различных подходов к моделированию испараюшейся капли жидкости. Заслуживают внимания также работы [3, 4], в которых моделируется испарение капель жидкости с учетом эффектов Марангони как для обычной жидкости, так и для капель крови.

Применительно к капле крови, одним из вариантов построения модели является моделирование процесса высыхания капли при помощи уравнений для описания процессов в изотропном активном геле, то есть сплошной среде, состоящей из упругого каркаса и жидкости. Система уравнений, описывающая такую среду, приведена, например, в [5]. В случае крови, упругий каркас возникает в результате химического (каталитического) взаимодействия фибрина (полимерные нити) и фибриногена (белка, из которого образуется фибрин). На поведение каркаса влияют напряжения, описываемые, так называемым, тензором активности, для идентификации которого к исходным уравнениям следует добавлять уравнения, описывающие химическую кинетику процесса. В случае изотропного геля, такой тензор будет шаровым и пропорциональным изменению химического потенциала реакций взаимодействия.

В настоящее время процесс коагуляции крови достаточно хорошо изучен, однако, для детального описания требуется рассмотрение значительного количества уравнений химической кинетики. В связи с этим достаточно часто используются упрощенные модели свертывания крови, см., например, [6].

2. Имитационная модель формирования структур. Из краткого обзора, приведенного во введении, ясно, что для детального описания процесса требуется большое количество информации о структуре геля, о кинетике процесса свертывания и т. д. Однако, имеется и иной поход к решению проблемы, связанный с имитационным моделированием. Понятно, что при коагуляции крови в жидкости возникают макроскопические частицы, которые в результате процессов диффузии и седиментации, просачиваясь через каркас геля, образуют на поверхности, на которой находится капля, некоторый, не обязательно твердый, осадок. Скорее всего, именно в этом осадке и возникают пространственные структуры. В грубом приближении, структуру геля можно имитировать заданием зависимости коэффициента диффузии и скорости седиментации от вертикальной координаты z. Область, занятую каплей, можно считать двухслойной. Первый слой (f) состоит из взвешенных в жидкости (или геле) частиц, а второй слой (s) представляет собой осадок, см. рис. 1.

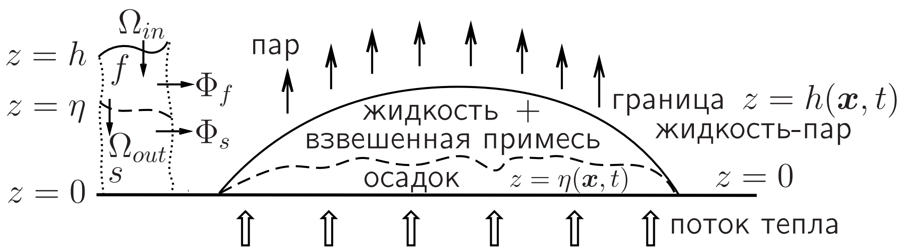


Рисунок 1 – Схема испаряющейся капли со взвешенной примесью и осадком. Слево изображено некоторое сечение области (не масштабировано)

Такая модель аналогична модели Saint Venan — Exner (см., например, [7]), используемой для описания русловых наносов в водоемах, с той разницей, что упомянутая модель справедлива для тонкого бесконечного слоя жидкости, на поверхности которой отсутствует испарение.

3. Математическая модель. Используя результаты [2, 7, 8]), построим модель седиментации примеси в испаряющейся капле.

Пусть капля занимает область $z \in [0, h(\boldsymbol{x}, t)]$, взвешенная примесь находится в области $z \in [\eta(\boldsymbol{x}, t), h(\boldsymbol{x}, t)]$ (слой f), а осадок расположен в области $z \in [0, \eta(\boldsymbol{x}, t)]$ (слой s), где $h(\boldsymbol{x}, t)$ — свободная поверхность капли (граница раздела жидкость–пар), $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ — граница между взвешенной примесью и осадком, см. рис. 1.

Осреднение уравнения переноса взвешенной примеси. Уравнение, описывающее распределение примеси возьмем в виде

$$C_t + \operatorname{div}(C\boldsymbol{v}) = (\varepsilon C_z + w_S C)_z, \quad \eta(\boldsymbol{x}, t) < z < h(\boldsymbol{x}, t). \tag{1}$$

Здесь $C(x, y, z, t)$ — концентрация взвешенной примеси, $\varepsilon(z)$ — коэффициент вертикальной диффузии, $w_S(z)$ — скорость седиментации в вертикальном направлении, $\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = (U, V, W) = (\boldsymbol{U}, W)$ — скорость течения жидкости. Зависимость ε, w_S от вертикальной координаты z моделирует свойства геля, который считается однородным в плоскости (x, y). Предполагается также, что скорость седиментации и диффузия анизотропны, то есть седиментация и диффузия в плоскости (x, y)

отсутствуют, и перенос примеси в этой плоскости осуществляется только за счет скорости течения жидкости.

На границах $z = \eta(\boldsymbol{x}, t)$, $z = h(\boldsymbol{x}, t)$ зададим краевые условия

$$(C_z + w_S C)\big|_{z=h} = 0, \quad (C_z + w_S C)\big|_{z=\eta} = -E, \tag{2}$$

которые соответствуют отсутствию потока концентрации на границе $z = h$ и заданному потоку концентрации на границе $z = \eta$.

Величину E в грубом приближении можно выбрать в виде

$$E = w_S(\eta)\left(c_e - C\big|_{z=\eta}\right), \tag{3}$$

где c_e — некоторая равновесная концентрация — при $C\big|_{z=\eta} > c_e$ взвешенная примесь проникает в область занятую осадками, а при $C\big|_{z=\eta} < c_e$ осадки могут «вымываться» течением жидкости, превращаясь во взвешенную примесь.

Определим средние по толщине значения концентрации и горизонтальной скорости в области взвешенной примеси

$$c(x, y, t) = \frac{1}{h - \eta}\int\limits_{\eta}^{h} C(x, y, z, t)\,dz, \quad \boldsymbol{u}(x, y, t) = \frac{1}{h - \eta}\int\limits_{\eta}^{h} \boldsymbol{U}(x, y, z, t)\,dz. \tag{4}$$

Предположим, что профили концентрации и скорости в вертикальном направлении известны и заданы, соответственно, нормированными функциями $\varphi(x, y, z, t)$ и $\psi(x, y, z, t)$, то есть

$$C(z) = (h - \eta)c\varphi(z), \quad \boldsymbol{U}(z) = (h - \eta)\boldsymbol{u}\psi(z), \quad \int\limits_{\eta}^{h} \varphi(z)\,dz = 1, \quad \int\limits_{\eta}^{h} \psi(z)\,dz = 1. \tag{5}$$

Здесь и далее для краткости аргументы x, y, t опущены.

Считая жидкость несжимаемой ($\operatorname{div}\boldsymbol{U} + W_z = 0$) и интегрируя (1) с учетом (3), (4), (5), получим уравнения для средней концентрации

$$S_t + \operatorname{div}(\gamma S\boldsymbol{u}) = E = w_S(\eta)(c_e - S\varphi(\eta)), \quad S = (h - \eta)c, \quad \gamma = \int\limits_{\eta}^{h} \varphi(z)\psi(z)\,dz. \tag{6}$$

Поведение границ. Для описания поведения границ воспользуемся результатами [7], которые можно получить, записывая уравнение баланса массы и выполняя достаточно громоздкие преобразования (подробнее см. в [7])

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\eta}^{h} C_f\,dz + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{0}^{\eta} C_s\,dz + \operatorname{div}_0(\boldsymbol{\Phi}_f + \boldsymbol{\Phi}_s) - \Omega_{in}(h) + C_s W\big|_{z=0} = 0. \tag{7}$$

Здесь C_f, C_s — концентрации взвешенной примеси в слое f и осадочной примеси в слое s, $\boldsymbol{\Phi}_f$, $\boldsymbol{\Phi}_s$ — плотности горизонтальных потоков взвешенной и осадочной примеси, div_0 — «плоский» оператор дивергенции, $\Omega_{in}(h)$ — источник массы, возникающий на границе $z = h$, в результате испарения (см. рис. 1), которая представима в виде

$$\Omega_{in}(h) = C_f(h)(h_t + \boldsymbol{U}\cdot\nabla_0 h - W)\big|_{z=h}) = C_f(h)(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n} - D)|\nabla F|\big|_{z=h}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \quad D = -\frac{F_t}{|\nabla F|}, \quad F = h - z,$$

где $\boldsymbol{n}$, D — нормаль к границе $z = h$ и скорость движения границы.

Концентрацию C_f считаем взвешенной примесью, горизонтальный поток взвешенной примеси и скорость D задаем соотношениями

$$\boldsymbol{\Phi}_f = \gamma S\boldsymbol{u} = \gamma(h-\eta)c\boldsymbol{u}, \quad (\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n} - D)\big|_{z=h} = V_n, \quad C_f = C, \tag{9}$$

где первое соотношение следует из (6), а второе — получено в Приложении A работы [2], V_n — скорость переноса массы жидкости на границе жидкость–пар при испарении, пропорциональная отношению скорости потока тепла, подводимого к границе, к скрытой теплоте парообразования.

Наконец, делая предположения о стационарности концентрации осадочной примеси $\partial_t C_s = 0$ и об отсутствии вертикальных компонент скорости на границах ($W\big|_{z=0} = 0$, $W\big|_{z=h} = 0$), при помощи (4)–(6), (8), (9) получим из (7) уравнение, описывающее эволюцию границы раздела $z = \eta$

$$C_s(h)\frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathrm{div}_0\,\boldsymbol{\Phi}_s + E = C(h)|\nabla F|V_n. \tag{10}$$

В грубом приближении, величину потока осадочной примеси можно считать равной нулю, то есть $\boldsymbol{\Phi}_s = 0$.

Гипотеза о вертикальных профилях концентрации и скорости. С учетом малости толщины реальных капель, после соответствующего масштабирования переменных, в частности, замен $z \to \delta z$, $W \to \delta W$, где δ — параметр, характеризующий толщину, можно показать, что в уравнении (1) в главном приближении сохраняется лишь правая часть, что позволяет определять φ, решая задачу

$$(\varepsilon(z)\varphi_z + w_S(z)\varphi)_z = 0, \quad (\varphi_z + w_S\varphi)\big|_{z=h} = 0, \quad \int\limits_\eta^h \varphi(z)\,dz = 1. \tag{11}$$

Аналогичные соображения позволяют определить и функцию $\psi(z)$.

4. О вычислительном эксперименте. Совокупность представленных соотношений (в частности, (6), (3, (8) и осреднение уравнения неразрывности с учетом (8)), позволяют сконструировать систему для определения средней концентрации c взвешенной примеси, свободной границы $z = h$ и границы раздела взвешенной и осадочной примеси $z = \eta$, и средней скорости течения $\boldsymbol{u}$, уравнение для которой получено на основе теории мелкой воды в [2]. Такая система представляет собой систему уравнений гиперболического типа (не приведена ввиду громоздкости). Вычисления проводились при помощи метода конечных объемов для пространственно одномерного и двухмерного случаев. Ввиду гиперболичности системы, для решения использовались специальные Riemann solvers, с линейной реконструкцией, в частности, HLL (Harten, Lax and van Leer) реконструкцией (см., в частности [8]) на структурированных и неструктурированных сетках. Расчеты проводились в случаях линейных и квадратичных по z величин $\varepsilon(z)$, $w_S(z)$. Результаты расчетов имели хорошее соответствие с результатами экспериментальных данных, представленных в литературе.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шабалин В. Н., Шатохина С. Н.* Морфология биологических жидкостей человека. М.: Хризостом, 2001. 304 с.

[2] *М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова.* Моделирование испарения капли жидкости. Ростов-на-Дону, Изд-во ЮФУ 2015.

[3] *Brutin D., Sobac B., Loquet B., Sampol J.* Pattern formation in drying drops of blood. 2011, JFM, 667, pp. 85–95.

[4] *Karapetsas G.,Matar O. K., Valluri P., Sefiane K.* Convective Rolls and Hydrothermal Waves in Evaporating Sessile Drops. Langmuir 2012, 28, pp. 11433–11439.

[5] *Banerjee S., Marchetti M. C.* Instabilities and Oscillations in Isotropic Active Gels arXiv:1006.1445v1 [cond-mat.soft], 2010.

[6] *Rukhlenko A. S., Zlobina K. E., Guria G. Th.* Threshold activation of intravascular fibrin polymerization and gel formation under intensive blood flow conditions. Theoretical analysis. In: Instabilities and Control of Excitable Networks / Moscow: MAKS-Pess, 2012, pp. 113–128.

[7] *van Rijn L. C.* Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas. Amsterdam: Aqua Publications — 111, 1993. 690 p.

[8] *Paola C., Voller V. R.* A generalized Exner equation for sediment mass balance. Journal Of Geophysical Research, 2005. Vol. 110, F04014, 8 p.

[9] *Sadaka G.* Solving Shallow Water ows in 2D with FreeFem++ on structured mesh. 2012. <hal-00715301> `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00715301`

Polyakova N. M. *Modeling of wedge-shaped dehydration of the drying drop of blood*. We present relations that allow us to construct a simulation mathematical model of the coagulating particles behavior for evaporation drop. The system constructed has hyperbolic type which is solved numerically using finite volume method.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ В НИЗКОЧАСТОТНОМ УЛЬТРАЗВУКОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Попузин В. В.[1]**, Абрамов В. В.**[1]**, Гетманский М. С**[1]**, Миховски М.**[2]**, Алексиев А.**[2]**, Мирчев Д. И.**[2]

[1] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

[2] *Институт механики Болгарской Академии Наук, София*

В работе рассматривается дифракция продольной низкочастотной ультразвуковой волны на дефекте произвольной формы в двумерном случае. Разработан быстрый итерационный алгоритм последвательного приближения решения, где на каждом шаге итерации решается система со структурированной матрицей. Используются быстрые численные алгоритмы решения систем с матрицами такого типа, позволяющие на порядок сократить число необходимых арифметических операций. Явное интегральное представление падающей волны давления, возбуждаемой ультразвуковым датчиком, получено на основе сведения известного трехмерного представления к двухмерному виду. Проведенные численные эксперименты для разных моделей дефектов показывают, что алгоритм устойчиво ведет себя в низкочастотном ультразвуковом диапазоне.

1. Введение. В настоящее время метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) представляет собой высокоэффективный подход решения дифракционных задач. В сочетании с современными численными методами, такими, как например метод граничных элементов (МГЭ), он дает точный инструмент анализа волновых полей, отраженных от препятствия. Тем не менее, в ультразвуковом неразрушающем контроле наиболее часто применяются приближенные модели физической теории дифракции Кирхгофа или геометрической теории дифракции Келлера. Такие подходы, будучи приемлемыми для анализа дальней зоны в высокочастотной области, заметно теряют свою точность в остальных случаях. Поэтому, в случае анализа отраженного поля в низкочастотном диапозоне (10–100 КГц), который применяется например при анализе труб направляемыми волнами Лэмба, использование более точных подходов описания волновых процессов становится необходимым. Тем не менее, современные численные методы решения обратных задач рассеяния в рамках ГИУ требуют огромных вычислительных ресурсов, так как для адекватного решения необходимо брать как минимум десять узлов на каждую длинну волны, что сужает круг применения данных подходов лишь к лабораторным исследованиям и не позволяет применять их в повседневном промышленном ультразвуковом контроле. Таким образом, разработка быстрых эффективных алгоритмов в приложении к данной области должно приблизить реализацию указанных выше подходов в современной портативной ультразвуковой аппаратуре.

2. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу дифракции продольной УЗ волны на препятствии произвольной формы. Пусть на границе исследуемой полубесконечной среды находится УЗ преобразователь длинной $2a$. Расположим декартову систему координат с осями x и z таким образом, чтобы ее центр находился под геометрической серединой УЗ датчика, ось z была направлена внутрь среды, а ось x лежала вдоль границы среды. Будем предпологать, что датчик совершает гармонические колебания, тогда все возбуждаемые внутри среды волны также будут гармоническими по времени. Данная постановка задачи позволяет исключить временной параметр и свести волновое уравнение к уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0 \tag{1}$$

где p — это полное давление, $k = \omega/c$ — волновое число, ω — круговая частота, c — скорость распространения продольных волн в данной среде. Для учета временной зависимости все найденные решения необходимо будет умножить на $e^{-i\omega t}$, где i — это мнимая единица, а через t обозначен параметр времени. В рамках линейной акустики полное поле давления представляет собой сумму падающией и отраженной волн $p = p^{inc} + p^{sc}$.

Падающее поле давление, создаваемое преобразователем внутри среды, можно получить из известного выражения для трехмерного случая в предположении, что контактная площадь преобразователя есть бесконечная вдоль оси y полоса шириной $2a$ по оси x. Тогда поле излучения выражается с помощью интеграла по отрезку

$$p^{inc}(x,z) = -p_0 \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{-a}^{a} H_0^{(1)} \left[k\sqrt{(\xi - x)^2 + z^2} \right] d\xi \tag{2}$$

где p_0 — это давление, создаваемое преобразователем на поверхности контакта со средой (в численных экспериментах было принято $p_0 = 1$).

Дефект внутри исследуемой среды будем моделировать акустически твердым телом. Математически это выражается в условии непроницаемости на границе препятствия

$$v_n\bigg|_l = 0 \qquad \sim \qquad \frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_l = 0 \quad \sim \quad \frac{\partial p^{\rm inc}}{\partial n}\bigg|_l = -\frac{\partial p^{\rm sc}}{\partial n}\bigg|_l \tag{3}$$

где для представления граничного условия в терминах давления мы воспользовались соотношением $v_n = 1/ip\omega \cdot \partial p/\partial n$.

Применение метода ГИУ [1] сводит задачу (1)–(3) к интегральному уравнению Фредхгольма второго рода по поверхности отражателя

$$\frac{p(A)}{2} - \int\limits_l p(B) \frac{\partial \Phi(|B-A|)}{\partial n_B} dl_B = p^{inc}(A),\ A \in l; \quad B = (B_x, B_z),\ A = (A_x, A_z) \tag{4}$$

где l — это граничный котнур отражателя и dl_B его элементарная длинна дуги связанная с точкой B, n_B представляет собой единичный вектор внешней нормали к границе препятствия в точке B, а Φ — есть функция Грина, котрая в двумерном случае выражается через трансцендентную функцию Ханкеля $\Phi(r) = i/4\, H_0^{(1)}(kr)$ (здесь через $r = |B - A|$ обозначено расстояние между двумя точками). Используя данное выражение, легко получить представление для производной от функции Грина по нормали

$$G(B, A) = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial n_B} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n_B} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}\frac{(\bar{r}\cdot \bar{n}_B)}{r} = -\frac{ik}{4}H_1^{(1)}(kr)\frac{(\bar{r}\cdot \bar{n}_B)}{r} \tag{5}$$

3. Построение численного решения. Решение интегрального уравнения (4) дает распределения полного поля давления на границе деффекта. В общем случае такое решение строиться на основе численных методов. Для этого разобъем границу отражателя l на N отрезков малой длины Δl_j и расположим конечный набор узлов вычислительной сетки в середине каждого подинтервала $\Delta l_j,\ j = 1, \ldots, N$. В данной работе используется метод коллокации согласно которому узлы «внутренней» и «внешней» переменных совпадают $A_j = B_j$, $\forall j$. Очевидно, что при таком подходе интеграл уравнения (4) можно заменить на сумму интегралов по малым отрезкам l_j. Далее, предполагая, что подынтегральная функция постоянна внутри малого интервала, вынесем ее за знак интегрирование. В итоге, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно величин

$$\sum_{j=1}^{N} p_j G_{mj} = p_m^{inc}, \quad m = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $p_j = p(B_j)$, $p_m^{inc} = p^{inc}(A_m)$, $G_{mj} = G(A_m, B_j)$, $m \neq j, G_{jj} = 1/2, m = j$.

Уравнение (6) в более компактной матричной форме будет иметь вид

$$Gp = p^{inc} \tag{7}$$

Матрица G является плотной матрицей с N^2 ненулевыми элементами, поэтому решение системы (7) стандартным методом Гаусса потребует N^3 арифметических операций. Однако, когда форма препятствия представляет собой окружность или отрезок прямой, матрица имеет специальный структурированный вид и для решения системы могут быть применены быстрые вычислительные алгоритмы со сложностью $N \log_2 N$ операций.

Базируясь на данных методах можно организовать итерационного процесс последовательного приближения решения для отражателя произвольной формы. С этой целью построим на основе матрицы G структурированную матрицу следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & e_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & e_2 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & e_{m-1} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & e_m \\ e_{m+1} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \ddots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & e_N & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \Longrightarrow G^c = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & d & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & d & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & d & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & d \\ d & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & d & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & d & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Другими словами, элементы новой матрицы вдоль любой диагонали (т. е. при $i - j = const$) равны между собой и равны среднему значению $d = \sum_{m=1}^{N} e_m/N$. Постренная таким образом матрица G^c называется циркулянтной матрицей и соответствует задаче дифракции на окружности, а с математической точки зрения представляет собой матричную форму свертки двух сигналов. Решение систем с такими матрицами основывается на теореме о свертке, что сводится к применению быстрого преобразования Фурье три раза [2] с общей сложностью $3N * log_2 N$. Если же в осреднении по диагонали оставить лишь то количество элементов, которое находится на данной диагонале, т. е. $d = \sum_{m=1}^{M} e_m/M$, где $M = N - (i - j)$ для диагоналей выше главной и $M = 1 + (i - j)$ для диагоналей расположенных ниже главной, то будет получена Теплицева матрица G^t, которая с физической точки зрения соответствует задаче дифракции на отрезке конечной длины. Решение СЛАУ с такими матрицами базируется на более сложных итерационных методах с общим количеством арифметических операций $n_{it} * 3N * log_2 N$, где n_{it} — это количество итераций для достижения необходимой точности [3].

Очевидно, что пользуясь одним из полученных приближений, исходную систему можно переписать в эквивалентном виде

$$G^{t,c} p = p^{inc} + \left(G^{t,c} - G\right) p \tag{8}$$

На основе данного уравнения строится итерационный алгоритм последовательного приближения в виде:

$$G^{t,c} p_{q+1} = p^{inc} + \left(G^{t,c} - G\right) p_q, \qquad q = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

где, как видно, на каждой итерации решается система со структурированной матрицей. Для первой итерации необходимо выбрать начальное приближение p_0, которое может быть получено из каких-либо ассимптотических предположений или взято тривиально равным нулю.

3. Численные эксперименты. Для практической проверки сходимости предложенного итерационного алгоритма была проведена серия численных расчетов для разных форм деффектов при различных частотах падающей волны. В качестве исследуемой среды использовалась сталь со скоростью распространения продольной волны $c = 6000$ м/с. Глубина залегания отражателя была принята 10 см, а его максимальная протяженность вдоль одной из осей порядка 10 мм. Серия проведенных численных экспериментов показали, что алгоритм ведет себя устойчиво в низкочастотном ультразвуковом диапазоне ($0 < f < 1{,}5$ МГц). Устойчивость метода напрямую связана со сложностью распределения полного поля давления по контуру препятствия и не зависит от размера сетки. Также из эксперимента выяснилось, что оба типа аппроксимации G^c и G^t требуют почти одинакового числа итераций внутри решателя (9). В этом смысле предпочтительнее использовать первую аппроксимацию (G^c), поскольку решение системы с такой матрицей строится легче и эффективней. На рисунке 1 приведено сравнение решения посчитанного методом Гаусса (сплошная линия) и первых итераций предложенного алгоритма. Рисунок слева соответствует аппроксимации G^c, рисунок справа — G^t.

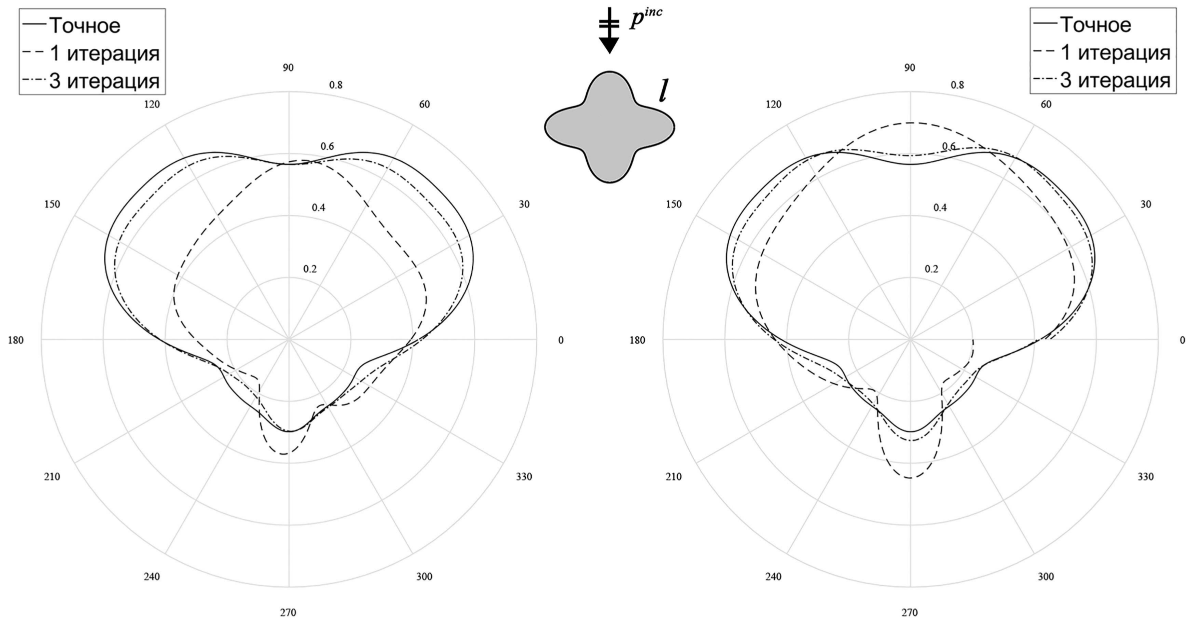


Рисунок 1 – Распределение полного давления на контуре: $\rho(\theta) = a(1 + 0.25\cos(4\theta))$, где $a = 0.5$ мм, $N = 2^{10}$. Слева — вычисления по G^c, справа — по G^t

Работа выполнена при поддержке Marie Curie Actions Framework Programme 7, contract no. PIRSES-GA-2012-318874 «INNOPIPES».

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Сумбатян М. А., Скалия А.* Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 328 с.

[2] *Bojarski N. N.* Scattering by a cylinder: a fast exact numeric solution // J. Acoust. Soc. Am. 1984. No 2. Vol. 75. P. 320–323.

[3] *Oseledets I., Tyrtyshnikov E.* A unifying approach to construction of circulant preconditioners // Linear Algebra Appl. 2006. № 418. P. 405–422.

Popuzin V. V., Abramov V. V., Getmanskii M. S., Mihovski M., Alexiev A., Mirchev D. I. *The iterative algorithm for the diffraction problem in the low-frequency ultrasound range*. In the conducted work the 2d diffraction problem of the low-frequency ultrasonic waves on the obstacle of arbitrary shape is discussed. The new fast iterative algorithm of the successive approximations based on the algebraic system with structured matrix is developed. Application of the fast numerical method to the solution of such system significally reduce the number of required arithmetic operations. Explicit integral representation of the incedent pressure wave generated by the ultrasound transducer is derived by reducing known three-dimensional expression to the two-dimensional form. Conducted numerical experiments for different shapes of the obstacles shows, that developed approach is stable in the low-frequency ultrasonic range.

ОБ ОЦЕНКЕ УПРУГОГО ОПИРАНИЯ И ДАВЛЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ РЕШЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ

Потетюнко О. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Изучается деформирование решетчатой пластины (РП), которая моделируется неоднородной круглой пластиной, упруго закрепленной на границе, что характеризуется двумя коэффициентами. В первой части работы изучен прогиб круглой упругой пластинки переменной жесткости при различных типах граничных условий. На основе вариационного подхода составлен функционал Лагранжа для пластины, из него получено уравнение для прогиба и соответствующие граничные условия. Задача решена методом Ритца для различных законов неоднородности и граничных условий. Во второй части решена задача об определении коэффициентов граничных условий на основе различных данных о прогибе в наборе точек. Разработана схема анализа задачи: сформулированы вспомогательные задачи, не содержащие искомые коэффициенты, установлена структура для прогиба в виде дробно-рациональной функции от искомых коэффициентов, построена система нелинейных алгебраических уравнений, из которой и находятся коэффициенты граничных условий. Кроме того, была решена задача по восстановлению нагрузки, изучено влияние упругости заделки на характеристики прогиба.

1. Введение. Глазное яблоко снаружи покрыто фиброзной капсулой (tunica fibrosa), $1/6$ поверхности которой приходится на роговицу, а $5/6$ — на склеру. Склера выполняет защитную и опорную функции, изучение ее свойств дает ключ к пониманию механизмов развития различных глазных болезней, например, миопии и глаукомы. Наиболее тонка склера в задней части глазного яблока, в месте выхода зрительного нерва. Здесь внутренние слои склеры образуют решетчатую пластину (РП), пронизанную аксонами клеток сетчатки. Это истончение склеры в первую очередь страдает от воздействия повышенного давления, и потому изучение характеристик РП имеет немаловажное значение при определении внутриглазного давления (ВГД) [1].

Как показала практика и теория [2], деформацию РП можно изучать отдельно, без учета деформации склеры, благодаря чему проще учесть два существенных фактора — анизотропию и неоднородность РП. Однако в большинстве работ, посвященных РП, считается, что пластина имеет жесткую связь со склерой. В настоящей же работе пластина предполагается упруго закрепленной.

2. Прямая задача. Рассмотрим равновесие РП, которая моделируется круглой упругой изотропной пластиной радиуса a переменной жесткости, на которую действует распределенная нагрузка q. Считаем край пластины упруго опертым, что моделируется двумя упругими связями на краю. Безразмерный лагранжиан в случае установившихся колебаний построен в [3], а в рассматриваемом статическом случае соответствующий функционал Лагранжа имеет вид

$$F^*[w] = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(r)\left\{[w''(r)]^2 + \left[\frac{w'(r)}{r}\right]^2 + 2\nu\left[\frac{w'(r)w''(r)}{r}\right]\right\} rdr- \tag{1}$$

$$-\int\limits_0^1 qw(r)rdr + \frac{g_1}{2}(w(1))^2 + \frac{g_2}{2}(w'(1))^2,$$

где $w = w(\xi)$ — функция поперечного прогиба пластины, h — ее толщина, $f(r)$ — безразмерная жесткость, $w(r)$ — прогиб, g_1, g_2 — коэффициенты жесткости заделки, ν — коэффициент Пуассона.

Путем варьирования функционала и приравнивания нулю коэффициентов при независимых вариациях можно получить уравнение равновесия

$$Lw = (fw''r)'' - \left(\frac{f}{r}w'\right)' + \nu[(fw')'' - (fw'')'] = qr \tag{2}$$

и соответствующие граничные условия

$$M_1 w = \left\{-(fw''r)' + \frac{f}{r}w' + \nu(fw'' - (fw')') + g_1 w\right\}\Big|_{r=1} = \left\{M_1^0 w + g_1 w\right\}\big|_{r=1} = 0,$$

$$M_2 w = \{fw''r + \nu fw' + g_2 w'\}|_{r=1} = \left\{M_2^0 w + g_1 w'\right\}\big|_{r=1} = 0. \tag{3}$$

Прогиб w находится методом Ритца, так как переменные коэффициенты не позволяют выписать решение в аналитическом виде. Искомое решение представим как линейную комбинацию

$$w(r) = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k(r) \tag{4}$$

где c_k — некоторые коэффициенты, ϕ_k — базисные функции вида

$$\phi_k(r) = r^{2(k-1)}, = 1, 2...N \tag{5}$$

После подстановки (4) в функционал (1) и нахождения его стационарного значения построена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения c_k, решая которую находим функцию прогиба согласно (4).

Для подтверждения достоверности численных экспериментов сравним значения прогибов для однородной пластины с известным аналитическими результатами [4] в случае жесткой заделки ($g_1, g_2 \to \infty$). Выбрано число координатных

Таблица 1 – Сравнение прогибов при жестком закреплении

	Точное решение [4]	Метод Ритца		
		$g_1 = 1.2 \cdot 10^4, g_2 = 2.1 \cdot 10^4$	$g_1 = 5.8 \cdot 10^4, g_2 = 5 \cdot 10^3$	$g_1 = 9.7 \cdot 10^4, g_2 = 1.3 \cdot 10^5$
$r = 0$	0.015625	0.015670	0.015646	0.015631
$r = 0.25$	0.013733	0.013777	0.013753	0.013739
$r = 0.5$	0.008789	0.008833	0.008807	0.008795
$r = 0.75$	0.002991	0.003034	0.003005	0.002996
$r = 0.95$	0.000149	0.000190	0.000158	0.000154

функций $N = 8$, нагрузка $q = 1$. Коэффициент Пуассона принимается равным $0,4$. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Приведем сравнение прогибов в центре однородной пластины ($f(r) = 1$), вычисленных с помощью метод Ритца, с данными, имеющимися в литературе [1], причем в [1] заделка считалась жесткой (таблица 2.).

Если оценить влияние параметров g_1 и g_2 на деформативность пластины, то оказывается, что значительно более выражено влияние g_1, чем g_2.

3. Обратная задача. Поставим обратную задачу об определении параметров закрепления g_1, g_2 по известному прогибу в наборе точек $w(r_k) = \lambda_k, k = 1, 2..m$. В [3] показано, что можно получить представление прогиба в точках r_i как дробно-рациональную функцию от параметров g_1, g_2 вида $w(r_i) = \dfrac{a_0^i g_1 g_2 + a_1^i g_1 + a_2^i g_2 + a_3^i}{a_0 g_1 g_2 + a_1 g_1 + a_2 g_2 + 1}$, где a_0, a_1, a_2, a_0^i, a_1^i, a_2^i — известные числовые коэффициенты.

Для решения задачи об определении параметров достаточно знать прогиб в двух точках пластины, тогда имеет место система

$$\begin{gathered} b_0^1 g_1 g_2 + b_1^1 g_1 + b_2^1 g_2 + b_3^1 = 0 \\ b_0 2 g_1 g_2 + b_1^1 g_1 + b_2^1 g_2 + b_3^1 = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Вычислительные эксперименты показали, что искомые параметры восстанавливаются с погрешностью, не превышающей тысячных долей процента. При восстановлении g_2 погрешность на порядок выше, чем при восстановлении g_1. Это объясняется тем, что, как упоминалось ранее, g_2 вносит меньший вклад в значение прогиба.

Помимо параметров g_1, g_2, осуществлена реконструкция нагрузки q. Эта задача имеет широкое практическое применение, поскольку q моделирует ВГД. При решении такой задачи необходимо знать прогиб в трех точках $w(r_k)q = \lambda_k$,$k = 1$,2,3. Тогда на основе представления прогиба будем иметь систему трех нелинейных уравнений вида, которая несложными преобразованиями приводится к системе (6). Как и в предыдущей задаче, предложенный алгоритм позволил провести реконструкцию с достаточной степенью точности: погрешность восстановления g_1, q в пределах тысячных долей процента, g_2 — около 6%.

4. Исследование влияния упругости заделки. Большинство авторов полагают, что РП жестко защемлена по краю (в предложенной модели это соответ-

Таблица 2 – Сравнение прогибов однородной пластины

Параметры заделки	Давление q, (мм.рт.ст.)	Прогиб, 10^{-2} мм.	Прогиб [6], 10^{-2} мм.	Расхождение, %
$g_1 = 9 \cdot 10^4, g_2 = 7.7 \cdot 10^4$	15	0.8904	0.86	3.54
$g_1 = 10^3, g_2 = 9 \cdot 10^3$	15	0.9461	0.86	10.01
$g_1 = 2 \cdot 10^3, g_2 = 3.4 \cdot 10^4$	30	0.1836	1.73	6.12
$g_1 = 4 \cdot 10^3, g_2 = 10^5$	30	0.1782	1.73	3.03
$g_1 = 5 \cdot 10^4, g_2 = 7 \cdot 10^4$	40	0.2380	2.30	3.49
$g_1 = g_2 = 5 \cdot 10^3$	40	0.2403	2.30	4.47
$g_1 = 3 \cdot 10^3, g_2 = 2 \cdot 10^4$	50	3.0286	2.88	5.16
$g_1 = 9 \cdot 10^5, g_2 = 3 \cdot 10^4$	50	2.9679	2.88	3.05
$g_1 = 1.3 \cdot 10^3, g_2 = 4 \cdot 10^3$	60	3.7323	3.46	7.87
$g_1 = 9 \cdot 10^2, g_2 = 2.2 \cdot 10^4$	60	3.8092	3.46	10.09

ствует случаю $g_1, g_2 \to \infty$); в настоящей же работе закрепление считается упругим. Покажем, что неучет упругости заделки влечет существенные ошибки при реконструкции значения давления.

Для этого в условиях упругой заделки находился прогиб $w(r)$ при фиксированных значениях g_1, g_2, q_0. Далее заделка полагалась жесткой и по найденному $w(r)$ восстанавливалось значение q_*. Сравнение q_0 и q_* и позволяет оценить степень влияния коэффициентов g_1, g_2 на реконструкцию давления. В таблице ниже проведено сравнение q_0 и q_*. В качестве закона неоднородности был выбран e^{-r}.

Таблица 3 – Оценка погрешности при восстановлении нагрузки

Заданные параметры	Заданная нагрузка q	Восстановление q	Погрешность восстановления q, %
$g_1 = 7 \cdot 10^2, g_2 = 10^3$	1	0.9852	1.4768
$g_1 = 10^4, g_2 = 9 \cdot 10^3$	0.6	0.5906	1.5719
$g_1 = 5 \cdot 10^3, g_2 = 6 \cdot 10^4$	0.9	0.8954	0.5058
$g_1 = 4 \cdot 10^4, g_2 = 10^3$	0.3	0.2999	0.0006
$g_1 = g_2 = 1.5 \cdot 10^4$	0.4	0.3999	0.0073

Из таблицы 3 видно, что неучёт влияния упругости заделки может приводить к значительной погрешности при реконструкции давления.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Ватульяну А. О.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Арсеньев Д. Г., Аранов В. Ю., Бауэр С. М. и др.* Математические модели и компьютерное моделирование в биомеханике. Спб.: Изд-во Политехнического университета, 2004. 516 с

[2] *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* Модели теории оболочек и пластин в задачах офтальмологии. // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 3. С. 438-458.

[3] *Ватульян А. О., Потетюнко О. А.* О колебаниях неоднородной пластины с упруго опертым краем // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 2. С. 28-33.

[4] *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. — 635 с.

Potetyunko O. A. *Estimation of elastic fixation and pressure in the analysis of the deformation of the lamina cribrosa.* The deformation of the lamina cribrosa was studied. It was modeled by non-uniform circular plate, resiliently mounted on the border, which was characterized by two coefficient. In the first part of the paper the deflection of the elastic circular plates with variable stiffness in different types of boundary conditions was studied. Lagrange functional was composed on the basis of the variational approach, then an equation for the deflection and the appropriate boundary conditions were compiled. The problem was solved by Ritz method for various types of inhomogeneities and boundary conditions. In the second part the problem of determining the coefficients of the boundary conditions on the basis of known deflection in a set of points was solved. The scheme of the analysis of the problem was developed: supporting tasks without unknown coefficients was formulated, structure for the deflection in the form of a rational function of the unknown coefficients were obtained, a system of nonlinear algebraic equations which can be used for searching the coefficients of the boundary conditions was constructed. Also the load reconstruction task was solved and the effect of the elastic seal on the deflection characteristics was studied.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА LS-STAG ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОУПРУГОСТИ

Пузикова В. В.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Рассматривается обтекание профилей (в т. ч. систем профилей), имеющих одну или две степени свободы равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности. Данная задача является сопряженной задачей гидроупругости. Задача решается численно разразработанной модификацией метода погруженных границ LS-STAG. В работе представлены результаты решения гидроупругих задач о моделировании ветрового резонанса кругового профиля, авторотации профилей в потоке, бафтинга круговых профилей с двумя степенями свободы.

Сопряженные задачи гидроупругости возникают при моделировании явлений авторотации и автоколебаний, в частности, ветрового резонанса профилей в потоке. Данные задачи являются достаточно сложными для численного решения, поскольку необходимо учитывать взаимное влияние течения жидкости и движения погруженного в нее тела. При этом погруженное тело и жидкость должны рассматриваться как единая система. Для случая достаточно тяжелого тела задачу можно решать «по шагам», моделируя поочередно обтекание движущегося с заданными параметрами тела и рассчитывая динамику тела при известных гидродинамических нагрузках.

Для численного решения сопряженных задач гидроупругости удобно использовать методы погруженных границ [1], которые не требуют совпадения границ ячеек с границами расчетной области и позволяют решать задачи в областях сложной и изменяющейся в процессе счета формы на прямоугольной сетке без перестроения ее на каждом шаге расчета. Наиболее важным вопросом при этом является работа с усеченными ячейками, т. е. ячейками неправильной формы, которые образуются при пересечении прямоугольных ячеек с границей области течения, поскольку именно в них задаются граничные условия, а решение вблизи границы обтекаемого тела может иметь большие градиенты.

В данной работе для решения сопряженных задач гидроупругости используется разработанная модификация [2] одного из наиболее эффективных методов погруженных границ, метода LS-STAG [3]. Данная модификация позволяет проводить расчет течений с движущимися границами на неподвижной прямоугольной сетке, поэтому она является эффективной альтернативой сеточным методам с подвижной сеткой, согласованной с телом. Для представления погруженной границы и эффективной организации обработки усеченных ячеек в данном методе используются функции уровня [4]. При помощи разработанной модификации метода LS-STAG получено численное решение гидроупругих задач о моделировании ветрового резонанса кругового профиля, авторотации профилей в потоке, бафтинга круговых профилей с двумя степенями свободы.

1. Постановка задачи. Рассматривается внешнее обтекание жестких профилей произвольной формы, имеющих одну или две степени свободы, горизонтальным равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности $\overline{\rho}$ (здесь и далее: $\overline{A}$ — размерная физическая величина, A — соответствующая ей безразмерная комбинация) в расчетной области Ω с внешней границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Здесь Γ_1 — входная граница; Γ_4 — выходная; Γ_2 и Γ_3 — верхняя и нижняя соответственно. Математическая постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \nabla p - \nu \Delta \vec{v} = 0, \\ \vec{v}(\vec{r}, \ 0) = \vec{v}_0(\vec{r}), \ \vec{r} \in \Omega, \\ \vec{v}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \vec{V}_\infty, \ \vec{v}|_K = \vec{v}^{ib} = \vec{v}^{ib}(\vec{r}, t), \ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma \cup K} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь K — граница профиля; $\vec{n}$ — внешняя по отношению к профилю нормаль; $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$ — радиус-вектор точки; x и y — безразмерные координаты (в качестве характерной длины выбираем характерный размер профиля $\overline{D}$: $x = \overline{x}/\overline{D}$, $y = \overline{y}/\overline{D}$, $D = \overline{D}/\overline{D} = 1$); $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y$ — безразмерная скорость (в качестве характерной скорости выбираем скорость набегающего потока: $u = \overline{u}/\overline{V}_\infty$, $v = \overline{v}/\overline{V}_\infty$, $V_\infty = \overline{V}_\infty/\overline{V}_\infty = 1$); t — безразмерное время ($t = \bar{t}\ \overline{V}_\infty/\overline{D}$); $p = p(\vec{r}, t) = \overline{p}/(\overline{\rho}\ \overline{V}^2_\infty)$ — безразмерное давление; $\mathrm{Re} = \overline{V}_\infty \overline{D}/\overline{\nu}$ — число Рейнольдса; $\nu = 1/\mathrm{Re}$ — безразмерный коэффициент кинематической вязкости. Поскольку рассматриваемые профили имеют степени свободы, вместе с расчетом обтекания (1) необходимо также моделировать движение обтекаемого профиля, которое описывается уравнениями динамики

$$\ddot{\vec{q}} = \vec{\tilde{\Phi}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \vec{Q}^{\mathrm{flow}} + \vec{Q}^{\mathrm{ext}}. \tag{2}$$

Здесь $\vec{q}$ — обобщенные координаты профиля; $\vec{\tilde{\Phi}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ определяется связями, наложенными на профиль; $\vec{Q}^{\mathrm{flow}}$ — обобщенная аэродинамическая сила; $\vec{Q}^{\mathrm{ext}}$ — внешние массовые силы.

2. Численный метод. В расчетной области Ω вводится прямоугольная сетка с ячейками $\Omega_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$, радиусы-векторы центров которых обозначим $\vec{x}^c_{i,j} = (x^c_i, y^c_j)$, а границы — $\Gamma_{i,j}$. Эти ячейки являются контрольными объемами, используемыми для дискретизации уравнения неразрывности. Затем строятся смещенные сетки с ячейками $\Omega^u_{i,j} = (x^c_i, x^c_{i+1}) \times (y_{j-1}, y_j)$ и $\Omega^v_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y^c_j, y^c_{j+1})$, границы которых обозначим $\Gamma^u_{i,j}$ и $\Gamma^v_{i,j}$ соответственно. Эти ячейки являются контрольными объемами для уравнения баланса импульса в проекциях на оси Ox и Oy. Для описания положения границы Γ^{ib} твердого тела произвольной формы Ω^{ib} вводят функцию уровня $\varphi(\vec{r})$ [4], такую что

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}) < 0, \ \vec{r} \in \Omega^f = \Omega \setminus \{\Omega^{ib} \cup \Gamma^{ib}\}; \\ \varphi(\vec{r}) = 0, \ \vec{r} \in \Gamma^{ib}; \\ \varphi(\vec{r}) > 0, \ \vec{r} \in \Omega^{ib}. \end{cases}$$

В каждой усеченной ячейке $\Omega_{i,j}$ LS-STAG-сетки погруженная граница $\Gamma^{ib}_{i,j}$ представляется отрезком прямой, положения концов которого определяются линейной интерполяцией величины $\varphi_{i,j}$, принимающей значение функции уровня $\varphi(x_i, y_j)$ в правом верхнем углу ячейки $\Omega_{i,j}$. Значения скоростей $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$ вычисляются в серединах жидких частей граней, а давление $p_{i,j}$ аппроксимируется кусочно-постоянной функцией на каждой ячейке. Для сохранения пятиточечной структуры шаблона дискретизации касательные и нормальные напряжения вычисляются в разных точках: в жидких ячейках нормальные напряжения вычисляются в центре ячейки, а касательные — в правом верхнем углу [3].

Модификация LS-STAG-сетки для моделирования движения обтекаемого профиля [2] основана на тех же идеях, которые используются при построении лагранжево-эйлеровых сеток (ALE — Arbitrary Lagrangian–Eulerian). Метод ALE [5] предполагает, что расчетная область изменяется при движении границы так, что сетка следует за подвижной границей лагранжевым способом и в то же время остается неподвижной, эйлеровой, на достаточном удалении от подвижной границы. Для метода LS-STAG движущимися являются лишь узлы сетки на твердых границах усеченных ячеек. Движение погруженных границ учитывается в модификации дискретных аналогов уравнений Навье–Стокса таким образом, что выполняется численный аналог геометрического закона сохранения [6]: изменение объемов ячеек во времени равно объему, «заметаемому» границами ячеек.

В расчетах с подвижными границами используется схема предиктор-корректор первого порядка точности. Шаг предиктора приводит к решению разностного аналога уравнения Гельмгольца для прогноза скорости, а шаг корректора — к решению разностного аналога уравнения Пуассона для функции давления, которая для случая подвижных погруженных границ принимает вид $\hat{\Phi} = \Delta t(P^{n+1} - P^n)$.

3. Вычислительные эксперименты.

3.1. Ветровой резонанс кругового профиля. При моделировании явления ветрового резонанса рассматривалось движение кругового профиля диаметра D поперек потока с одной степенью свободы. Если профиль закреплен при помощи линейной вязкоупругой связи, то уравнение движения профиля (2) принимает вид

$$m\ddot{y}_* + b\dot{y}_* + cy_* = F_{ya}.$$

Здесь m — масса кругового профиля; b — коэффициент демпфирования; c — жесткость связи; y_* — отклонение профиля от положения равновесия; F_{ya} — подъемная сила. Изменение c позволяет задавать различную частоту собственных колебаний системы $\omega \approx \sqrt{c/m}$ (в силу малости b).

На неравномерной сетке 272×292 с шагом по времени $\Delta t = 0{,}0001$ была проведена серия расчетов со следующими значениями параметров: $\mathrm{Re} = 1000$, $D = 1{,}0$, $m = 39{,}75$, $b = 0{,}731$. Безразмерная частота собственных колебаний менялась в диапазоне $\mathrm{Sh}_\omega = (\omega \cdot D)/(2\pi \cdot V_\infty) = 0{,}150 \ldots 0{,}280$. Результаты хорошо согласуются с известными в литературе данными [7]: максимальная амплитуда колебаний профиля составляет примерно $0{,}4D$ и возбуждается при $\mathrm{Sh}_\omega \approx \mathrm{Sh}$, где Sh — число Струхаля, вычисленное для неподвижного профиля.

3.2. Авторотация профилей. При моделировании вращательного движения профилей уравнение движения профиля (2) принимает вид

$$I\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} = M^{\mathrm{flow}}.$$

Здесь α — угол поворота профиля; I — полярный момент инерции профиля; k — коэффициент вязкого трения в оси; M^{flow} — аэродинамический момент. Поскольку рассматривается двумерная задача, $M^{\text{flow}} = M_z$.

При помощи разработанного программного комплекса, в котором реализован модифицированный метод LS-STAG, на грубой сетке 272×292 с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$ удалось смоделировать авторотацию пластины, пропеллеров, роторов Савониуса и Дарье с разлисным числом лопастей при $\text{Re} = 200$, $I = 10$, $k = 0$.

3.3. Обтекание системы из двух круговых профилей с двумя степенями свободы. Рассмотрим обтекание системы из двух одинаковых круговых профилей диаметром $D = 1{,}0$ и массой $m = 4{,}7273$. Расстояние между центрами профилей по горизонтали $L = 5{,}5$, по вертикали — $T = 0{,}7$. Скорость набегающего потока $V_\infty = 1{,}0$. Каждый профиль имеет две степени свободы и уравнения движения (2) можно записать следующим образом:

$$m\ddot{x}_{*,i} + b\dot{x}_{*,i} + cx_{*,i} = F_{xa,i}, \quad m\ddot{y}_{*,i} + b\dot{y}_{*,i} + cy_{*,i} = F_{ya,i}.$$

Здесь $b = 4\pi m\xi \text{Sh}_\omega$ — коэффициент демпфирования; $c = m(2\pi \text{Sh}_\omega)^2$ — жесткость связи; $\xi = 3{,}3 \cdot 10^{-4}$; Sh_ω — безразмерная частота собственных колебаний системы; $F_{xa,i}$ и $F_{ya,i}$ — действующие на i-й профиль сила лобового сопротивления и подъемная сила соответственно; $x_{*,i}$ и $y_{*,i}$ — отклонение i-го профиля от положения равновесия по оси Ox и Oy соответственно; $i = \{1, 2\}$.

Была проведена серия расчетов на неравномерной сетке 666×344 с шагом по времени $\Delta t = 10^{-4}$ при $\text{Re} = 100$ и $\text{Re} = 1000$. Собственная частота системы менялась в диапазоне $\text{Sh}_\omega/\text{Sh} = 0{,}50 \ldots 2{,}00$, где Sh — значение числа Струхаля, вычисленное для неподвижной системы профилей. На диаметр профиля приходилось 64 ячейки.

Поскольку расстояние между центрами профилей достаточно велико ($> 5D$), профиль K_1, расположенный выше по потоку, ведет себя как одиночный профиль, а профиль K_2, расположенный ниже по потоку в следе профиля K_1, совершает вынужденные колебания, вызванные периодическим сходом вихрей с профиля K_1, т. е. наблюдается бафтинг профиля K_2. При $\text{Re} = 100$ амплитуда колебаний K_2 значительно превышает амплитуду колебаний профиля K_1. Как и в работе [8] для профиля K_1, расположенного выше по потоку, наибольшая амплитуда колебаний наблюдается при $\text{Sh}_\omega \approx \text{Sh}$ ($\text{Sh} \approx 0{,}162$ при $\text{Re} = 100$), что соответствует поведению одиночного профиля в потоке, а для профиля K_2 наибольшая амплитуда колебаний вдоль оси Oy возбуждается при $\text{Sh}_\omega \approx 0{,}85\text{Sh}$. При $\text{Re} = 1000$ амплитуда колебаний профиля K_2 вдоль оси Oy оказывается меньше амплитуды колебаний профиля K_1, как и в работе [9]. При этом наибольшая амплитуда колебаний профилей, как вдоль оси Oy, так и вдоль оси Ox, возбуждается при $\text{Sh}_\omega \approx \text{Sh}$.

4. Заключение. Описаны основные идеи модификации метода погруженных границ LS-STAG для математического моделирования в сопряженных задачах гидроупругости. Метод позволяет решать задачи в областях сложной и изменяющейся в процессе счета формы на прямоугольной сетке без перестроения ее на каждом шаге расчета. Представлены результаты решения гидроупругих задач о моделировании ветрового резонанса кругового профиля, авторотации профилей в потоке, бафтинга круговых профилей с двумя степенями свободы.

Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации для молодых ученых-кандидатов наук (МК–5357.2015.8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Mittal R., Iaccarino G.* Immersed boundary methods // Annu. Rev. Fluid Mech. 2005. № 37. P. 239–261.

[2] *Marchevsky I., Puzikov V.* Application of the LS-STAG Immersed Boundary Method for Numerical Simulation in Coupled Aeroelastic Problems // Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics, 5th European Conference on Computational Meachanics, 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics. Barcelona, Spain. 2014. P. 1995–2006.

[3] *Cheny Y., Botella O.* The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties // J. Comput. Phys. 2010. № 229. P. 1043–1076.

[4] *Osher S., Fedkiw R. P.* Level set methods and dynamic implicit surfaces. NY.: Springer, 2003. 273 p.

[5] *Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph., Rodriguez-Ferran A.* Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods // Encyclopedia of Computational Mechanics. Fundamentals. 2004. Vol. 1. P. 413–437.

[6] *Lesoinne M., Farhat C.* Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations // Comput. Method Appl. Mech. Eng. 2003. № 134. P. 71–90.

[7] *Klamo J. T., Leonard A., Roshko A.* On the maximum amplitude for a freely vibrating cylinder in cross flow // J. Fluids and Struct. 2005. № 21. P. 429–434.

[8] *Mittal S., Kumar V.* Flow-induced oscillations of two cylinders in tandem and staggered arrangements // J. Fluids Struct. 2001. № 15. P. 717–736.

[9] *Mittal S., Kumar V.* Vortex induced vibrations of a pair of cylinders at Reynolds number 1000 // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2004. № 18. P. 601–614.

Puzikova V. V. *Application of the LS-STAG method for numerical simulation in coupled hydroelastic problems*. The viscous incompressible flow around airfoil or airfoiles system with one or two degrees of freedom is considered. The given problem is coupled hydroelastic problem. This problem is numerically solved by using the developed modification of the LS-STAG immersed boundary method. Numerical results for wind resonance, airfoiles autorotation, buffeting of two circular airfoiles with two degrees of freedom are presented.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ НАКЛАДКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ, ВЫХОДЯЩЕЙ НА ЛИНИЮ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

Саакян А. В., Шавлакадзе Н. Н.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, Тбилиси

Рассмотрена контактная задача о передаче касательной нагрузки от конечного упругого тонкого стрингера переменной жесткости к составной бесконечной пластинке, состоящей из двух разнородных полубесконечных пластин. Предполагается, что стрингер прикреплен к одной из полубесконечных пластин и перпендикулярно выходит на линию раздела материалов, а его жесткость изменяется по степенному закону с произвольными показателями. Выделены особенности поведения решения у концов стрингера в зависимости от показателей изменения жесткости стрингера. При помощи метода механических квадратур проведен численный анализ поставленной задачи.

1. Введение. Рассматриваемая задача относится к широкому классу смешанных и контактных задач теории упругости, постоянно находящихся в поле зрения исследователей. Известно множество рассмотренных ранее задач для разных областей, усиленных упругими креплениями или тонкими включениями, а также накладками переменной жесткости, для которых были получены как точные, так и приближенные решения. Отметим, что работ, в которых концентратор напряжений типа трещины, включения или стрингера выходит на линию раздела материалов или на свободную границу, не так уж много ввиду нестандартного поведения искомых функций в окрестности этого конца и, вследствие этого, математической сложности их решения. В плане переменности жесткости накладки отметим, что, как правило, исследования проводились для определенного закона ее изменения. В этом контексте отметим работу [1], в которой решена задача для составной ортотропной пластинки с выходящим на линию раздела материалов упругим стрингером, жесткость которого изменяется по линейному закону, а также работу [2], где представлены два подхода к решению уравнения Прандтля с переменным коэффициентом, являющегося определяющим уравнением для контактной задачи о взаимодействии бесконечной однородной пластины с упругой накладкой конечной длины, жесткость которой изменяется по степенному закону с показателем $k + 0.5$, где k — неотрицательное целое число.

2. Постановка задачи и вывод определяющего уравнения. Пусть имеем бесконечную кусочно-однородную изотропную упругую пластину, составленную из двух разнородных полубесконечных пластин, одна из которых усилена конечной накладкой малой толщины, расположенной перпендикулярно к линии соединения пластин с выходом на нее и находящейся под действием тангенциального усилия с интенсивностью $\tau_0(x)$. Относительно накладки, предполагается, что она жестко сцеплена с пластинкой и растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. Принимается условие совместимости горизонтальных деформаций накладки и упругой кусочно-однородной сплошной пластинки, загруженной тангенциальными напряжениями. Нормальное контактное напряжение скачка не имеет.

Задача заключается в определении скачка $\tau(x)$ контактных тангенциальных напряжений вдоль линии контакта и в установлении их поведения в окрестностях концов включения. Математически она формулируется так: пусть кусочно-однородное упругое тело S занимает плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, которая вдоль отрезка $L_1 = (0, l)$ содержит упругую накладку с модулем упругости $E_0(x)$, толщиной $h_0(x)$, коэффициентом Пуассона ν_0 и состоит из двух полуплоскостей из различных материалов $S_1 = \{z | \operatorname{Re} z > 0,\ z \notin L_1 = [0, l]\}$ и $S_2 = \{z | \operatorname{Re} z < 0\}$, спаянных вдоль оси $x = 0$. Величины и функции, отнесенные к полуплоскости S_k, будем отмечать индексом k (k=1,2), а граничные значения функций при $y \to \pm 0$ — индексами плюс и минус, соответственно. На отрезке L_1 имеем следующее условие:

$$\frac{du_0(x)}{dx} = \frac{1}{E(x)} \int\limits_0^x [\tau(t) - \tau_0(t)]\, dt, \quad x \in L_1 \quad E(x) = \frac{E_0(x) h_0(x)}{1 - \nu_0^2} \tag{1}$$

Здесь $u_0(x)$– горизонтальное перемещение точек накладки, а условие равновесия накладки имеет вид

$$\int\limits_0^l \tau(t) dt = T; \quad T = \int\limits_0^l \tau_0\,(x)\, dx \tag{2}$$

На этом же отрезке в полуплоскости S_1 имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_y^+ - \sigma_y^- = 0, \quad \tau_{xy}^- - \tau_{xy}^+ = \tau(x), \quad u^+ = u^-, \quad v^+ = v^- \quad , \quad 0 < x < l \tag{3}$$

Вводя комплексные потенциалы $\Phi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$ $(k = 1, 2)$, голоморфные соответственно в областях S_1 и S_2, и удовлетворяя, при помощи формул Колосова — Мусхелишвили, условиям полного контакта на границе раздела двух материалов и условиям (3) на отрезке L_1, определим деформацию точек этого отрезка по оси Ox:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{1}{4\pi\mu_1} \int\limits_0^l \frac{\tau(t)dt}{t - x} + \frac{B}{4\pi\mu_1} \int\limits_0^l \frac{\tau(t)dt}{t + x} - \frac{Cx}{2\pi\mu_1} \int\limits_0^l \frac{\tau(t)dt}{(t + x)^2} \tag{4}$$

где

$$B = -\frac{\kappa_1 - \kappa_1 (3 + \kappa_2)\, \mu + \kappa_2 (2 + \kappa_1)\, \mu^2}{\kappa_1 - \kappa_1\kappa_2\mu + \mu\, (3 + \kappa_2\mu)}; \quad C = -\frac{(1 - \mu)\,(1 - \kappa_2\mu)}{\kappa_1 - \kappa_1\kappa_2\mu + \mu\,(3 + \kappa_2\mu)};$$

$\mu = \mu_1/\mu_2$, μ_1, μ_2 — модули сдвига, κ_k — известная постоянная Мусхелишвили для каждой из полуплоскостей, равная $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$ — в случае плоской деформации и $\kappa_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$ — в случае обобщенного плоского напряженного состояния, ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона.

Приравнивая (1) и (4), после несложных операций получим определяющее уравнение задачи в безразмерных величинах

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-\zeta} + B\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi+\zeta+2} + 2C\,(1+\zeta)\,\frac{d}{d\zeta}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi+\zeta+2} = A\,(\zeta)\int_{-1}^{\zeta} \varphi\,(\xi)\,d\xi - G(\zeta) \quad (5)$$

где $\tau\,(t) = \frac{T}{l}\,\varphi\,(\xi)$, $\tau_0\,(t) = \frac{T}{l}\,q_0\,(\xi)$, $A(\zeta) = \frac{2\pi\mu_1 l}{E\left(\frac{l}{2}(1+\zeta)\right)}$, $G(\zeta) = A\,(\zeta)\int\limits_{-1}^{\zeta} q_0\,(\xi)\,d\xi$. при условии (2), записанном в виде

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)d\xi = 1 \quad (6)$$

Полученное уравнение (5) является сингулярным интегро-дифференциальным уравнением типа Прандтля с обобщенным ядром Коши.

3. Исследование поведения решения в окрестности концов накладки. Очевидно, что поведение решения уравнения (5) определенно зависит от поведения функции $A\,(\zeta)$ у концов отрезка интегрирования. Поэтому, в первую очередь, зададим эту функцию, вернее выберем закон изменения жесткости накладки. Относительно неоднородности накладки предположим, что

$$E(x) = \frac{E_0^* h_0^*}{1-\nu_0^2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^p\Big(1-\frac{x}{l}\Big)^q \quad (7)$$

где p и q произвольные вещественные числа. Тогда для функции $A\,(\zeta)$ будем иметь

$$A(\zeta) = A_0(1+\zeta)^{-p}(1-\zeta)^{-q}\ ; \qquad A_0 = \frac{2^{1+p+q}\pi\mu_1 l\,(1-\nu_0^2)}{E_0^* h_0^*} \quad (8)$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$\varphi(\zeta) = \varphi^*\,(\zeta)\,(1-\zeta)^{\alpha}(1+\zeta)^{\beta} \qquad (\alpha, \beta > -1) \quad (9)$$

где $\varphi^*\,(\zeta)$ — искомая функция, которая ограничена на отрезке $[-1, 1]$ и имеет непрерывную производную на интервале $(-1, 1)$, а показатели α и β подлежат определению.

Подставляя представление (9) в уравнение (5) и исследуя, на основе известных результатов Н.И.Мусхелишвили о поведении интеграла типа Коши в окрестности концов линии интегрирования, поведение уравнения у концов, находим, что при $p, q < 1$

$$\alpha = -1/2 \text{ и } -1 < \beta < 0 \text{ - корень уравнения } \cos\pi\beta + B + \beta C = 0 \quad (10)$$

Как замечаем, найденные для показателей в (9) значения не зависят от значений p и q, но, с другой стороны, они действительны только при $p, q < 1$. Более глубокое исследование поведения уравнения в окрестности концов позволило найти второй член асимптотики решения, который уже зависит от указанных показателей. В результате этого исследования найдены первые два члена асимптотики решения уравнения (5) для произвольных значений p и q:

$$
\begin{aligned}
&1)\, p<1 \text{ и } q<1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}(1+\zeta)^{\beta}+\psi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\frac{1}{2}-q}(1+\zeta)^{1-p+\beta}\\
&2)\, p<1 \text{ и } q=1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\gamma}(1+\zeta)^{\beta}+\psi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\delta}(1+\zeta)^{1-p+\beta}\\
&3)\, p<1 \text{ и } q>1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{q-1}(1+\zeta)^{\beta}+\psi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{q-1}(1+\zeta)^{1-p+\beta}\\
&4)\, p=1 \text{ и } q<1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}(1+\zeta)^{\eta}+\psi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\frac{1}{2}-q}(1+\zeta)^{\theta}\\
&5)\, p=1 \text{ и } q=1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\gamma}(1+\zeta)^{\eta}+\psi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\delta}(1+\zeta)^{\theta} \qquad (11)\\
&6)\, p=1 \text{ и } q>1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{q-1}(1+\zeta)^{\eta}+\psi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{q-1}(1+\zeta)^{\theta}\\
&7)\, p>1 \text{ и } q<1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}(1+\zeta)^{p-1}+\psi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\frac{1}{2}-q}(1+\zeta)^{p-1}\\
&8)\, p>1 \text{ и } q=1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\gamma}(1+\zeta)^{p-1}+\psi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{\delta}(1+\zeta)^{p-1}\\
&9)\, p>1 \text{ и } q>1 \quad \varphi(\zeta)=\varphi^*(\zeta)\,(1-\zeta)^{q-1}(1+\zeta)^{p-1}
\end{aligned}
$$

Здесь функция $\psi^*(\zeta)$ принадлежит тому же классу функций, что и $\varphi^*(\zeta)$, и также подлежит определению, показатель β определен выше, γ и δ соответственно отрицательный и положительный корни уравнения $\pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{A_0}{2^p(1+z)} = 0$ в интервале $(-1, 1)$, а η и θ — подобные корни уравнения

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z + \frac{\pi B}{\sin \pi z} + \frac{\pi z C}{\sin \pi z} - \frac{A_0}{2^q(1+z)} = 0.$$

4. Численный анализ. Решение уравнения (5) при условии (6) построим при помощи метода механических квадратур [3] и проведем сравнительный анализ между решениями, полученными на основе представлений (9) и (11). Остановимся лишь на первом случае из (11) и выберем для показателей p и q две пары значений $p = 0.4$, $q = 0.6$ и $p = 0.75$, $q = 0.85$. О сходимости вычислительного процесса будем судить по среднеквадратичному отклонению между решениями, полученными при различных порядках аппроксимации, рассчитанному на равномерно распределенной сетке из 40 точек.

Таблица 1

	$p=0.4,\ q=0.6$		$p=0.75,\ q=0.85$	
n	$\varphi^*(\zeta)$	$\varphi^*(\zeta),\ \psi^*(\zeta)$	$\varphi^*(\zeta)$	$\varphi^*(\zeta),\ \psi^*(\zeta)$
4	0.52201	0.53108	0.52992	0.54003
6	0.08097	0.00594	0.06761	0.00079
8	0.01439	0.00118	0.01455	0.00005
10	0.00162	0.00077	0.00193	0.00003
12	0.00121	0.00013	0.00151	5.6×10^{-6}
14	0.00102	0.00005	0.0011	2.8×10^{-6}
16	0.00081	0.00003	0.00073	2.2×10^{-6}

В таблице 1 приведены значения среднеквадратичного отклонения между решениями, полученными при указанных в соседних строчках порядках аппроксимации. Из данных таблицы нетрудно заметить, что, несмотря на достаточно быстрое уменьшение разницы при малых порядках аппроксимации между решениями, полученными на основе представления (11), дальнейшая скорость сходимости практически такая же, что и у решения, полученного на основе представления (9).

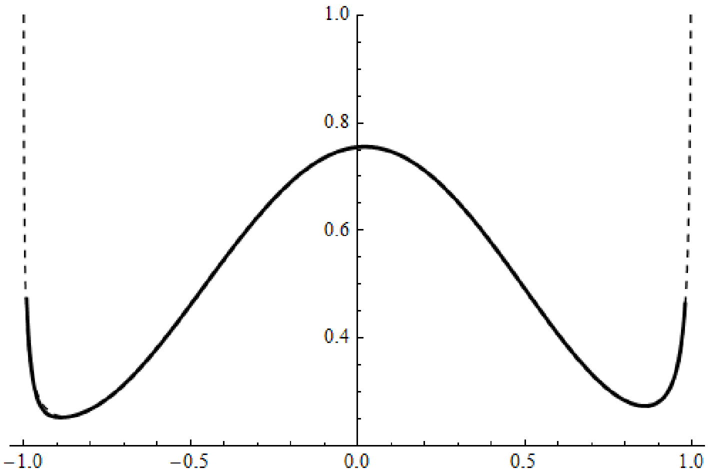


Рисунок 1 – *Распределение контактного напряжения под включением: сплошная линия — по ф-ле* (11) *при* $n = 6$*, пунктирная линия — по ф-ле* (9) *при* $n = 8$

Графики решений, полученных указанными способами, совпадают уже при малых порядках аппроксимации (рис. 1). Последнее позволяет утверждать, что для численного анализа поставленной задачи с механической точки зрения, то есть для выявления влияния отдельных механических характеристик на распределение контактных напряжений, достаточно использовать представление (9).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Банцури Р.Д., Шавлакадзе Н.Н.* Контактная задача для кусочно-однородной плоскости с конечным включением // ПММ.2011. Т. 75. Вып. 1. С. 133-138.

[2] *Sahakyan A.V., Shavlakadze N.N.* Two Methods for Direct Numerical Integration of the Prandtl Equation and Comparative Analysis between Them // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. № 8. P. 1244–1250.

[3] *Саакян А.В.* Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью // Известия НАН Армении, Механика. 2000. Т. 53. № 3. С. 12–19.

Sahakyan A. V., Shavlakadze N. N. *Numerical analysis of a contact problem for elastic stringer with variable rigidity terminating on the interface of compound elastic plane*. The contact problem on transfer of tangential load from a thin, finite elastic stringer with variable rigidity to a compound infinite plate, consisting of two dissimilar semifinite plates, is considered. It is assumed, that stringer is attached to one of semifinite plates, terminating on the interface between materials, and its rigidity varies according to power law with arbitrary exponents. Singularities of a solution behavior in vicinity of the stringer tips in dependence of exponents of variation law of a stringer rigidity are investigated.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕСТРОЙКИ КОСТНОЙ ТКАНИ С АППАРАТОМ НАРУЖНОЙ ФИКСАЦИИ

Сабанеев Н. А., Маслов Л. Б., Седов В. М.
Ивановский государственный энергетический университет

Математическая модель позволяет исследовать процессы регенерации переломов костей опорно-двигательного аппарата человека с приложенной динамической нагрузкой и теоретически аргументировать выбор оптимального периодического воздействия на поврежденные ткани для быстрого и устойчивого заживления.

1. Введение. Проведение экспериментальных исследований биофизических процессов не представляется возможным в необходимом объеме, наиболее эффективным аппаратом их исследования является математическое моделирование. Математическое моделирование биофизических процессов является в настоящее время одним из самых актуальных направлений в научных исследованиях [1].

По статистике переломы костей голени составляют 20–37% среди переломов длинных трубчатых костей. 60–70% переломов костей голени получают люди трудоспособного возраста. Сроки временной нетрудоспособности пострадавших с различными переломами костей голени колеблются в широких пределах: от 5–6 недель до 10–12 месяцев при сложных переломах. Важным моментом для оптимального течения процессов регенерации и успешного восстановления целости поврежденной кости является сопоставление и фиксация отломков. Восстановление костной ткани после перелома является важнейшей задачей реабилитации больных с повреждениями опорно-двигательного аппарата.

Процесс перестройки костной ткани представляет собой сложный физиологический процесс, который протекает в несколько стадий. В первые дни, в зоне повреждения образуется материальный запас клеток и тканей для регенеративного процесса. Затем начинается стадия репарации кости, образование и дифференцировка тканевых структур. На процесс перестройки костной ткани оказывают влияние как внешние, так и внутренние факторы. К внешним факторам, прежде всего, можно отнести механическую нагрузку. Основной целью исследования является анализ влияния изменения частоты и амплитуды внешнего гармонического возмущения на процесс регенерации ткани в зоне перелома.

2. Конечно-элементное моделирование. Для численного расчета процесса регенерации построена конечно-элементная модель большеберцовой кости человека среднего веса и роста. В предполагаемом месте перелома достроена область, занимаемая перестраиваемым материалом. По отношению линии перелома к продольной оси кости смоделирован поперечный перелом. Расстояние между костными отломками по продольной оси кости принято равным 3 мм. Зона перелома, а также вокруг кости, занимает объем моделирующий костную мозоль.

Исследование процесса регенерации проводилось на конечно-элементной модели с аппаратом наружной фиксации (рисунок 1), конструкции применяемой при

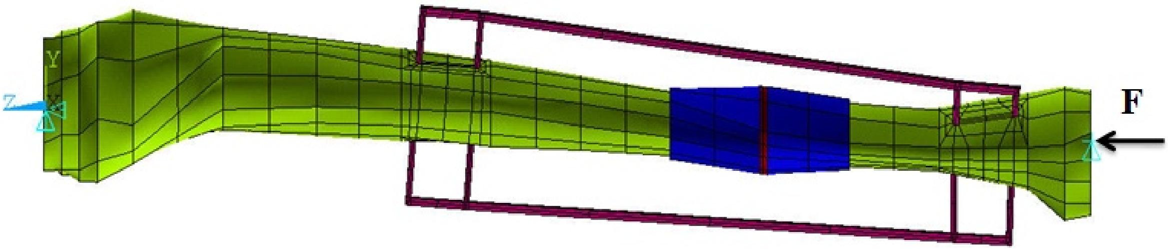


Рисунок 1 – *Конечно-элементная модель большеберцовой кости с аппаратом наружной фиксации*

переломах и повреждениях верхних и нижних конечностей. Наиболее часто применяются и удовлетворяют всем требованиям в большинстве случаев одноплоскостные билатеральные конструкции. Преимуществами данной системы фиксации переломов являются быстрая, простая и надежная фиксация, возможность проведения МРТ-исследований при использовании материалов из сплава титана а также взаимозаменяемость всех компонентов системы.

Характеристики материалов тканей кости получены расчетным путем по алгоритму вычисления эффективных модулей композитных материалов. Граничные условия, наложенные на модель, моделируют шарнирное соединение в коленном и голеностопном суставах. В качестве внешней нагрузки, действующей на модель, выбрана медленно изменяющаяся сжимающая сила, постоянная на каждом шаге по времени, с наложенной на нее гармонической составляющей. Максимальное значение статической нагрузки 500 Н, динамическая составляющая равна 10 % от величины статической.

3. Математическое моделирование. Расчетный алгоритм структурной перестройки биологических тканей [2] использует в качестве основных переменных задачи пороупругости — перемещения и деформации упругого скелета ткани, давления и потоки внутритканевой жидкости [3]. За параметры, характеризующие процесс восстановления костной ткани в зоне репарации, в течение периода восстановления, примем модуль продольной упругости, плотность и пористость ткани. Критерием для определения типа ткани, в процессе перестройки от неразвитой соединительной ткани в костную ткань, является безразмерный «механорегулирующий индекс» (1), определяющий, ткань какого фенотипа образуется в текущей точке среды в ответ на механическую стимуляцию:

$$M = \frac{\varepsilon}{a} + \frac{q}{b} \tag{1}$$

где ε — максимальное значение октаэдрической сдвиговой деформации упругого каркаса двухфазной среды, q — максимальное значение скорости потока внутритканевой жидкости в порах, $a = 0.0375$ и $b = 3$ мкм/с — эмпирические константы.

В начальный период времени в области структурной перестройки заданы параметры гранулированной ткани. Кроме исходного состояния с гранулированной тканью в математическую модель включены четыре вида дифференцированной ткани — фиброзная, хрящевая, незрелая костная и зрелая костная, — каждый из которых характеризуется своими значениями материальных констант. В зависимости от значения индекса M в каждом узле конечно-элементной модели или во всем конечном элементе пороупругие модули сплошной среды изменяются.

4. Результаты численного анализа. Сроки консолидации переломов большеберцовой кости составляют от 4 до 7 месяцев. Ориентировочные сроки временной нетрудоспособности при неосложненном течении переломов продолжается около 5 месяцев. Основываясь на эти сроки, проведем исследование процесса реабилитации костной ткани за период восстановления $t = 120$ дней. Для анализа процесса регенерации выбраны три конечных элемента в области регенерата, между отломками кости, принадлежащие тканям разного фенотипа. Первый элемент под губчатым веществом кости, второй между отломками здоровой кости и третий с внешней стороны здоровой кости, находящийся в области занимаемой костной мозолью. Для выбранных элементов выведем графики изменения механических свойств модуля Юнга и плотности с шагом по времени 1 день.

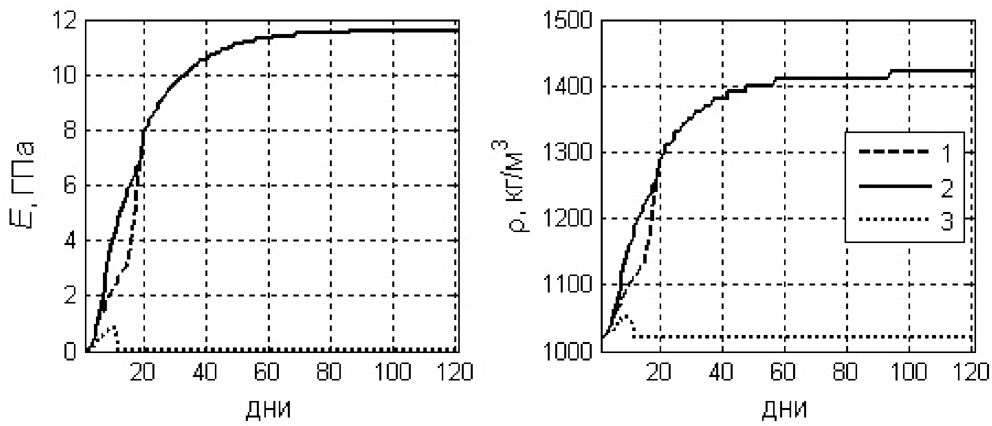


Рисунок 2 – Изменения модуля Юнга E и плотности ρ при частоте внешней гармонической составляющей нагрузки 10 Гц

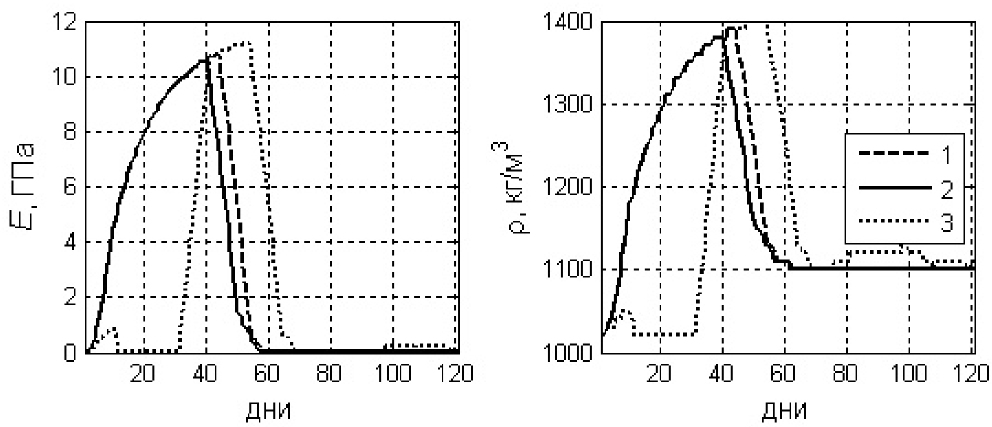


Рисунок 3 – Изменения модуля Юнга E и плотности ρ при частоте внешней гармонической составляющей нагрузки 50 Гц

Из графиков модуля Юнга E и плотности ρ (рисунок 2) видно, что при частоте нагрузки 10 Гц происходит увеличение механических свойств в исследуемых точках регенерата. Так, например, графики для элементов 1 и 2 (рисунок 2), соответствуют элементам, находящимся в области перелома между губчатым веществом (график 1) и здоровой костью (график 2), к 80 дню принимают свое максимальное значение, приближающееся по своим характеристикам к здоровой кости. Увеличение упругих свойств тканей свидетельствует о том, что в зоне повреждения образуется зрелая костная ткань. Величина модуля упругости и плотности графика 3 (рисунок 2), элемента, находящегося в области костной мозоли с внешней стороны кости, на протяжении всего периода восстановления соответствует по параметрам гранулированной ткани.

При увеличении частоты гармонической нагрузки до 50 Гц в течение первых дней идет увеличение упругих свойств тканей в области перелома между костными обломками, но с 40 дня происходит резорбция костной ткани, что приводит к образованию фиброзной ткани (рисунок 3). Дальнейшее увеличение частоты динамической силы также не дает положительного результата для консолидации перелома.

4. Заключение. Предложенная конечно-элементная модель большеберцовой кости человека позволяет исследовать влияние динамической нагрузки на процесс регенерации поврежденной кости и выбирать оптимальное механическое воздействие для быстрого и устойчивого заживления перелома. В частности модель позволяет изучать воздействие частоты и амплитуды механической нагрузки на процесс перестройки ткани. Полученные числовые результаты, представляются достаточно реалистичными и соответствуют известным медицинским исследованиям процессов регенерации костной ткани при переломах.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-29-04825.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Isaksson H., Wilson W., van Donkelaar C. C.* Comparison of biophysical stimuli for mechano-regulation of tissue differentiation during fracture healing // J. Biomech. 2006. Vol. 39. № 8. P. 1507–1516.

[2] *Маслов Л. Б.* Математическое моделирование восстановления механических свойств костной мозоли // Наука. Прикладная математика и механика. 2015. № 2. С. 286–303.

[3] *Маслов Л. Б.* Математическое моделирование колебаний пороупругих систем: монография. Иваново: Изд-во ИГЭУ, 2010. 264 с.

Sabaneev N. A., Maslov L. B., Sedov V. M. *Mathematical modeling of bone regeneration with external fixative apparatus*. The mathematical model provides possibility of the investigation of the regeneration processes of the damaged bone elements of the human locomotion system with the availability of a dynamic load and the theoretical argumentation of the choice of the optimal periodic impact to the damaged tissues for the fastest and stable healing.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ГИБКИХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян А. А., Саркисян С. О.
Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

В данной работе, принимая в основу математические модели геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек, решены: 1) статические задачи изгиба шарнирно-опертых микрополярных упругих гибких пластин и пологих оболочек под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки; 2) свободные колебания микрополярных гибких тонких пластин и пологих оболочек. Выполнен численный анализ, в результате которого установлены специфические свойства микрополярных материалов.

1. Введение. Геометрически линейные математические теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек построены в работах [1, 2]. В классической постановке геометрически нелинейные теории упругих тонких пластин и пологих оболочек, построены соответственно на основе гипотез Кармана и Маргерра [3–6]. Развивая подход Кармана — Маргерра и методику построения линейных теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек в работе [7] построены математические модели статики и динамики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек. Здесь считается, что упругие прогибы сравнимы с их толщиной и вместе с тем малы по отношению к характерным размерам в плане. В основе построения этих моделей поставлены: 1) основные гипотезы построения геометрически линейных математических моделей микрополярных упругих тонких пластин и оболочек; 2) соответственно, гипотеза Кармана (для пластин) или Маргерра (для оболочек) [3, 4].

В данной работе на основе указанных математических моделей геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек решены статические и динамичские задачи. Выполнен численный анализ, когда материал представляет собой синтетический полиуретан [8]. В результате анализа установлены специфические свойства микрополярных материалов.

2. Геометрически нелинейная модель микрополярных упругих пологих оболочек (в частности пластин) при больших прогибах. Основные уравнения геометрически нелинейной модели микрополярных упругих тонких пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид:

Уравнения движения

$$\frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial S_{ji}}{\partial x_j}=2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\ \frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}-N_{3i}=\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[T_{11}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}+T_{22}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]+\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+q=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+(-1)^j(N_{j3}-N_{3j})=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2},\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2}+S_{12}-S_{21}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}$$

$$L_{33}-\left(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}\right)-(M_{12}-M_{21})+\frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

Соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}],\ S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}]$$

$$N_{i3}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i}],\ N_{3i}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}+(\mu-\alpha)\Gamma_{i3}]$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii}+\nu K_{jj}],\ M_{ij}=\frac{2h^3}{3}[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}]$$

$$L_{ii}=2h[(\beta+2\gamma)\kappa_{ii}+\beta(\kappa_{jj}+\iota)],\ L_{ij}=2h[(\gamma+\epsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\epsilon)\kappa_{ji}]$$

$$L_{33}=2h[(\beta+2\gamma)\iota_{ii}+\beta(\kappa_{ii}+\kappa_{jj}],\ L_{i3}=\frac{4\gamma\epsilon}{\gamma+\epsilon}\kappa_{i3},\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\epsilon}{\gamma+\epsilon}l_{i3} \qquad (2)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{w}{R_i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2,\ \Gamma_{ij}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-(-1)^j\Omega_3+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}$$

$$\Gamma_{i3}=\frac{\partial w}{\partial x_i}+(-1)^j\Omega_j,\ \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\Omega_j,\ K_{ij}=\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}-(-1)^j\iota$$

$$K_{ii}=\frac{\partial\psi_i}{\partial x_i},\ \kappa_{ii}=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i},\ \kappa_{33}=\iota(x_1,x_2),\ \kappa_{ij}=\frac{\partial\Omega_j}{\partial x_i},\ \kappa_{i3}=\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_i},\ l_{i3}=\frac{\partial\iota}{\partial x_i} \qquad (3)$$

Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания (при $x_i=0;a$):

$$T_{ii}=0,\ u_j=0,\ M_{ii}=0,\ \psi_j=0,\ L_{ij}=0,\ \Omega_i=0,\ \Lambda_{i3}=0 \qquad (4)$$

К системе основных уравнений микрополярных пологих оболочек (пластин) с независимыми полями перемещений и вращений (1)–(3) и граничным условиям (4) нужно присоединить также соответствующие начальные условия для w, $\partial w/\partial t$, ψ_i, $\partial\psi_i/\partial t$, Ω_i, $\partial\Omega_i/\partial t$, $\iota, \partial\iota/\partial t$.

3. Большие прогибы шарнирно опертых прямоугольной микрополярной упругой тонкой пластинки и прямоугольной в плане микрополярной упругой тонкой пологой оболочки под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки. Рассмотрим статическую задачу деформации гибкой шарнирно опертой прямоугольньной пластинки под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки. Задачу будем решать по методу Ритца. Для этого введем безразмерные величины: $W^*=W/h,\ q^*=q/(E\delta^4)$. Численные расчеты выполнены для квадратной пластинки $b=a=0{,}005$ м, и для следующего значения относительной толщины $\delta=\frac{h}{a}=\frac{1}{100}$. Для физических постоянных примем значения [8] $\alpha=0,115\cdot10^9$ Па, $\mu=1,033\cdot10^9$ Па, $\lambda=2,1951\cdot10^9$ Па,

$\gamma = 4,1$ Н, $\epsilon = 0,13$ Н, $\beta = -2,34$ Н, $\rho = 590$ м^3, $J = 5,31 \cdot 10^6$ кг/м. На рис. 1 приведены зависимости прогиб W^* — нагрузка q^*. Линия 1 соответствует классической линейной теории, линия 2 — классической нелинейной теории, линия 3 — микрополярной линейной теории, а линия 4 — микрополярной нелинейной теории. Как видно из графиков, при краевой задаче (1)–(4) для пластинки, каждому значению интенсивности нагрузки отвечает одно, вполне определенное равновесное состояние. Так, при $q^* = 1500$, по классической линейной теории — $W^* = 8,3$, а по микрополярной линейной теории — $W^* = 3,2$; а также, по нелинейной классической теории — $W^* = 2,4$, по нелинейной микрополярной теории — $W^* = 1,96$. Как по линейной теории, так и по нелинейной теории, при всех остальных равных условиях микрополярность материала довольно значительно повышает жесткость пластинки.

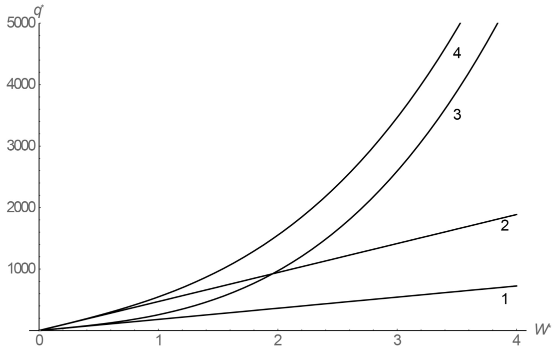


Рисунок 1 – *Зависимость безразмерной внешней нагрузки q^* от безразмерного прогиба W^* для квадратной пластинки*

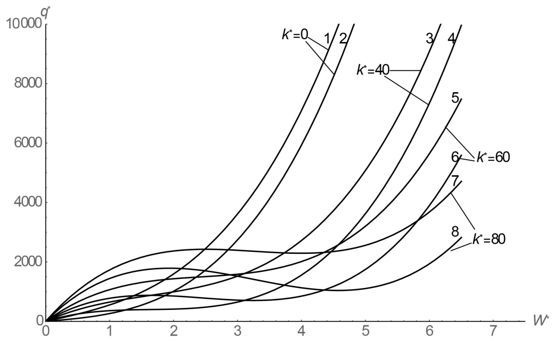


Рисунок 2 – *Зависимость безраз. внешней нагрузки q^* от безраз. прогиба W^* пологой оболочки для разных значений k^**

Рассмотрим также деформацию шарнирно опертой прямоугольной в плане микрополярной упругой тонкой пологой оболочки под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки. Задача решена по методу Галеркина. Численные расчеты выполнены для квадратной в плане цилиндрической панели. Для физических постоянных приняты те же значения, что и в случае пластинки [8], только здесь примем, что $k_2 = \frac{1}{R_2} = 0$, $k_1 = \frac{1}{R_1}$, и введем также безразмерную кривизну $k^* = \frac{a^2}{R_1 h}$ пологой оболочки. Здесь введены такие же безразмерные величины: W^*, q^* как в предыдущей задаче. На рис. 2 даны кривые, выражающие зависимость W^* и q^* для разных значениях безразмерной кривизны k^* пологой оболочки. Линии 1 и 2; 3 и 4; 5 и 6; 7 и 8 соответствуют микрополярной (нечетные) и классической (четные) моделей пологой оболочки, при различных значениях k^* . Из приведенных графиков видно, что при малых значениях k^* пологая оболочка как по классической теории упругости, так и по микрополярной теории, ведет себя как пластинка. От определенного значения k^* (правда различных для указанных моделей), если нагрузка непрерывно увеличивается, пологая оболочка при указанных обоих моделей скачкообразно изменяет прогиб (имеем так называемое явление хлопка). Как видно из графиков у микрополярной оболочки как верхняя, так и нижняя критические нагрузки выше, чем у классической оболочки. Так как устойчивость оболочки характеризуется верхним значением критической нагрузки, можем установить, что при остальных равных условиях микрополярная оболочка более устойчива, чем классическая оболочка.

4. Свободные колебания микрополярных упругих гибких пластин и пологих оболочек. В случае пластинки в основных уравнениях примем $k_i = \frac{1}{R_i} = 0$. Далее будем пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме $2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. Решение граничной задачи (1)–(4) при изучении собственных колебаний представим в виде (здесь $i, j = 1, 2; i \neq j$):

$$w(x_1, x_2, t) = w(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{a},\ u_i(x_1, x_2, t) = u_i(t) \cos \frac{\pi x_i}{a} \sin \frac{\pi x_j}{a}$$

$$\psi_i(x_1, x_2, t) = \psi_i(t) \cos \frac{\pi x_i}{a} \sin \frac{\pi x_j}{a},\ \Omega_i(x_1, x_2, t) = \Omega_i(t) \sin \frac{\pi x_i}{a} \cos \frac{\pi x_j}{a},$$

$$\Omega_3(x_1, x_2, t) = \Omega_3(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{a},\ \iota(x_1, x_2, t) = \iota(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{a} \qquad (5)$$

Решение (5) уже удовлетворяет граничным условиям (4). Поставим эти представления в геометрические соотношения (3). Получившейся выражения для деформаций и изгибов-кручений поставим в физические соотношения, получим выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применим метод Галеркина для систем уравнений движения (1). Выполним интегрирование и, далее, примем следующие представления:

$$w(t) = W \cos(pt),\ u_i(t) = U_i \cos(pt),\ \psi_i(t) = \Psi_i \cos(pt)$$

$$\Omega_i(t) = O_i \cos(pt),\ \Omega_3(t) = O_3 \cos(pt),\ \iota(t) = I \cos(pt) \qquad (6)$$

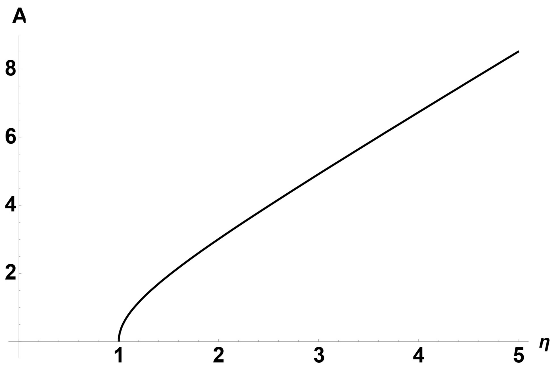


Рисунок 3 – *Зависимость безразмерного прогиба пластинки A от величины η*

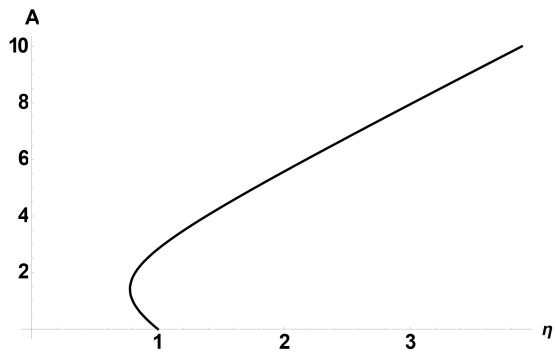


Рисунок 4 – *Зависимость безразмерного прогиба пологой оболочки A от величины η*

Поставим эти функции в полученные уравнения, умножим их на $\cos(pt)$ и интегрируем по t от 0 до $\frac{\pi}{2p}$. В результате получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $W,\ U_1,\ U_2,\ \psi_1,\ \psi_2,\ O_1,\ O_2,\ O_3,\ I$. Из этой системы можно получить зависимость $W - p$. Эта задача решена также по соответствующей линейной модели микрополярных упругих тонких пластин. Введем безразмерный прогиб $A = W/h$, а также, обозначение отношения величины к соответствующей частоте линейных колебаний $p_0 : \eta = p/p_0$. Отметим, что в случае динамических задач расчеты проведены для того же случая, что и в статических задачах. На рис. 3. приведена зависимость (η, A), эта линия называется скелетной кривой, которая отражает основные свойства деформируемой системы [5]. Кривая (η, A) представляет линию жесткого типа, т. е. с увеличением амплитуды частота возрастает. При весьма малых амплитудах имеем $\eta \to 1$. С увеличением амплитуды частота колебаний возрастает, и притом все более и более резко.

Далее решим также задачу свободных колебаний прямоугольных в плане микрополярных упругих тонких пологих оболочек с шарнирно опертыми краями. Задача решена тем же методом, что и предыдущая задача. Здесь принята $k^* = 20$. На рис. 4. приведена скелетная кривая (η, A) для пологой оболочки. Кривая (η, A) представляет линию мягкого типа, т. е. начальный участок здесь отклоняется к оси ординат. Отметим, что, и в случае пластинки и в случае оболочки, величина низкой частоты по микрополярной теории всегда мала по сравнению с величиной низкой частоты по геометрически нелинейной классической теории.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Саркисян С. О.* Общая теория микрополярных упругих тонких оболочк // Физческая мезомеханика. 2011. Том. 14. № 1. С. 55–66.

[2] *Саркисян С. О.* Общая динамическая теория микрополяных упругих тонких оболочек // Доклады РАН. 2011. Том. 436. № 2. С. 195–198.

[3] *Karman Th.* Collected works. London: 1956. V. 1. 530 p.

[4] *Marguerre K.* Die Durchschlags kraft eines schwachgekrummten Balkes // Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Cesellschaft. 1938. Bd. 37. S. 22–40.

[5] *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.

[6] *Григолюк Э. И.* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Физматлит. 1997. 264 с.

[7] *Sargsyan A. H., Sargsyan S. H.* Geometrically nonlinear static theory of thin elastic micropolar shallow shells // Proceedings of the XLIII Summer School-Conference. APM. 2015. St. Petersburg. June 22-27. P. 299–305.

[8] *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic silids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure. Ed. by H. Muhlhaus, J. Wiley. N. Y.: J. Wiley and sons, Ltd., 1995. Ch. 1. P. 1–22.

Sargsan A. H., Sargsyan S. H. *Some Problems of the Balane and free oscillations of micropolar elastic flexible plates and shallow shells*. In this paper on the basis of mathematical models of geometrically nonlinear micropolar elastic thin plates and shallow shells 1) static bending problems of simple supported micropolar elastic flexible plates and shallow shells under the action of uniformly distributed normal load; 2) free oscillations of micropolar flexible plates and shallow shells are solved. Numerical analysis is performed and on the basis of this results specific properties of micropolar matrials are set.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ВИБРОАКУСТИКЕ КОНСТРУКТИВНО СЛОЖНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Сафроненко В. Г., Шутько В. М.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Представлены математические модели, описывающие взаимодействие конструктивно сложных составных оболочек из полимерных композиционных материалов с акустической средой. Физико-механические характеристики полимерного связующего описываются в соответствии с теорией термовязкоупругости. Численно определяются помодовые и суммарные амплитудно-частотные характеристики давления и перемещений в окружающей оболочку акустической среде.

В дальнейшем в качестве базовых используются две модели: многослойная с гипотезой типа Тимошенко для пакета и трехслойная на основе гипотезы ломаной нормали. Для многослойных оболочечных конструкций кинематические и деформационные соотношения теории типа Тимошенко, записанные для оболочки вращения имеют в общепринятых обозначениях вид:

$$U = u+z\varphi_1, V = v+z\varphi_2, W = w, E_{11} = u'+k_1w, E_{22} = v^{\bullet}+\psi u+k_2w, E_{12} = u'+u^{\bullet}-\psi v;$$

$$K_{11} = \varepsilon_1\varphi_1', K_{22} = \varepsilon_1(\varphi_2^{\bullet} + \psi\varphi_1), K_{12} = \varepsilon_1(\varphi_2' - \psi\varphi_2 + \varphi_1^{\bullet});$$

$$E_{13} = \varphi_1 - \vartheta_1, E_{23} = \varphi_2 - \vartheta_2; \vartheta_1 = -w' + k_1u; \vartheta_2 = -w' + k_2u, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_1 = h_*/R_*$, $\psi = A_2'/A_2$, $(\ldots)' = (\ldots)_{,\alpha_1}/A_1$, $(\ldots)' = (\ldots)_{,\alpha_2}/A_2$.

Для соотношений, связывающих амплитуды усилий и моментов с соответствующими амплитудами деформаций принимается широко используемая структура матрицы приведенных жесткостей слоистого композита. В качестве основных функций выбираются компоненты, входящие в естественные краевые условия: $y_1 = S$, $y_2 = M_{11}$, $y_3 = T_{11}$, $y_4 = Q_{11}$, $y_5 = H$, $y_6 = v$, $y_7 = \varphi_1$, $y_8 = u$, $y_9 = w$, $y_{10} = \varphi_2$.

После перехода к гармоническим колебаниям и безразмерной форме основная система уравнений приводятся к виду:

$$y_1' = -2\psi y_1 - T_{22}^{\bullet} - k_2Q_{22} - \Omega^2(by_6 + \varepsilon_1 cy_{10}) - q_2,$$

$$y_2' = -\psi(y_2 - M_{22}) - y_5^{\bullet} + y_4/\varepsilon_1 - \Omega^2(cy_8 + \varepsilon_1 dy_7),$$

$$y_3' = -\psi(y_3 - T_{22}) - y_1^{\bullet} - k_1y_4 - \Omega^2(by_8 + \varepsilon_1 cy_7) - q_1,$$

$$y_4' = -\psi y_4 - Q_{22}^{\bullet} + k_1y_3 + k_2T_{22} - \Omega^2 by_9 - q_3,$$

$$y_5' = -2\psi y_5 - M_{22}^{\bullet} + Q_{22}/\varepsilon_1 - \Omega^2(cv + \varepsilon_1 dy_{10}),$$

$$y_6' = E_{12} - y_8^{\bullet} + \psi y_6, y_7' = K_{11}/\varepsilon_1, y_8' = E_{11} - k_1w,$$

$$y_9' = E_{13} - y_7 + k_1y_8, y_{10}' = K_{12}\varepsilon_1 + \psi y_{10} - y_7^{\bullet}, \qquad (2)$$

где:

$$\vartheta_2 = -y_9^\bullet + k_2 y_6; a_{33} = B_{33} \cdot D_{33} - A_{33}^2,$$
$$E_{12} = (D_{33}y_1 - A_{33}y_5)/a_{33}, K_{12} = (B_{33}y_5 - A_{33}y_1)/(2a_{33}),$$
$$E_{22} = y_5^\bullet + \psi y_8 + k_2 y_9, K_{22} = y_{10}^\bullet + \psi y_7; E_{13} = y_4/G_{13},$$
$$Q_{22} = G_{23}(y_{10} + y_9^\bullet - k_2 y_6); a_{11} = B_{11}D_{11} - A_{11}^2,$$
$$a_{11} = y_3 - B_{12}E_{22} - A_{12}K_{22}, a_2 = y_2 - A_{12}E_{22} - D_{12}K_{22},$$
$$E_{11} = (D_{11}a_1 - A_{11}a_2)/a_{11}, K_{11} = (B_{11}a_2 - A_{11}a_1)/a_{11};$$
$$T_{22} = B_{12}E_{11} + B_{22}E_{22} + A_{12}K_{11} + A_{22}K_{22},$$
$$M_{22} = A_{12}E_{11} + A_{22}E_{22} + D_{12}K_{11} + D_{22}K_{22}. \tag{3}$$

Компоненты напряженно-деформированного состояния представляются тригонометрическими рядами Фурье по окружной координате α_2 после чего получается система обыкновенных дифференциальных уравнений нормального типа, решаемого методом прогонки с ортогонализацией по Годунову. Уравнения состояния полимерного связующего композита соответствуют модели термовязкоупругого тела [1]. Компоненты комплексной податливости при сдвиге I' , I'' в обозначениях [4] имеют вид:

$$I'(\omega) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)}{G(r,v,T)} \left[1 - H(r)\frac{\omega^2}{[\varphi(r,v,T)]^2 + \omega^2}\right] dr;$$

$$I''(\omega) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)H(r)}{G(r,u,T)} \frac{\varphi(r,v,T)\omega}{[\varphi(r,v,T)]^2 + \omega^2} dr. \tag{4}$$

При необходимости учета звукоизлучения в окружающую линейную акустическую среду можно воспользоваться методами, разработанными для осесимметричных конструкций. В частности, для определения нормальной реакции акустической среды эффективен метод локального импеданса, определяемого из решения модельных задач [2]. Поле акустического давления в окружающей оболочку среде определяется с помощью интеграла Гельмгольца [3, 4].

При наличии дискретных подкреплений в виде круговых колец (шпангоутов) из полимерного композита принимается кинематика модели типа Тимошенко с учетом деформаций поперечного сдвига и инерции поворотов:

$$U_k = u_k(\alpha_2) + z\varphi(\alpha_2), \quad V_k = v_k(\alpha_2) + z\psi_2(\alpha_2) + \alpha_1\psi_1(\alpha_2), \quad W_k = w_k - \beta_1\varphi(\alpha_2).$$

Учитывая, что характерные размеры сечения кольца значительно меньше его радиуса, получим уравнения колебаний кольца:

$$Q_{1k}^\circ + \omega^2(b_k u_k + c\varphi) + t_k = 0, \quad T_k^0 + kQ_{3k} + \omega^2(b_k v_k + c_3\psi_1 + c_1\psi_2) + s_k = 0,$$

$$Q_{3k}^\circ - kT_k + \omega^2(b_k w - c_3\varphi) + q_k = 0, \quad H_k^0 + kM_{3k} + \omega^2(d_k\varphi + c_1 u - c_3 w) + m = 0,$$
$$M_{3k}^\circ - kH_k - Q_{1k} + \omega^2(d_3\psi_1 + d_{13}\psi_2 + c_3 v_k) + m_3 = 0,$$

$$M_{1k}^{\circ} - Q_{3k} + \omega^2(d_1\psi_2 + d_{13}\psi_1 + c_1 v_k) + m_1 = 0, (\ldots)^0 = (\ldots)_{,\alpha_2}/r_k. \tag{5}$$

Исходя из этих соотношений составляются условия сопряжения секций оболочки, расположенных между соседними кольцами. При этом во внешние нагрузки на кольце входят реакции от примыкающих секций оболочки.

Разработанные модели и методы позволяют оценивать сходимость решений, проводить расчет амплитудно-частотных характеристик, выполнять общий и помодовый анализ получаемых зависимостей. В случае расчета оболочечных конструкций трехслойной структуры используется модель базирующаяся на гипотезе ломаной линии в соответствии с которой кинематические соотношения имеют вид:

$$u_1^{(1)} = u_1 + [1 + k_1(\alpha_3 - c)]c\varphi_1 + \alpha_3\vartheta_1,\ u_2^{(1)} = u_2 + [1 + k_2(\alpha_3 - c)]c\varphi_2 + \alpha_3\vartheta_2,$$
$$u_3^{(1)} = w,\ c \leqslant \alpha_3 \leqslant c + h_1;\ u_1^{(2)} = u_1 - [1 + k_1(\alpha_3 + c)]c\varphi_1 + \alpha_3\vartheta_{12},$$
$$u_2^{(2)} = u_2 - [1 + k_2(\alpha_3 + c)]c\varphi_2 + \alpha_3\vartheta, \quad u_3^{(2)} = w, \quad -c - h_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant -c;$$
$$u_1^{(3)} = u_1 + \alpha_3(\varphi_1 + \vartheta_1), \quad u_2^{(3)} = u_1 + \alpha_3(\varphi_2 + \vartheta_2), \quad u_3^{(3)} = w, \quad -c \leqslant \alpha_3 \leqslant c. \tag{6}$$

где k_i, A_i — главные кривизны и коэффициенты Ляме; u_i, w — перемещения точек отсчетной поверхности; φ_1, φ_2 — углы поворота нормали в заполнителе, дополнительные к углам поворота ϑ_1 и ϑ_2; h_1, h_2, $2c$ — толщины внешних слоев и заполнителя.

Кинематические соотношения принимают вид:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = E_{11} + \alpha_3 K_{11} + c\varphi_{11} + (\alpha_3 - c)c\eta_{11}, \quad (1 \leftrightarrow 2),$$
$$\varepsilon_{12}^{(1)} = E_{12} + 2\alpha_3 K_{12} + c\varphi_{12} + 2(\alpha_3 - c)c\eta_{12}, \quad c \leqslant \alpha_3 \leqslant c + h_1;$$
$$\varepsilon_{11}^{(2)} = E_{11} + \alpha_3 K_{11} - c\varphi_{11} - (\alpha_3 + c)c\eta_{11}, \quad (1 \leftrightarrow 2),$$
$$\varepsilon_{12}^{(2)} = E_{12} + 2\alpha_3 K_{12} - c\varphi_{12} - 2(\alpha_3 + c)c\eta_{12}, \quad -c - h_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant -c;$$
$$\varepsilon_{11}^{(3)} = E_{11} + \alpha_3(K_{11} + \varphi_{11}), \quad (1 \leftrightarrow 2),$$
$$\varepsilon_{12}^{(3)} = E_{12} + 2\alpha_3 K_{12} + \alpha_3\varphi_{12}, \quad -c \leqslant \alpha_3 \leqslant c; \quad \varepsilon_{13}^{(3)} = \varphi_1, \varepsilon_{23}^{(3)} = \varphi_2;$$
$$E_{11} = u_1' + k_1 w,\ E_{22} = u_2^{\bullet} + \psi u_1 + k_2 w,\ E_{12} = u_1^{\bullet} + u_2' - \psi u_2;$$
$$\vartheta_1 = -w' + k_1 u_1, \quad \vartheta_2 = -w^{\bullet} + k_2 u_2;$$
$$K_{11} = \vartheta_1', \quad K_{22} = \vartheta_2^{\bullet} + \psi\vartheta_1, \quad K_{12} = 1/2(\vartheta_1^{\bullet} + \vartheta_2' - \psi\varphi_2);$$
$$\varphi_{11} = \varphi_1', \quad \varphi_{22} = \varphi_2^{\bullet} + \psi\varphi_1, \quad \varphi_{12} = \varphi_1^{\bullet} + \varphi_2' - \psi\varphi_1;$$
$$\eta_{11} = (k_1\varphi_1)', \quad \eta_{22} = (k_2\varphi_2)^{\bullet} + \varphi k_1\varphi_1, \quad \eta_{12} = k_1\varphi_1^{\bullet} = k_2\varphi_2' - \psi k_2\varphi_2;$$
$$(\ldots)' = \frac{1}{A_1}\frac{\partial(\ldots)}{\partial\alpha_1}; \quad (\ldots)^{\bullet} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial(\ldots)}{\partial\alpha_2}, \tag{7}$$

где E_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — деформации срединной поверхности; K_{ij} — изменения кривизн и кручение.

Уравнения движения оболочки имеют вид:

$$L_1(T_{11}T_{22}, S) + k_1 Q_{11} + X_1 = a_1\ddot{u}_1 + a_2\ddot{\vartheta} + a_3\ddot{\varphi}_1,$$

$$L_2(T_{22}, S) + k_2 Q_{22} + X_2 = a_1 \ddot{u}_2 + a_2 \ddot{\vartheta}_2 + a_4 \ddot{\varphi}_2,$$
$$L_3(Q_{11} Q_{22}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + X_3 + p = a_1 \ddot{w},$$

$$L_1(M_{11} M_{22}, H) - Q_{11} = 0, \quad L_2(H, M_{22}) - Q_{22} = 0,$$
$$L_1(m_{11} + \bar{M}_{11} c k_1; m_{22} + \bar{M}_{22} c k_1; m_{12} + 2\bar{H} c k_1) - Q_{13} = 0,$$
$$L_2(m_{12} + 2\bar{H}_{11} c k_2; m_{22} + \bar{M}_{22} c k_2) - Q_{23} = 0. \tag{8}$$

Здесь используются дифференциальные операторы

$$L_1(f_1, f_2, \varphi) = f_1' + \varphi^{\bullet} + \psi(f_1 - f_2), \quad L_2(f_1, f_2) = f_1' + f_2^{\bullet} + 2 f_1 f_2,$$
$$L_3(f_1, f_2) = f_1' + \psi f_1, \quad \ddot{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Компоненты внешней нагрузки обозначены X_r $(r = 1, 2, 3)$, нормальная реакция со стороны жидкости — p .

В (8) введены обобщенные усилия, моменты и перерезывающие силы, осредненные по пакету оболочки.

Численные примеры:

1. Рассмотрены колебания трехслойной оболочки жестко защемленной на торцах. Механические свойства внешних слоев соответствуют стали:

$$E^{(1)} = E^{(2)} = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \quad \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3, \quad \rho = 7.8 \text{ г/см}^3.$$

Граничные условия соответствуют жёсткому защемлению торцов. Для определения реакции жидкости на колебания оболочки используется импеданс на бесконечно длинной цилиндрической оболочке. Численные расчёты проводились при следующих параметрах: $L = 350$ мм; $R = 100$ мм; $h_1 = h_2 = 0.2$ мм, $2c = 1$ мм; $T = 22°C$. Нагрузка единичной интенсивности распределена на цилиндрической панели, расположенной в середине образующей. На рисунках 1–2 представлены результаты вычислений помодовых и суммарных амплитудно-частотных характеристик нормальных перемещений в центре площадки нагружения и дальнего акустического поля давлений в жидкости на расстоянии 50 радиусов оболочки от её оси вращения на прямой, проходящей через центр площадки нагружения.

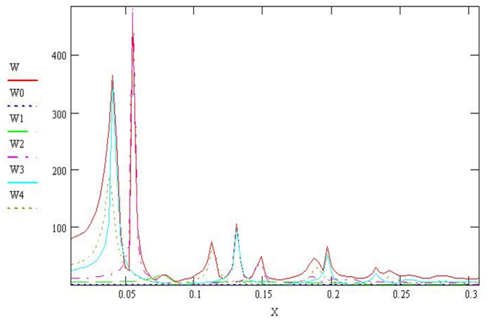


Рисунок 1

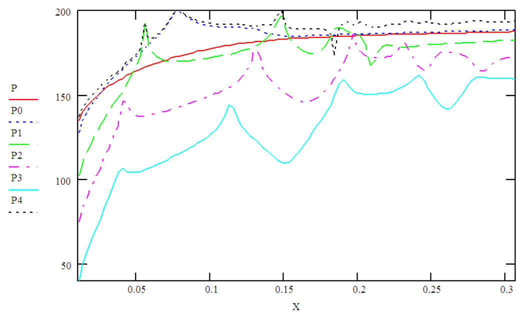


Рисунок 2

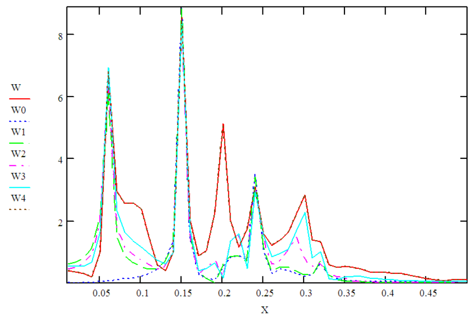


Рисунок 3

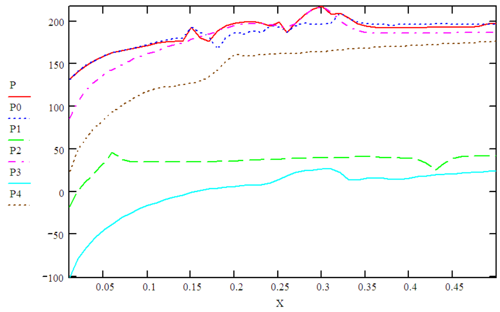


Рисунок 4

2. На рисунках 3–4 представлены результаты аналогичных расчетов колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной регулярным набором круговых ребер жесткости. Предполагается, что стенка оболочки состоит из 25 слоев (13 армирующих и 12 из полимерного связующего). Армирующие слои из стали $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, свойства полимера соответствуют [4]. В обозначениях работы [5] основные геометрические характеристики конструкции в безразмерном виде равны $r_0 = 0.8$, $r_1 = r_{\text{ц}} = 1.375$, $H_k = 2.85$, $L_{\text{ц}} = 3.5$, $h_{\text{арм}} = 0.08;$, $h_{\text{св}} = 0.015$. Геометрические и механические характеристики ребер жесткости соответствуют [5]. Всего на оболочке установлено 30 круговых ребер.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Степаненко Ю. П., Исаев К. В., Азаров А. Д.* Моделирование термомеханического поведения полимерных материалов // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. II Междунар. конф. г. Ростов–на–Дону, 19—20 сент. 1996 г. Ростов–на–Дону: МП «Книга», 1997. Т. 1. С. 118—123.

[2] *Юдин А. С., Яценко М. Н.* Виброакустика оболочки с кольцевыми ребрами переменной жесткости // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. 1995. Вып. 2. С. 97—105.

[3] *Ворович И. И., Ционский А. Я., Юдин А. С.* Метод собственных форм решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки вращения, подкрепленной ребрами, в жидкости // Акустический журнал. 1983. Т. 29, № 6. С. 744—748.

[4] *Байбуртян В. А., Дроздов А. Ю., Сафроненко В. Г., Ционский А. Я.* Расчет поля давления при вынужденных колебаниях подкрепленных оболочек вращения в жидкости // Акуст журн. 1984. Т. 30, № 5. С. 702.

Safronenko V. G., Shutko V. M. *Some problems of mathematical modeling in structurally complex vibroacoustic polymer composite shells of revolution.* The mathematical models describing interaction of the structurally compound shells from polymeric composites with the acoustic medium are presented. Constitutive equations of the polymer matrix are confirmed with the thermoviscoelasticity theory. Both mode and summary amplitude-frequency characteristics of the shell, as well as the field of pressure in acoustic medium are determined.

НЕОДНОРОДНО ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТЫ УСТРОЙСТВ НАКОПЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ: КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ

Соловьев А. Н.[1,2], Скалиух А. С.[1], Оганесян П. А. [1], Ле Зыонг Ван[3]

[1]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

[2]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

[3]*Технический университет им. Ле Куй Дона, Ханой*

В докладе рассмотрены методы моделирования неоднородных пьезоэлементов: конечно-элементное моделирование и прикладная теория. Исследуемые пьезопреобразователи представляют интерес как части устройств накопления энергии. Конечно-элементные расчеты выполнялись в пакетах ACELAN и ANSYS. Полученные результаты позволяют составить алгоритм проектирования эффективных неоднородно-поляризованных устройств с использованием оптимальных средств моделирования.

1. Математическая модель неоднорого электроупругого тела Математическая модель составного упругого, электроупругого и акустического тела с неоднородными свойствами твердых тел состоит из краевой задачи [1]

для упругих и электроупругих тел

$$\rho_{pk}\ddot{u} + \alpha_{dj}\rho_j\dot{u} - \nabla\cdot\sigma = f_j \nabla\cdot D = 0, \tag{1}$$

$$\sigma = c_j^E\cdot\cdot(\varepsilon + \beta_{dj}\dot{\varepsilon}) - e_j^T\cdot E, \quad D + \varsigma_d\dot{D} = e_j\cdot\cdot(\varepsilon + \varsigma_d\dot{\varepsilon}) + M_j^S\cdot E, \tag{2}$$

$$\varepsilon = (\nabla u + \nabla u^T)/2, \quad E = -\nabla\varphi;$$

для акустической среды:

$$\frac{1}{\rho_j c_j^2}\dot{p} + \nabla\cdot v = 0; \quad v = \nabla\psi, \tag{3}$$

$$\rho_j\dot{v} = \nabla\cdot\sigma; \quad \sigma = -pI + b\nabla, v$$

где σ — тензор напряжений, ρ — плотность тела, ε — тензор деформаций, u — вектор перемещений, D — вектор электрической индукции, E — вектор напряженности электрического поля, f — вектор массовых сил, φ — электрический потенциал, α, β, ς — коэффициенты демпфирования, c^E, e, $э^s$ — тензоры упругих констант, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей, индекс j отвечает номеру тела в модели, c — скорость звука, v — вектор скоростей, ψ — потенциал скоростей, p — звуковое давление.

Тензоры c^E, e, $э^s$ и плотность тел будем считать функциями от положения точки в теле:

$$\rho_{pk} = \rho_{pk}(x), \quad c_j^E = c_j^E(x), \quad э_j^s = э_j^s(x), \quad e_j^T = e_j^T(x). \tag{4}$$

Для полного учета воздействия поляризации предлагается использовать следующую модель:

$$c = c^i + |\mathbf{P}|\,(c^a - c^i), \quad g = g^i + |\mathbf{P}|\,(g^a - g)$$

$$e = |\mathbf{P}|\,e^a \tag{5}$$

Здесь вводятся соотношения, которые описывают переход от изотропного состояния к анизотропному в зависимости от того, как сильно поляризовано тело. В данной модели индексом i обозначены тензоры для изотропного состояния, а индексом a — для анизотропного. Модуль вектора поляризации $\mathbf{P}$ меняется от 0 до 1 и характеризует степень поляризации, при этом его значение, равное 1, соответствует максимальной поляризации, возможной для данной пьезокерамики.

2. Конечно-элементные модели.

Расчетные модули для решения задач при помощи метода конечных элементов, представленные в данной работе, были разработаны в составе комплекса ACELAN. Учет неоднородных свойств производится на этапе сборки локальных матриц жесткости. Каждое из скалярных неоднородных свойств материала представляется в виде (5). Для задания неоднородного векторного поля поляризации производится задание независимых функций неоднородности для каждой из координат вектора поляризации. В плоском случае используется полярная система координат, что позволяет описать поляризацию в виде поля модулей поляризации и углов поворота. При переходе к конечному разбиению было рассмотрено два подхода к дискретизации функции, описывающей неоднородность. В первом случае свойства материала считаются однородными в пределах каждого отдельного конечного элемента. Во втором случае используются узлы численного интегрирования, в которых задаются значения функции неоднородности. В зависимости от типа конечного элемента и применяемой схемы интегрирования возрастает количество значений, необходимых для задания неоднородности по второму методу.

В работе [2] была поставлена задача для трехслойного композитного пьезопреобразователя с двумя активными слоями неоднородно поляризованной керамики. В результате сравнения результатов численных экпериментов в комплексах ANSYS и ACELAN был выявлен прирост коэффициента электромеханической связи (КЭМС) и ширины полосы пропускания при некоторых вариантах предварительной поляризации и соответвующей схеме электродирования. С точки зрения моделирования устройств накопления энергии интерес представляет потенциал, возникающий при вынужденных колебаниях. Схема однородно поляризованного преобразователя с полностью электродированными поверхностями приведена на рисунке 1, схема с частичным электродированием и неоднородной поляризацией представлена на рисунке 2.

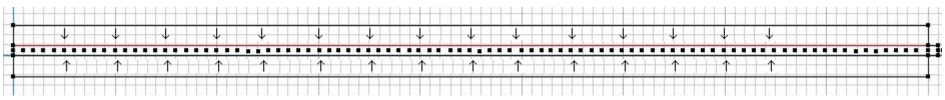


Рисунок 1 – *Схема преобразователя с однородной поляризацией*

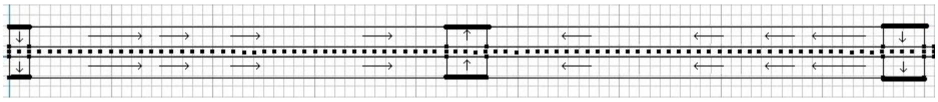


Рисунок 2 – *Схема преобразователя с неоднородной поляризацией*

На рисунках 3–4 приводятся распеределение электрического потенциала в задаче о вынужденных колебаниях под действием равномерно распределенного давления, на первой резонансной частоте трехслойного преобразователя для однородной поляризации и в рамках упрощенной модели с блочной поляризацией, для которой выходной потенциал возрастает почти на два порядка. Такая разница отчасти объясняется снижением емкости устройства из-за сокращения площади электродирования. Оптимизация размеров и положения электродов является одним из направлений дальнейших исследований в этой области.

2. Прикладная теория. В работах [3, 4] были предложены модели деформации электроупругих пластин, на основе которых в данной работе была построена прикладная теория для упрощенной модели преобразователя. Рассмотрим установившиеся колебания при цилиндрическом изгибе однослойного поперечно поляризованного пьезопреобразователя толщины h и длины L. Средняя линия преобразователя совпадает с осью абсцисс. Полагая в (1) $\sigma_{33} = 0$, ε_{22}=0 получим

$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} - c_{13}\frac{c_{13}e_{11} + e_{33}\frac{\partial\phi}{\partial z}}{c_{33}} + e_{31}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} - c_{13}\frac{c_{13}e_{11} + e_{33}\frac{\partial\phi}{\partial z}}{c_{33}} + e_{31}\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (6)$$

Распределение амплитуды потенциала будем искать в виде:

$$\phi(x, y, z) = \frac{V_0}{h}\left(\frac{2z}{h} - 1\right) + \frac{V_0}{h}\left(\frac{2z}{h} + 1\right) + \Phi(x)\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \qquad (7)$$

где V_0 — некоторая функция, описывающая распределение потенциала на поверхности пластины. Распределение амплитуды осевых перемещений ищем в виде

$$u_1(x, y, z) = -\frac{\partial U_z(x)}{\partial x}\ z \qquad (8)$$

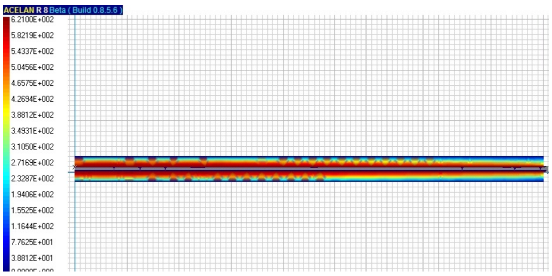


Рисунок 3 – *Распределение потенциала, однородная поляризация, частота 2.362 КГц*

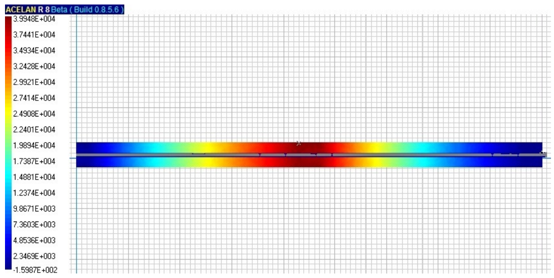


Рисунок 4 – *Распределение потенциала, неоднородная поляризация, частота 2.530 КГц*

Рассчитаем погонный изгибающий момент M_{11} и погонную поперечную силу Q_1:

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z dz = \frac{h^3}{12}\left(-c_{11}\frac{\partial^2 U_z(x)}{\partial x^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{c_{13}}{c_{33}}\left(c_{13}\frac{\partial^2 U_z(x)}{\partial^2 x} + \frac{8e_{33}}{h^2}(V_0 - \Phi(x))\right) + \frac{8e_{31}}{h^2}(V_0 - \Phi(x))\right)$$

$$Q_1 = -\frac{\partial M_{11}}{\partial x} = \frac{h^3}{12}\left(-c_{11}\frac{\partial^3 U_z(x)}{\partial x^3} - \frac{c_{13}}{c_{33}}\left(c_{13}\frac{\partial^3 U_z(x)}{\partial x^3} - \frac{8e_{33}}{h^2}\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right) - \frac{8e_{31}}{h^2}\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right)$$

Система уравнений движения и электростатики примет вид:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - p(x) - W^2 \rho h U_z(x) = 0; \quad \int_{-h/2}^{h/2} (\frac{\partial D_3}{\partial x} + \frac{\partial D_1}{\partial x}) dz = 0 \tag{9}$$

где ρ — плотность материала, $p(x)$ — внешняя нагрузка, $W = 2\pi\omega$ — круговая частота, ω — частота колебаний. После подстановки всех известных величин уравнения в (9) система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}(-c_{11} + \frac{c_{13}^2}{c_{33}})h^3 \frac{\partial^4 U_z(x)}{\partial x^4} - \frac{1}{12}(\frac{8c_{13}e_{33}}{h^2 c_{33}} - \frac{8e_{31}}{h^2})h^3 \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} - p(x) - W^2 \rho h \frac{\partial U_z(x)}{\partial x} = 0 \\ (-e_{31} + \frac{e_{33}c_{13}}{c_{33}})(\frac{\partial^2 U_z(x)}{\partial x^2}) + K\Phi(x) - KV_0 - \frac{2}{3}g_{11}\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = 0\,, \quad K = \frac{8e_{33}^2}{h^2 c_{33}} + \frac{8g_{33}}{h^2} \end{cases} \tag{10}$$

Далее рассматривается модель второй части преобразователя со встречно продольной поляризацией. Для удобства нумерации материальных констант введем локальную систему координат с началом в точке $(L, 0)$. Для этого поменяем местами координатные оси x и z. Определяющие соотношения останутся неизменными с точностью до названия осей координат. Для поперечного смещения предполагаем соотношение типа (8), а электрический потенциал будем искать в виде:

$$\phi(x, y, z) = \Phi(z)$$

Получим выражения для силовых факторов D_3, M_3 и Q_3, аналогично предыдущему случаю и подставим в систему уравнений, аналогичную (10). Получим систему дифференциальных уравнений для второго участка преобразователя:

$$\begin{cases} -\frac{1}{8}(-\frac{2e_{31}c_{13}}{c_{11}} + 2e_{33})h^2 \frac{\partial^3 \Phi(z)}{\partial z^3} - \frac{1}{24}(\frac{2c_{13}^2}{c_{11}} - 2c_{33})h^3 \frac{\partial^4 U_x(z)}{\partial z^4} - p(z) - W^2 \rho h U_x(z) = 0 \\ (-\frac{e_{31}}{c_{11}} - g_{33})\frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{4}(\frac{e_{31}c_{13}}{c_{11}} - e_{33})h \frac{\partial^3 U_x(z)}{\partial z^3} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Общие решения уравнений (10) и (11) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} U^1(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + C_5 \cos(\lambda_5 x) + C_6 \sin(\lambda_6 x) + U_* \\ \Phi^1(x) &= T_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + T_2 C_2 e^{\lambda_2 x} + T_3 C_3 e^{\lambda_3 x} + T_4 C_4 e^{\lambda_4 x} + T_5 C_5 \cos(\lambda_5 x) + T_6 C_6 \cos(\lambda_6 x) \\ U^2(z) &= C_7 e^{\alpha_1 z} + C_8 e^{\alpha_2 z} + C_9 \cos(\alpha_5 z) + C_{10} \sin(\alpha_6 z) + U_* \\ \Phi^2(z) &= T_7 C_7 e^{\alpha_1 z} + T_8 C_8 e^{\alpha_2 z} + T_9 C_9 \cos(\alpha_5 z) + T_{10} C_{10} \sin(\alpha_6 z) + C_{11} z + C_{12} \end{aligned} \tag{12}$$

где наборы значений λ_i, α_i — корни соответствующих характеристических многочленов, T_i находятся из решения однородной системы, $U_* = -p(x)/\mathrm{W}^2\rho h$, верхний индекс указывает на принадлежность правой части $i = 1$ и левой части $i = 2$ преобразователя.

Рассмотрим условия, при которых на левом и правом концах преобразователя задано шарнирное опирание. Записывая граничные условия и условия стыковки в локальных координатах, получим следующий набор из двенадцати соотношений:

$$\begin{array}{ll} U^1(0) = 0 & U^1(L) = U^2(0) \\ M^1(0) = 0 & M^1(L) = M^2(0) \\ D^1(0) = 0 & \Theta^1(L) = \Theta^2(0) \\ U^2(L) = 0 & Q^1(L) = Q^2(0) \\ M^2(L) = 0 & 2\Phi^1(L)/3 = \Phi^2(0) \\ \Phi^2(L) = 0 & D^1(L) = D^2(0) \end{array} \qquad (13)$$

Граничные условия (13) позволяют, используя уравнения (12), записать систему линейных алгебраических уравнений и вычислить коэффициенты C_1–C_{12}, что и является решением исходной задачи. В численных экспериментах были решены задачи на вынужденные колебания на различных частотах с различными граничными условиями. Рассматривались колебания под действием внешней нагрузки при наличии или отсутствии потенциала на электродах. Были получены результаты, согласующиеся с данными из численных экспериментов, проведенных с помощью МКЭ. Разница составила не более 3–4%.

Работа поддержана грантами РФФИ (16-01-00354 А, 16-58-52013 МНТ_а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Белоконь А. В., Наседкин А. В., Соловьев А. Н.* Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств // Прикладная математика и механика, 2002. №3. С. 491–501.

[2] *Soloviev A. N., Oganesyan P. A., Skaliukh A. S.* Modeling of Piezoelectric Elements with Inhomogeneous Polarization by Using ACELAN. In: Advanced Materials – Studies and Applications, Chapter 12. N.-Y.: Nova Science Publishers, 2015. P. 169–192.

[3] *Ватульян А. О., Гетман И. П., Лапицкая Н. Б.* Об изгибе пьезокерамической биморфной пластины // Прикладная механика. 1991. Т. 27, №10. Р. 101–105.

[4] *Ватульян А. О., Рынкова А. А.* Изгибные колебания пьезоэлектрического биморфа с внутренним разрезным электродом, Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, №1. С. 184–198.

Soloviev A. N., Oganesyan P. A. *Non-uniformly polarized piezoelectric devices for energy storage: finite element modeling and applied theory*. The report considers methods of heterogeneous elements modeling: finite element modelling and applied theory. The studied piezoelectric transducers are subject of interest as part of the energy harvesting devices. Finite element calculations were performed in ANSYS and ACELAN packages. The obtained results allow to create the algorithm to adjust efficient heterogeneously polarized devices design process.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ И СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Столяр А. М.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе исследуется поведение составных тонкостенных конструкций (СТК). Применяются определяющие соотношения деформационной теории для учета пластических свойств материала. Математическая модель СТК содержит также уравнения колебаний оболочек типа Кирхгофа — Лява и С. П. Тимошенко. Проводятся расчеты оболочек при различных типах нагружения.

1. Колебания составных конструкций. Рассматриваются начально-краевые задачи, описывающие поведение составных тонкостенных конструкций при различных режимах нагружения. Конструкция представляет собой набор соосных цилиндрических корпусов, подкреплённых шпангоутами, с упругими, упругопластическими и жесткими пологими сферическими и коническими переборками. Простейший пример такой конструкции показан на рис. 1. На рис. 2 показана «универсальная кривая» зависимости между интенсивностями деформаций и напряжений в случае учёта пластичности материала.

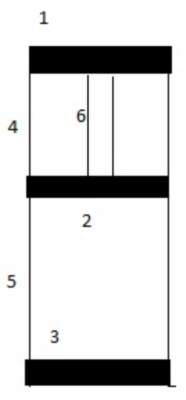


Рисунок 1

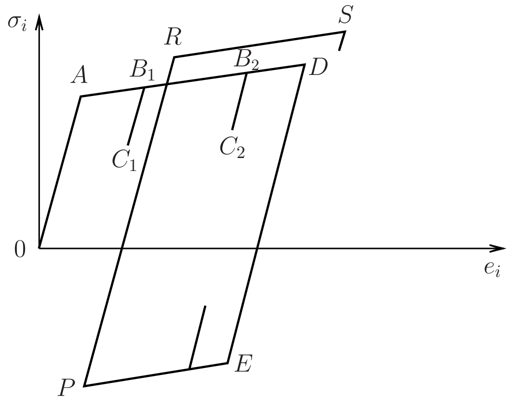


Рисунок 2

Здесь номерами 1, 2 и 3 отмечены жёсткие массы, а номерами 4, 5 и 6 — цилиндрические оболочки. Математическая модель содержит уравнения колебаний элементов конструкции, условия их сопряжения, начальные условия, определяющие соотношения. Цилиндрические, сферические, плоские, конические элементы конструкции моделируются как тонкие упругие или упругопластические оболочки, для описания осесимметричных колебаний которых применяются уравнения нелинейной теории пологих оболочек, которые основаны на соотношениях Кирхгофа — Лява или С. П. Тимошенко.

2. Определяющие соотношения для несжимаемого материала. Остановимся подробнее на определяющих соотношениях деформационной теории пластичности, которые применяются для описания неупругого поведения материала оболочки. В случае интенсивного ударного и/или циклического нагружения необходимо учитывать упрочнение материала. В соответствии с большим числом экспериментальных данных предполагаем, что существует не зависящая от вида напряжённого состояния универсальная форма связи между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций. Для несжимаемого материала она совпадает с зависимостью между напряжением и деформацией при одноосном растяжении. На рис. 2 изображена диаграмма, связывающая напряжение и деформацию при одноосном знакопеременном нагружении типа растяжение-сжатие. Введём понятия повторного и переменного упрочнения. Упругопластическому деформированию элемента оболочки сопоставим движение изображающей точки по «универсальной кривой» по часовой стрелке: повторному упрочнению — движение в том же направлении, что и до предшествующей разгрузки, а переменному — в противоположном (см. рис. 2). Введём также понятие полуцикла деформирования: нулевому полуциклу отвечает движение по участку OAD «универсальной кривой», первому — по DEP, второму — по PRS и т. д.Рассмотрим процесс деформирования на n-ом полуцикле, $n \geqslant 1$. Он начинается с разгрузки — чисто упругого деформирования элемента. Пластическое течение на данном полуцикле может проявиться лишь в виде переменного упрочнения. Для вывода определяющих соотношений воспользуемся зависимостями В. В. Москвитина [2]. В случае плоского напряженного состояния для несжимаемого материала найдём

$$\sigma'_{ij} = \frac{2}{3}E(1-\omega_n)(\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'\delta_{ij}), \quad ij = \{11, 22, 13\}, \tag{1}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(n)}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(n)}. \tag{2}$$

Здесь E — модуль Юнга, ω_n — функция А. А. Ильюшина, δ_{ij} — символ Кронекера, компоненты тензоров напряжений и деформаций являются функциями пространственных и временной переменных, которые для краткости опущены; σ_{ij}, ε_{ij} — текущие значения напряжений и деформаций, $\sigma_{ij}^{(n)}$, $\varepsilon_{ij}^{(n)}$ — напряжения и деформации в момент начала n-го полуцикла. В случае билинейной аппроксимации «универсальной кривой» для функции Ильюшина имеем

$$\omega_n = \begin{cases} 0, & e_{in} \leqslant e_s^{(n)} \\ (1-\gamma_n)(1 - e_s^{(n)}/e_{in}), & e_{in} > e_s^{n}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь γ_n, e_{in}, $e_s^{(n)}$ — соответственно отношение тангенциального модуля к модулю Юнга, интенсивность деформаций и предел упругих деформаций на n-ом полуцикле. Для материала с идеальным эффектом Баушингера можно записать

$$e_s^{(n)} = 2e_s, \quad n \geqslant 1, \quad e_s^{(0)} = e_s = \sigma_s/E, \tag{4}$$

где σ_s — начальный предел текучести. Для материала с изотропным упрочнением имеем следующие зависимости

$$e_s^{(n+1)} = e_s^{(n)} + 2\gamma_n(e_{in}^{(n+1)} - e_s^{(n)}), \quad n > 0, \tag{5}$$

$$e_s^{(1)} = 2e_s^{(0)} + 2\gamma_0(e_{i0}^{(1)} - e_s^{(0)}),$$

Интенсивность деформаций выражается по формуле

$$e_{in} = \frac{2}{\sqrt{3}}[(\varepsilon')^2 - \varepsilon'_{11}\varepsilon'_{22} + (\varepsilon'_{13})^2]^{1/2}. \tag{6}$$

В формулах (1)–(6) напряжения и деформации с индексом n вычисляются в момент начала n-ного полуцикла. Рассмотрим в осесимметричном случае процесс упругопластического деформирования элемента оболочки с координатами (x, z). Переход в состояние упрочнения произойдёт в некоторый момент времени t_0 при выполнении условия $e_{i0}(x, z, t_0) \geqslant e_s$. Первый полуцикл начнётся, когда выполнится условие

$$\frac{\partial e_{i0}(x, z, t_1)}{\partial t} < 0.$$

После упругого деформирования может начаться либо переменное упрочнение, либо повторное. Повторное упрочнение имеет место при выполнении неравенства

$$e_{i0}(x, z, t) > e_{i0}(x, z, t_1),$$

а переменное — при выполнении условия

$$e_{i1}(x, z, t) > e_s^{(1)}(x, z).$$

И так далее. При этом, каждому элементу оболочки соответствует своя «универсальная кривая». Таким образом, алгоритм расчёта допускает, что различные элементы оболочки, в том числе и лежащие на одной нормали к срединной поверхности, в один и тот же момент времени могут находиться на различных участках своих «универсальных кривых».

3. Определяющие соотношения для сжимаемого материала. В случае, когда коэффициент Пуассона $\nu \neq 0{,}5$, вместо формул (1), (6) имеем [1]

$$\sigma'_{ij} = EG_0(\varepsilon'_{ij} + G_1\varepsilon'\delta_{ij}), \quad ij = \{11, 22, 13\}, \tag{7}$$

$$G_0 = \frac{1 - \omega_n}{1 + \nu}, \quad G_1 = \frac{1 - (1 - 2\nu)G_0}{1 + 2(1 - 2\nu)G_0},$$

$$e_{in} = \frac{2}{\sqrt{3}}[G_2(\varepsilon')^2 - \varepsilon'_{11}\varepsilon'_{22} + (\varepsilon'_{13})^2]^{1/2}, \quad G_2 = \frac{1 + G_1 + G_1^2}{3}. \tag{8}$$

Функция ω_n по-прежнему вычисляется по формуле (3), но теперь (в (4), (5)) следует

$$e_s = \frac{2(1 + \nu)\sigma_s}{3E}.$$

Решая совместно (3) и (8), получим уравнение относительно $\lambda = e_s^{(n)}/e_{in}$:

$$b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 - b_3\lambda - b_4 = 0. \tag{9}$$

Коэффициенты уравнения (9) выражаются через физические параметры задачи и деформации на текущих участках соответствующих «универсальных кривых».

Нетрудно показать, что уравнение (9) имеет ровно один положительный корень, не превосходящий единицу.

4. Результаты расчётов упругопластических элементов составной конструкции. Схема варианта метода конечных разностей (МКР) численного решения задач о колебаниях и динамическом прощёлкивании сферической оболочки или круглой пластинки описана в работах [3, 4]. Приведём некоторые результаты расчётов жёстко защемлённых круглой пластинки и сферической оболочки из алюминия 6061-T6. Упрочнение материала считалось изотропным; кроме того, полагалось $\gamma_n = \gamma = \text{const}$ $(n \geqslant 0)$. На рис. 3 представлены графики зависимости от времени прогиба в центре нагруженной действием начальной скорости $V_0 = 122$ м/с круглой пластины: кривая 1 — данные эксперимента P-8 из работы [5]; кривая 2 — результаты [5], полученные при помощи МКР для уравнений Кирхгофа–Лява и определяющих соотношений теории течения с кинематическим упрочнением; кривые 3 и 4 результаты настоящей работы для $\nu = 0{,}3$ и $\nu = 0{,}5$ соответственно. Видно, что деформационная теория с учётом сжимаемости материала и теория течения приводят к близким результатам.

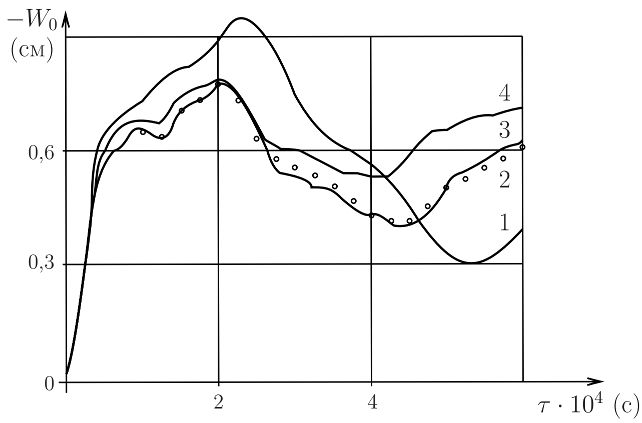


Рисунок 3

Для сферической оболочки из материала, близкого к алюминию 6061-T6 [6] вычислялись критические нагрузки динамического прощёлкивания (КНДП) — следуя критерию Будянского — Рота [7]. Найдены следующие значения КНДП: 0,35 при $\nu = 0{,}3$ и 0,40 при $\nu = 0{,}5$. В работе [6] получено значение 0,36.

Отметим также, что определяющие соотношения деформационной теории пластичности применялись в работах [1, 8] при вычислении КНДП цилиндрической панели и арки, где были получены весьма близкие результаты. Это численным образом подтвердило предельный переход от панели к арке, проведённый асимптотически для упругого материала.

5. Заключение. На основе алгоритмов и программ, представленных в [4, 9], проведены расчеты различных составных конструкций, в том числе и в случае предварительно напряжённых оболочечных элементов. Получены зависимости от времени усилий в различных точках оболочечных элементов. Приводятся результаты расчетов. Разработанная математическая модель позволяет исследовать поведение широкого класса составных оболочечных конструкций, находящихся в условиях динамического или статического нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Столяр А. М.* Поведение узких панелей и сферических оболочек в условиях статического и динамического нагружения. Асимптотический и численный анализ. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2014. 146 с.

[2] *Москвитин В. В.* Пластичность при переменных нагружениях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. 263 с.

[3] *Бермус И. М., Срубщик Л. С., Столяр А. М., Цибулин В. Г.* Некоторые вопросы расчета колебаний физически и геометрически нелинейных круглых пластин и сферических оболочек при импульсных нагрузках / Ростов, ун-т. Ростов н/Д, 1980. 39 с. Деп. в ВИНИТИ 27.04.81, № 1896-81 Деп.

[4] *Бермус И. М., Срубщик Л. С., Столяр А. М. и др* Расчет по деформационной теории пластичности геометрически нелинейных колебаний сферических оболочек при ударном нагружении // Вестн. Лен. ун-та. Сер. Мех. 1981. № 13. С. 70–75.

[5] *Duffey T. A., Key S. W.* Experimental theoretical correlation of impulsively loaded circular plates // Exp. Mech. 1969. Vol. 9, № 6. P. 241–249.

[6] *Kao R.* Nonlinear dynamic buckling of spherical caps with initial imperfections // Comput. and Structures. 1980. Vol. 12, № 1. P. 49–63.

[7] *Budiansky B., Roth U. S.* Axisymmetric dynamic buckling of clamped spherical shells // TND-151O. NASA. 1962. P. 597–606.

[8] *Столяр А. М., Муталибов Г. С.* Асимптотический и численный анализ задач статики и динамики пластинок, оболочек и тросов // Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 3610–3612.

[9] *Бернштейн Л. А., Srubshchik L. S., Столяр А. М.* Колебания многосвязных цилиндрических конструкций с односторонними связями при динамическом нагружении // Труды III Всеросс. конференции по теории упругости с международным участием. 13–16 октября 2003 г. Ростов-на-Дону–Азов. Ростов-на-Дону: ОАО «Новая книга», 2004. С. 80–82.

Stolyar A. M. *Nonlinear analysis of thin-walled structures behavior under dynamic and static loading*. Compound thin-walled structures (CTS) behavior has been considered in the paper. Constitutive equations of deformational theory have been applied in the case of elastic-plastic deformation of material. Mathematical model of CTS includes shells' oscillations equations of Kirchhoff-Love and Timoshenko type as well. Computations of shells oscillations behavior under loading of different type have been carried out in the paper.

НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В ПОПЕРЕЧНО-АНИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

Сторожев С. В.
Донецкий национальный университет

Представлены результаты исследований по проблеме оценивания нечетких значений фазовых и групповых скоростей нормальных упругих волн в трансверсально-изотропном слое в рамках гипотезы об интерпретации параметра плотности и экспериментальных значений модулей упругости рассматриваемых сред нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами. Искомые оценки скоростей получены в форме разложений представляющих эти оценки нечетких множеств по множествам альфа-уровней. Приведен пример использования разработанной методики для получения нечетких оценок фазовых и групповых скоростей сдвиговых нормальных волн из определенных мод дисперсионных спектров в закрепленном по граням слое из горных пород с характерными разбросами экспериментальных значений физико-механических постоянных.

Введение и постановка задачи. Среди задач нечеткого математического моделирования в волновой механике деформируемых сред к числу первоочередных относятся проблемы оценки расхождений для эндогенных характеристик исследуемых моделей на базе информации о разбросах экспериментальных значений их экзогенных параметров. Такие оценки, в частности, играют важную роль в технологиях волнового зондирования горных массивов, пластов полезных ископаемых и подземных горных сооружений, а также в ультраакустической дефектоскопии, поскольку для многих типов материалов, в первую очередь для горных пород, композитов и промышленных металлов, характерен существенный разброс в измеряемых экспериментальных величинах физико-механических постоянных [4, 7]. Учет факторов неопределенности в математических моделях естественных наук реализуется с использованием методов теории вероятностей и математической статистики [6], а также на базе методов нечеткой математики [1–3, 8], которые распространены в меньшей мере, но имеют определенные априорные позитивные особенности в виде возможностей оперирования непосредственно с нечетко-множественными величинами, а не с их усредненными интегральными характеристиками.

В этой связи, представляемое исследование относится к проблеме оценивания нечетких значений фазовых и групповых скоростей нормальных упругих волн в трансверсально-изотропном слое в рамках гипотезы об интерпретации параметра плотности и экспериментальных значений модулей упругости рассматриваемых сред нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами, в свою очередь описываемыми декомпозициями по множествам альфа-уровня.

1. Теоретическая методика получения нечетких оценок для фазовых и групповых скоростей нормальных волн сдвигового типа. Представления для фазовых $v_f^{(n)}$ и групповых $v_g^{(n)}$ скоростей симметричных и антисимметричных нормальных волн продольного сдвига длины λ из моды с произвольным номером n в трансверсально-изотропном упругом слое толщины $2h$ со свободными либо жестко закрепленными плоскими гранями, получаемые по методикам, изложенным в работе [5], соответственно могут быть записаны в виде

$$v_f^{(n)} = \phi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) = \rho^{-1/2}\vartheta_n(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta),$$

$$v_g^{(n)} = \xi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) = \rho^{-1/2}\frac{(c_{11}-c_{12})}{2}\vartheta_n^{-1}(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta),$$

$$\vartheta_n(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) = (c_{44}\frac{\eta_n^2}{4\pi^2}\delta^2 + \frac{(c_{11}-c_{12})}{2})^{1/2},$$

где $\delta = \lambda/h$ — параметр безразмерной приведенной длины волны; $\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}$ соответственно плотность и упругие постоянные материала слоя; η_n — параметр, принимающий значения $\eta_n = n\pi$ $(n = \overline{0,\infty})$ для случая симметричных волн в свободном слое, $\eta_n = n\pi$ $(n = \overline{1,\infty})$ для случая антисимметричных волн в закрепленном слое, $\eta_n = (2n+1)\pi/2$ $(n = \overline{0,\infty})$ для случая антисимметричных волн в свободном слое и симметричных волн в закрепленном слое.

Представленные соотношения используются для получения нечетких оценок значений $v_f^{(n)}$, $v_g^{(n)}$ в рамках гипотезы о том, что параметры плотности и упругих постоянных трансверсально-изотропного материала слоя являются нечеткомножественными величинами $\tilde{\rho}, \tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{44}$ из-за разброса их экспериментальных значений, описываются трапециевидными нечеткими интервалами с кортежами реперных точек $(\rho^{(1)},\ \rho^{(2)},\ \rho^{(3)},\ \rho^{(4)})$, $(c_{jq}^{(1)}, c_{jq}^{(2)}, c_{jq}^{(3)}, c_{jq}^{(4)})$ $(jq = 11,\ 12,\ 44)$. Аналитическое представление функции принадлежности $\mu_{\tilde{\rho}}(x)$, выражающей степень возможности того, что соответствующий параметр примет значение x, имеет вид

$$\mu_{\tilde{\rho}}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in (0, \rho^{(1)}); \\ (x-\rho^{(1)})/(\rho^{(2)}-\rho^{(1)}),\ x \in [\rho^{(1)}, \rho^{(2)}); \\ 1, \quad x \in [\rho^{(2)}, \rho^{(3)}]; \\ (\rho^{(4)}-x)/\rho^{(4)}-\rho^{(3)}),\ x \in (\rho^{(3)}, \rho^{(4)}]; \\ 0, \quad x \in (\rho^{(4)}, -\infty). \end{cases}$$

Аналогичными по структуре являются представления функций принадлежности $\mu_{\tilde{c}_{jq}}(x)$.

Используемый подход базируется на применении эвристического принципа обобщения, который является приемом расширения области определения классического функционального отображения $y = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ на нечеткомножественные аргументы $\tilde{x}_i$ с носителями $\sup p\ \tilde{x}_i = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ в соответствии с алгоритмом

$$\mu_{\tilde{y}}(\tilde{y}^*) = \sup_{\substack{f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = y^* \\ x_i^* \in \sup p\ \tilde{x}_i,\ i=\overline{1,n}}} \min\{\mu_{\tilde{x}_1}(x_1^*), \mu_{\tilde{x}_2}(x_2^*), ..., \mu_{\tilde{x}_n}(x_n^*)\}.$$

В случае применения α — уровневой формы принципа обобщения нечеткие аргументы $\tilde{x}_i$ $(i = \overline{1,n})$ представляются в виде разложений по α — срезам $\tilde{x}_i =$

$\bigcup\limits_{\alpha\in[\,0,1]}[\underline{x}_{i,\alpha},\overline{x}_{i,\alpha}]$, где $\underline{x}_{i,\alpha},\overline{x}_{i,\alpha}$ — соответственно минимальное и максимальное значения $\tilde{x}_i$ на α — уровне, а значение $\tilde{y}=f\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2....,\tilde{x}_n\right)$ представляет собой нечеткую величину $\tilde{y}=\bigcup\limits_{\alpha\in[\,0,1]}[\underline{y}_\alpha,\overline{y}_\alpha]$, где

$$\underline{y}_\alpha=\inf_{\substack{x_{i,\alpha}\in[\underline{x}_{i,\alpha},\overline{x}_{i,\alpha}]\\ i=\overline{1,n}}}\left(f(x_{1,\alpha},x_{2,\alpha},...,x_{n,\alpha})\right),\quad \overline{y}_\alpha=\sup_{\substack{x_{i,\alpha}\in[\underline{x}_{i,\alpha},\overline{x}_{i,\alpha}]\\ i=\overline{1,n}}}\left(f(x_{1,\alpha},x_{2,\alpha},...,x_{n,\alpha})\right).$$

Дополнительная эффективная модификация данного алгоритма связана с возможностями нахождения и оценки значений частных производных $\partial y/\partial x_i$, и выделения на множестве X аргументов x_i $(i=\overline{1,n})$ трех непересекающихся подмножеств — подмножеств $X_1=\{x_r:\partial y/\partial x_r\geqslant 0\}$, $X_2=\{x_s:\partial y/\partial x_s\leqslant 0\}$, а также подмножества аргументов, для которых $\partial y/\partial x_q$ являются знакопеременными функциями и их знак зависит только от значений аргументов x_r и x_s, то есть $\partial y/\partial x_q=g_q(x_r,x_s)$, $g_q(x_r,x_s)$ — не зависящая от x_q вспомогательная функция $X_3=\{x_q:sign(\partial y/\partial x_q)=sign(g_q(x_r,x_s))\}$. На базе такого разбиения множества аргументов может быть записано представление

$$\tilde{y}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{y(\underline{x}_{r,\alpha},\overline{x}_{s,\alpha},x^I_{q,\alpha}),y(\overline{x}_{r,\alpha},\underline{x}_{s,\alpha},x^{II}_{q,\alpha})\},$$

где

$$x^I_{q,\alpha}=\begin{cases}\underline{x}_{q,\alpha} & \text{при}\quad g_q(\underline{x}_r,\overline{x}_s)\geqslant 0,\\ \overline{x}_{q,\alpha} & \text{при}\quad g_q(\underline{x}_r,\overline{x}_s)<0;\end{cases}\quad x^{II}_{q,\alpha}=\begin{cases}\overline{x}_{q,\alpha} & \text{при}\quad g_q(\overline{x}_r,\underline{x}_s)\geqslant 0,\\ \underline{x}_{q,\alpha} & \text{при}\quad g_q(\overline{x}_r,\underline{x}_s)<0.\end{cases}$$

В рамках описанного подхода на основе представлений $\tilde{\rho}$, $\tilde{c}_{11}$, $\tilde{c}_{12}$, $\tilde{c}_{44}$, в которых используются функциональные параметрические зависимости для верхних и нижних граней соответствующих множеств альфа-уровня от значений показателя степени принадлежности в соответствующих нечетких интервалах

$$\tilde{\rho}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}((1-\alpha)\rho^{(1)}+\alpha\rho^{(2)},\alpha\rho^{(3)}+(1-\alpha)\rho^{(4)}),$$

$$\tilde{c}_{jp}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}((1-\alpha)c^{(1)}_{jp}+\alpha c^{(2)}_{jp},\alpha c^{(3)}_{jp}+(1-\alpha)c^{(4)}_{jp}),$$

а также с учетом свойств

$$\partial\phi_n(\rho,c_{11},c_{12},c_{44},\delta)/\partial\rho\leqslant 0,\quad \partial\phi_n(\rho,c_{11},c_{12},c_{44},\delta)/\partial c_{11}\geqslant 0,$$

$$\partial\phi_n(\rho,c_{11},c_{12},c_{44},\delta)/\partial c_{12}\leqslant 0,\quad \partial\phi_n(\rho,c_{11},c_{12},c_{44},\delta)/\partial c_{44}\geqslant 0,$$

$$\partial\xi_n(\rho,c_{11},c_{12},c_{44},\delta)/\partial\rho\leqslant 0,\quad \partial\xi_n(\rho,c_{11},c_{12},c_{44},\delta)/\partial c_{11}\geqslant 0,$$

$$\partial\xi_n(\rho,c_{11},c_{12},c_{44},\delta)/\partial c_{12}\leqslant 0,\quad \partial\xi_n(\rho,c_{11},c_{12},c_{44},\delta)/\partial c_{44}\leqslant 0,$$

нечеткие оценки для $\tilde{v}^{(n)}_f$, $\tilde{v}^{(n)}_g$ описываются разложениями

$$\tilde{v}^{(n)}_f=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{(\alpha\rho^{(3)}+(1-\alpha)\rho^{(4)})^{-1/2}(((1-\alpha)c^{(1)}_{44}+\alpha c^{(2)}_{44})(\eta_n\delta/(2\pi))^2+$$

$$+((1-\alpha)c_{11}^{(1)}+\alpha c_{11}^{(2)}-\alpha c_{12}^{(3)}-(1-\alpha)c_{12}^{(4)})/2)^{1/2},$$

$$(\alpha\rho^{(2)}+(1-\alpha)\rho^{(1)})^{-1/2}(((1-\alpha)c_{44}^{(4)}+\alpha c_{44}^{(3)})(\eta_n\delta/(2\pi))^2+$$

$$+((1-\alpha)c_{11}^{(4)}+\alpha c_{11}^{(3)}-\alpha c_{12}^{(2)}-(1-\alpha)c_{12}^{(1)})/2)^{1/2}\};$$

$$\tilde{v}_g^{(n)}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{(\alpha\rho^{(3)}+(1-\alpha)\rho^{(4)})^{-1/2}(((1-\alpha)c_{11}^{(1)}+\alpha c_{11}^{(2)}-\alpha c_{12}^{(3)}-$$

$$-(1-\alpha)c_{12}^{(4)})/2)(((1-\alpha)c_{44}^{(4)}+\alpha c_{44}^{(3)})(\eta_n\delta/(2\pi))^2+$$

$$+((1-\alpha)c_{11}^{(1)}+\alpha c_{11}^{(2)}-\alpha c_{12}^{(3)}-(1-\alpha)c_{12}^{(4)})/2)^{-1/2},$$

$$(\alpha\rho^{(2)}+(1-\alpha)\rho^{(1)})^{-1/2}(((1-\alpha)c_{11}^{(1)}+\alpha c_{11}^{(2)}-\alpha c_{12}^{(3)}-$$

$$-(1-\alpha)c_{12}^{(4)})/2)(((1-\alpha)c_{44}^{(1)}+\alpha c_{44}^{(2)})(\eta_n\delta/(2\pi))^2+$$

$$+((1-\alpha)c_{11}^{(4)}+\alpha c_{11}^{(3)}-\alpha c_{12}^{(1)}-(1-\alpha)c_{12}^{(1)})/2)^{-1/2}\}.$$

2. Результаты численных исследований. Пример численной реализации представленной методики относится к случаю получения нечетких оценок для фазовых скоростей бегущих антисимметричных нормальных волн из низшей моды спектра для закрепленного по граням слоя из геоматериала мусковита (калиевой слюды) с усредненными физико-механическими постоянными

$$\rho=2.93\cdot10^3\ \text{кг/м}^3,\quad c_{11}=17.8\cdot10^{10}\ \text{Па},\quad c_{12}=4.24\cdot10^{10}\ \text{Па},\quad c_{44}=1.22\cdot10^{10}\ \text{Па},$$

предельно возможный разброс экспериментальных значений которых предположительно составляет $\pm5\%$ по отношению к средним, а диапазон предельно достоверных значений лежит в интервале $\pm2.5\%$.

Результаты нечеткого оценивания фазовых скоростей нормальных волн, полученные для рассматриваемого в качестве примера случая $\eta_1=\pi$ диапазоне $\delta^{-1}\in[0.1,\ 10]$, отражены на рис. 1. Здесь кривые 1 и 4 для каждого значения δ^{-1} ограничивают диапазон, вне которого находятся недопустимые значения $\tilde{v}_f^{(1)}$, а кривые 2 и 4 ограничивают интервалы наиболее достоверных значений исследуемых фазовых скоростей для волн рассматриваемого типа с варьируемыми относительными длинами. Рис. 2 в качестве примера иллюстрирует вид функции

Рисунок 1 – *Результаты оценивания* $\tilde{v}_f^{(1)}(\delta^{-1})$

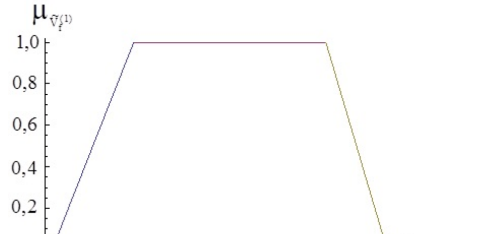


Рисунок 2 – *Вид функции принадлежности для* $\tilde{v}_f^{(1)}(3)$

принадлежности для нечетко-множественной величины $\tilde{v}_f^{(1)}$ при $\delta^{-1} = 3$.

Выводы. Предложен подход к оцениванию нечетких значений фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных упругих волн в трансверсально-изотропном слое, основывающийся на концепции применении эвристического принципа обобщения к явным и неявным детерминированным функциональным зависимостям для исследуемых скоростей, получаемым из соответствующих дисперсионных соотношений. Представлен пример численной реализации методики для случая бегущих нормальных волн сдвига из низшей моды спектра с варьируемой относительной длиной в слое из калиевой слюды.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Алтунин А. Е., Семухин М. В.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: Тюменский государственный университет, 2000. 352 с.

[2] *Дилигенский Н. В., Дымова Л. Г., Севастьянов П. В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. М.: Машиностроение, 2004. 397 с.

[3] *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990. 288 с.

[4] *Капитонов А. М., Васильев В. Г.* Физические свойства горных пород западной части Сибирской платформы. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. 424 с.

[5] *Космодамианский А. С., Сторожев В. И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. К.: Наукова думка, 1985. 176 с.

[6] *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139 с.

[7] *Молодецкий А. В., Рева В. Н.* Влияние глубины залегания угольных пластов на механические свойства угля // Физико-технические проблемы горного производства. 2009. Вип. 12. С. 55—58.

[8] *Ротштейн А. П., Штовба С. Д., Козачко А. Н.* Моделирования и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. Винница: Універсум, 2007. 215 с.

Storozhev S. V. *Fuzzy evaluation for characteristics of normal shear wave in the transversally-anisotropic elastic layer*. The results of studies on the problem of estimating the fuzzy values of phase and group velocity of normal elastic waves in transversally-anisotropic layer are presented. Hypothesis about the interpretation of experimental values of density and of modules of elasticity in form of normal trapezoidal fuzzy intervals are used. The estimates for the velocities in the form of expansions of fuzzy sets on alpha level sets are obtained.

АСИМТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ — НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ В. М. АЛЕКСАНДРОВА

Сумбатян М. А., Чебаков М И.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается применение асимптотических методов к задачам механики со смешанными граничными условиями. Отмечается, что в научной школе академика И. И. Воровича и его учеников, в число которых входил В. М. Александров, были заложены основы регулярных и сингулярных асимптотических методов, впоследствии получивших название «метод больших лямбда» и «метод малых лямбда».

1. Асимптотический метод больших λ решения интегральных уравнений. Среди асимптотических методов исследования интегральных уравнений теории смешанных задач широкое распространение получил метод больших λ, когда решение интегральных уравнений (ИУ) представлено в форме асимптотического разложения по отрицательным степеням некоторого безразмерного параметра λ. Впервые такой подход к решению ИУ был использован в работах Воровича И. И., Юдовича В. И. [1] и Воровича И. И., Устинова Ю. А. [2]. Как правило, удавалось построить лишь несколько членов такого асимптотического разложения.

Дальнейшее развитие метод больших λ получил в работах Александрова В. М. и его учеников ([3–10] и др.) Для некоторых типов ИУ первого и второго рода удалось методом больших λ построить все члены асимптотического разложения решения. В этих случаях коэффициенты в разложении искомого решения по отрицательным степеням λ представлены в виде многочленов основного аргумента, а для коэффициентов этих многочленов получены простые элементарные рекуррентные формулы.

Рассмотрим ИУ второго рода вида

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi\lambda}\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau) M\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau + g(t) \quad (|t| \leqslant 1), M(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k |y|^k \qquad (1)$$

где $0 < \lambda < \infty$ — безразмерный параметр, $g(t)$ — известная функция. Пусть ряд в (1) сходится равномерно при $|y| < B < \infty$ (B — сколь угодно большое число).

Если $g(t) = 1$, то решение такого ИУ может быть построено в виде [5, 9, 10]

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)\lambda^{-n}, \ \varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \eta_{n,i} t^{2i} \quad (n = 1, 2, ...), \qquad (2)$$

Здесь квадратные скобки в пределах суммирования здесь означают целую часть числа, а для нахождения коэффициентов $\eta_{n,k}$ построены простейшие реккурентные соотношения.

Аналогичным образом для больших λ может быть построено решение уравнения (1) в случае, когда $g(t) = t^m$ (m — любое натуральное число), а также в случае когда $g(t)$ представимо в виде ряда по положительным степеням аргумента t.

Если в интегральном уравнении (1)

$$M(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{2n} \quad (|y| < y_0), \;\; g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{-2n} t^{2n} \quad (|t| < t_0), \tag{3}$$

тогда, аналогично предыдущему, решение уравнения (1) с ядром и правой частью (3) для больших значений λ может быть построено в виде

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-2j} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji} t^{2i} + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-(2j+1)} \sum_{i=0}^{j} \beta_{ji} t^{2i}, \tag{4}$$

где α_{ji} и β_{ji} определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$\alpha_{ji} = \frac{2}{\pi (2i)!} \sum_{k=i}^{j-1} \frac{b_k (2k)!}{(2k-2i)!} \sum_{m=0}^{j-1-k} \frac{\beta_{j-1-k,m}}{2m+2k-2i+1} \quad (i = 0, 1, ..., j-1),$$

$$\beta_{ji} = \frac{2}{\pi (2i)!} \sum_{k=i}^{j} \frac{b_k (2k)!}{(2k-2i)!} \sum_{m=0}^{j-k} \frac{\alpha_{j-k,m}}{2m+2k-2i+1} \quad (i = 0, 1, ..., j), \quad \alpha_{jj} = a_j. \tag{5}$$

Многие плоские смешанные задачи механики сплошной среды сводятся к решению интегрального уравнения первого рода с логарифмической главной частью ядра [6]

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) k \left(\frac{t-\tau}{\lambda} \right) dt = 1, \qquad |\tau| \leqslant 1, \tag{6}$$

$$k(y) = -\ln|y| - F(y), \quad F(y) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i y^{2i}, \tag{7}$$

где для простоты взят случай штампа с прямолинейной горизонатальной подошвой.

Последний ряд абсолютно сходится при $|y| < y_0$, следовательно, аналогичный ряд для функции $F((t-\tau)/\lambda)$ при $|t| \leqslant 1$, $|\tau| \leqslant 1$ будет сходиться, если $\lambda > 2/y_0$.

Решение интегрального уравнения (6) может быть построено в виде в виде [6, 7]

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-2n} \varphi_n(t), \varphi_0(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} (Q - \int_{-1}^{1} \frac{f'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - t} d\tau),$$

$$\varphi_m(t) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj} t^{2j+1} + \sum_{j=0}^{m} \beta_{mj} t^{2j} \right\} \quad (m \geqslant 1), \tag{8}$$

где Q — известная постоянная, а коэффициенты α_{mj} и β_{mj} определяются из элементарных рекуррентных соотношений.

2. Асимптотический метод малых λ решения интегральных уравнений. Общая идея метода малых λ вполне естественна [3]. На примере уравнения 1-го рода (6) заменой переменных $\tilde{t} = t/\lambda$, $\tilde{\tau} = \tau/\lambda$ (знак тильды далее опускаем) сведем это уравнение к следующему виду:

$$\int\limits_{-1/\lambda}^{1/\lambda} \psi(t)k\,(t-\tau)\,dt = \frac{\pi}{\lambda}F(\tau), \quad |\tau| \leqslant \frac{1}{\lambda}, \quad \psi(t) = \varphi(\lambda t),\ F(\tau) = f(\lambda\tau). \tag{9}$$

Для предельно малых $\lambda \to 0$, приходим к уравнению в свертках на полной прямой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)k\,(t-\tau)\,dt = \frac{\pi}{\lambda}F(\tau), \qquad |\tau| \leqslant \infty, \tag{10}$$

которое легко решается в замкнутом виде применением преобразования Фурье. Такое «вырожденное» решение корректно во всей области, кроме малых окрестностей концов интервала. Для построения погранслойных решений достаточно устремить на бесконечность в уравнении (9) лишь один из пределов интегрирования. При этом получаем пару уравнений типа Винера — Хопфа, решение которых сводится к проблеме факторизации функции — преобразования Фурье от ядра [11].

Многие задачи со смешанными граничными условиями были решены этим методом самим В. М. Александровым, его коллегами и учениками (исторический обзор можно найти, например, в [12]). В задачах статики параметр λ имеет геометрический смысл, как например, в контактной задаче — отношение толщины слоя к ширине штампа. В переходе к динамическим задачам в гармоническом по времени режиме В. М. Александров исследовал задачу о сдвиговых колебаниях упругого полупространства [13], которая в безразмерных координатах сводится к интегральному уравнению (6), в котором ядро имеет следующий вид:

$$k(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha y}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}, \quad \lambda = \frac{1}{ka}, \quad (\sqrt{\alpha^2-1} = -i\sqrt{1-\alpha^2},\ |\alpha| < 1), \tag{11}$$

где k — волновое число, a — полуширина штампа. Такое же уравнение получается в акустике при гармонических клебаниях пластинки в неограниченной среде. Параметр λ здесь связан с волновым числом, и малое λ означает высокие частоты колебаний. Поскольку факторизация символа ядра здесь очевидна: $\sqrt{\alpha^2-1} = [\sqrt{\alpha+1}\,]_+ \cdot [\sqrt{\alpha+1}\,]_-$, то применение метода малых λ приводит к главному члену асимптотики в явном виде, причем такое решение является корректным равномерно на отрезке $[-1, 1]$.

При переходе к задача о слое имеем аналогичное уравнение, которое удобно записать в других безразмерных переменных:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-d}^{d} \varphi(t)k(t-\tau)dt = 1, \qquad |\tau| \leqslant d, \qquad \chi = 1/\lambda = ka, \\ K(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} G(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha, \quad G(\alpha) = \frac{\operatorname{th}\gamma}{\gamma},\ \gamma = \sqrt{\alpha^2-\chi^2}.\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь появляются два параметра: d — отношение длины штампа к толщине слоя, χ — параметр, связанный с частотой. Правая часть для простоты принята постоянной.

Функция $G(\alpha)$ в уравнении (12) — мероморфная функция комплексной переменной α. Существует счетный набор ее нулей $\pm\alpha_m$ и полюсов $\pm\beta_m$:

$$\alpha_m = \sqrt{\chi^2 - (\pi m)^2}, \qquad \beta_m = \sqrt{\chi^2 - [\pi(m-1/2)]^2}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Контур интегрирования σ в (12) совпадает с вещественной осью, обходя положительные полюса снизу, а отрицательные сверху, если таковые имеются.

Если параметр частоты χ фиксирован, то решение уравнения (12) легко строится применением асимптотических методов «больших λ» и «малых λ» по параметру d, а также другими родственными методами [14]. Если, наоборот, фиксирована геометрия слоя и штампа, т. е. параметр d фиксирован, то при малых частотах решение рассматриваемого уравнения (12) также не представляет труда, т. к. в этом квазистатическом случае применимы стандартные классические методы.

Существенную сложность здесь предсталяет высокочастотный режим, т. е. когда параметр d фиксирован, а параметр частоты $\chi \gg 1$. Необходимо заметить, что с ростом частоты (параметр χ стремится к бесконечности) на вещественной оси возникает все больше и больше нулей и полюсов. Это усложняет высокочастотный анализ. Пусть

$$\chi = \pi(n+\delta), \qquad 0 \leqslant \delta < 1, \qquad \delta \neq 1/2, \tag{14}$$

с n, являющимся большим положительным целым: $n \gg 1$. Критическое значение $\delta = 1/2$, относящееся к случаю резонанса, должно быть исключено из рассмотрения, как и значения $\delta = 0$ и $\delta = 1$.

В [15] и [16] доказывается, что высокочастотное решение вне погранслоев может быть построено в явном виде: ($|t| < d$):

$$\varphi(t) = \frac{\chi}{\mathrm{tg}\delta} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{G_+(\alpha_m)}{G_+(0)}\,\frac{(\pi m)^2}{\alpha^2}\left[e^{i\alpha_m(d+t)} + e^{i\alpha_m(d-t)}\right], \tag{15}$$

где $G(\alpha) = G_+(\alpha)\;G_-(\alpha)$ — результат факторизации функции G.

Авторы хотели бы отметить, что ряд результатов в рассматриваемой области были получены ими под руководством В. М. Александрова, чуткое внимание которого они ощущали и в дальнейшем при выполнении самостоятельных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ворович И. И., Юдович В. И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 525–532.

[2] *Ворович И. И., Устинов Ю. А.* О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 445–455.

[3] *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672–683.

[4] *Александров В. М., Ворович И. И.* О действии штампа на упругий слой конечной толщины//ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 323–333.

[5] *Александров В. М., Чебаков М. И.* Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 494–504.

[6] *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

[7] *Лубягин И. А., Чебаков М. И.* К асимптотическому методу больших λ // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 121–126.

[8] *Чебаков М. И.* К задаче Рейсснера — Сагочи // Прикл. механ. 1973. Т. 9. Вып. 12. С. 58–63.

[9] *Чебаков М. И.* Об одном методе решения некоторого интегрального уравнения с разностным ядром // Изв.СКНЦВШ. Серия естественные науки. 1974. № 4. С. 130.

[10] *Чебаков М. И.* О дальнейшем развитии метода больших λ в теории смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 561–565.

[11] *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962.

[12] Развитие теории контактных задач в СССР (отв. редактор Л. А. Галин). М.: Наука, 1976.

[13] *Александров В. М., Буряк В. Г.* Динамическая смешанная задача деформации чистого сдвига для упругого полупространства // Прикл. механ. 1971. Т. 7. Вып. 4.

[14] *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.

[15] *Сумбатян М. А.* Асимптотика решения контактной задачи для упругого слоя при высоких частотах колебания // Доклады АН СССР. 1988. Т. 249. № 6. С. 1344–1346.

[16] *Сумбатян М. А.* Плоская контактная задача для упругого слоя при высоких частотах колебания // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 307–311.

Sumbatyan M. A., Chebakov M. I. *Asymptotic methods in the mixed boundary value problems — scientific heritage of V. M. Alexandrov.* We consider the application of the asymptotic methods to the problems of mechanics with mixed boundary conditions. It is emphasized that in the scientific school of academician I. I. Vorovich and his fellows, whose member was V. M. Alexandrov, there were laid the foundations of regular and singular asymptotic methods, which later were named as the “method of large lambda” and the “method of small lambda”.

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ИСТОЧНИК, ДВИЖУЩИЙСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Сыромятников П. В.[1], Васильченко А. А.[2], Лапина О. Н.[2], Никитин Ю. Г.[2]

[1]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

[2]*Кубанский государственный университет, Краснодар*

В работе исследуются возмущения на поверхности изотропного слоя и полупространства, вызванные осциллирующими источниками различной конфигурации, перемещающимися с постоянной скоростью в фиксированном направлении поверхности. Рассматриваются плоская и пространственная несмешанные задачи для слоя и полупространства в системе координат, связанной с подвижным источником. Задача решается с помощью интегральных преобразований Фурье и методов численного интегрирования. Численно рассчитаны модельные поверхностные плоские и пространственные возмущения упругого изотропного слоя и полупространства, вызываемые подвижным поверхностным гармоническим источником в диапазоне скоростей от нуля до скорости продольной волны в широком диапазоне частот. Получены зависимости амплитуды плоских и пространственных поверхностных возмущений слоя от скорости, частоты и геометрических свойств источника.

1. Постановка задачи.

В декартовой системе координат $\{x, y, z\}$ рассматривается изотропное полупространство или упругий слой. Вектор перемещений в упругой среде $u = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ описывается уравнениями Ламе для случая отсутствия объемных сил:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial div(u)}{\partial x_j} + \mu\Delta u_j - \rho\frac{\partial u_j^2}{\partial t^2} = 0, j = 1, 2, 3 \qquad (1)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность,t — время.

Гармоническая нагрузка $q\exp(-i\omega t)$, заданная на поверхности слоя $z = 0$ в прямоугольной области Ω со сторонами L_x, L_y , движется без вращения вдоль прямой Ox_1 с постоянной скоростью v. В подвижной системе координат $\{\tilde{x}, y, z\}$, где

$$\tilde{x} = x - vt \qquad (2)$$

область Ω описывается неравенствами:

$$\frac{-L_x}{2} \leqslant \tilde{x} \leqslant \frac{L_x}{2}, \frac{-L_y}{2} \leqslant y \leqslant \frac{L_y}{2} \qquad (3)$$

На поверхности слоя $z = 0$ заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{i3}(\tilde{x}, y, z)|_{z=0} = q_i, i = 1, 2, 3, (\tilde{x}, y) \in \Omega; \sigma_{i3}(\tilde{x}, y, z)|_{z=0} = 0, (\tilde{x}, y) \notin \Omega \qquad (4)$$

На нижнем основании при $z = -h$ граничные условия следующие:

$$u_j(x,y,z)|_{z=-h} = 0, j = 1,2,3 \tag{5}$$

Требуется определить смещения $u(\tilde{x},y,z,v,\omega|_{z=0}$ как функцию координат $\{\tilde{x},y\}$, скорости v и частоты осцилляций ω.

2. Метод решения. Задачу (1)-(5) можно рассматривать как нестационарную задачу общего вида, однако такой подход труднореализуем. С другой стороны, в системе координат, связанной с подвижным источником $\{\tilde{x},y,z\}$ (2), задачу можно рассматривать как частный, хотя и весьма специфический, случай аналогичной задачи для неподвижного гармонического поверхностного источника [2]. Данное обстоятельство позволяет для решения задачи (1)-(5) использовать большой арсенал средств, разработанный для задач с неподвижным гармоническим источником [2–5]. Решение задачи (1)-(5), как и в случае с неподвижным источником, может быть представлено в виде двойного обратного преобразования Фурье [2, 3]:

$$u_j(\tilde{x},y,z,\omega,v) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\sum_{n=1}^{3}\tilde{K}_{jn}(\alpha_1,\alpha_2,z,\omega,v)Q_n(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-i(\alpha_1\tilde{x}+\alpha_2 y))d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{6}$$

Здесь матрица $\tilde{K}$ получена простой суперпозицией из соответствующего образа Фурье матрицы Грина для неподвижного источника K,$Q(\alpha_1,\alpha_2)$ является образом Фурье вектора поверхностной нагрузки (4) в подвижной системе координат, контуры Γ_1,Γ_2 представляет собой контуры в комплексных плоскостях $\{\alpha_1\},\{\alpha_2\}$, отклоняющиеся при обходе вещественных полюсов матрицы $\tilde{K}$ в соответствии с принципом предельного поглощения [2–4]. Отличие матрицы $\tilde{K}$ от матрицы K ограничивается только содержащими квадрат частоты членами. При этом квадрат частоты ω^2 заменяется на величину $(\omega-\alpha_1 v)^2$, где α_1 — параметр преобразования Фурье, v — скорость. Дисперсионные поверхности, в зависимости от величины скорости, могут претерпевать значительные изменения, влияющие на вид контуров Γ_j . При ненулевой скорости изотропная среда приобретает специфическую анизотропию, обусловленную направлением движения на поверхности слоя и величиной v . В зависимости от величины скорости может меняться тип уравнений [3, 4]. Принцип предельного поглощения [2–4] может быть использован различным образом. Введение комплексной частоты ω_ϵ с малой положительной мнимой компонентой

$$\omega_\epsilon^2 = \omega^2 + i\epsilon\omega, \epsilon > 0, \epsilon \to 0 \tag{7}$$

приводит к смещению всех вещественных полюсов матриц $\tilde{K}$ и K с вещественных осей в комплексные плоскости $\{\alpha_1\},\{\alpha_2\}$. Направление смещения вещественных полюсов определяет вид контуров Γ_j , обеспечивающих единственность и физическую приемлемость решения, при этом контуры для матриц $\tilde{K}$ и K в общем случае различаются. С другой стороны, при малом $\epsilon > 0$, в качестве контуров Γ_j можно брать ограниченную часть вещественной оси: $\Gamma_j = [-R,R]$ (где R - достаточно большое положительное число), что существенно упрощает вычисление интегралов вида (6). В ближней зоне полученное решение отличается от теоретически точного на доли процента. Заметим, однако, что математически корректное решение может быть получено только для контуров, деформированных в комплексные плоскости, поскольку при выполнении данного условия возможно получить равномерный при $\epsilon \to 0$ предел, дающий решение исходной задачи.

3. Численные результаты.

В численных расчетах были приняты следующие значения параметров полупространства и слоя $\lambda = 2.39 \times 10^{10} H/m^2$, $\mu = 2.45 \times 10^{10} H/m^2$,$\rho = 1.7 \times 10^3 Kg/m^3$,$h = 100m$, близкого по механическим свойствам к песчанику. Значениям данных параметров соответствуют следующие безразмерные скорости поперечной объемной волны v_s, продольной объемной волны v_p и релеевской волны v_r в полупространстве:$v_s = 1.2$,$v_p = 2.07$,$v_r = 1.103$. В качестве вертикального поверхностного подвижного источника рассматривался источник (3): $q_3 = q(\tilde{x}, y) = -1$,$L_x = L_y = 0.1$. Приведенные далее на рисунке 1 графики вертикальных смещений рассчитаны по формулам (6). Интегралы (6) рассчитывались численно при введении комплексной частоты $\omega_\epsilon(7)$ с параметром $\epsilon/\omega = 10^{-2}$ по ограниченным вещественным контурам $\Gamma_j = [-R, R]$. Для численного интегрирования использовались программы вычисления интегралов от осциллирующих функций пакета NAG [6]. Заметим, что уменьшение ϵ/ω увеличивает точность расчетов, но при этом возрастают вычислительные затраты. На рисунке 1, a), b) изображены вертикальные смещения на поверхности полупространства для скорости $v = 1.212 = 1.1v_r = 1.01v_s = 0.59v_p$ и безразмерной частоты $\omega = 4$,$L_x = L_y = 0.1$:(a) - действительная часть смещений $Reu_3(\tilde{x}, y)$,(b)-мнимая часть $Imu_3(\tilde{x}, y)$. На рисунке 1,c),d) представлены вертикальные смещения на поверхности слоя для скорости $v = 1.8 = 1.63v_r = 1.5v_s = 0.87v_p$ и частоты $\omega = 4$,$L_x = L_y = 0.1$:(c)-действительная часть $Reu_3(\tilde{x}, y)$,(d)-мнимая часть $Imu_3(\tilde{x}, y)$. На рисунке 1,e),f) показаны нормированные вертикальные смещения на поверхности слоя в зависимости от скорости и частоты, (e) - отношение $|u_3(v, \omega)/u_3(0, 0)|$ в виде трехмерной поверхности, (f)-логарифм $\lg |u_3(v, \omega)/u_3(0, 0)|$ в виде линий уровня, $q_3 = \delta(\tilde{x}, y)$. В правой части рисунка 1,(f) изображена шкала десятичных порядков. На рисунке 1, a)-d) при превышении скорости релеевской волны v_r сформирован конус Маха, угол которого равен $\varphi = \arcsin(v_r/v)$. В случае полупространства, рисунок 1,a),b), границы конуса менее четкие, чем в случае слоя,c),d). Внутри и вне конуса Маха волны могут распространяться в различных направлениях. Например, на рисунке 1, c),d) направление движения волн внутри конуса противоположно направлению движению источника. При этом волновые колебания на границах конуса имеют значительную амплитуду. Вне конуса Маха также происходят волновые движения, однако их амплитуда значительно меньше, а скорость пространственного затухания выше, чем внутри конуса. На рисунке 1, e),f) для случая вертикального дельта-исчтоника фактически изображена приближенная амплитудно-частотно-скоростная характеристика системы «упругое основание — подвижный источник», несущая информацию о динамической реакции системы. Глобальный максимум соответствует релеевской скорости и нулевой частоте. В силу того, что $\epsilon \neq 0$, глобальный максимум ограничен. Как видно из рисунка 1, f) максимумы амплитуды локализованы с незначительными отклонениями в области релеевской скорости во всем диапазоне частот. Диапазон значений функции составляет более четырех десятичных порядков. Разработанные алгоритмы могут применяться без дополнительных модификаций для случая многослойных изотропных и анизотропных сред типа пакета слоев или многослойного полупространства. Метод интегрирования, благодаря своей простоте, можно считать инженерным, хотя он с успехом может также использоваться и для исследовательских целей.

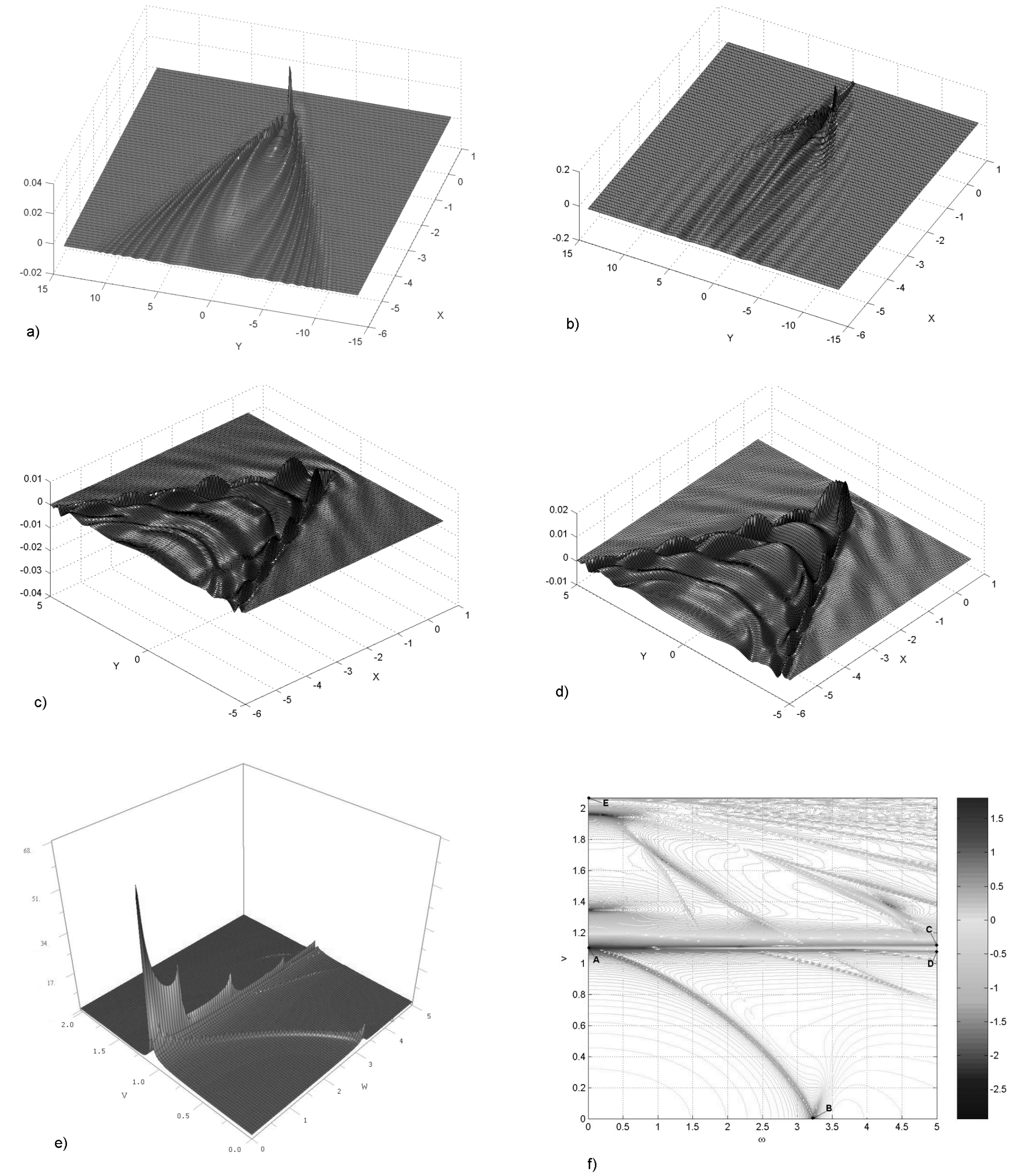


Рисунок 1 – Вертикальные смещения на поверхности полупространства, скорость $v = 1.212 = 1.1v_r = 1.01v_s = 0.59v_p$, : частота $\omega = 4$, (a) $Reu_3(\tilde{x}, y)$,(b) $Imu_3(\tilde{x}, y)$. Вертикальные смещения на поверхности слоя, скорость $v = 1.8 = 1.63v_r = 1.5v_s = 0.87v_p$, частота $\omega = 4$,(a) $Reu_3(\tilde{x}, y)$,(b) $Imu_3(\tilde{x}, y)$. Нормированные вертикальные смещения на поверхности слоя в зависимости от скорости и частоты, (e)-отношение $|u_3(v, \omega)/u_3(0, 0)|$ в виде трехмерной поверхности, (f)-логарифм $\lg |u_3(v, \omega)/u_3(0, 0)|$ в виде линий уровня

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края 16-48-230336-р-юг-а, программ Президиума Южного научного центра Российской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Pflanz G., Garcia J., Schmid G.* Vibrations due to loads moving with sub-critical and super-critical velocities on rigid track. Moving Load – Wave Propagation – Vibration Reduction: Proc. Intern. Workshop WAVE2000. Rotterdam: Balkema, 2000. P. 131–148.

[2] *Бабешко В. А., Зинченко Ж. Ф., Глушков Е. В.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.

[3] *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 240 с.

[4] *Белоконь А. В., Наседкин А. В.* Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами // Механика контактных взаимодействий.М.: Физматлит, 2001. 672 с.

[5] *Karmazin A., Kirillova E. , Seemann W., Syromyatnikov P.* A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates // Ultrasonics, Vol. 53, № 1, January 2013, P. 283–293.

[6] D01AKF Subroutine. NAG Fortran Library // [http://www.nag.co.uk/numeric/FL/FLdescription.asp.]

[7] *Kirillova E., Syromyatnikov P., Didenko A.* Wave Fields Generated by an Oscillating Mechanical Source Moving on the Surface of an Elastic Semibounded Medium // IC-SCCE – 6th International Conference from Scientific Computing to Computational Engineering – Proceedings, Athens, Greece, 9-12 July, 2014, V. 2, P. 536–544.

Syromyatnikov P. V., Vasilchenko A. A., Lapina O. N., Nikitin U. G. *Oscillating and moving on the surface of semi-bounded elastic body source*. In this work were studied surface perturbations of the layer and isotropic half-space, which are caused by harmonic source of various configurations. The source moves at a constant speed in a fixed direction. In the moving coordinate system the problem have been solved for flat and spatial unmixed problem for the layer and a half-space. The problem is solved by means of Fourier integral transformations and numerical integration methods. Surface perturbations were calculated for isotropic elastic layer and a half-space in a plane and three-dimensional case. The calculations were examined from zero to the speed of the longitudinal wave velocity in a wide frequency range. Flat and spatial amplitude perturbations for layer were obtained depending on the source rate, on the oscillation frequency and geometrical properties of the source.

ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

Углич П. С.
Владикавказский научный центр РАН

Рассмотрена задача о плоских вынужденных колебаниях упругого слоя, механические параметры которого являются функциями поперечной координаты. Выведено уравнение для решения обратной задачи об определении механических параметров слоя по характеру волнового поля на его поверхности. Приведены численные результаты его решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругий слой $\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \infty, 0 \leqslant x_2 \leqslant h\}$, находящийся в состоянии установившихся колебаний.

Плоские колебания описываются уравнением:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \rho\omega^2 u_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где ω — частота колебаний, ρ — плотность слоя, u_i — перемещения, а σ_{ij} — напряжения, которые удовлетворяют закону Гука в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda\left(u_{1,1} + u_{2,2}\right) + 2\mu u_{1,1} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) \\ \sigma_{22} = \lambda\left(u_{1,1} + u_{2,2}\right) + 2\mu u_{2,2} \end{cases} \tag{2}$$

Нижняя поверхность слоя жёстко защемлена, а верхняя свободна от напряжений (не нарушая общности, считаем толщину слоя равной единице):

$$u_1(x_1, 0) = u_1(x_1, 0) = 0,\ \sigma_{12}|_{x_2=1} = 0,\ \sigma_{22}|_{x_2=1} = p(x_1). \tag{3}$$

2. Решение прямой задачи Применяя интегральное преобразование Фурье в виде

$$\tilde{u}_i(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_i(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

к (1)–(3), и исключая из полученных уравнений σ_{11}, сведём их к канонической системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1' = i\alpha\tilde{u}_2 + \dfrac{\tilde{\sigma}_{12}}{\mu} \\ \tilde{u}_2' = \dfrac{i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + \tilde{\sigma}_{22}}{\lambda + 2\mu} \\ \tilde{\sigma}_{12}' = \left[4\alpha^2\dfrac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} - \rho\omega^2\right]\tilde{u}_1 + \dfrac{i\alpha\lambda\tilde{\sigma}_{22}}{\lambda+2\mu} \\ \tilde{\sigma}_{22}' = -\rho\omega^2\tilde{u}_2 + i\alpha\tilde{\sigma}_{12}, \end{cases} \tag{4}$$

Граничная задача (4) с граничными условиями (3) легко может быть решена при помощи метода пристрелки. Введём обозначения:

$$U_1 = \tilde{u}_1,\ U_2 = \tilde{u}_2,\ U_3 = \tilde{\sigma}_{12},\ U_4 = \tilde{\sigma}_{22}.$$

и функции $V_i^j(x_2)$, удовлетворяющие системе уравнений (4) с начальными условиями $V_i^j(0) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Решение задачи (4) с граничными условиями (3) строится в виде

$$U_i^0 = -\tilde{p}(\alpha)\frac{V_3^4(1)V_i^3(x_2) - V_3^3(1)V_i^4(x_2)}{\Delta(1)},\ \Delta(1) = V_3^3(1)V_4^4(1) - V_3^4(1)V_4^3(1) \tag{5}$$

Поле перемещений может быть найдено при помощи обратного преобразования Фурье:

$$u_i(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} \tilde{p}(\alpha)\frac{V_3^4(1)V_i^3(x_2) - V_3^3(1)V_i^4(x_2)}{\Delta(1)}e^{-i\alpha x_1}d\alpha,\ i = 1, 2. \tag{6}$$

3. Обратная задача Разложим искомую функцию и функции, описывающие изменение механических парметров в ряд по ε.

$$\begin{gathered}\lambda(x_2) = \lambda_0(x_2) + \varepsilon\lambda_1(x_2) + ...,\ \mu(x_2) = \mu_0(x_2) + \varepsilon\mu_1(x_2) + ...\\ \rho(x_2) = \rho_0(x_2) + \varepsilon\rho_1(x_2) + ...,\ U_i(\alpha, x_2) = U_i^0(\alpha, x_2) + \varepsilon U_i^1(\alpha, x_2) + ...\end{gathered} \tag{7}$$

Собирая слагаемые при различных степенях ε, получаем две краевые задачи вида:

$$\begin{cases} \left[U_1^0\right]' = i\alpha U_2^0 + \dfrac{U_3^0}{\mu_0}, \\ \left[U_2^0\right]' = \dfrac{i\alpha\lambda_0 U_1^0 + U_4^0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \\ \left[U_3^0\right]' = \left[4\alpha^2\dfrac{\mu_0(\lambda_0+\mu_0)}{\lambda_0+2\mu_0} - \rho_0\omega^2\right]U_1^0 + \dfrac{i\alpha\lambda_0 U_4^0}{\lambda_0+2\mu_0}, \\ [U_4^0]' = -\rho_0\omega^2 U_2^0 + i\alpha U_3^0, \\ U_1^0(\alpha, 0) = U_2^0(\alpha, 0) = U_3^0(\alpha, 1) = 0,\ U_4^0(\alpha, 1) = \tilde{p}(\alpha). \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \left[U_1^1\right]' = i\alpha U_2^1 + \dfrac{U_3^1}{\mu_0} + F_1(x_2) \\ \left[U_2^1\right]' = \dfrac{i\alpha\lambda_0 U_1^1 + U_4^1}{\lambda_0 + 2\mu_0} + F_2(x_2), \\ \left[U_3^1\right]' = \left[4\alpha^2\dfrac{\mu_0(\lambda_0+\mu_0)}{\lambda_0+2\mu_0} - \rho_0\omega^2\right]U_1^1 + \dfrac{i\alpha\lambda_0 U_4^1}{\lambda_0+2\mu_0} + F_3(x_2), \\ [U_4^1]' = -\rho_0\omega^2 U_2^1 + i\alpha U_3^1 + F_4(x_2), \\ U_1^1(\alpha, 0) = U_2^1(\alpha, 0) = U_3^1(\alpha, 1) = U_4^1(\alpha, 1) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

где введены обозначения:

$$F_1(x_2) = -\frac{\mu_1}{\mu_0^2}U_3^0,$$

$$F_2(x_2) = \frac{i\alpha}{\lambda_0 + 2\mu_0}\left[2\frac{\mu_0(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_0 + 2\mu_0} - 2\mu_1\right]U_1^0 - \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{(\lambda_0 + 2\mu_0)^2}U_4^0,$$

$$F_3(x_2) = \left\{ \frac{4\alpha^2}{\lambda_0 + 2\mu_0} \left[\lambda_0\mu_1 + \frac{\mu_0^2(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \right] - \right.$$
$$\left. - \rho_1\omega^2 \right\} U_1^0 + \frac{2i\alpha}{\lambda_0 + 2\mu_0} \left[\frac{\mu_0(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_0 + 2\mu_0} - \mu_1 \right] U_4^0,$$
$$F_4(x_2) = -\rho_1\omega^2 U_2^0.$$

Решение задачи (7) имеет вид (5).

Для того, чтобы построить решение задачи (9), воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Окончательное решение задачи в первом приближении имеет вид:

$$U_1^1 = \int\limits_0^1 [F_1(\xi)G_{31}(\alpha,\xi) - F_2(\xi)G_{41}(\alpha,\xi) - F_3(\xi)G_{11}(\alpha,\xi) + F_4(\xi)G_{21}(\alpha,\xi)]\, d\xi, \quad (10)$$

$$U_2^1 = $$
$$= -\int\limits_0^1 [F_1(\xi)G_{32}(\alpha,\xi) - F_2(\xi)G_{41}(\alpha,\xi) - F_3(\xi)G_{12}(\alpha,\xi) + F_4(\xi)G_{22}(\alpha,\xi)]\, d\xi \quad (11)$$

где введены обозначения

$$G_{i1} = \tilde{p}(\alpha)\frac{V_4^4(1)V_i^3(x_2) - V_3^4(1)V_i^4(x_2)}{\Delta(1)},\ G_{i2} = -\tilde{p}(\alpha)\frac{V_3^4(1)V_i^3(x_2) - V_3^3(1)V_i^4(x_2)}{\Delta(1)},$$

Обращая преобразование Фурье, строим уравнение Фредгольма первого рода, которое в дальнейшем использовано для построения итерационного процесса.

4. Численные результаты На рисунке 1 представлены дисперсионные кривые в случае $\mu(x) = \mu(0)/(1+x_2)$, $\rho = \rho(0)e^{0,5x_2}$, $\nu = 0,3$ [1]. Дисперсионные кривые получены при помощи анализа подынтегрального выражения (6). На графике показаны значения α и κ_2, при которых определитель обращается в ноль.

На рисунке 2 показано поле перемещений на верхней поверхности слоя при $\kappa_2 = 3$. Серая линия соответствует полю перемещений, полученному при помощи теории вычетов [2–4], а чёрная — результат, полученный непосредственным численным интегрированием.

На рисунке 3 показаны результаты реконструкции плотности. Горизонтальная ось соответствует x_2, по вертикальной оси откладывается поправка к постоянному начальному прближению. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока норма поправки не превышала 10^{-4}. Сплошная линия соответствует точному решению, точки — восстановленному.

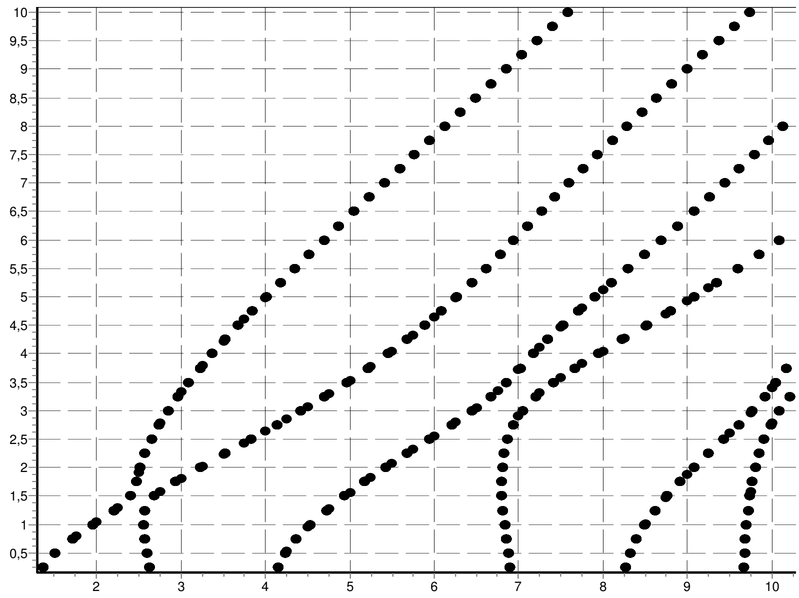


Рисунок 1 – Дисперсионные кривые в случае $\mu(x_2) = \mu(0)/(1+x_2)$, $\rho = \rho(0)e^{0,5x_2}$, $\nu = 0,3$. Ось абсцисс соответствует κ_2, ось ординат — α

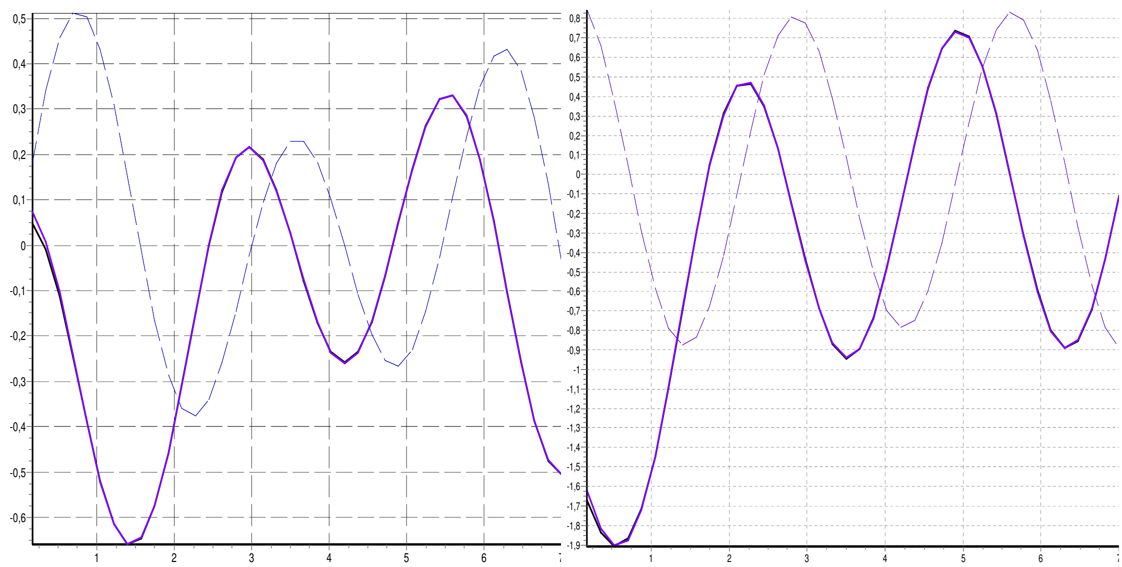


Рисунок 2 – Горизонтальное (слева) и вертикальное (справа) перемещение в случае $\mu(x) = \mu(0)/(1 + x_2)$, $\rho = \rho(0)e^{0.5x_2}$, $\nu = 0.3$. Ось абсцисс соответствует x_1, ось ординат — x_2

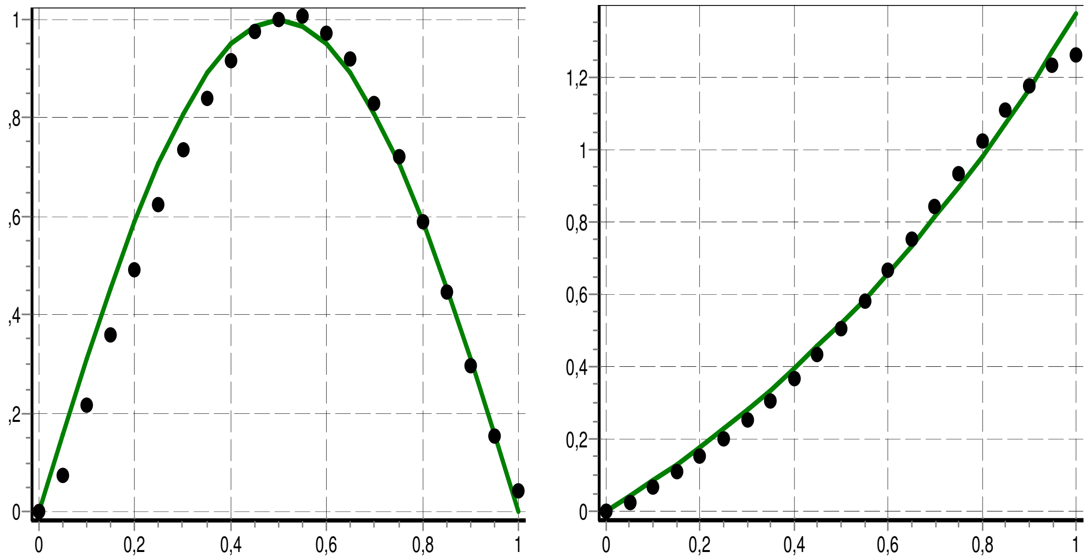


Рисунок 3 – Слева — результаты реконструкции для $\rho(x_2) = \rho(0)\,(1 + \sin \pi x_2)$ Для восстановления потребовались 23 итерации. Справа — $\rho(x_2) = \rho(0)\,[1 + 0.8(e_2^x - 1)]$. (29 итераций)

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ворович И. И, Бабешко В. А* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

[2] *Абрамович М. В., Углич П. С.* Обратные коэффициентные задачи для поперечно-неоднородного упругого слоя // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XVI Междун. конф., г. Ростов-на-Дону, 16–19 октября 2012 г. Т. I. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, С. 201

[3] *Uglich P. S.* On the inverse coefficient problem for the transversally inhomogeneous elastic layer // Proceedings of Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics». 2013. P. 597–604. Реконструкция неоднородных характеристик поперечно-неоднородного слоя при антиплоских колебаниях

[4] *Ватульян А. О., Углич П. С.* Реконструкция неоднородных характеристик поперечно-неоднородного слоя при антиплоских колебаниях // Прикладная механика и техническая физика, 2014, 3. С. 146–153.

Uglich P.S. *Inverse coefficient problem for the elastic layer*. A problem of forced plane vibration of the transversally inhomogeneous elastic layer is considered. A calculation scheme for the wave field evaluation is presented. It's based on the Fourier transform and the initial problem is reduced to the boundary value problem. This problem can be solved numerically using the shooting method. Then the wave field can be evaluated using the residual theory, or it can be obtained using numerical integration methods.

An inverse problem of mechanical parameters reconstruction using surface wave field data is also considered. The inverse problem is reduced to the iterative sequence of integral equations. Results of both direct and inverse problem solution are presented.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР НА γ-ПЛОСКОСТИ

Филимонова А. М., Говорухин В. Н

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Представлен метод расчета динамики плоских геофизических течений невязкой несжимаемой жидкости на γ-плоскости. Течения рассматриваются при условии наличия силы Кориолиса в прямоугольной области и периодических граничных условиях. Такая задача описывается системой уравнений в частных производных в терминах завихренности и функции тока. В основе метода лежат аппроксимация поля завихренности по его значениям на множестве жидких частиц и вычисление функции тока глобальным методом Бубнова — Галеркина. Динамика жидких частиц описывается системой дифференциальных уравнений, которая решается псевдо-симплектическим методом Рунге — Кутта. Представлены результаты тестовых расчетов.

Введение.

Интерес к исследованию плоских геофизических течений идеальной жидкости обусловлен их разнообразными приложениями в задачах гидродинамики, динамики океана и атмосферы, метеорологии. Например, для исследования движений атмосферы необходимым оказывается изучение динамики различных вихревых структур. Для решения таких задач одними из эффективных являются вихревые методы [1]. Эти методы основаны на решении уравнений, определяющих распределение завихренности в области течения с течением времени. В начальный момент поле завихренности задается дисретно значениями в N жидких частицах, которыми завихренность переносится пассивно.

Один из вариантов метода вихрей в ячейках для решения рассматриваемого класса задач в замкнутых и проточных областях был предложен и развит в работах [2–5]. В данной статье представлен метод для анализа динамики вихревых структур в прямоугольной области при условии, что на функцию тока наложены периодические краевые условия.

1. Постановка задачи. Рассматриваются плоские геофизические течения невязкой несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды в присутствии силы Кориолиса [6]. Математически задача формулируется в виде системы уравнений в частных производных:

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \tag{1}$$

$$-\triangle\psi = \omega + \frac{1}{2}\gamma r^2, \tag{2}$$

где $\omega = \omega$(x,y) — абсолютная завихренность, $\psi = \psi$(x,y) — функция тока, t — время. Здесь параметр Кориолиса в окрестности полюса представлен в виде $f(r) = f_0 - \frac{1}{2}\gamma r^2 + O(r^4)$, где $\gamma = const$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ — полярный радиус. В случае, когда $\gamma = 0$, уравнение (2) представляет собой классическое уравнение

Эйлера в терминах завихренности и функции тока. Из уравнения (1) следует, что завихренность ω переносится пассивно жидкими частицами с течением времени.

Завихренность ω(x,y) и функция тока $\psi\,(x, y)$ связаны с вектором скорости следующими соотношениями:

$$\upsilon_1 = \psi_y, \quad \upsilon_2 = -\psi_x, \quad \omega = \upsilon_{2x} - \upsilon_{1y}. \tag{3}$$

Начальное распределение завихренности определяется следующим условием:

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y) \tag{4}$$

Динамика и взаимодействие вихревых структур рассматриваются в прямоугольной области $A = \{(x, y) : |x| \leqslant a/2; |y| \leqslant b/2\}$ в предположении, что на функцию тока ψ наложены периодические краевые условия:

$$\psi|_{x=-a/2} = \psi|_{x=a/2}, \quad \psi|_{y=-b/2} = \psi|_{y=b/2} \tag{5}$$

4. Алгоритм метода. Представленный метод является вариантом бессеточных методов вихрей-в-ячейках. В основе методов лежит аппроксимация поля завихренности на каждом временном шаге, решение уравнения (2) и расчет динамики жидких частиц, которые пассивно переносят завихренность. Вихревые методы различаются подходом к решению уравнения (2). В данной работе реализован алгоритм, основанный на перечисленных ниже вычислительных процедурах.

Аппроксимация поля завихренности. Поле завихренности задается дискретно в начальный момент времени значениями в N жидких чатицах. Частица могут быть распределены как равномерно, так и случайным образом. Далее, поле завихренности аппроксимируется по значениям в жидких частицах на каждом временном шаге с помощью кусочной аппроксимацией кубическими многочленами. Для этого область A разделяется на $N_{box} = n_x \times n_y$ прямоугольных ячеек, в каждой из которых поле завихренности $\omega(x, y)$ приближается многочленами вида:

$$\omega(x, y) \approx \sum_{m,\, l=0,\, l+m\leqslant 3}^{3} \omega_{lm}\; x^l y^m, \tag{6}$$

где ω_{lm} — полиномиальные коэффициенты, которые находятся методом наименьших квадратов.

Аппроксимация поля скорости жидкости. Функция тока вычисляется при помощи глобального метода Бубнова — Галеркина. Решение уравнения (2) ищется в виде отрезка ряда Фурье:

$$\psi \approx \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \psi_{ij} g_{ij}^k(x, y) = g_i(x)\tilde{g}_j(y), \tag{7}$$

где $g_i(x)$, $\tilde{g}_j(y)$ — тригонометрические базисные функции по x и по y, соответственно, ψ_{ij} — неизвестные коэффициенты разложения функции тока в ряд.

Базисными функциями $g_i(x)$ являются:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{2\pi i(x + \frac{a}{2})}{a}\right), \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{2\pi i(x + \frac{a}{2})}{a}\right) \tag{8}$$

Базисными функциями $\tilde{g}_j(y)$ являются:

$$\frac{1}{\sqrt{b}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}}\sin\left(\frac{2\pi j(y+\frac{b}{2})}{b}\right), \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}}\cos\left(\frac{2\pi j(y+\frac{b}{2})}{b}\right) \tag{9}$$

Все возможные произведения (8) и (9) являются базисными функциями $g_{ij}^k(x,y)$, удовлетворяющими граничным условиям (5).

Подставляя функцию тока в виде (7) в уравнение (2) и спроектировав его на каждую из базисых функций, используя (6) ммножно получить явные формулы для нахождения неизвестных коэффициентов функции тока ψ_{ij}.

Расчет динамики жидких частиц. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую динамику жидких частиц, можно переписать следующим образом, используя (7):

$$\begin{cases} \tilde{\upsilon}_1 = \dot{x}_i = \psi_y \approx \sum\limits_{i=1}^{k_x}\sum\limits_{j=1}^{k_y}\psi_{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y}, \\ \tilde{\upsilon}_2 = \dot{y}_i = -\psi_x \approx -\sum\limits_{i=1}^{k_x}\sum\limits_{j=1}^{k_y}\psi_{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x}. \end{cases} \tag{10}$$

Система ОДЕ (10) решается при помощи псевдо-симплектического метода Рунге — Кутта [7].

5. Тестовые расчеты. В данном разделе представлены результаты расчета динамики известных вихревых конфигураций. Эти вычисления проводились для проверки адекватности предложенного метода.

Безвихревое движение на γ-плоскости. При наличии только влияния силы Кориолиса, т. е. $\omega \equiv 0$, $\gamma \neq 0$, жидкие частицы на плоскости совершают круговые движения. Результаты расчета для этого случая представлены на Рисунке 1. Видно, что предложенная вычислительная схема хорошо воспроизводит динамику внутри области, но искажения нарастают при приближении к границе.

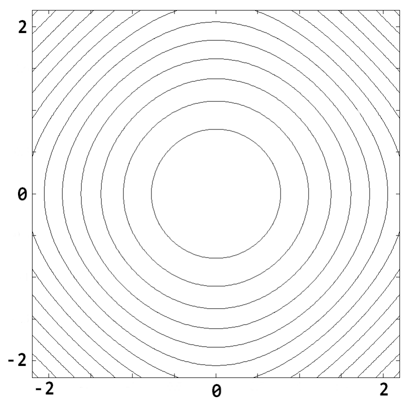
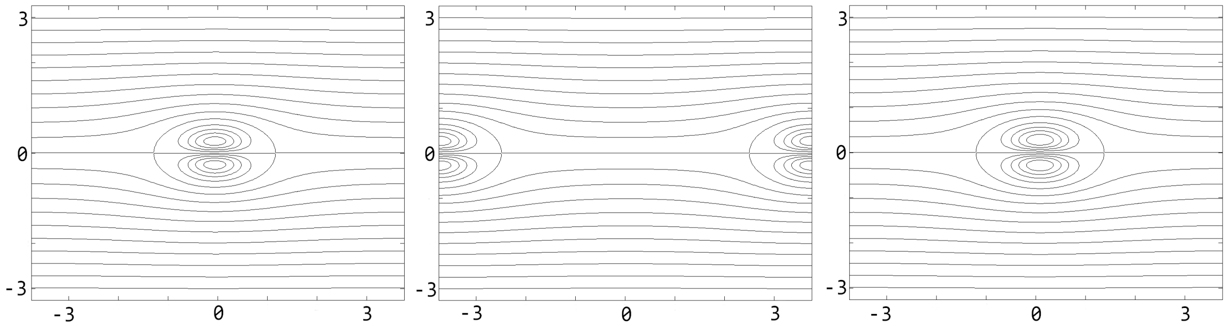


Рисунок 1 – Вычисленные линии тока для $\omega \equiv 0$, $\gamma = 1$.

Динамика диполя Ламба. Диполь Ламба является вихревой конфигурацией, состоящей из двух вихрей проьтивоположной направленности, которая движется на плоскости с постоянной скоростью, не изменяя формы. Выражения для его завихренности и функции тока имеют вид:

$$\omega = \begin{cases} \frac{2\lambda U}{J_0(\lambda R)}\ J_1(\lambda r)\cos(\theta), & r \leqslant R \\ 0, & r > R \end{cases} \qquad \psi = \begin{cases} \frac{2U}{\lambda J_0(\lambda R)}\ J_1(\lambda r)\cos(\theta), & r \leqslant R \\ U(r - \frac{R^2}{r})\cos(\theta), & r > R, \end{cases} \tag{11}$$

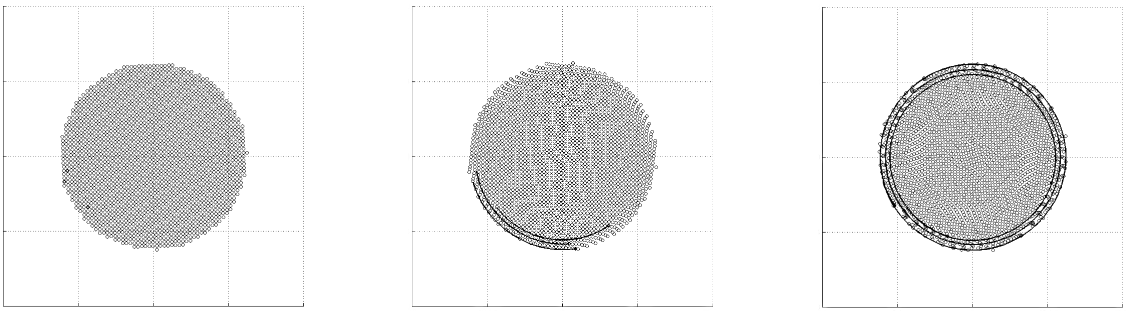
r, θ — полярные координаты, J_i — функция Бесселя i-го порядка, R — радиус диполя.



а) $t = 0$ б) $t = 200$ в) $t = 1100$

Рисунок 2 – Динамика Диполя в различные моменты времени в прямоугольной области со сторонами $a = 7$ и $b = 6$

На Рисунке 2 изображена расчитанная с помощью развитого метода динамика Диполя (11) в различные моменты времени при $\gamma = 0$ в области с периодическими условиями на границах. Полученные результаты демонстрируют хорошую согласованность расчетов с аналитическими фактами. Так, в окрестности области с ненулевой завихренностью результаты расчетов практически совпадают с аналитическим выражением (11) для всех рассмотренных t.



а) $t = 0$ б) $t = 180$ б) $t = 180$

Рисунок 3 – Динамика вихревого пятна в различные моменты времени

Динамика круглого вихревого пятна. Другим классическим примером является круглое (с радиусом r) вихревое пятно постоянной ненулевой завихренности. Такая конфигурация задается следующим распределением завихренности:

$$\begin{cases} \omega_0(x, y) = 0, & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r, \\ \omega_0(x, y) = 1, & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r, \end{cases} \tag{12}$$

где $(x_0, y_0) = (0, 0)$ — координаты центра круга. Известно, что такой вихрь вращается вокруг своего центра с постоянной скоростью как твердое тело против часовой стрелки. На Рисунке 3 изображена расчитанная динамика вихревого пятна радиуса $r = 0.5$. Видно, что и рассчетная конфигурация с течением времени вращается, как твердое тело с постоянной скоростью. При этом, траектории жидких частиц, составляющих данное вихревое пятно, являются круговыми. Для наглядности на Рисунке 3 отображены траектории трех произвольных жидких частиц.

Таким образом, проведенные тестовые расчеты динамики классических вихревых конфигураций демонстрируют адекватность предложенного численного метода.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 14-01-00470.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Cottet G-H., Koumoutsakos P.* Vortex methods: Theory and practice. Cambridge University Press. 1999.

[2] *Govorukhin V.* Numerical analysis of ideal fluid flows through plane duct of finite length // 18 Congres Francais de Mecanique. 2007. P. 1–5. URL: http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/handle/2042/15584/CFM2007-0594.pdf

[3] *Govorukhin V., Il'in K.* Numerical study of an inviscid incompressible flow through a channel of finite length // Int. J. for num. methods in fluids. 2009. №12. P. 1315–1333.

[4] *Говорухин В. Н.* Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМ. 2011. №6. С. 1133–1147.

[5] *Govorukhin V.* A meshfree method for the analysis of planar flows of inviscid fluids. Meshfree Methods for Partial Differential Equations VI. Springer. 2013. P. 171–180.

[6] *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. Springer. 1987.

[7] *Aubry A., Chartier P.* Pseudo-symplectic Runge-Kutta methods // BIT Numerical Mathematics. 1998. №3. P. 439–461.

Filimonova A. M., Govorukhin V. N. *Numerical analysis of vortex structeres dynamics on γ-plane.* The method for numerical analysis of vortex structure dynamics on γ-plane is presented in the paper. We consider incompressible inviscid 2D geophysical fluid flows in presence of Coriolis force. The problem is described mathematically by the system of two PDE equations in terms of stream function and vorticity. Developed method based on vorticity field approximation by its values at a set of fluid particles and the stream function computation, using the global Galerkin method. The dynamics of particles is described by ODE system which solved by pseudo-symplectic integrator.

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ В СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФОНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Фоменко С. И., Александров А. А.
Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар

Исследуются упругие волны в слоистых фононных кристаллах, состоящих из конечного набора ячеек и погруженных в изотропную среду. Ячейки кристалла образуются сопряженными друг с другом пьезоэлектрическими и упругими слоями. Колебания в слоистой среде генерируются плоскими продольными либо поперечными волнами из полупространства. Волновое поле строится с использованием метода Т-матриц, в том числе с помощью явного выделения сингулярных составляющих Т-матрицы, что обеспечивает численную устойчивость при увеличении числа ячеек в кристалле. Исследуется влияние толщины слоев ячейки и пьезоэлектрического тензора на дисперсионные характеристики и запрещенные зоны.

1. Введение.

Одним из современных направлений развития материаловедения является исследование и разработка композитных материалов. Материалы с искусственно созданной внутренней периодической структурой представляют большой практический интерес. При гармонических упругих колебаниях таких материалов, называемых фононными кристаллами, в частотных диапазонах наблюдаются зоны, в которых амплитуды волн, проходящих через периодическую ячеистую структуру кристалла, экспоненциально убывают от ячейки к ячейке. В запрещенных зонах падающая волна практически полностью отражается от кристалла. Это явление может быть использовано для виброизоляции структур, упругой или акустической фокусировки, а также в разработке новых типов сенсоров и актуаторов упругих колебаний и механических резонаторов [1]. Использование пьезоэлектрических включений потенциально дает возможность управлять [2, 3] распространением упругих волн в периодической структуре.

Теоретические и численные исследования волновых полей в периодических упругих структурах, как правило, осуществляются на основе метода Флоке-Блоха, предполагающего определение волновых чисел и собственных форм колебаний ячейки кристалла. Результаты, которые могут быть получены этим методом, описывают колебания в структурах с бесконечным набором ячеек. Между тем, на практике встречаются только структуры с конечным количеством ячеек. В [4] было показано, что такие структуры обладают особенностями, в частности, в них существуют особые типы запрещенных зон, а также разрешенные зоны, в которых проходящая через слоистую структуру волна имеет настолько малую амплитуду, что с инженерной точки зрения такие зоны можно рассматривать как запрещенные.

Целью данной работы является исследование слоистых пьезоэлектрических фононных кристаллов на основе метода матриц переноса (Т-матриц), а также проведение на его основе численного параметрического исследования запрещенных зон в периодических структурах, состоящих из пьезоэлектрических и упругих слоев, исследование влияние пьезоэлектричества на запрещенные зоны фононных кристаллов.

2. Постановка и решение задачи.

Рассматривается одномерный фононный кристалл, который состоит из N повторяющихся ячеек, каждая из которых содержит в себе M слоёв. Предполагается, что он бесконечный относительно осей Ox и Oy, а его структура находится между двумя полупространствами H_1 и H_2 (рисунок 1). Из полупространства H_1 на структуру набегает продольная либо поперечная плоская гармоническая волна под углом θ в плоскости xOz и под углом τ в плоскости yOz с круговой частотой колебаний ω. Предполагается известной амплитуда набегающей волны, для определённости равная единице. Свойства материалов H_1, H_2, а так же внутренних слоёв A и B задаются тензором упругих констант, тензорами пьезоэлектрических и диэлектрических констант C_{ijmn}, e_{nij} и ϵ_{in} соответственно. В рамках линейной теории пьезоупругости для чисто упругих материалов, как для проводников, так и для диэлектриков, справедливы следующие уравнения состояния и движения, выписанные в тензорном виде для комплексных амплитуд [5]:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} - \mathrm{e}_{nij}E_n, \quad && \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \\ &D_i = \mathrm{e}_{imn}\varepsilon_{mn} + \epsilon_{in}E_n, && D_{i,i} = 0, \quad i,j,m,n \in \{1,2,3\}. \end{aligned}$$

где σ_{ij}, $\varepsilon_{mn} = 1/2(u_{m,n} + u_{n,m})$ — тензоры комплексных амплитуд упругих напряжений и деформаций, u_i — компоненты вектора комплексных амплитуд перемещений; D_i — амплитуды электрической индукции, $E_n = -\partial\varphi/\partial x_n$ и φ — амплитуды напряженности и потенциала электрического поля; суммирование производится по индексам m и n. Предполагается прохождение энергии упругих колебаний через интерфейс без потерь (плотность потока энергии непрерывна):

$$e_z = -\omega/2\,\mathrm{Im}(u_i\sigma_{3i}^* + D_3\phi^*)$$

за счет непрерывности упругих перемещений, напряжений, электрического потенциала и электрической индукции.

Решение рассматриваемой задачи может быть получено с помощью метода матриц переноса (Т-матриц). При этом матрица переноса каждого пьезоэлектрического слоя T_i хоть и не имеет явного представления, но находится с помощью

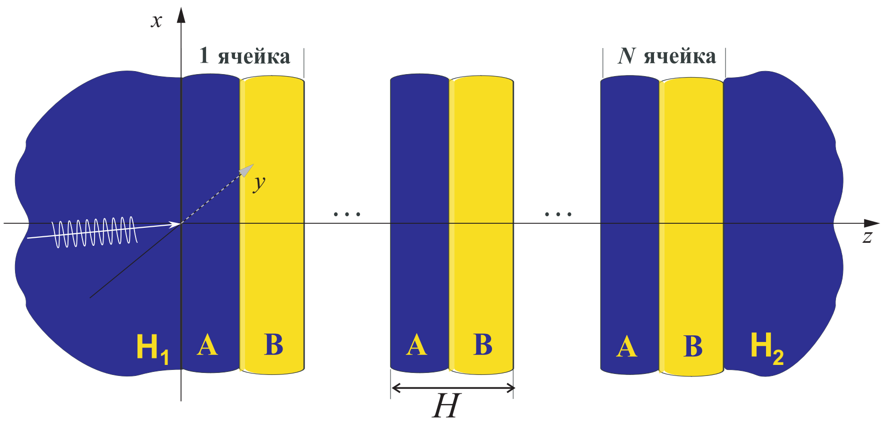


Рисунок 1 – Постановка задачи.

быстрых и устойчивых алгоритмов определения собственных значений, обращения и произведения матриц 8×8. Тогда матрица переноса $T_{cell} = \prod_{i=M}^{1} T_i$ ячейки определяется как произведения Т-матриц ее слоев, а для матрицы переноса T_{struct} всего фононного кристалла, состоящего из N ячеек справедливо

$$T_{struct} = T_{cell}^N = G_{cell}^{-1} \Lambda^N G_{cell}$$

Здесь Λ — диагональная матрица из 8-ми собственных значений λ_j, упорядоченных по убыванию их модулей; G_{cell} — матрица перехода к жорданову базису матрицы T_{cell}.

С физической точки зрения собственные значения λ_j определяют волновые числа $\zeta_j = \mathrm{i} \ln \lambda_j / H$ волн Флоке—Блоха в периодической структуре. С учетом ограниченности по оси z, проходящее в полупространство H_2 волновое поле может быть представлено разложением:

$$\mathbf{u}^+ = \sum_{n=1}^{4} \tilde{\mathbf{u}}_n e^{\mathrm{i}\zeta_n N H}, \tag{1}$$

где ζ_n такие, что либо $\operatorname{Im} \zeta_n > 0$, либо $\operatorname{Im} \zeta_n = 0$ и $\operatorname{Re} \zeta_n > 0$. Векторы $\tilde{\mathbf{u}}_n$ находятся с помощью численно устойчивого алгоритма, даже при достаточно большом количестве ячеек N.

Для анализа запрещенных зон эффективным является использование энергетического коэффициента прохождения $\kappa^+ = e_z^+ / e_z^\circ$, выражающегося для рассматриваемого случая плоских волн через отношение плотностей потока энергий прошедшей через кристалл волны (e_z°) и приходящей из полупространства H_1 плоской волны (e_z°).

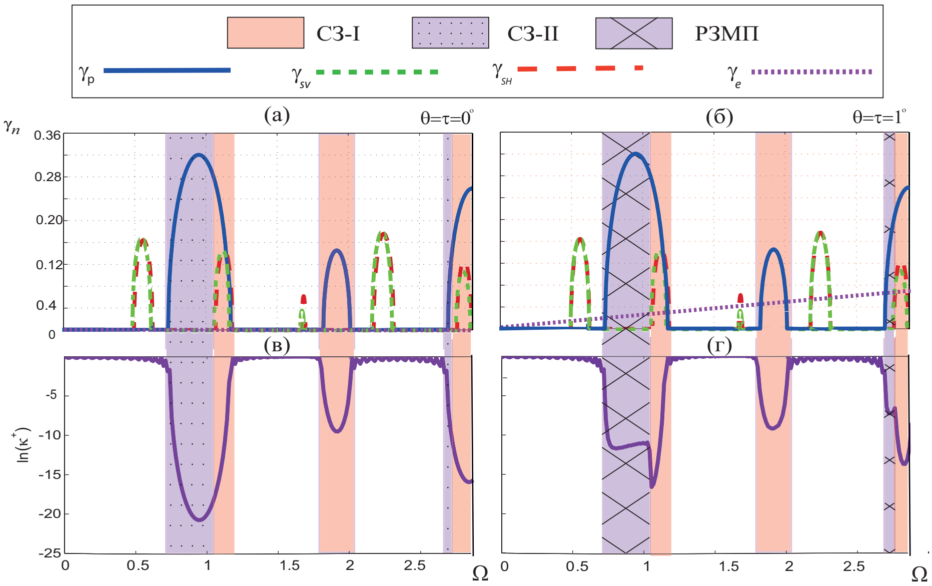


Рисунок 2 – Частотные зависимости коэффициентов затухания мод Флоке—Блоха (а, б) и логарифма коэффициента прохождения κ^+ (в,г); трансформация СЗ-II в РЗМП при изменении углов падения плоской Р-волны с 0° (первый столбец) до 1°

3. Запрещенные и разрешенные зоны в пьезоэлектрических фононных кристаллах.

Рассматривается фононной кристалл, состоящий из 16 двухслойных ячеек. Параметры материалов структуры приведены в таблице 1. Для тензоров упругих и пьезоэлектрических констант материала B (2 и 3 индексы) используется свертка индексов согласно нотации Фойгта. Неуказанные значения тензора по умолчанию равны нулю. Толщины всех слоев равны 1.

На рисунке 2 сопоставляются зависимости коэффициентов $\gamma_n = \operatorname{Im} \zeta_n$ затухания волн Флоке—Блоха (а) и коэффициента прохождения κ^+ (б) от нормированной частоты $\Omega = \omega H/(2\pi c_H)$, c_H — скорость S-волны в полупространстве, для падающей P-волны. Закрашенные прямоугольники соответствуют различным типам запрещенных зон. В зонах первого типа (СЗ-I) все волны Флоке—Блоха являются затухающими. Зоны второго типа (СЗ-II), в которых затухает только псевдо-P-волна Флоке—Блоха (ζ_p), а амплитуды остальных волн Флоке равны нулю, наблюдаются только для нулевых углов падения ($\theta = 0$ или $\tau = 0$). С увеличением углов падения они трансформируются в разрешенные зоны низкого прохождения (РЗМП). Подробности о СЗ-II и РЗМП можно найти в [4].

Таблица 1 – Параметры материалов

Обозначение	Имя	Свойства
$\mathrm{A}, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$	Алюминий	$\rho = 2.7,\ \lambda = 51.1,\ \mu = 26.3$
B	Титанат бария ($\mathrm{BaTiO_3}$)	$\rho = 7.5,\ C_{11} = C_{22} = 166,\ C_{33} = 162,$ $C_{44} = C_{55} = 43,\ C_{66} = 44,\ C_{12} = C_{13} = C_{23} = 78,$ $\mathrm{e}_{13} = \mathrm{e}_{23} = -4.4,\ \mathrm{e}_{33} = 18.6,\ \mathrm{e}_{42} = \mathrm{e}_{51} = 11.6,$ $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 11.2,\ \epsilon_{33} = 12.6.$

Размерности величин: $[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$, $[\lambda] = [\mu] = [C_{ij}] = \text{ГПа}$.

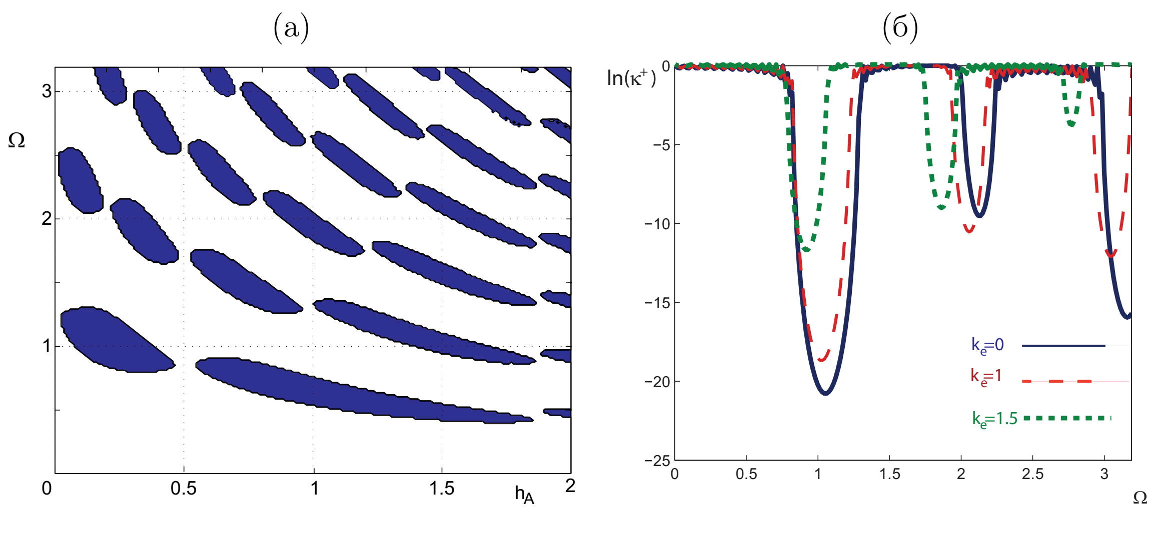


Рисунок 3 – Трансформация запрещенных зон (темная область) при непрерывном изменении толщины h_A слоев A ячеек кристалла (а) и влияние тензора пьезоэлектрических констант $k_\mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^\mathrm{o}_{nij}$ на формирование запрещенных зон в фононном кристалле (б)

Эффект влияния соотношения между толщинами слоев ячеек на расположение и размер запрещенных зон показан на рисунке 3(а), где темными областями обозначены запрещенные зоны (I и II типов) для нормального угла падения плоской P-волны. На формирование запрещенных зон также оказывает влияние свойства материалов, в частности тензоры пьезоэлектрических e_{nij} и диэлектрических ϵ_{ij} констант. На рисунке 3(б) в качестве примера приводятся графики $\ln\kappa^+$ для различных значений тензора пьезоэлектрических констант. При этом в качестве характеристики рассматривается коэффициент k_e такой, что $\mathrm{e}_{nij} = k_\mathrm{e}\mathrm{e}^\mathrm{o}_{nij}$, где $\mathrm{e}^\mathrm{o}_{nij}$ — значения компонент тензора из таблицы 1.

Работа выполнена при поддержки гранта Президента РФ МК-7154.2015.1 и грантов РФФИ 16-51-53043, 16-41-230769.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Jim K. L., Leung C. W., Lau S. T., Choy S. H., Chan H. L. W.* Thermal tuning of phononic bandstructure in ferroelectric ceramic/epoxy phononic crystal // Appl. Phys. Lett.. 2009. Vol. **94**, 193501.

[2] *Ponge M.-F., Dubus B., Granger C., Vasseur J., Thi M., Hladky-Hennion A.-C.* Optimization of a tunable piezoelectric resonator using phononic crystals with periodic electrical boundary conditions // Physics Procedia. 2015. Vol. **70**, pp. 258–261.

[3] *Darinskii A., Shuvalov A., Poncelet O., Kutsenko A.* Bulk longitudinal wave reflection/transmission in periodic piezoelectric structures with metallized interfaces // Ultrasonics. 2015. Vol. **63**, pp. 118–125.

[4] *Fomenko S. I., Golub M. V., Bui T. Q., Zhang Ch., Wang Y.-S.* In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. **51**(13), pp. 2491–2503.

[5] *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.

Fomenko S. I., Alexandrov A. A. *Wave fields in layered anisotropic and piezoelectric phononic crystalls*. Elastic waves in layered phononic crystals consisted of a finite number of unit-cells and immersed into an isotropic medium are investigated. The unit-cells are composed of piezoelectric and elastic layers. The waves in layered structures are excited by plane P- or S-wave incoming from the half-space. Wavefield is constructed via T-matrix method including explicit singular values of T-matrix that provides numerical stability for a large number of unit-cells. Using the developed algorithms, parametric analysis of the filtering features of the considered periodic materials is fulfilled. The influences of thicknesses of unit-cell layers and piezoelectric constants tensor on band-gaps are studied.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ, ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ОТ ТРЕНИЯ И КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Чебаков М. И., Ляпин А. А., Колосова Е. М.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Работоспособность полимерных подшипников скольжения «сухого трения» зависит от многих параметров, включающих в себя скорость вращения вала, коэффициент трения, термо-механические свойства элементов подшипниковой системы и, как следствие, величины результирующих контактных температур. Целью данного исследования является разработка расчётной модели работы бинарного подшипника скольжения «сухого трения» с полимерными цилиндрическими вставками, определения на её основе распределения температур, эквивалентных и контактных напряжений в элементах подшипниковой системы и подбор оптимальных параметров подшипниковой системы, при которых достигается тепловой баланс.

1. Введение.
Выяснение особенностей поведения поверхностных слоев металлополимерного термоупругого трибоконтакта — одна из центральных задач в триботехнике. Поэтому для более глубокого познания процессов на контакте необходимо разрабатывать не только экспериментальные методы диагностики, но и адекватные теоретические модели. В настоящее время установилась единая точка зрения, что определяющим фактором эксплуатационного режима металлополимерного сопряжения является тепловая напряженность в узле трения. В последние годы в отечественной и зарубежной научной литературе большое внимание уделяется теоретическим (численным, аналитическим) и экспериментальным исследованиям работоспособности полимерных подшипников скольжения «сухого трения» [1–4]. При изготовлении подшипниковых втулок широко применяется полимер фторопласт-4. Основной причиной, вызвавшей интерес к этому материалу, является то, что при «сухом трении» металлов по фторопласту-4 при малой скорости скольжения коэффициент трения очень мал и не превышает обычно нормальных коэффициентов трения в металлических подшипниках при наличии смазки. Чистый фторопласт обладает хорошей химической стойкостью, малым коэффициентом трения, широким диапазоном рабочих температур, однако он подвержен деформации под нагрузкой и интенсивному износу. Наполнители, вводимые во фторопласт, повышают сопротивление износу примерно в тысячу раз, сопротивление нагрузке давлением — в 2–5 раза, тепловое расширение снижается в 2–3 раза. Исследованиям влияния скорости скольжения, опорного давления и температуры на трение и износ подшипников скольжения из фторопласта с наполнителями в условиях окружающей среды посвящена работа [5].

В отличие от отмеченных выше работ в настоящей статье исследуется металлофторопластовый подшипник скольжения при нестационарном взаимодействии деталей подшипника с учетом трения, тепловыделения от трения и конвективного теплообмена на основе пространственной модели. В качестве антифрикционного материала используется фторопласт-4 без наполнителей.

2. Математическая формулировка задачи.

Рассматривается нестационарная динамическая связанная контактная за-дача термоупругости о взаимодействии упругого однородного цилиндра (далее — вала) с внутренней поверхностью двойного цилиндрического слоя конечной длины (далее — подшипника) в пространственной постановке. Геометрия цилиндрического слоя представляет собой в цилиндрической системе координат двойной цилиндрический слой, состоящий из внутреннего слоя ($R_1 \leqslant r \leqslant R_s$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$, $-l/2 \leqslant z \leqslant l/2$) и внешнего слоя ($R_s \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$, $-l/2 \leqslant z \leqslant l/2$), которые жестко соединены между собой по поверхности ($r = R_s$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$, $-l/2 \leqslant z \leqslant l/2$). На рис. 1, а) представлен трёхмерный исследуемый объект, а на рис. 1, б) - поставка задачи в разрезе плоскостью O_{1xy}.

На внешней поверхности подшипника $S^{\text{внеш}}$ ($r = R_2$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$,$-l/2 \leqslant z \leqslant l/2$) заданы условия, запрещающие какие-либо перемещения кроме вращения. Пусть в поверхность $r = R_1$ вдавливается вал радиуса $R_0 = R_1 - \Delta$ (Δ — малая величина), занимающий область ($-l/2 - d \leqslant z \leqslant l/2 + d$) с центром в точке O_2, ось которого параллельна оси подшипника, с линией первоначального касания ($r = R_1$, $\phi = 0$,$-l/2 \leqslant z \leqslant l/2$). Вдавливание организуется за счет задания на выступающих поверхностях вала вертикальных усилий $P/2$ с каждой стороны.

В локальной цилиндрической системе координат $O_2 r_1 \phi z$ (рис. 1) на поверхностях $S_1 = (r_1 = R_0, 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, -l/2 - d \leqslant z \leqslant -l/2)$ и $S_2 = (r_1 = R_0, 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, l/2 \leqslant z \leqslant l/2 + d)$ вала заданы распределённые нагрузки, каждая из которых суммарно равна $P/2$ и направлена вертикально вниз. Вал вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω (об/сек) в течение T секунд. Между валом и подшипником действуют силы Кулоновского трения с коэффициентом трения μ. Обозначим через $S_{\pm}^{\text{тор}}$ поверхности торцов вала, лежащие соответственно в плоскостях $z = \pm l/2 \pm d$.

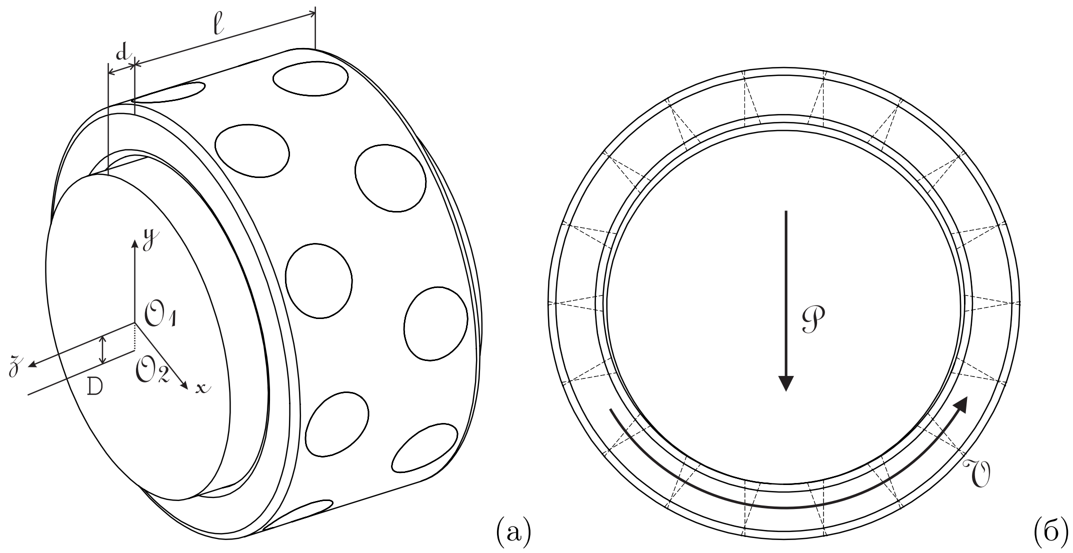


Рисунок 1 – Схематическое изображение исследуемой модели

Предполагается, что на поверхностях вала и подшипника, которые граничат с окружающей средой, определены условия конвективного теплообмена с коэффициентом конвективной теплоотдачи a. Пусть в начальном состоянии температура вала, подшипника и окружающей среды совпадают и равны 0° С. В результате приходим к решению нестационарной связанной контакт-ной задачи термоупругости с классическими уравнениями движения термо-упругой среды [6] (индекс k связан с номером тела: (1) — вал, (2) — подшипник, (3) — фторопластовые вставки):

$$\begin{aligned}(\lambda_i + 2\mu_i)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^{(k)} - (\lambda_i + \mu_i)\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}^{(k)} - \gamma_i\nabla\theta^{(k)} - \rho_i\ddot{\mathbf{u}}^{(k)} = 0,\\ \Lambda_i\nabla\cdot\nabla\theta^{(k)} - C_i\dot{\theta}^{(k)} - t_{0i}\gamma_i\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}}^{(k)} = 0;\end{aligned} \tag{1}$$

Определяющие соотношения для связанной термоупругости имеют вид

$$\sigma_{ij}^{(k)} = 2\mu_k\varepsilon_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}(\lambda_k\varepsilon_{nn} - \gamma_k\theta), k = 1, 2, 3; \tag{2}$$

где $\gamma_k = (3\lambda_k + 2\mu_k)\alpha_k$, α_k — коэффициент теплового расширения, Λ_k — коэффициент теплопроводности, C_k — теплоемкость, t_{0k} — абсолютная температура начального состояния тела, ρ_k — плотность, λ_k, μ_k — коэффициенты Ламе, $\mathbf{u}^{(k)}$ — вектор смещений среды, $\theta^{(k)}$ — температура, $\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензора напряжений и деформаций.

3. Решение задачи.

Для решения поставленной задачи использован метод конечного элемента с применением пакета Abaqus. Для улучшения сходимости алгоритма решения задачи и уменьшения времени расчета, исследование осуществляется в два этапа. На первом этапе решается статическая контактная задача теории упругости о вдавливании вала во внутреннюю поверхность подшипника, на втором — связанная нестационарная контактная задача термоупругости о вращении вала.

Конечно-элементное разбиение строится с помощью 8-узлового связанного термоупругого элемента C3D8T. Для моделирования контактного взаимодействия внутренняя поверхность подшипника и внешняя поверхность вала покрываются контактными парами элементов. Для решения нестационарной задачи задаются минимальный и максимальный шаги по времени, а также опции, дающие возможность пакету Abaqus выбирать оптимальный шаг по времени при проведении расчётов.

4. Результаты моделирования.

При проведении численных экспериментов были заданы следующие значения геометрических и материальных параметров. Внутренний радиус подшипника $R_1 = 0.023$ м, внешний радиус подшипника 0.03 м, промежуточный радиус между слоями подшипника $R_s = 0.026$ м. Зазор между валом и подшипником $\Delta = 9\cdot10^{-5}$ м, длина подшипника $l = 0.03$ м, выступ вала $d = 0.005$ м.

Основной слой подшипника предполагается выполненным из бронзы, а внутренние антифрикционные вставки — из фторопласта. При проведении расчётов вал предполагается стальным. Для бронзы используются следующие материальные константы: плотность $\rho_1 = 8800$ кг/м^3, коэффициенты Ламе $\lambda_1 = 6.3\cdot10^{10}$ Па, $\mu_1 = 4.2\cdot10^{10}$ Па, коэффициент теплопроводности $\Lambda_1 = 76$ Вт/(м К), коэффициент теплового расширения $\alpha_1 = 1.8\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$, удельная теплоёмкость

$C_1 = 435$ Дж/(кг К); для фторопласта - $\rho_2 = 2200$ кг/м^3, $\lambda_2 = 2.3 \cdot 10^8$ Па, $\mu_2 = 1.54 \cdot 10^8$ Па, $\Lambda_2 = 0.25$ Вт/(м К), $C_2 = 1040$ Дж/(кг К); для стали - $\rho_3 = 7800$ кг/м^3, $\lambda_3 = 1.21 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu_3 = 8.1 \cdot 10^{1}0$ Па, $\Lambda_3 = 50.2$ Вт/(м К), $\alpha_3 = 1.1 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, $C_3 = 462$ Дж/(кг К).

Зависимость коэффициента теплового расширения для фторопласта от температуры приведена в таб. 1.

Таблица 1 – Зависимость коэффициента теплового расширения для фторопласта.

t, C^0	-10	20	50	110	120	200	210	280
$\alpha_2(t) \cdot 10^4, K^{-1}$	0.8	2.5	1.1	1.1	1.5	1.5	2.1	2.1

На рис. 2 приведены результаты моделирования для значений температуры в точках вала и подшипника, имеющих в начальный момент времени координаты $r = R_1, \phi = -\pi/2, z = 0$. Скачкообразное поведение температуры для подшипника объясняется тем, что точка подшипника, проходя через зону контакта, получает некоторое количество тепла за счет тепловыделения от трения, а в дальнейшем, выходя из зоны контакта, теряет тепло за счет перераспределения вглубь подшипника и конвективного теплообмена с окружающей средой.

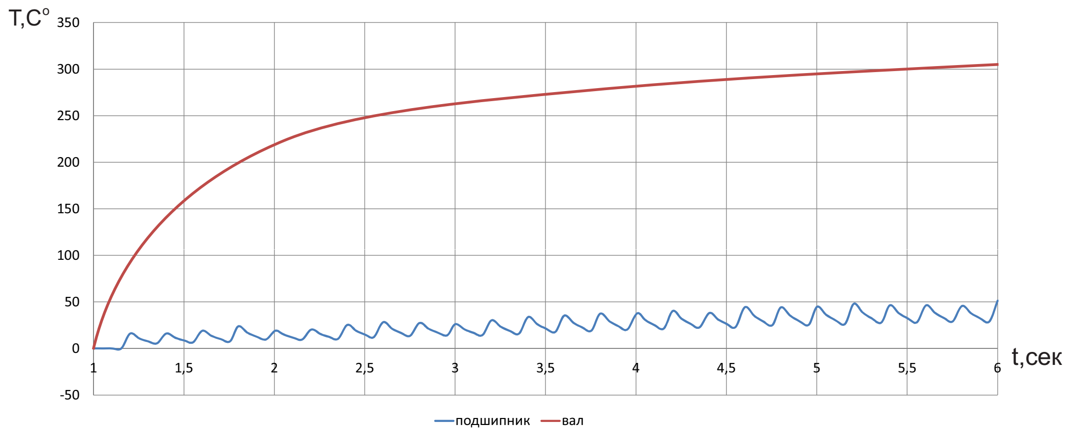


Рисунок 2 – Схематическое изображение исследуемой модели

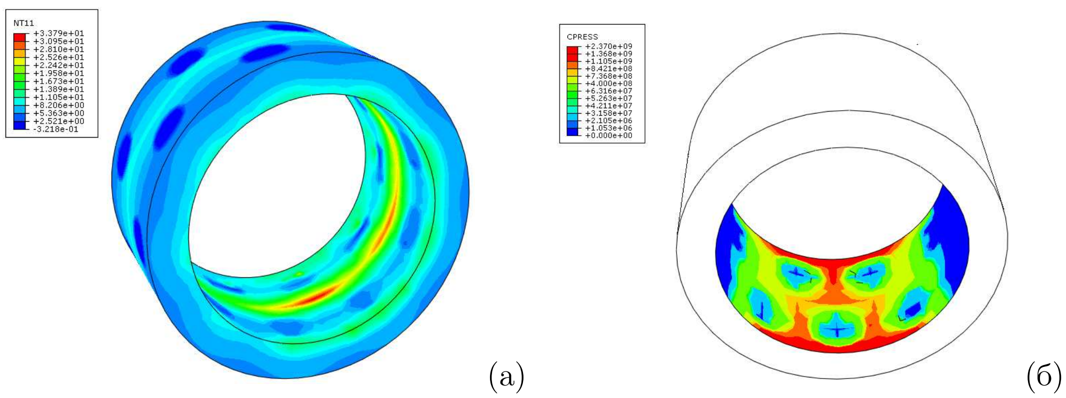


Рисунок 3 – Распределение температуры (а) и контактных давлений (б) по поверхности подшипника после 5 с вращения

Зону контакта можно видеть на рис. 3 (б), рис. 3 (а) — распределение температуры по поверхности подшипника.

5. Заключение. Исследования показали, что большое значение в достижении теплового баланса в рассмотренной модели подшипниковой системы играет теплоотвод с поверхностей вала и подшипника, а при увеличении таких параметров, как скорость вращения вала, значение нагрузки, коэффициент трения, достижение теплового баланса в подшипниковой системе замедляется. Отметим, что конечно-элементный метод с использованием пакета Abaqus для данной задачи оказался достаточно эффективным и позволяет эффективно исследовать подобные задачи при различных значениях входных геометрических и механических параметров.

Работа выполнена при поддержке внутреннего гранта ЮФУ БЧ 213.01-2014/03-ВГ и гранта РФФИ 16-08-00852 А.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Александров В. М.* Определение контактных температур в цилиндрическом сочленении // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. №5. P. 86–88.

[2] *Губарева Е. А., Мозжорина Т. Ю., Щетинин А. Н.* Моделирование взаимодействия цилиндрических и сферических тел с покрытиями при износе и тепловыделении. Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. №3. С. 5.

[3] *Дроздов Ю. Н., Надеин В. А., Пучков В. Н., Пучков М. В.* Трение и ресурс цилиндрических подшипников скольжения, работающих без смазки. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. №4. P. 72–78.

[4] *Imado K., Miura A., Kido Y.* Influence of testing method on the contact pressure distribution and its effect on coefficient of friction in polymeric bearing. Tribology International. 2007. №40. P. 390–396.

[5] *Колесников В. И.* Теплофизические процессы в металлополимерных трибосистемах. Москва: Наука, 2003. 279 p.

[6] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. Москва: Мир, 1970. 253 p.

Chebakov M. I., Lyapin A. A., Kolosova E. M. *Modelling of contact interaction for elastic bodies with friction, heating generation and convection.* Serviceability of metal-polymeric «dry-friction» sliding bearings depends on many parameters, including the rotational speed, friction coefficient, thermal and mechanical properties of the bearing system and, as a result, the value of contact temperature. The objective of this study is to develop a computational model for the metallic-polymer bearing, determination on the basis of this model temperature distribution, equivalent and contact stresses for elements of the bearing arrangement and selection of the optimal parameters for the bearing system to achieve thermal balance.

ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПИИ В МОДЕЛИ ТРИКЛИННОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Швед О. Л.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск

Для описания роста упругой анизотропии при условии его минимизации получено определяющее уравнение в дифференциальном виде. С целью его проверки использовалась зависимость удельной потенциальной энергии упругой деформации от параметров анизотропии для триклинного материала Мурнагана. В особом случае при простом растяжении и простом сжатии найдены необходимые дополнительные соотношения в конечном виде. В случае кубически-изотропного материала дополнения к определяющему уравнению также могут быть получены при условии, если кубическая анизотропия является деформационной.

1. Теоретическое описание роста упругой анизотропии в результате пластической деформации является сложной проблемой. Модель материала, предложенная в [1] использует закон упругости Мурнагана [2, 3], который позволяет учитывать рост упругой анизотропии. Критерий разрушения [4] не требует введения параметра повреждаемости и вытекает из сути математической модели [1]. Причиной разрушения согласно критерию является рост упругой анизотропии, поэтому правильное его описание имеет важное значение. Возрастающую по сложности анизотропии иерархию моделей упругопластичности можно представить в виде последовательности трансверсально-изотропного, ортотропного, моноклинного, триклинного материалов. Трансверсальная анизотропия реализуется при одноосных нагружениях на растяжение и сжатие, которые являются базовыми экспериментами. Известен еще кубически-изотропный материал [2]. Однако модельный пример упругопластического нагружения первоначально изотропного материала, в котором могла бы возникнуть кубическая анизотропия, обнаружить в данной работе не удалось. Вполне возможно, что она не является деформационной анизотропией. Будем исходить из общих зависимостей для триклинного материала при получении возможных ограничений на параметры анизотропии в частных случаях. Они будут несколько отличаться от тех соотношений, в которых часть параметров анизотропии не учитывалась. Поскольку модель упругопластичности связана с конкретным сложным законом, то может проявляться неустойчивость при расчете упругопластического процесса. Следовательно, необходимым требованием является минимизация роста упругой анизотропии.

2. Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ неподвижный ортонормированный триэдр, с помощью которого будем рассматривать процесс образования анизотропии. Введем удельную потенциальную энергию упругой деформации в форме Мурнагана [3]:

$$э = э_0 + э_2 + э_3 + c, \tag{1}$$

$$
\begin{gathered}
э_2 = \sum (\delta_i(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^2 + \delta_{3+i}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \delta_{11+i}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \\
+\delta_{15+i}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i) + \delta_7(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \\
+\delta_8\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_9\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{10}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{19}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\
+\delta_{20}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{21}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2, \\
э_3 = \sum \delta_{21+i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^3 + \delta_{25}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{26}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\
+\delta_{27}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 + \delta_{28}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{29}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 + \\
+\delta_{30}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{31}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum \delta_{31+i}\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \\
+\delta_{35}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{36}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{37}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 + \\
+\delta_{38}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{39}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{40}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\
+\delta_{41}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{42}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{40+3i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^2 + \\
+\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{41+3i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^2 + \delta_{45}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{48}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \\
+\delta_{51}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{52}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{53}\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \\
+\delta_{54}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^3 + \delta_{55}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + \delta_{56}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum \delta_{56+i}\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \\
+\delta_{60}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{61}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{62}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\
+\delta_{63}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{64}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{65}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\
+\delta_{66}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{67}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{68}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\
+\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{66+3i}\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{67+3i}\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \\
+\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{68+3i}\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i \qquad (i = 1, 2, 3),
\end{gathered}
$$

где $э_2, э_3$ — анизотропные структуры второй и третьей степени по компонентам тензора упругой деформации Коши—Грина $\mathbf{C} = 2^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$, c — минимальная постоянная, обеспечивающая условие $э \geqslant 0$. Начальные значения параметров анизотропии $\delta_j = 0$ $(j = 1, 2, ..., 77)$, и тогда э с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал Мурнагана $э_0$.

Используем определение скаляра э, инвариантного в группах симметрии при указанных видах анизотропии [2]. Пусть тензор $\mathbf{C}'$ получен ортогональным преобразованием (преобразованием поворота) тензора $\mathbf{C}$. Скаляр инвариантный в группе симметрии изотропии остается неизменным $(э_0(\mathbf{C}) - э_0(\mathbf{C}') = 0)$ при преобразовании поворота на любой угол для любого направления. Скаляр инвариантный в группе симметрии трансверсальной изотропии остается постоянным $(э(\mathbf{C}) - э(\mathbf{C}') = 0)$ при преобразовании поворота на любой угол вокруг направления оси $\mathbf{c}_1$ или $\mathbf{c}_2$ или $\mathbf{c}_3$. Скаляр инвариантный в группе симметрии кубической изотропии остается неизменным при преобразовании поворота на угол $\pi/2$ вокруг направления осей $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Скаляр инвариантный в ортотропной группе симметрии остается постоянным при преобразовании поворота на угол π вокруг направления осей $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$. Скаляр инвариантный в моноклинной группе симметрии остается неизменным при преобразовании поворота на угол π вокруг направления одной из осей $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Скаляр инвариантный в триклинный группе симметрии остается постоянным только при ортогональном преобразовании, задаваемом единичным тензором $\mathbf{E}$. Пусть x_n, y_m компоненты в тензорном представлении $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$. Используя (1) и приравнивая нулю коэффициенты при $x_n x_m$, $x_n x_m x_k$ форм $э_2(\mathbf{C}) - э_2(\mathbf{C}')$, $э_3(\mathbf{C}) - э_3(\mathbf{C}')$, устанавливаем возможные ненулевые параметры анизотропии, а акже возможные ограничения на эти параметры.

Для кубически-изотропного, трансверсально-изотропного, ортотропного материалов ненулевых параметров анизотропии δ_j может быть 29 (9+20), где $j \in \{1-3, 7-11, 15, 22-34, 41, 51-53, 57-59\}$. Для моноклинного материала таких параметров будет 45 (13+32). Для триклинного все 77 (21+56) параметров могут быть ненулевыми. Для трансверсально-изотропного материала с осью $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ и $\mathbf{c}_3$ соответственно находим

$$\begin{gathered}\delta_3 = \delta_2, \delta_8 = \delta_{10}, \delta_{24} = \delta_{23}, \delta_{30} = \delta_{28}, \delta_{26} = \delta_{25}, \delta_{29} = \delta_{27}, \\ \delta_{11} = \delta_7, \delta_{41} = 2(\delta_{34} - \delta_{33}), \delta_{51} = \delta_{32}, \delta_{53} = \delta_{33}, \delta_{52} = \delta_{34}, \\ \delta_{15} = 2\delta_2 - \delta_9, \delta_{59} = \delta_{58} = 3\delta_{23} - \delta_{28}, \delta_{57} = 2\delta_{27} - \delta_{31},\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\delta_1 = \delta_3, \delta_9 = \delta_8, \delta_{22} = \delta_{24}, \delta_{29} = \delta_{26}, \delta_{28} = \delta_{27}, \delta_{30} = \delta_{25}, \\ \delta_7 = \delta_{15}, \delta_{41} = 2(\delta_{51} - \delta_{57}), \delta_{52} = \delta_{58}, \delta_{53} = \delta_{57}, \delta_{59} = \delta_{51}, \\ \delta_{11} = 2\delta_3 - \delta_{10}, \delta_{34} = \delta_{32} = 3\delta_{24} - \delta_{26}, \delta_{33} = 2\delta_{25} - \delta_{31},\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\delta_2 = \delta_1, \delta_{10} = \delta_9, \delta_{23} = \delta_{22}, \delta_{27} = \delta_{25}, \delta_{28} = \delta_{26}, \delta_{30} = \delta_{29}, \\ \delta_{15} = \delta_{11}, \delta_{41} = 2(\delta_{32} - \delta_{33}), \delta_{57} = \delta_{33}, \delta_{58} = \delta_{32}, \delta_{59} = \delta_{34}, \\ \delta_7 = 2\delta_1 - \delta_8, \delta_{52} = \delta_{51} = 3\delta_{22} - \delta_{25}, \delta_{53} = 2\delta_{26} - \delta_{31}.\end{gathered} \tag{4}$$

Для кубически-изотропного материала получаем возможные ненулевые параметры δ_j, которые можно разделить на 9 групп: $j \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{8, 9, 10\}$, $j \in \{22, 23, 24\}$, $j \in \{25, 26, 27, 28, 29, 30\}$, $j \in \{7, 11, 15\}$, $j \in \{32, 34, 51, 52, 58, 59\}$, $j \in \{33, 53, 57\}$, $j = 31$, $j = 41$. Значения параметров из первых семи групп должны совпадать. Для ортотропного, моноклинного и триклинного материалов ограничения типа (2)–(4) отсутствуют.

3. Из (1) получаем определяющее уравнение в конечном виде для тензора напряжений Коши:

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial э}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j \tag{5}$$

$$\left(\mathbf{T}_0 = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial э_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}, \mathbf{T}_j = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial (э_2 + э_3)}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\right),$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_e$, неособенный тензор $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$ заменяет деформационный градиент, $\mathbf{O}$ — собственно ортогональный тензор поворота, сопровождающий упругую деформацию, L_3 — третий главный инвариант меры упругих искажений $\mathbf{V}$.

Постулируем дифференциальное определяющее уравнение для параметров анизотропии, в котором возможны два случая:

$$\dot{\delta}_j = k_j \beta \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{T}_j (\sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \cdot \mathbf{T}_j})^{-1} (\mathbf{T}_j \neq 0, \beta \geqslant 0, k_j = \pm 1), \quad \dot{\delta}_j = 0 (\mathbf{T}_j = 0). \tag{6}$$

Ранее в [1] рассматривался только первый случай. В (6) $\mathbf{N}$ — нормированный вектор нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести, при векторной интерпретации девиатора симметричного тензора. Его выбор для анизотропного материала осуществятся, как указано в [1, 5]. Тензоры $\mathbf{T}_j$ вычисляются из (1), (5) с использованием формулы $\frac{\partial \mathbf{c}_n \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_m}{\partial \mathbf{G}} = 2^{-1}(\mathbf{c}_n \mathbf{c}_m + \mathbf{c}_n \mathbf{c}_m)$ и берутся нормированными, поскольку параметры анизотропии считаются равноправными. Например, имеем $\mathbf{T}_i = L_3^{-1}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}$, $\mathbf{C}_i = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{O}$. Скаляры k_j выбираются из условия минимизации параметра роста анизотропии β. Для пояснения процедуры минимизации запишем остальные дифференциальные уравнения для тензора $\mathbf{T}$ и потенциала напряжений э:

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}), (L_3^{-1} э\dot{)} = (1 - \alpha)\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{D}, \tag{7}$$

где $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ — объективная производная по времени тензора $\mathbf{T}$, $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}$ — кососимметричный тензор упругого спина [1], $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ — девиатор, определяющий критерий течения ($\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N} \geqslant 0$), $\mathbf{D}$ — тензор скорости деформаций, K — малый положительный скаляр не зависящий от $\mathbf{D}$. Скаляр α — близкая к единице относительная часть величины рассеиваемой работы деформации, определяется в базовом одноосном эксперименте с использованием модельного критерия разрушения [4]. Дифференцируя уравнения (1), (5) и подставляя в соотношения (7), с использованием (6) получаем систему одного тензорного и одного скалярного уравнений относительно неизвестных симметричного тензора $\overset{\boldsymbol{\Omega}}{\mathbf{V}}$ и скаляра β. Она сводится к системе семи скалярных уравнений относительно шести компонент в базисе $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ производной меры упругих искажений и параметра роста анизотропии. Решение системы находим по методу Крамера. Считаем, что определитель системы $\Delta \neq 0$. Для β получаем $\beta^{-1} = (\Delta_7)^{-1}\Delta$. Если $\Delta_7 = 0$, то получаем $\beta = 0$. Пусть выполняется $\Delta_7 \neq 0$. Элементы седьмого столбца матрицы системы представляются в виде $a_{i7} = \sum_j B_{ij} k_j$, а определитель системы $\Delta = \sum_i A_{i7} a_{i7}, (i = \overline{1,7})$, где A_{i7} — алгебраические дополнения элементов седьмого столбца. Имеем $\beta^{-1}(\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7} \sum_j B_{ij} k_j = \sum_j ((\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7} B_{ij}) k_j$. Полагаем $k_j = 1$, если $(\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7} B_{ij} \geqslant 0$ и $k_j = -1$, если $(\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7} B_{ij} < 0$. Следовательно, величина определителя системы выбрана максимальной по абсолютной величине, что гарантирует выполнение условия $\Delta \neq 0$. Значение β получается минимальным по всем наборам $k_j = \pm 1$.

4. С помощью аналитических и численных методов проверялась пригодность определяющего уравнения (6) для описания найденных нулевых параметров анизотропии и полученных ограничений на возможные ненулевые параметры. Первое утверждение полностью подтверждается для всех видов анизотропии. Второе утверждение полностью не подтверждается. Для кубически-изотропного материала ограничений будет 20. Для трансверсально изотропного материала в каждом из трех случаев нагружения (2)–(4) ограничений будет 15. Из них не выполняются 4, они записаны в последних строчках этих соотношений. Таким образом, дифференциальное уравнение (6) в целом пригодно для описания роста анизотропии, но его следует дополнить соотношениями в конечном виде. Для трансверсально-изотропного материала это будут 4 соотношения в каждом из трех возможных случаев, записанные в последних строчках (2)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Швед О. Л.* О возможных определяющих соотношениях нелинейной упругопластичности // Труды VII Всерос. (с международным участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону. 15–18 октября. 2013 г. Т. II. С. 219–223.

[2] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

[3] *Murnaghan F. D.* Finite deformation of an elastic solid. N.Y.: John Wiley, 1951. 140 p.

[4] *Швед О. Л.* Критерий разрушения в модели упругопластической среды // Труды XVII международной конференции «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела». г. Ростов-на-Дону. 14–17 октября 2014 г. Т. II. С. 220–223.

[5] *Швед О. Л.* Вопросы обобщения нелинейной модели упругости на упругопластичность // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. г. Чебоксары. 16–21 июня 2014 г. С. 225–227.

Shved O. L. *The defining equation for anisotropic parameters in the model triclinic elastic-plastic material*. To describe the increase of elastic anisotropy of to minimize the defining equation in differential form is obtained. The dependence of the specific strain potential energy of elastic deformation from anisotropy parameters for triclinic Murnaghan material was used to check the increase. In special case of simple tension and simple compression the additional correlations found in the final form. In the case of cubic-isotropic material additions to defining equation is can be obtained provided that the cubic anisotropy is a deformation.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ КРУГЛЫХ ПЛИТ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Шейдаков Д. Н., Федоренко А. Г.
Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Настоящая работа посвящена изучению бифуркации равновесия нелинейно упругих плит с поверхностными напряжениями. В рамках общей теории устойчивости трехмерных тел исследовано выпучивание круглой плиты при радиальном сжатии. При этом полагалось, что на ее лицевых поверхностях действуют поверхностные напряжения и поведение плиты описывается с помощью модели Гертина—Мердока. Данная модель с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Для произвольного изотропного сжимаемого материала получены точные уравнения нейтрального равновесия и сформулированы линеаризованные краевые задачи, путем решения которых исследуется устойчивость нелинейно упругой круглой плиты с поверхностными напряжениями.

1. Равновесие круглой плиты при радиальном сжатии. В рамках модели Гертина—Мердока система уравнений статики нелинейно упругого тела с поверхностными напряжениями при отсутствии массовых сил состоит из уравнений равновесия

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

условий равновесия на части поверхности тела Ω_s, где действуют поверхностные напряжения

$$\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \overset{\circ}{\nabla}_s \cdot \mathbf{D}_s \right) \Big|_{\Omega_s} = \mathbf{t}, \tag{2}$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = 2\frac{\partial W(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}}, \qquad \mathbf{D}_s = \mathbf{P}_s \cdot \mathbf{C}_s, \quad \mathbf{P}_s = 2\frac{\partial W_s(\mathbf{G}_s)}{\partial \mathbf{G}_s}, \tag{3}$$

и геометрических соотношений

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}, \qquad \mathbf{G}_s = \mathbf{C}_s \cdot \mathbf{C}_s^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C}_s = \overset{\circ}{\nabla}_s \mathbf{R} \Big|_{\Omega_s}. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ — тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа, соответственно, $\overset{\circ}{\nabla}$ — трехмерный набла-оператор в лагранжевых координатах, $\overset{\circ}{\nabla}_s$ — поверхностный набла-оператор, $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{P}_s$ — тензора поверхностных напряжений типа Пиолы и типа Кирхгофа, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности недеформированного тела, $\mathbf{t}$ — вектор поверхностной нагрузки, W и W_s — плотности объемной и поверхностной потенциальной энергии деформации, соответственно, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_s$ — меры деформации Коши—Грина в объеме и на поверхности, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}_s$ — градиенты деформации, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, определяющий положение частиц тела в деформированном состоянии.

С учетом (3), в случае изотропного однородного тела для тензора напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{3} \chi_k \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k, \quad \chi_k = 2\frac{\partial W(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_k}; \qquad \mathbf{G} = \sum_{k=1}^{3} G_k \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k, \tag{5}$$

где G_k, $\mathbf{d}_k\,(k = 1, 2, 3)$ — собственные значения и собственные вектора меры деформации Коши—Грина $\mathbf{G}$. В тоже время, выражение тензора поверхностных напряжений типа Кирхгофа $\mathbf{P}_s$ имеет вид:

$$\mathbf{P}_s = \kappa_1 \mathbf{E}_s + 2\kappa_2 \mathbf{G}_s, \quad \kappa_m = 2\frac{\partial W_s(j_1, j_2)}{\partial j_m}, \ m = 1, 2; \qquad j_1 = \mathrm{tr}\mathbf{G}_s, \quad j_2 = \mathrm{tr}\mathbf{G}_s^2. \tag{6}$$

Здесь j_1, j_2 — инварианты меры поверхностной деформации типа Коши—Грина $\mathbf{G}_s$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ — трехмерный и поверхностный единичные тензора, соответственно.

Рассмотрим круглую плиту радиуса r_0 и толщины $2h$. Будем полагать, что на ее верхней $\Omega_+\,(z = h)$ и нижней $\Omega_-\,(z = -h)$ лицевых поверхностях действуют поверхностные напряжения, т. е. $\Omega_s = \Omega_+ \cup \Omega_-$. В случае радиального сжатия плиты радиус-вектор $\mathbf{R}$ определяется следующими соотношениями:

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_R + Z\mathbf{e}_Z, \tag{7}$$

$$R = \alpha r, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \qquad \Phi = \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad Z = f(z), \quad |z| \leqslant h,$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), R, Φ, Z — эйлеровы цилиндрические координаты, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$ — ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат, соответственно, α — коэффициент радиального сжатия, $f(z)$ — неизвестная функция, характеризующая толщинную деформацию плиты.

Согласно выражениям (4), (7), градиенты деформации в объеме и на поверхности равны:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + f'\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, \qquad \mathbf{C}_\pm = \alpha\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi. \tag{8}$$

Здесь и далее $'$ обозначает производную по z, индексами «+» и «–» обозначаются поверхностные величины, относящиеся к верхней и нижней лицевым поверхностям круглой плиты, соответсвенно.

Из соотношений (4), (8) получим выражения для соответствующих мер деформации Коши—Грина

$$\mathbf{G} = \alpha^2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \alpha^2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + f'^2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{G}_\pm = \alpha^2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \alpha^2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi. \tag{9}$$

Согласно (9), в случае рассмотренной начальной деформации собственные вектора $\mathbf{d}_k\,(k = 1, 2, 3)$ меры деформации Коши—Грина $\mathbf{G}$ совпадают с векторным базисом лагранжевых цилиндрических координат, т. е. $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}_z$, а собственные значения равны: $G_1 = G_2 = \alpha^2$, $G_3 = f'^2$. Тогда, с учетом (5), (6), для тензоров напряжений Кирхгофа справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P} = \chi_1\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \chi_2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \chi_3\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{P}_\pm = \left(\kappa_1^\pm + 2\alpha^2\kappa_2^\pm\right)\left(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi\right).$$

Подставляя полученные выражения в (3), найдем представления тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ и тензоров поверхностных напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_+$ и $\mathbf{D}_-$ в случае деформации радиального сжатия круглой плиты

$$\begin{aligned} &\mathbf{D} = \alpha\chi_1 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \alpha\chi_2 \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + f'\chi_3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ &\mathbf{D}_\pm = \alpha\left(\kappa_1^\pm + 2\alpha^2\kappa_2^\pm\right)\left(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi\right). \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом (10), из уравнений равновесия (1) следует, что $\chi_1 = \chi_2$ при рассмотренной начальной деформации, а неизвестная функция $f(z)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\chi_3 f'' + \chi_3' f' = 0 \tag{11}$$

Согласно (2), (10), условия равновесия на лицевых поверхностях плиты Ω_+ и Ω_- при отсутствии поверхностных нагрузок имеют вид:

$$\chi_3 f'\big|_{z=\pm h} = 0 \tag{12}$$

Таким образом, при заданной функции плотности потенциальной энергии деформации W неизвестная функция $f(z)$ находится путем решения краевой задачи (11), (12) с дополнительным условием $f(0) = 0$, выражающим отсутствие вертикальных смещений на серединной поверхности плиты.

2. Возмущенное состояние. Предположим, что помимо описанного выше состояния равновесия плиты с поверхностными напряжениями при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое радиус-вектором $\mathbf{R} + \eta\mathbf{v}$. Здесь η — малый параметр, $\mathbf{v}$ — вектор добавочных перемещений.

Возмущенное состояние равновесия нелинейно упругого тела описывается уравнениями:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D}^\bullet = \mathbf{0} \tag{13}$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \mathbf{P}^\bullet \cdot \mathbf{C} + \mathbf{P} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}$$

Здесь $\mathbf{D}^\bullet$ и $\mathbf{P}^\bullet$ — линеаризованные тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа, соответственно. Чтобы найти выражение последнего, проведем линеаризацию определяющих соотношений (5)

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}^\bullet = \sum_{k=1}^{3}\left(\chi_k^\bullet \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k + \chi_k \mathbf{d}_k^\bullet \otimes \mathbf{d}_k + \chi_k \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k^\bullet\right) \\ &\mathbf{G}^\bullet = \sum_{k=1}^{3}\left(G_k^\bullet \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k + G_k \mathbf{d}_k^\bullet \otimes \mathbf{d}_k + G_k \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k^\bullet\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{d}_k$ и $\mathbf{d}_k^\bullet$ $(k = 1, 2, 3)$ взаимноортогональны, т. е. $\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_k^\bullet = 0$, из (14) получим $(m = 1, 2, 3;\ k \neq m)$

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^\bullet \cdot \mathbf{d}_k = \chi_k^\bullet, \qquad \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^\bullet \cdot \mathbf{d}_m = \frac{\chi_k - \chi_m}{G_k - G_m}\,\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{G}^\bullet \cdot \mathbf{d}_m, \tag{15}$$

где соотношения для $\chi_k^\bullet$ имеют вид:

$$\chi_k^\bullet = \sum_{n=1}^{3} \chi_{kn} G_n^\bullet, \qquad \chi_{kn} = \frac{\partial \chi_k(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_n}, \qquad G_n^\bullet = \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{G}^\bullet \cdot \mathbf{d}_n. \tag{16}$$

Формулы (15), (16) дают представление всех компонент линеаризованного тензора напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}^\bullet$ в базисе $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ через компоненты линеаризованной меры деформации Коши—Грина $\mathbf{G}^\bullet$, а сам тензор $\mathbf{G}^\bullet$ равен

$$\mathbf{G}^\bullet = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}^{\mathrm{T}}.$$

Согласно (2), линеаризованные условия равновесия на лицевых поверхностях плиты Ω_+ и Ω_-, где действуют поверхностные напряжения, имеют вид:

$$\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^\bullet - \overset{\circ}{\nabla}_\pm \cdot \mathbf{D}_\pm^\bullet\right)\Big|_{z=\pm h} = \mathbf{0} \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{D}_+^\bullet$ и $\mathbf{D}_-^\bullet$ — линеаризованные тензоры поверхностных напряжений типа Пиолы, для которых с учетом (3), (6) справедливы следующие соотношения

$$\mathbf{D}_\pm^\bullet = \mathbf{P}_\pm^\bullet \cdot \mathbf{C}_\pm + \mathbf{P}_\pm \cdot \overset{\circ}{\nabla}_\pm \mathbf{v}_\pm, \qquad \mathbf{P}_\pm^\bullet = \kappa_1^{\pm\bullet} \mathbf{E}_\pm + 2\kappa_2^{\pm\bullet} \mathbf{G}_\pm + 2\kappa_2^\pm \mathbf{G}_\pm^\bullet,$$

$$\kappa_m^{\pm\bullet} = \sum_{n=1}^{2} \kappa_{mn}^\pm j_n^{\pm\bullet}, \qquad \kappa_{mn}^\pm = \frac{\partial \kappa_m^\pm(j_1^\pm, j_2^\pm)}{\partial j_n^\pm}, \qquad m = 1, 2$$

$$j_1^{\pm\bullet} = \mathrm{tr} \mathbf{G}_\pm^\bullet, \qquad j_2^{\pm\bullet} = 2\mathrm{tr}\left(\mathbf{G}_\pm \cdot \mathbf{G}_\pm^\bullet\right), \qquad \mathbf{G}_\pm^\bullet = \overset{\circ}{\nabla}_\pm \mathbf{v}_\pm \cdot \mathbf{C}_\pm^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}_\pm \cdot \overset{\circ}{\nabla}_\pm \mathbf{v}_\pm^{\mathrm{T}}.$$

Здесь $\mathbf{P}_+^\bullet$ и $\mathbf{P}_-^\bullet$ — линеаризованные тензоры поверхностных напряжений типа Кирхгофа, $\mathbf{G}_+^\bullet$ и $\mathbf{G}_-^\bullet$ — линеаризованные меры поверхностной деформации типа Коши—Грина, а $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{v}|_{z=\pm h}$ — векторы добавочных перемещений лицевых поверхностей.

Будем полагать, что на крае плиты $(r = r_0)$ задано постоянное радиальное перемещение, отсутствует азимутальное и нет трения при вертикальном смещении. Это приводит к следующим линеаризованным граничным условиям:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_Z|_{r=r_0} = 0, \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_R|_{r=r_0} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\Phi|_{r=r_0} = 0. \tag{18}$$

Запишем представление вектора добавочных перемещений $\mathbf{v}$ в базисе эйлеровых координат:

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_\Phi \mathbf{e}_\Phi + v_Z \mathbf{e}_Z.$$

Выражения (13), описывающие возмущенное состояние равновесия круглой плиты, представляют собой систему 3 уравнений в частных производных относительно 3 неизвестных функций переменных r, φ, z. Подстановка

$$v_R = V_R(r, z) \cos n\varphi, \quad v_\Phi = V_\Phi(r, z) \sin n\varphi, \quad v_Z = V_Z(r, z) \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, 2...$$

приводит к отделению переменной φ в этих уравнениях, сводя исследование устойчивости к решению однородной краевой задачи (13), (17), (18) для системы 3 уравнений в частных производных относительно функций двух переменных r, z.

В частном случае осесимметричных возмущений ($n = 0$) использование более простой подстановки

$$v_R = V_R\left(z\right) J_1\left(\beta r\right), \quad v_\Phi = V_\Phi\left(z\right) J_1\left(\beta r\right), \quad v_Z = V_Z\left(z\right) J_0\left(\beta r\right),$$

$$\beta = \xi_m / r_0, \qquad J_1\left(\xi_m\right) = 0, \qquad m = 1, 2, ...$$

позволяет удовлетворить линеаризованным граничным условиям (18) и свести исследование устойчивости к решению линейной однородной краевой задачи (13), (17) для системы 3 обыкновенных дифференциальных уравнений.

Легко показать, что если упругие свойства верхней Ω_+ и нижней Ω_- лицевых поверхностей плиты одинаковы ($W_+ \equiv W_-$), то краевая задача (13), (17) имеет два независимых класса решений. **Первый класс** образован решениями, для которых прогиб плиты является нечетной функцией координаты z:

$$V_R(z) = V_R(-z), \qquad V_\Phi(z) = V_\Phi(-z), \qquad V_Z(z) = -V_Z(-z).$$

Для решений **второго класса**, наоборот, прогиб — четная функциия z:

$$V_R(z) = -V_R(-z), \qquad V_\Phi(z) = -V_\Phi(-z), \qquad V_Z(z) = V_Z(-z).$$

Благодаря этому свойству краевой задачи при исследовании устойчивости достаточно рассмотреть лишь половину плиты, например, верхнюю ($0 \leqslant z \leqslant h$). Из четности и нечетности неизвестных функций V_R, V_Φ, V_Z следуют граничные условия при $z = 0$:

$$V_R'(0) = V_\Phi'(0) = V_Z(0) = 0 \quad (\textbf{первый класс} \text{ решений}), \tag{19}$$

$$V_R(0) = V_\Phi(0) = V_Z'(0) = 0 \quad (\textbf{второй класс} \text{ решений}). \tag{20}$$

Таким образом, в случае одинаковых лицевых поверхостей исследование устойчивости круглой плиты с поверхностными напряжениями сводится к решению двух линейных однородных краевых задач — (13), (17), (19) и (13), (17), (20) — для половины плиты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-08-00802-а, 16-01-00647-а).

Sheydakov D. N., Fedorenko A. G. *On stability of nonlinear elastic circular plates with surface stresses*. The present research is dedicated to the buckling analysis of nonlinearly elastic plates with surface stresses. In the framework of a general stability theory for three-dimensional bodies, we have studied the stability of a circular plate under radial compression. It was assumed that the surface stresses are acting on its faces and the plate behavior is described by the Gurtin–Murdoch model. From the mechanical point of view, this model is equivalent to a deformable body with glued elastic membrane. For an arbitrary isotropic compressible material the exact neutral equilibrium equations are derived and the linearized boundary value problems are formulated by solving which the stability of nonlinear elastic circular plate with surface stresses is analyzed.

УПРАВЛЕНИЕ СВОЙСТВАМИ ПЛЕНОК ТИТАНАТА БАРИЯ-СТРОНЦИЯ

Широков В. Б.[1,2]**, Калинчук В. В.**[1,2]**,** $\boxed{\textbf{Юзюк Ю. И.}^{2}}$

[1]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

[2]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Исследовано влияние планарного электрического поля на материальные постоянные уравнений пьезоэффекта тонких пленок титаната бария-стронция $x = 0.65$. Исследование выполнено при различных значениях вынужденной деформации для области парафазы. Показано, что некоторые постоянные достигают экстремальных значений при изменении поля. Наиболее управляемые пленки соответствуют деформациям вблизи границы с планарной фазой.

Разработка современных акустических устройств невозможна без предварительных расчетов. Как правило, подобные расчеты для практических приложений выполняются с использованием математических пакетов типа ANSYS, COMSOL и основаны на линейных уравнениях пьезоэффекта. При использовании в устройствах в качестве активного элемента сегнетоэлектрических пленок необходимо знание материальных постоянных — коэффициентов уравнений. Коэффициенты для нелинейной системы, к которой относятся сегнетоэлектрические тонкие пленки, могут значительно меняться [1, 2].

Существенным ограничением использования сегнетоэлектрических акустических элементов являются потери. Гистерезисные явления, наблюдаемые в сегнетоэлектриках, означают существование потерь, пропорциональных площади петли. Одним из эффективных направлений уменьшения потерь — уход в высокосимметричную фазу, где в отсутствии внешнего поля нет спонтанной поляризации, и поэтому отсутствуют гистерезисные явления [3].

Количественное описание нелинейных свойств сегнетоэлектриков широко применяется теория Ландау фазовых переходов, использующая термодинамические потенциалы высоких степеней. Сегнетоэлектрические твердые растворы титаната бария-стронция удалось успешно количественно описать на основе термодинамического потенциала шестой и восьмой степени [4, 5], который зависит от двух трехкомпонентных параметров порядка — поляризации и антифазных вращений октаэдров. При комнатной температуре фазы, связанные с антифазными вращениями не наблюдаются, поэтому можно ограничиться одним параметром порядка — тремя компонентами поляризации. Термодинамический потенциал в этом случае упрощается. Запишем его в виде

$$
\begin{aligned}
\Phi = {} & G(p_1,p_2,p_3) - Q_{11}\left(t_1p_1^2+t_2p_2^2+t_3p_3^2\right) - Q_{44}\left(t_4p_2p_3+t_5p_1p_3+t_6p_1p_2\right) - \\
& - Q_{12}\left(t_1(p_2^2+p_3^2)+t_2(p_1^2+p_3^2)+t_3(p_1^2+p_2^2)\right) - \\
& - \tfrac{1}{2}s_{11}\left(t_1^2+t_2^2+t_3^2\right) - \tfrac{1}{2}s_{44}\left(t_4^2+t_5^2+t_6^2\right) - s_{12}\left(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3\right).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь $G(p_1,p_2,p_3)$ — потенциал Ландау, p_i — компоненты вектора поляризации, u_k и t_k — тензоры деформации и напряжений соответственно в обозначениях Фойгта.

В (1) отсутствует слагаемое, соответствующее тепловому расширению, так как температура фиксирована (комнатная температура, $T = 300°\mathrm{K}$). Для твердых растворов титаната бария-стронция мы будем использовать в качестве $G(p_1, p_2, p_3)$ потенциал из [5].

Основное состояние сегнетоэлектрика определяется из условия

$$E_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \qquad u_k = \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}, \tag{2}$$

где напряжения являются внешними заданными параметрами. Решения (2) должны соответствовать минимуму потенциала (1).

Далее будем рассматривать эпитаксиальную тонкую пленку, расположенную на (001) срезе кубической подложки. Решение однородной механической задачи при условиях зажатия: $u_1 = u_m$, $u_2 = u_m$, $u_6 = 0$, $t_3 = 0$, $t_4 = 0$, $t_5 = 0$ приводит к известной перенормировке коэффициентов потенциала (1) во второй и четвертой степени по поляризации [6].

Рассмотрим электрическое поле, направленное в плоскости пленки вдоль одного из кубических направлений подложки. Обозначим это направление как x. Действие поля понижает тетрагональную симметрию несегнетоэлектрической высокосимметричной фазы пленки до моноклинной. Так как поле E_x с необходимостью вызывает появление компоненты поляризации $p_1 = p_x$, то этому состоянию будет соответствовать a-фаза симметрии $Pmm2(\mathrm{C}^1_{2\mathrm{v}})$ [5]. Для этой фазы имеем основное состояние, определяемое следующими условиями

$$\begin{aligned}
&E_x = 2\left(\frac{\partial G}{\partial\left(p_1^2\right)} - \frac{Q_{11}+Q_{12}}{s_{11}+s_{12}}u_m\right)p_x + 2\frac{\left(Q_{11}^2+Q_{12}^2\right)s_{11} - 2Q_{11}Q_{12}s_{12}}{s_{11}^2 - s_{12}^2}p_x^3,\\
&u_1 = u_2 = u_m, \quad u_3 = 2\frac{s_{12}}{s_{11}+s_{12}}u_m - \frac{Q_{11}s_{12} - Q_{12}s_{11}}{s_{11}+s_{12}}p_x^2, \quad u_4 = u_5 = u_6 = 0,\\
&t_1 = \frac{u_m}{s_{11}+s_{12}} + \frac{Q_{12}s_{12} - Q_{11}s_{11}}{s_{11}^2 - s_{12}^2}p_x^2, \qquad t_2 = \frac{u_m}{s_{11}+s_{12}} + \frac{Q_{11}s_{12} - Q_{12}s_{11}}{s_{11}^2 - s_{12}^2}p_x^2,\\
&t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Варьируя уравнения (2) вблизи основного состояния (3), получим линейные уравнения пьезоэффекта в переменных p_i и t_i. Используя связь $D_i = \varepsilon_0 E_i + p_i$, заменим поляризацию p_i на индукцию D_i в полученных уравнениях. После чего получим уравнения

$$\left\{\begin{aligned} &E_i = -g_{i,k}t_k + \beta^T_{i,j}D_j,\\ &u_m = s^D_{m,k}t_k + g_{i,m}D_i. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Коэффициенты уравнения (4) определяют материальные постоянные в переменных (D, t). Обращая уравнение (4) относительно выбранных пар переменных, можно получить необходимый набор материальных постоянных.

Мы рассмотрим материальные постоянные, определяемые следующими уравнениями

$$\left\{\begin{aligned} &D_i = e_{i,k}u_k + \varepsilon^S_{i,j}E_j,\\ &t_m = c^E_{m,k}u_k - e_{i,m}E_i. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Для количественного описания твердых растворов будем использовать в качестве потенциала $G(p_1, p_2, p_3)$ потенциал восьмой степени степени [5]

$$
\begin{aligned}
G(p_1, p_2, p_3) = {} & a_1(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + a_{11}(p_1^4 + p_2^4 + p_3^4) + a_{12}(p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_2^2p_3^2) + \\
& + a_{111}(p_1^6 + p_2^6 + p_3^6) + a_{112}[p_1^4(p_2^2 + p_3^2) + p_2^4(p_1^2 + p_3^2) + p_3^4(p_1^2 + p_2^2)] + \\
& + a_{123}p_1^2p_2^2p_3^2 + a_{1111}(p_1^8 + p_2^8 + p_3^8) + \\
& + a_{1112}[p_1^6(p_2^2 + p_3^2) + p_2^6(p_1^2 + p_3^2) + p_3^6(p_1^2 + p_2^2)] + \\
& + a_{1122}(p_1^4p_2^4 + p_1^4p_3^4 + p_2^4p_3^4) + a_{1123}(p_1^4p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^4p_3^2 + p_1^2p_2^2p_3^4). \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Коэффициенты в (6) для твердого раствора титаната бария–стронция определены в [5], для некоторых концентраций численные значения коэффициентов приведены в [7]. В настоящей работе используются значения коэффициентов потенциала для твердого раствора BST65 с концентрацией бария $x = 0.65$.

Тонкая пленка твердого раствора при комнатной температуре в зависимости от величины вынужденной деформации u_m может находиться в одном из трех основных состояний: c-фаза симметрии $2\mathrm{m}(\mathrm{C}_{2v})$ при $u_m < -1.33 \cdot 10^{-3}$ с направлением спонтанной поляризации по нормали к плоскости пленки $(0, 0, p_3)$; aa-фаза симметрии $\mathrm{m}(\mathrm{C}_s)$ при $u_m > 1.41 \cdot 10^{-3}$ с направлением спонтанной поляризации в плоскости пленки $(p_1, p_1, 0)$; параэлектрическая фаза симметрии $4/\mathrm{mmm}(\mathrm{D}_{4h})$ с нулевым значением спонтанной поляризации при $-1.33 \cdot 10^{-3} < u_m < 1.41 \cdot 10^{-3}$. Рассмотрим действие планарного электрического поля E_x на материальные постоянные в области существования параэлектрической фазы.

Поведение поляризации под действием поля E_x показано на рисунке 1. Линии на рисунке соответствуют равномерному изменению вынужденной деформации u_m от значения $u_m = -1.24 \cdot 10^{-3}$ до значения $u_m = 1.32 \cdot 10^{-3}$. Граничные кривые здесь и на всех последующих графиках обозначены символами. На рисунке 1 приведены так же диэлектрические проницаемости вдоль трех основных направлений. Из рисунка видно, что по мере приближения к границе с aa-фазой (по стрелке), диэлектрическая проницаемость в плоскости пленки становится больше, а максимумы острее, то есть управляемость увеличивается.

На рисунке 2 приведены ненулевые пьезоэлектрические модули. Как видно из рисунка, все модули ведут себя экстремально, причем острота экстремумов возрастает с приближением к aa-фазе. Наибольшему изменению подвержен модуль e_{11}, наименьшему — e_{12}.

Все упругие модули, за исключением c_{44}^E, подвержены изменению под действием поля E_x. Однако наиболее значительные изменения происходят с модулем c_{11}^E, что показано на рисунке 3.

Полученные результаты показывают направление поиска пленок с наиболее интересными свойствами, которые позволяют создавать устройства с эффективным управлением электрическим полем.

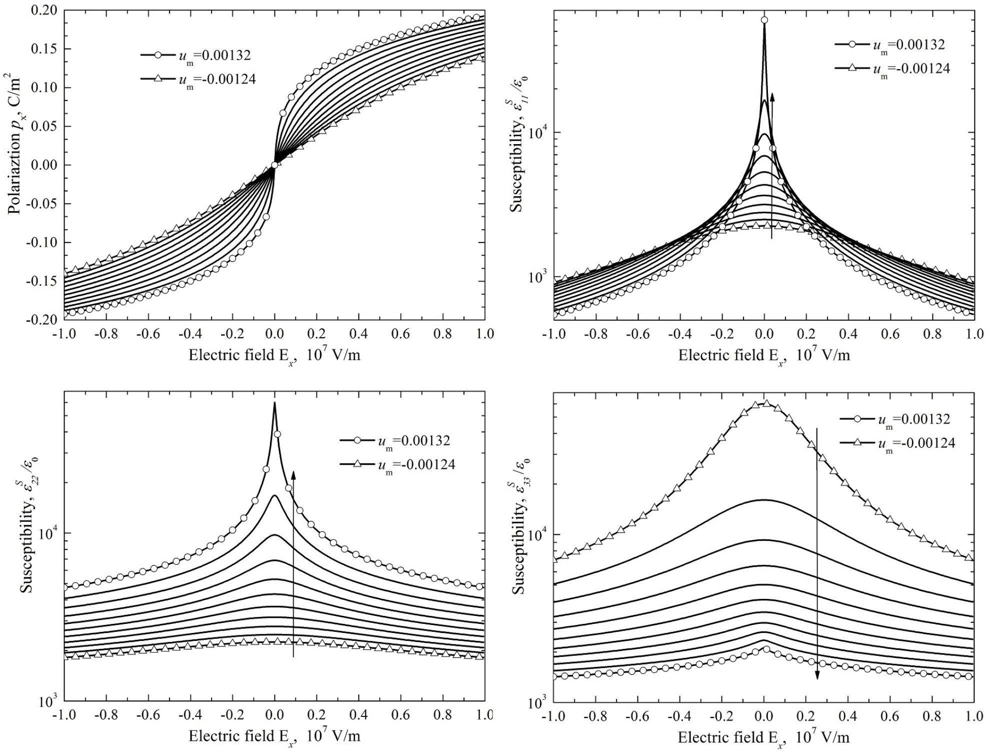


Рисунок 1

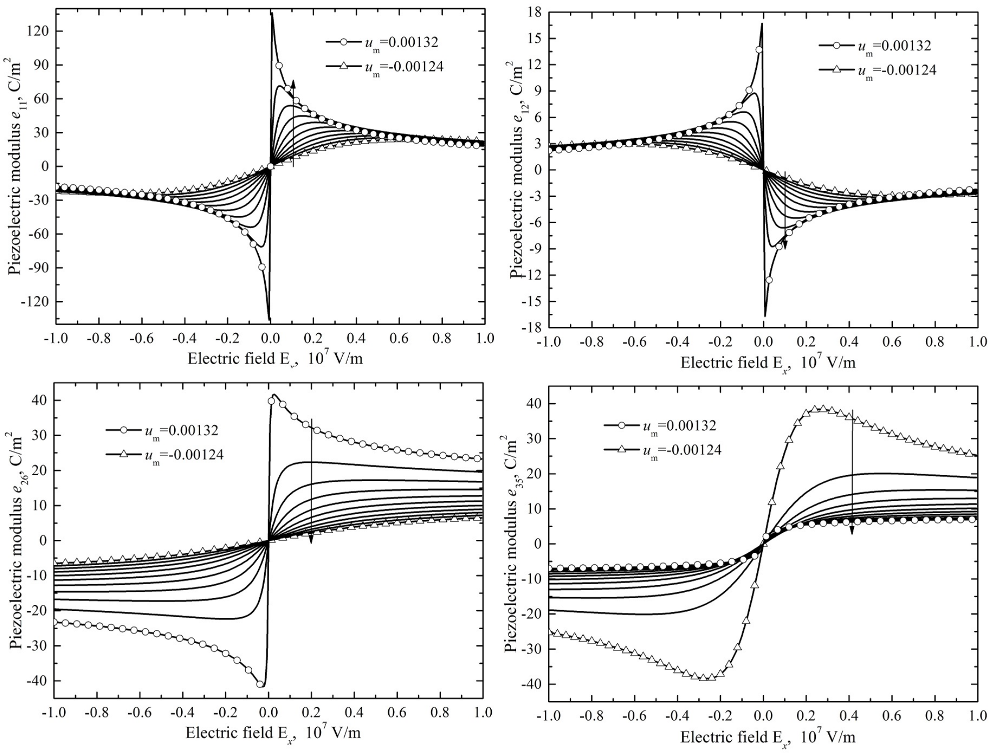


Рисунок 2

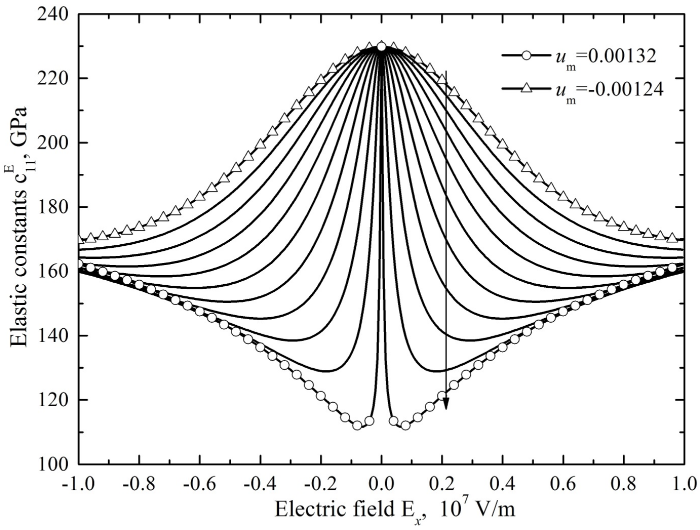


Рисунок 3

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 14-19-01676.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Shirokov V., Kalinchuk V., Shakhovoy R., Yuzyuk Yu.* Anomalies of piezoelectric coefficients in barium titanate thin films // EPL. 2014. V. 108. P. 47008(1–4).

[2] *Khassaf H., Khakpash N., Sun F., Sbrockey N. M., Tompa G. S., Kalkur T. S., Alpay S. P.* Strain engineered barium strontium titanate for tunable thin film resonators // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 104. P. 202902(1–5).

[3] *Garten L. M., Lam P., Harris D., Maria J.-P., Trolier-McKinstry S.* Residual ferroelectricity in barium strontium titanate thin film tunable dielectrics // J. Appl. Phys. 2014. V. 116. P. 044104(1–8).

[4] *Shirokov V. B., Torgashev V. I., Bakirov A. A., Lemanov V. V.* Concentration phase diagram of Bax Sr1-x TiO3 solid solutions // Phys. Rew. B. 2006. V. 73. P. 104116(1–7).

[5] *Shirokov V. B., Yuzyuk Yu. I., Dkhil B., Lemanov V. V.* Phenomenological theory of phase transitions in epitaxial $Ba_xSr_{1-x}TiO_3$ thin films // Phys. Rev. B. 2009. V. 79. P. P.144118(1–9).

[6] *Pertsev N. A., Zembilgotov A. G., Tagantsev A. K.* Effect of Mechanical Boundary Conditions on Phase Diagrams of Epitaxial Ferroelectric Thin Films // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 1988–1991.

[7] *Широков В. Б., Юзюк Ю. И., Калинчук В. В., Леманов В. В.* Материальные константы твердых растворов (Ba,Sr)TiO_3 // ФТТ. 2013. Т. 55. № 4. С. 709–714.

Shirokov V. B., Kalinchuk V. V., Yuzyuk Yu. I. *Control of properties of a barium titanate thin film.* The effect of a planar electric field on the material constants of the piezoelectric equations is investigated for thin films of barium strontium titanate $x = 0.65$. The study was performed at different values of the misfit strain to the area of the paraelectric phase. It is shown that some constants reach to the extremes as the field changes. The most controlled films correspond to the misfit strains near to a phase boundary.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИРОДНЫХ СКЛОНОВЫХ ПОТОКОВ

Эглит М. Э.[1], Якубенко А. Е.[2], Дроздова Ю. А.[3]
[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
[2] *Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*
[3] *Российский госуниверситет нефти и газа им. И. М. Губкина, Москва*

Работа посвящена математическому моделированию потоков, возникающих на горных склонах и могущих представлять опасность для людей и различных объектов. Примерами таких потоков являются быстрые оползни, сели, лавины, лавовые потоки. Дается краткая характеристика использующихся до настоящего времени моделей, а также представлены новые, более сложные модели. В этих моделях учитываются нелинейные реологические свойства движущейся среды, захват и вовлечение в движение материала, лежащего на склоне, и турбулентный характер движения. Приведены результаты тестовых расчетов движения потоков по длинным однородным склонам, показывающие влияние реологических свойств, турбулентности и захвата массы на поведение потока.

1. Математические модели разного уровня сложности для склоновых потоков. Статья посвящена математическому и численному моделированию природных потоков, движущихся по склонам под действием силы тяжести, таких как снежные лавины, сели, быстрые оползни. Сведения об их динамических параметрах и границах распространения необходимы для обеспечения безопасности людей, строений, дорог, трубопроводов и линий электропередач в горах, для проектирования защитных сооружений. Математическое моделирование может быть одним из источников таких сведений. Широкое распространение и расширение возможностей компьютеров делает этот подход все более используемым в инженерной практике.

Предложенные и использующиеся до настоящего времени математические модели склоновых потоков в зависимости от степени сложности можно разделить на три типа. В простейших моделях весь поток рассматривается как материальная точка, движущаяся по склону под действием силы тяжести и сопротивления окружающей среды, которое обычно представляется суммой двух членов — кулоновского трения и сопротивления, пропорционального скорости или квадрату скорости. Несмотря на чрезмерно упрощенный подход, модель склонового потока как материальной точки после калибровки для данного региона и данного типа склонов позволяет оценить порядок величин скоростей потока и расстояния до места остановки (дальности выброса).

В более сложных моделях поток представляется как движение сплошной среды, но применяются уравнения, осредненные по глубине или по поперечному сечению потока, аналогично подходу, принятому в гидравлике. Для замыкания системы уравнений неразрывности и движения необходимы формулы для трения на нижней поверхности потока и для скорости вовлечения потоком подстилающего материала, которое обычно имеет место. Эти формулы постулируются по аналогии с формулами, установленными эмпирически для потоков различной физической природы [1], а входящие в них коэффициенты определяются подбором с помощью обратных расчетов потоков, для которых имеются измерения. Модели гидравлического типа позволяют вычислить толщину (глубину) потока, учесть боковое растекание, более детально рассчитать границы зон,подвергающихся действию потока. Эти модели нашли достаточно широкое распространение в настоящее время. Однако на практике во многих случаях они оказываются недостаточно подробными. Например, для расчета сил, действующих на объекты при ударе склонового потока, важно знать структуру потока в перпендикулярном к склону направлении, которая уравнениями, осредненными по глубине, не описывается.

Новые математические модели для склоновых потоков, находящиеся в настоящее время в стадии развития — это модели следующего уровня сложности. Они также основаны на уравнениях механики сплошных сред, но без использования осреднения по глубине. Модели такого уровня дают возможность вычислить величины скорости на разных расстояниях от дна, более точно рассчитать распределение ударного давления на стене, подвергшейся удару склонового потока, а также связать происходящий, как правило, захват и вовлечение потоком в движение лежащего на склоне материала с процессами, происходящими в придонной зоне потока.Одна из основных трудностей, возникающих при построении таких моделей, состоит в том, что теперь недостаточно задать трение только на дне, как это делается в моделях гидравлического типа, а необходимы соотношения между напряжениями и характеристиками деформирования во всех частицах потока — так называемые реологические соотношения движущегося материала. Реологические соотношения, разные для потоков разной физической природы, могут быть построены на основе измерений параметров потоков в экспериментальных лотках и на реальных склонах.

В представленных в этой работе моделях учитываются следующие три фактора: сложные нелинейные реологические свойства движущейся среды, захват и вовлечение в движение материала, лежащего на склоне, и возможный турбулентный характер движения. Для задания реологических свойств движущегося материала принимается так называемая модель Хершеля—Балкли, которая при различном выборе коэффициентов описывает линейно и нелинейно вязкие (степенные) жидкости, а также среды с пределом текучести, которые предлагались различными исследователями в качестве возможных реологических моделей для снежных лавин, селевых, лавовых, оползневых потоков. При моделировании захвата донного материала используется следующая гипотеза: захват происходит тогда, когда касательное напряжение на дне потока достигает значения предела прочности на сдвиг слоя, по которому движется поток [2]. Величина скорости вовлечения при этом определяется в результате расчета касательного напряжения на дне при решении задачи. Для описания турбулентных характеристик движения используется дифференциальная трехпараметрическая модель турбулентности, предложенная и примененная ранее в работах В. Г. Лущика, А. А. Павельева и А. Е. Якубенко [3] для расчета движения жидкостей вдоль проницаемых и непроницаемых стенок в присутствии градиента давления, массообмена и других процессов и обобщенная так, чтобы учесть нестационарность, наличие свободной поверхности, нενьютоновские свойства среды и захват донного материала.

2. Постановка задачи и система уравнений, описывающих движение склонового потока по длинному однородному склону. Рассмотрим однородный поток на бесконечно длинном однородном склоне с постоянным углом наклона θ . Движущаяся среда считается несжимаемой с плотностью ρ . Начало координат выбрано на свободной поверхности потока, ось x параллельна склону, ось z перпендикулярна склону и направлена вниз. Осредненные по Рейнольдсу продольная скорость и другие характеристики зависят только от z и времени t, глубина потока $h(t)$ подлежит определению, если поток захватывает донный материал. Уравнение Рейнольдса для рассматриваемого потока записывается в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = g\sin\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \quad 0 \leqslant z \leqslant h(t)\,. \tag{1}$$

Здесь T_{xz} — сдвиговое напряжение, сумма осредненного молекулярного напряжения $\langle\tau_{xz}\rangle$ и турбулентного напряжения ρT , $T = \langle -v'_x v'_z\rangle$. Штрихом отмечены пульсационные составляющие скорости, угловыми скобками — осреднение по Рейнольдсу. В дальнейшем в обозначении осредненных величин угловые скобки опускаются. На свободной поверхности $z = 0$ ставится условие $T_{xz} = 0$, а на дне $z = h(t)$ — условие $v_x = 0$ и, при наличии захвата подстилающего материала, дополнительное условие $T_{xz} = \tau_c$. Здесь τ_c — предел прочности на сдвиг донного материала. Это добавочное условие позволяет вычислить растущую со временем глубину потока. Уравнение (1) дополняется выражением для осредненного по Рейнольдсу молекулярного напряжения $\langle\tau_{xz}\rangle$ (осредненным реологическим соотношением), а также уравнениями для T и других турбулентных характеристик, входящих в формулировку модели турбулентности.

Реологические соотношения различны для потоков разной физической природы: сухих и мокрых снежных лавин, снежно-пылевых лавин, селей, оползней, потоков вулканической лавы, водных потоков и т. д. Простейшим является предположение, что поток можно описать как движение линейно-вязкой (ньютоновской) несжимаемой жидкости с большой величиной коэффициента вязкости. Однако измерения профилей скорости, в частности, в плотных снежных лавинах и в селевых потоках, представляющих собой потоки глинистой суспензии с большой концентрацией глины, показывают необходимость более сложных, нелинейных (неньютоновских) моделей. К тому же лавины и оползни могут останавливаться на наклонных склонах, что для ньютоновской жидкости невозможно. Одной из моделей, предложенных для описания потоков неньютоновских жидкостей, является модель Хершеля—Балкли, которая предполагается пригодной для описания многих потоков, как геофизических, так и потоков с взвешенными твердыми частицами, широко используемых в горнодобывающей и других отраслях промышленности. Ламинарные нестационарные склоновые потоки сред, подчиняющихся моделям Хершеля—Балкли, с учетом захвата склонового материала рассматривались в [5]; турбулентные в [4]. Согласно модели Хершеля—Балкли в простом сдвиговом потоке при ламинарном режиме выполнены следующие соотношения

$$\text{если } |\tau_{xz}| < \tau_0, \text{ то } \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0; \quad \text{если } |\tau_{xz}| < \tau_0, \text{ то } |\tau_{xz}| = \tau_0 + K\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^n.$$

Здесь τ_0 — предел текучести (среда не деформируется, пока касательное напряжение меньше $\tau_0 = 0$); K, n — постоянные. При $\tau_0 = 0, n = 1$ эти соотношения соответствуют линейно-вязкой (ньютоновской) жидкости. При $\tau_0 \neq 0, n = 1$ среда называется бингамовской жидкостью, при $\tau_0 = 0, n \neq 1$ — степенной.

Для расчета турбулентного напряжения и других характеристик турбулентности в этой работе используется обобщенная трехпараметрическая модель турбулентности, предложенная в работе [3]. Модель содержит дифференциальные уравнения для трех параметров: деленного на плотность турбулентного напряжения T, плотности турбулентной энергии E и параметра ω, связанного с масштабом турбулентности L формулой $\omega = E/L^2$. Для рассматриваемого здесь сдвигового потока уравнения для T, E, ω имеют следующий вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -(c\sqrt{E}L + c_1\nu)\frac{E}{L^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_E\frac{\partial E}{\partial z}\right) + T\frac{\partial v_x}{\partial z},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(c_5\sqrt{E}L + c_6\nu)\frac{T}{L^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_T\frac{\partial T}{\partial z}\right) + c_7E\frac{\partial v_x}{\partial z}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(2c\sqrt{E}L + 1.4c_1\nu f_\omega))\frac{\omega}{L^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_\omega\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) + (\frac{T}{E} + 2c_4\mathrm{sign}\frac{\partial v_x}{\partial z})\omega\frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Здесь $D_\phi = a_\phi\sqrt{E}L + \alpha_\phi\nu$, $(\phi = E, T, \omega)$, $f_\omega = 1 - \dfrac{1}{2c_1}\left(\dfrac{L}{E}\dfrac{\partial E}{\partial z}\right)^2$, ν — кинематический коэффициент молекулярной вязкости. Значения безразмерных коэффициентов следующие: $c = 0.3$, $c_1 = 5\pi/4$, $c_4 = 0.04$, $c_5 = 3c$, $c_6 = 9c$, $c_7 = 0.2$, $a_E = a_\omega = 0.06$, $a_T = a_E c_5/c$, $\alpha_E = \alpha_T = 1$, $\alpha_\omega = 1.4$.

Для численного нахождения решений системы уравнений (1, 2) была составлена программа и были проведены серии расчетов нестационарных турбулентных потоков линейно-вязких, степенных (с показателем $n = 2$) и бингамовских сред. Исследовались и сравнивались профили скорости, турбулентного напряжения и турбулентной энергии, их поведение со временем, а также величины скорости захвата донного материала.

Основные выводы, полученные при анализе результатов расчетов потоков на однородных склонах, следующие.

1. За счет захвата донного материала скорость и толщина потока увеличиваются.

2. При движении с захватом донного материала по длинному однородному склону, независимо от реологических свойств потока, скорость на поверхности потока, средняя по сечению скорость и глубина потока при больших временах растут со временем линейно.

3. Скорость захвата донного материала стремится со временем к константе, величина которой зависит лишь от угла склона и физических свойств материалов потока и склона, но не от текущего значения средней скорости или глубины.

4. При движении с захватом донного материала величины турбулентных напряжений и энергии почти всюду со временем уменьшаются; при этом величины их максимальных значений, которые имеют место вблизи дна, растут.

5. В потоках бингамовских и степенных жидкостей с $n > 1$, захватывающих материал дна, турбулентные характеристики могут иметь в поперечном сечении

не один, а два локальных максимума — один вблизи дна и второй в центральной части сечения потока.

6. Величина молекулярной вязкости влияет на распределение турбулентных характеристик по сечению потока.

7. Профили турбулентных характеристик в потоках с разными реологическими свойствами качественно различны.

8. В потоках бингамовской жидкости вблизи свободной поверхности, где касательные напряжения малы и среда движется как твердая корка, турбулентные напряжения и энергия, а также масштаб турбулентности малы не только вблизи твердого дна, но и вблизи свободной поверхности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-00361, 15-01-08023).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Eglit M. E., Demidov K. S.* Mathematical modeling of snow entrainment in avalanche motion // Cold Regions Science and Technology. 2005. V. 43 (1-2). P. 10–23.

[2] *Issler D., Pastor Perez M.* Interplay of entrainment and rheology in snow avalanches: a numerical study // Annals of Glaciology. 2011. V. 52(58). P. 143–147.

[3] *Лущик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е.* Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 3. С. 13–25.

[4] *Эглит М. Э., Якубенко А. Е.* Влияние захвата донного материала и неньютоновской реологии на динамику турбулентных склоновых потоков // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 3–15.

[5] *Eglit M. E., Yakubenko A. E.* Numerical modeling of slope flows entraining bottom material // Cold Regions Science and Technology. 2014. V. 108. P. 139–148.

Eglit M. E., Yakubenko A. E., Drozdova Ju. A. *Mathematical modelling of natural gravity mass flows*. Natural gravity mass flows such as snow avalanches, mud flows, torrents, debris flows are considered. Short description of currently used mathematical models of such flows is given. New models are described which take into account non-linear rheological properties of the moving media, entrainment of the bed material and turbulent nature of the flow. The results of numerical investigations of flows of Newtonian fluids, power-law fluids and Bingham fluids down long homogeneous slopes are presented.

УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

Эглит М. Э.[1], Якубенко Т. А.[2], Якубенко А. Е.[2]
[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
[2]*Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

Рассматриваются динамические процессы в микронеоднородных анизотропных упругих средах, в частности, композитах, а также в тонких пластинах и стержнях. Предполагается, что отношение ε масштаба неоднородности, толщины пластины и стержня к типичной длине волн мало. Эффективным подходом при изучении таких процессов является применение некоторого осреднения. В работе демонстрируются различные асимптотически эквивалентные осредненные уравнения высшего порядка для микронеоднородных сред, тонких пластин и стержней, выведенные с использованием метода двухмасштабных асимптотических разложений по ε, и приводятся результаты исследования их свойств.

1. Введение. Исследование процессов в микронеоднородных средах, например, в композитах, когда отношение ε масштаба неоднородности среды к глобальному масштабу процесса мало, проводится с помощью моделей, которые возникают в результате некоторого осреднения. Для сред периодической структуры одним из методов получения эффективных осредненных уравнений, не требующий каких-либо предварительных гипотез о возможных видах локального напряженно-деформированного состояния, является метод двухмасштабных асимптотических разложений по малому параметру ε, развитый в математической теории осреднения [1]. Этот алгоритм позволяет не только построить уравнения для средних по периоду величин, но и найти в некотором приближении локальные поля. После некоторых модификаций метод двухмасштабных асимптотических разложений может быть применен также для вывода осредненных уравнений пластин и стержней, если длины изучаемых волн много больше типичной толщины пластины или стержня.

Обычно осредненными уравнениями называют уравнения, получающиеся в нулевом приближении по ε. Для микронеоднородных линейно-упругих сред эти уравнения соответствуют упругим (в общем случае анизотропным) средам с некоторыми эффективными постоянными упругими модулями. Однако в микронеоднородных средах существуют эффекты, не описывающиеся обычными уравнениями теории упругости. Одним из таких эффектов является дисперсия волн в безграничной среде. Для описания дисперсии волн необходим учет членов более высокого порядка по ε; в этом случае уравнения содержат производные высшего порядка от перемещений по координатам и времени [1]. Другим эффектом, для описания которого требуются уравнения высокой точности по ε, является так называемый масштабный эффект: эффективные свойства среды зависят от размера неоднородностей, даже когда этот размер много меньше размера тела. Уравнения высокой точности по ε необходимы для описания процессов в узких зонах, например, структуры ударной волны. Уравнения с высшими производными от различных параметров среды по времени и координатам вводились феноменологически, в частности, в моделях сжимаемых жидкостей и в моделях моментной теории упругости. Метод двухмасштабных асимптотических разложений позволяет получить выражения для коэффициентов этих уравнений в явной форме, если микроструктура среды известна.

2. Метод вывода осредненных уравнений микронеоднородных упругих сред. Для описания процессов с типичной длиной волн l, много большей периода свойств среды d, так что $\varepsilon = \dfrac{d}{l} \ll 1$, вводятся медленные переменные $x_j = \bar{x}_j/l$ и быстрые переменные $y_j = \bar{x}_j/d$, $\overline{x}_j$ — размерные координаты. Вектор перемещения $\mathbf{u}$ считается функцией быстрых и медленных переменных, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x_j, y_j, \varepsilon)$, и представляется в виде асимптотического ряда по степеням ε. Доказывается [1], что ряд имеет вид

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m N^q_{l_1 l_2 l_3}(y_j) \frac{\partial^m \mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}}, \tag{1}$$

где $m = q + l_1 + l_2 + l_3$, $N^q_{l_1 l_2 l_3}$ — периодические функции быстрых переменных,определяющиеся через структуру среды, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ не зависит от быстрых переменных и при надлежащем выборе $N^q_{l_1 l_2 l_3}$ представляет собой перемещение, осредненное по ячейке периодичности. Подстановка ряда (1) в исходное уравнение дает

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m-2} H^q_{l_1 l_2 l_3}(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial^m \mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}} \sim 0\,, \tag{2}$$

где $H^q_{l_1 l_2 l_3}$ выражаются через $N^q_{l_1 l_2 l_3}$ и их первые и вторые производные по y_j. Можно найти $N^q_{l_1 l_2 l_3}$ так, чтобы в выражении (2) коэффициенты при отрицательных степенях ε обратились в нуль, а при неотрицательных были бы равны некоторым константам:

$$H^q_{l_1 l_2 l_3}(y_1, y_2, y_3) = h^q_{l_1 l_2 l_3} = \mathrm{const} = \left\langle H^q_{l_1 l_2 l_3} \right\rangle \text{ при } m \geqslant 2\,. \tag{3}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается среднее по ячейке. Дополнительно можно потребовать, чтобы $\left\langle N^q_{l_1 l_2 l_3} \right\rangle = 0$. Тогда $\mathbf{v} \sim \langle \mathbf{u} \rangle$. Осредненное уравнение бесконечного порядка точности по ε имеет вид

$$\sum_{m \geqslant 2} \varepsilon^{m-2} h^q_{l_1 l_2 l_3} \frac{\partial^m \mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}} \sim 0\,, \quad m = q + l_1 + l_2 + l_3\,. \tag{4}$$

Здесь $h^q_{l_1 l_2 l_3}$ — матрицы эффективных упругих коэффициентов, они вычисляются после того, как найдены $N^q_{l_1 l_2 l_3}$, по формулам $h^q_{l_1 l_2 l_3} = \left\langle H^q_{l_1 l_2 l_3} \right\rangle$. Для нахождения $N^q_{l_1 l_2 l_3}$ с помощью уравнений (3) надо решать статические задачи теории упругости на ячейке периодичности с некоторыми специальными массовыми силами и граничными условиями. При сложной структуре ячейки они решаются только численно. Существенно, что эти задачи не зависят от глобальных начальных и граничных условий. Для данной структуры они должны быть решены один раз, после чего вычисляются коэффициенты осредненных уравнений и дальше можно решать конкретные задачи о поведении среды в тех или иных условиях.

3. Примеры результатов исследования осредненных уравнений высшего порядка. Доказываются следующие свойства осредненных уравнений для произвольных упругих периодических сред [2].

1. Осредненные уравнения не содержат нечетных производных по времени.

2. Матрицы коэффициентов при четных производных по координатам симметричны, при нечетных — антисимметричны $(h^q_{l_1 l_2 l_3})^T = (-1)^{l_1+l_2+l_3} h^q_{l_1 l_2 l_3}$.

3. Можно получить различные асимтотически эквивалентные формы уравнений высшего порядка с теми же свойствами симметрии коэффициентов, используя операторы дифференцирования по времени и координатам и уравнения низшего приближения. В частности, можно исключить производные по времени порядка выше второго. При этом можно либо оставить смешанные производные по t, x_i, либо получить уравнения, не содержащие смешанных производных по t, x_i.

Для описания ряда эффектов, в частности, дисперсии волн, достаточно дополнительно к членам нулевого порядка по ε учесть в уравнениях (4) члены порядка ε и ε^2, содержащие производные третьего и четвертого порядка от перемещений. Коэффициенты при этих производных в зависимости от изучаемых процессов и локальных свойств среды могут быть либо вычислены и исследованы аналитически, либо получены с применением численных методов. Например, для плоских волн в анизотропных стратифицированных средах и пластинах [3], в которых плотность и упругие модули — периодические функции быстрой координаты y_1, а волны распространяются в произвольном относительно слоев направлении x, уравнение точности $O(\varepsilon^4)$, выведенное непосредственным применением метода двухмасштабных асимптотических разложений, имеет вид $(v = v_x(t, x))$

$$\langle\rho\rangle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\Big(h^2_1 \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} + h^0_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\Big) + \varepsilon^2\Big(h^4_0 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + h^2_2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + h^0_4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\Big).$$

Одна из асимптотически эквивалентных форм этого уравнения такова

$$\langle\rho\rangle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon H_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \varepsilon^2 H_4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}.$$

Матрицы H_i зависят от свойств среды и направления распространения волн. Доказаны следующие свойства матриц H_i:

1) $H_2 \geqslant 0$;

2) H_2 и H_4 — симметричны, H_3 — антисиметрична;

3) $H_3 = 0$, если плотность и упругие модули — четные функции y_1. Последнее верно, например, для двуслойной среды с произвольной анизотропией, а также для пластины из трех анизотропных слоев, симметричной относительно срединной плоскости.

4) $H_3 \neq 0$, если условие четности не выполнено, например, для двуслойной пластины.

Матрицы H_3 и H_4 определяют вид зависимости скорости волн от их частоты. Аналитически и численно получены следующие результаты. В слоистой среде с произвольной анизотропией слоев скорости всех волн, распространяющихся ортогонально слоям, убывают с возрастанием частоты (отрицательная дисперсия). Для волн, распространяющихся параллельно слоям, по крайней мере одна обнаруживает отрицательную дисперсию. Для волн в пластинах по крайней мере одна обнаруживает положительную дисперсию.

Приведем еще примеры уравнений высшего порядка для круглых однородных изотропных стержней и результатов исследования их свойств. В этом случае задачи на ячейке для определения функций $N^q_{l_1 l_2 l_3}$ решаются в явном виде, и можно получить выражения для эффективных упругих модулей любого порядка в виде формул [4]. Если их относить к величине модуля сдвига μ, то они будут выражаться только через коэффициент Пуассона ν. Уравнения точности $O(\varepsilon^n)$, полученные методом двухмасштабных асимптотических разложений, содержат производные перемещений по t, x до n-го порядка включительно. Однако с помощью низших приближений можно получить уравнения той же точности в других формах, в том числе с меньшим порядком входящих производных. Например, для свободных продольных колебаний стержня возможны следующие асимптотически эквивалентные безразмерные формы уравнений точности $O(\varepsilon^6)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = h^0_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 h^0_4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \varepsilon^4 h^0_6 \frac{\partial^6 v}{\partial x^6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = h^0_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 h^0_4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \varepsilon^2 h^2_2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = h^0_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 h^2_2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + \varepsilon^4 h^2_4 \frac{\partial^6 v}{\partial t^2 \partial x^4}.$$

Здесь

$$h^0_2 = 2(1+\nu), \quad h^2_2 = \frac{\nu^2}{2}, \quad h^2_4 = -\frac{\nu^2(12\,\nu^4 + 4\,\nu^3 - 20\,\nu^2 - 4\,\nu + 7)}{48(1-\nu^2)}.$$

Исследование показывает, что первые две формы уравнений не удовлетворяют условию корректности задачи Коши. Для третьей формы задача Коши корректна.

В качестве еще одного примера приведем осредненное уравнение точности $O(\varepsilon^8)$ для свободных поперечных колебаний круглого изотропного стержня. Уравнение, полученное непосредственно методом двухмасштабных асимптотических разложений, содержит производные до восьмого порядка включительно. Это уравнение можно преобразовать к следующему уравнению той же точности $O(\varepsilon^8)$,которое по форме аналогично уравнению Тимошенко [5]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varepsilon^2 (Q^4_0 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + Q^2_2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + Q^0_4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}). \tag{5}$$

Здесь

$$Q^0_4 = -\frac{\nu+1}{2},\ Q^2_2 = \frac{4\,\nu^2 + 15\,\nu + 10}{12(\nu+1)},\ Q^4_0 = \frac{96\nu^4 - 4\nu^3 - 419\nu^2 - 494\nu - 167}{576(\nu+1)^3}. \tag{6}$$

Уравнение Тимошенко [5], записанное в тех же безразмерных переменных, отличается от уравнения (5) только значениями коэффициентов при производных:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varepsilon^2 (T_0^4 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + T_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + T_4^0 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}), \qquad \text{где} \\ &T_4^0 = Q_4^0, \quad T_2^2 = \frac{1}{4K_2} + \frac{\nu + 1}{2K_3}, \quad T_0^4 = -\frac{1}{4K_1}, \end{aligned} \tag{7}$$

причем $K_1 = K_2 = K_3 = K$. В противоположность уравнению (5) точности $O(\varepsilon^8)$, уравнение (7) имеет точность $O(\varepsilon^4)$. Однако можно подобрать K_1 и $K_2 = K_3$ так, что $R_2^2 = \max\limits_{0 \leqslant \nu \leqslant 1/2} |T_2^2/Q_2^2 - 1|$ и $R_0^4 = \max\limits_{0 \leqslant \nu \leqslant 1/2} |T_0^4/Q_0^4 - 1|$ будут малы. А именно, при $K_1 = 0.90459121$ и $K_2 = K_3 = 0.936486487$ получим $R_2^2 \approx 0.038961039$, $R_0^4 \approx 0.046778875$. Таким образом, за счет выбора K_1, K_2, K_3 можно существенно повысить точность уравнения Тимошенко.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-00361, 15-01-08023).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

[2] *Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.* Вариационные свойства осредненных уравнений периодических сред // Труды МИАН СССР, 1990. Т. 192. С. 5–19.

[3] *Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.* Исследование эффективных уравнений с дисперсией, описывающих распространение волн в стратифицированных средах и тонких пластинах // Доклады РАН. 2002. Т. 383. № 6. С. 742–746.

[4] *Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.* Об уравнениях высокого порядка точности, описывающих колебания тонких стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. Вып. 3. С. 457–472.

[5] *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.

Eglit M. E., Yakubenko T. A., Yakubenko A. E. *Equations of higher order for dynamic processes in microinhomogeneous elastic media.* Dynamic processes in periodic inhomogeneous anisotropic elastic media as well as in thin plates and rods are considered. The ratio ε of the medium inhomogeneity scale or the thickness of plates and rods to the typical wave length is supposed to be small.The mathematical homogenization method based on two-scale asymptotic expansions on ε is used to derive the averaged effective equations. The averaged equations in zeroth approximaton on ε cannot describe many effects taking place in microinhomogeneous media, e.g., dispersion of waves in elastic composites. In this paper various asymptotically equivalent forms of the higher order averaged effective equations are derived and investigated.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СОТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА

Юров В. О.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В настоящем исследовании на основе метода пристрелки разработан способ исследования дисперсионных свойств неоднородных по толщине пьезоэлектрических волноводов с затуханием. Для учета затухания в соответствии с концепцией комплексных модулей упругие характеристики и пьезомодули заменены комплексными функциями частоты. Аналитически изучены некоторые закономерности строения дисперсионных соотношений при комплексном и вещественном волновом числе. Построены асимптотические формулы, описывающие структуру дисперсионного множества при малых значениях спектральных параметров. С помощью метода Галеркина построена простая прикладная теория, которая позволяет анализировать дисперсионные ветви в низкочастотном диапазоне.

В настоящее время широко применяются изделия из пьезокерамических композитных материалов, состоящих из пьезокерамической основы и полимерного наполнителя. Отличительными свойствами таких композитных материалов являются значительное затухание, низкая теплопроводность и высокие коэффициенты электромеханической связи. Для моделирования распространения волн и затухания в протяженных структурах в настоящей работе использована концепция комплексных модулей [1] базирующаяся на обобщении модели стандартного вязкоупругого тела [2]. В рамках такого подхода исследованы волны в неоднородном пьезоэлектрическом волноводе при наличии затухания, обусловленном комплексной структурой физических характеристик.

Среди работ, выполненных в последние годы по исследованию структуры волновых процессов для вязкоупругих волноводов, отметим [3], где осуществлен анализ на основе явного вида дисперсионного соотношения для полосы [4, 5], где вязкоупругость моделируется с помощью операторов Ю. Н. Работнова [6].

Особенности строения дисперсионного множества в случае неоднородного волновода изучены в гораздо меньшей степени и опираются как на теорию спектральных пучков, так и на численные и асимптотические методы [7, 8].

Постановка задачи

Рассмотрим волны в неоднородном по толщине бесконечном пьезоэлектрическом слое толщины h, где $x_3/h = x \in [0,1]$. Предположим, что $u_1\left(x_1,x_3\right)$, $u_3\left(x_1,x_3\right)$, $u_2 \equiv 0$, $\varphi = \varphi\left(x_1,x_3\right)$, $E_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $i = 1,3$ Будем считать, что границы слоя свободны от нагрузок, электродированы и закорочены.

Решение задачи разыскивается в виде бегущей волны, что означает изменение всех функций по закону $f = f_0 e^{i(kx_1-\omega t)}$.

Осуществим обезразмеривание задачи: $\kappa^2 = \rho\omega^2 h^2/\mu_0$, $\gamma = kh$, $u_1 = -ihX_1$, $u_3 = hX_2$, $\sigma_{13} = -i\mu_0 X_3$, $\sigma_{33} = \mu_0 X_4$, $C_{ij} = \mu_0 c_{ij}$, $e_{ij} = e_0\tilde{e}_{ij}$, $\varphi = \varphi_0 X_5$, $Э_{ii} = Э_0 э_{ii}$, $D_3 = D_0 X_6$.

Здесь использованы обозначения: φ — электрический потенциал, D_i — компоненты вектора электрической индукции, E_i — компоненты вектора напряженности электрического поля, C_{ij} — модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле, e_{ij} — пьезоэлектрические постоянные, $Э_{ii}$ — диэлектрические проницаемости при постоянных деформациях.

При этом размерные множители для определенности выбраны следующим образом: $\varphi_0 e_0 = h\mu_0$, $e_0 = D_0 = 1$ Кл/м^2, $\mu_0 = 10^{10}$ Н/м^2, $Э_0 = 10^{-10}$ Ф/м.

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X},\ \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)^T \tag{1}$$

$$X_3\,(0) = X_3\,(1) = X_4\,(0) = X_4\,(1) = X_5\,(0) = X_5\,(1) = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \gamma \mathbf{A}_1 + \gamma^2 \mathbf{A}_2 \tag{3}$$

Получим матричное дифференциальное уравнение (1) первого порядка с граничными условиями (2), переменной $x \in [0,1]$ и зависящее от безразмерных спектральных параметров: κ, γ.

В случае отсутствия затухания матрица (3) порождает квадратичный пучок от спектральных параметров κ, γ и имеет следующие ненулевые безразмерные компоненты:

$\mathbf{A}_0:$ $a_{13}^0 = \frac{1}{c_{44}}$, $a_{24}^0 = \frac{M_{33}}{e_{33}^2 + Э_{33}c_{33}}$, $a_{26}^0 = \frac{e_{33}}{e_{33}^2 + Э_{33}c_{33}}$, $a_{54}^0 = a_{26}^0$, $a_{56}^0 = -\frac{c_{33}}{e_{33}^2 + Э_{33}c_{33}}$

$\mathbf{A}_{01}:$ $a_{31}^{01} = 1$, $a_{42}^{01} = 1$

$\mathbf{A}_1:$ $a_{12}^1 = 1$, $a_{15}^1 = \frac{e_{15}}{c_{44}}$, $a_{21}^1 = -\frac{Э_{33}c_{13} + e_{33}e_{31}}{e_{33}^2 + Э_{33}c_{33}}$, $a_{34}^1 = -a_{21}^1$, $a_{36}^1 = \frac{e_{33}c_{13} - e_{31}c_{33}}{e_{33}^2 + Э_{33}c_{33}}$,
$a_{43}^1 = -1$, $a_{51}^1 = -a_{36,}^1$ $a_{63}^1 = -a_{15}^1$

$\mathbf{A}_2:$ $a_{31}^2 = c_{11} - \frac{Э_{33}c_{13}^2 + 2c_{13}e_{33}e_{31} - c_{33}e_{31}^2}{e_{33}^2 + Э_{33}c_{33}}$, $a_{65}^2 = -\left(э_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{44}}\right)$

Для учета затухания принимается концепция комплексных модулей [1]. Будем заменять $c_{kj}\,(x) \to c_{kj}\,(x)\,G\,(\kappa)$, $e_{kj}\,(x) \to e_{kj}\,(x)\,G\,(\kappa)$, $э_{kk}\,(x) \to э_{kk}\,(x)\,G\,(\kappa)$, где $G\,(\kappa) = \frac{1 - in\kappa M}{1 - in\kappa}$.

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет вид $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0\,(\kappa) - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \gamma \mathbf{A}_1\,(\kappa) + \gamma^2 \mathbf{A}_2\,(\kappa)$ и характеризует спектральный пучок матриц: по γ — квадратичный, по κ — дробно-рациональный.

Изучим типичную функцию затухания $G\,(\kappa) = \frac{1 - in\kappa M}{1 - in\kappa} = \mathrm{Re}G\,(\kappa) + i\mathrm{Im}G\,(\kappa)$, которая будет отражать зависимость от частоты упругих и пьезоэлектрических характеристик, причем

$$\mathrm{Re}G\,(\kappa) = \left(1 + n^2\kappa^2 M\right) / \left(1 + n^2\kappa^2\right), \quad \mathrm{Im}G\,(\kappa) = (n\kappa - n\kappa M) / \left(1 + n^2\kappa^2\right)$$

и имеет ряд следующих свойств: $\lim\limits_{\kappa \to 0} \mathrm{Im}G\,(\kappa) = 0$, $\lim\limits_{\kappa \to \infty} \mathrm{Im}G\,(\kappa) = 0$, $\lim\limits_{\kappa \to 0} \mathrm{Re}G\,(\kappa) = 1$, $\lim\limits_{\kappa \to \infty} \mathrm{Re}G\,(\kappa) = M$.

Поставим задачу исследования соотношений между γ и κ, при которых сформулированная краевая задача (1)–(2) имеет нетривиальное решение. Эти соотношения формируют дисперсионное множество задачи. В случае отсутствия затухания структура этого множества достаточно подробно изучена и похожа на структуру в упругом случае [7].

Численный анализ дисперсионного множества.

Для численного отыскания дисперсионного множества при любом (даже кусочно-разрывном) виде неоднородности представлен способ исследования краевой задачи (1)–(2). Он заключается в разделении вещественной и мнимой части в системе уравнений, после чего система удвоенной размерности решается методом пристрелки путем сведения решения задачи к решению набора задач Коши. Известно, что система имеет нетривиальные решения при однородных граничных условиях в случае, когда определитель пристрелочной системы обращается в нуль, а нули определителя, определяющие точки дисперсионного множества, найдены с использованием метода продолжения по параметру.

Будем считать, что свойства пьезослоя моделируются следующим образом $c_{ij}\,(x,\kappa) = c_{ij}\,f\,(x)\,G\,(\kappa)$, $e_{ij}\,(x,\kappa) = e_{ij}\,f\,(x)\,G\,(\kappa)$, $э_{ij}\,(x,\kappa) = э_{ij}\,f\,(x)\,G\,(\kappa)$, где $f\,(x) = 3\,(1+x^2)\,/4$, $n = 0.01$, $M = 1.5$.

Заметим, что затухание отсутствует, когда $n = 0$ или $M = 1$.

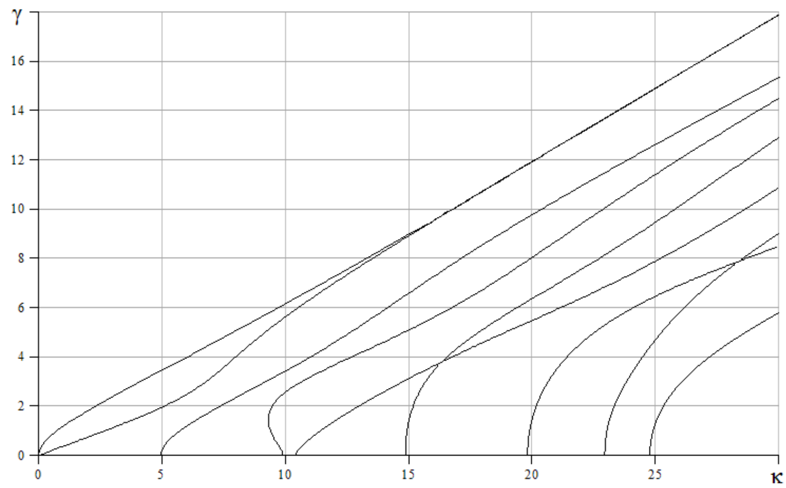


Рисунок 1 – *Общий вид дисперсионного множества задачи без затухания*

Расчет проведен для $c_{11} = 11.22$, $c_{13} = 6.22$, $c_{33} = 10.6$, $c_{44} = 2.49$, $e_{31} = -3.4$, $e_{33} = 15.1$, $e_{31} = 9.45$, $э_{11} = 72.57$, $э_{33} = 82.74$ безразмерные параметры материала ЦТС-19.

Длинноволновая асимптотика.

Простейшее исследование задачи о колебаниях пьезослоя показало, что существует 2 моды, выходящие из нуля дисперсионной плоскости (пространства, в случае комплексного γ), продольная и изгибная. Будем разыскивать $\gamma\,(\kappa)$ в виде: $\gamma = d_1\kappa + d_2\kappa^2 + ...$

Выполним разложение задачи (1)–(2) по степеням κ, для этого разложим функции и переменные коэффициенты системы по параметру κ следующим образом $X = X_0 + X_1\kappa + X_2\kappa^2 + ...$, $A\,(\kappa) = \mathbf{A}_0 + A_1\kappa + \mathbf{A}_2\kappa^2 + ...(a_{ij}^k\,(\kappa) = a_{ij0} + a_{ij1}\kappa + a_{ij2}\kappa^2 + ...)$.

Задача при κ в нулевой степени имеет 2 нетривиальных решения: $X_0 = (1,0,0,0,0,0)^T$ и $X_0 = (0,1,0,0,0,0)^T$ порождающие симметричную и антисимметричную моды колебаний соответственно. Выбрав первое решение, решим задачу при κ, при удовлетворении граничных условий в задачах при κ^2 и κ^3 получим соответственно d_1 и d_2. Для сокращения записи далее введём оператор интегрирования по отрезку: $T\left(h\left(x\right)\right)=\int_0^1 h\left(x\right)dx$ и константу $l=T\left(a_{510}\left(x\right)\right)\left(T\left(a_{560}\left(x\right)\right)\right)^{-1}$.

$$d_1=\left(T\left(a_{310}\left(x\right)\right)-lT\left(a_{360}\left(x\right)\right)\right)^{-2}$$

$$d_2=id_1\left(T\left(Im\left(a_{311}\left(x\right)\right)\right)-lT\left(Im\left(a_{361}\left(x\right)\right)\right)+\left(lT\left(Im\left(a_{561}\left(x\right)\right)\right)-T\left(Im\left(a_{511}\left(x\right)\right)\right)\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(T\left(a_{360}\left(x\right)\right)T^{-1}\left(a_{560}\left(x\right)\right)\right)/\left(2T\left(a_{510}\left(x\right)\right)T\left(a_{360}\left(x\right)\right)T^{-1}\left(a_{560}\left(x\right)\right)-2T\left(a_{310}\left(x\right)\right)\right)$$

Построим график вещественной и мнимой части выражения $\kappa\left(d_1+d_2\kappa\right)$ и численно расчитанную дисперсионную кривую продольных колебаний.

Результирующие кривые имеют разницу не более 1% в области $\kappa\leqslant 1$. Можно сделать вывод, что полученное асимптотическое решение с высокой точностью

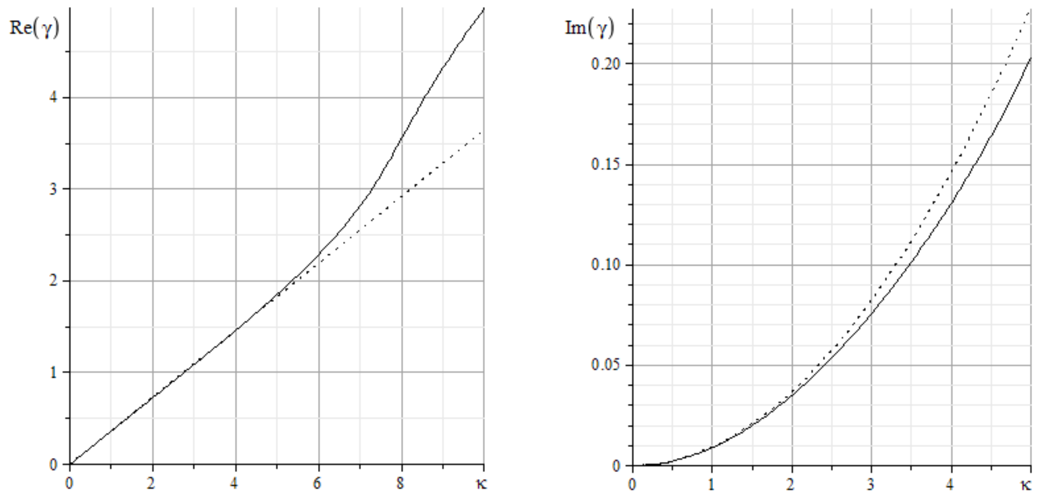


Рисунок 2 – *Вещественная и мнимая части 1 ветви дисперсионного множества (асимптотики — точками, численное решение — сплошная линия)*

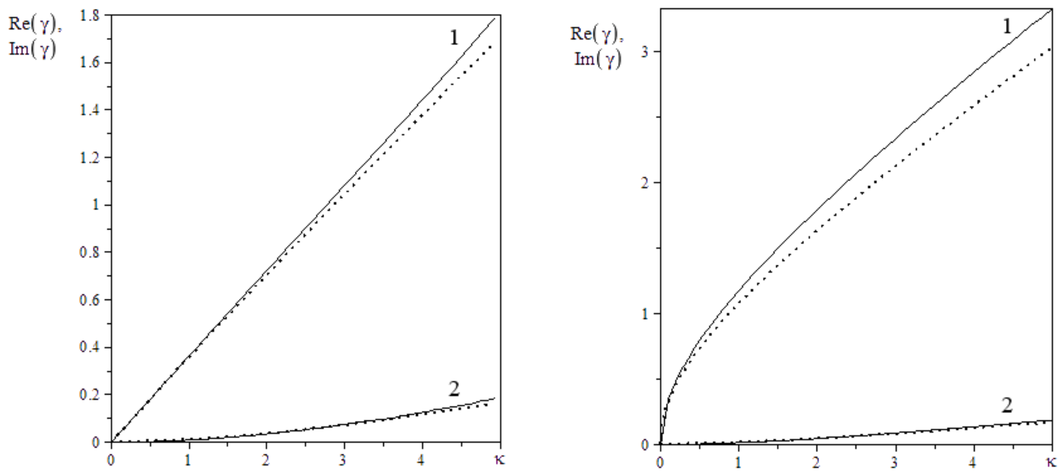


Рисунок 3 – *Первые 2 кривые дисперсионного множества (метод Галеркина — точки, метод пристрелки — сплошная линия, 1 — вещественная часть, 2 — мнимая)* описывает вещественную часть в области $\kappa \leqslant 5$. Расчеты выполнены для неоднородных характеристик и при наличии затухания.

Метод Галеркина.

Для получения прикладной теории, позволяющей дать приближенные оценки дисперсионного множества алгебраическими кривыми, использован метод Галеркина.

Для реализации этого подхода выбраны следующие наборы координатных функций, удовлетворяющие граничным условиям (2):

1: $X_1 = c_1\,(x - 1/2)$, $X_2 = c_2$, $X_3 = c_3 x\,(x-1)$, $X_4 = c_4 x\,(x - 1/2)\,(x-1)$, $X_5 = c_5 x\,(x-1)$, $X_6 = c_6$.

2: $X_1 = c_1$, $X_2 = c_2\,(x - 1/2)$, $X_3 = c_3 x\,(x-1)$, $X_4 = c_4 x\,(x-1)$, $X_5 = c_5 x\,(x-1)$, $X_6 = c_6$.

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что метод Галеркина позволяет с достаточной степенью точности строить первые 2 кривые.

Автор выражает благодарность А. О. Ватульяну за внимание к работе.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ (код проекта 16-01-00354).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Кристенсен Р. М.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.

[2] *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 418 с.

[3] *Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В.* Исследование гармонических волн в наследственно-упругом слое // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. №3. С. 321–328.

[4] *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.

[5] *Червинко О. П., Сенченков И. К.* Гармонические волны в слое и бесконечном цилиндре // Прикладная механика. 1986. Т. 22. №12. С. 31–37.

[6] *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

[7] *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

[8] *Ватульян А. О., Моргунова А. В.* Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами // Акуст. журн. 2015. №3. С. 295–301.

Yurov O. V. *Dispersion relations for piezoelectric inhomogeneous waveguide*. The dispersion relations for piezoelectric inhomogeneous waveguide in the presence of damping are investigated. To account damping, the concept of complex modules is used. A short wave asymptotic analysis of the dispersion relation is applied. A simple applied theory is built with the help of Galerkin method.