

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Российский национальный комитет по теоретической  
и прикладной механике

Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Южный федеральный университет

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ  
XIX МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 года

Ростов-на-Дону  
2018

УДК [531/534+539.3/.5](063)  
ББК 22.25я43  
С568

*XIX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.)  
поддержана Российским фондом фундаментальных исследований,  
грант № 18-01-20091 Г*

**Ответственные редакторы:**

Ватульян А. О., Наседкин А. В., Дударев В. В.

С568 Современные проблемы механики сплошной среды : тезисы докладов XIX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.) / отв. ред. О. А. Ватульян и др.; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону, 2018 – 144 с.

Сборник содержит тезисы докладов XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.).

В сборнике представлены результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, по устойчивости движений вязкой жидкости, аэрогидродинамике, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности в механике контактных взаимодействий и теории оболочек, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и при их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

Публикуется в авторской редакции.

УДК [531/534+539.3/.5](063)  
ББК 22.25я43

© Южный федеральный университет, 2018  
© Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 2018

## Мультистабильность стационарных движений в анизотропной задаче конвекции Дарси для прямоугольника

**Абделхафиз М. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону  
Сухагский университет, Египет*

На основе модели Дарси анализируется конвекция в пористом прямоугольнике с учетом анизотропии тепловых характеристик и проницаемости. Рассматривается плоская задача о подогреве прямоугольного контейнера  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ , на границе которого заданы условия непротекания и линейный по высоте профиль температуры  $T_*(y) = T_2 - y(T_2 - T_1)/b$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — температуры на верхней ( $y = b$ ) и нижней ( $y = 0$ ) границах соответственно, сила тяжести действует в направлении, обратном координате  $y$ . Аналогично (Абделхафиз М.А., Цибулин В.Г., Изв. РАН, МЖГ, 2017) вводится возмущение температурного поля  $T(x, y, t) = T_*(y) + \theta(x, y, t)$  и делается переход к безразмерным величинам. Для функции тока  $\psi$  и отклонения температуры  $\theta$  относительно линейного профиля получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= L_M \psi + \lambda \partial_x \theta = f_1 \\ \partial_t \theta &= L_D \theta - \partial_x \psi - J(\psi, \theta) = f_2, \quad J = \partial_x \theta \partial_y \psi - \partial_y \theta \partial_x \psi \\ L_M &= \partial_y (\mu_{11} \partial_y - \mu_{12} \partial_x) + \partial_x (-\mu_{21} \partial_y + \mu_{22} \partial_x) \\ L_D &= \partial_x (d_{11} \partial_x + d_{12} \partial_y) + \partial_y (d_{21} \partial_x + d_{22} \partial_y) \end{aligned}$$

Здесь  $x, y$  — декартовы координаты,  $\mu_{ij}$  — компоненты тензора безразмерных коэффициентов обратной проницаемости,  $d_{ij}$  — компоненты тензора безразмерных коэффициентов теплопроводности,  $\lambda$  — фильтрационное число Рэлея. Уравнения дополняются начальным условием для температуры  $\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y)$  и нулевыми краевыми условиями.

Установлены соотношения между параметрами, при которых задача относится к классу косимметричных систем

$$\mu_{11} d_{12} = -\mu_{12} d_{22}, \quad \mu_{11} d_{21} = -\mu_{21} d_{22}, \quad \mu_{11} d_{11} = \mu_{22} d_{22}$$

и выведены явные формулы для критических чисел потери устойчивости механического равновесия

$$\lambda_{kj} = 4\pi^2 \mu_{22} \left( \frac{d_{11}}{a^2} k^2 + \frac{d_{22}}{b^2} j^2 \right), \quad k, j = 1, 2, \dots$$

С применением конечно-разностного метода, сохраняющего косимметрию задачи, рассчитаны семейства стационарных конвективных режимов. В вычислительном эксперименте продемонстрировано разрушение семейств при нарушении условий косимметрии, приводящее к появлению конечного числа стационарных режимов.

## Численный анализ динамической потери устойчивости предварительно напряженных композитных цилиндрических оболочек

**Абросимов Н. А., Елесин А. В., Новосельцева Н. А.**

*НИИ механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

Эффективное использование возможностей композитных материалов в различных областях современной техники требует проведения исследования динамического деформирования и потери устойчивости элементов конструкций из композитных материалов при совместных квазистатических и динамических воздействиях. В докладе представлена методика численного исследования нелинейного динамического деформирования и потери устойчивости цилиндрических оболочек из композитных материалов при совместном действии осевых квазистатических и внешних динамических нагрузок. Кинематическая модель деформирования композитного материала основана на прикладной геометрически нелинейной теории оболочек, геометрические зависимости базируются на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости. Физические соотношения композитного слоя формулируются на основе обобщенного закона Гука для ортотропного материала с учетом гипотез прикладной теории оболочек. Энергетически согласованная система уравнений движения прикладной теории оболочек выводится из условия стационарности функционала полной энергии оболочки. Критическая нагрузка потери устойчивости определяется по характерному излому на кривой зависимости максимального прогиба от амплитуды воздействия. Численный метод решения сформулированной задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме. Квазистатический режим нагрузки моделируется заданием осевого сжатия (растяжения) в виде линейно растущей функции с выходом на стационарное значение в течение трех периодов колебаний композитной цилиндрической оболочки по низшей форме. Для обоснования достоверности и точности предлагаемой методики проведено сопоставление численных расчетов с экспериментальными данными по динамической устойчивости изотропных цилиндрических оболочек, предварительно нагруженных внутренним давлением и последующим импульсом внешнего давления с различными скоростями. Полученные результаты свидетельствуют о хорошем соответствии результатов расчетов экспериментальным данным. Проведено численное исследование влияния предварительного осевого квазистатического нагружения на динамическую потерю устойчивости композитной цилиндрической оболочки при последующем нагружении импульсом внешнего давления. Анализ результатов показал, что предварительное осевое сжатие (растяжение) оказывает существенное влияние как на величину критической нагрузки потери устойчивости оболочки при внешнем давлении, так и на характерные формы волнообразования цилиндрических оболочек.

Работа выполнена при финансировании грантами РФФИ (№ 16-08-01124, № 18-08-01234) и гранта РНФ (№16-19-10237) – разработка методики расчета композитных цилиндрических оболочек при комбинированных нагрузках.

## Плоская задача о контакте двух упругих тел с функционально-градиентными покрытиями

**Айзикович С. М., Волков С. С., Васильев А. С.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается плоская контактная задача линейной теории упругости о взаимодействии двух массивных выпуклых упругих тел с покрытиями. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона в обоих покрытиях изменяются с глубиной по произвольным независимым друг от друга непрерывно дифференцируемым или кусочно-постоянным законам. С использованием техники интегральных преобразований Фурье задача сведена к решению интегрального уравнения относительно неизвестной функции, характеризующей распределение нормальных контактных напряжений на поверхности покрытия. Трансформанта ядра интегрального уравнения представляет собой линейную комбинацию двух трансформант ядер интегральных уравнений, соответствующих внедрению недеформируемого штампа в первое и второе тело, соответственно. Для произвольного изменения упругих модулей в покрытии значения трансформанты ядра могут быть получены лишь численно из решения некоторых задач Коши. Для решения интегрального уравнения используется двусторонний асимптотический метод. Для этой цели трансформанта ядра интегрального уравнения аппроксимируется произведением дробно-квадратичных функций. Такой подход позволил построить приближенное решение контактной задачи в аналитическом виде, асимптотически точном для больших и малых значений характерного геометрического параметра задачи. Погрешность решения для произвольного значения геометрического параметра является величиной того же порядка малости, что и погрешность аппроксимации трансформанты ядра. Проведены численные расчеты основных характеристик контактного взаимодействия для широкого диапазона значений параметров задачи (относительные толщины покрытий, относительные величины упругих модулей покрытий, характер изменения модулей упругости по глубине). Для всех рассмотренных примеров удалось построить аппроксимации трансформант ядер с погрешностью, не превышающей 0,5%, что свидетельствует о высокой точности полученных результатов. Произведено сравнение полученных результатов с классическими результатами для контакта двух однородных упругих тел без покрытий. Особое внимание уделено асимптотическому анализу распределения контактных напряжений в окрестности края области контакта. Показано, что поведение контактных напряжений в окрестности края области контакта, для тонких и толстых покрытий, определяется отношением эффективных упругих модулей, соответствующих поверхности покрытия и подложке.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16-07- 00958-а, 18-07-01177-а) и стипендии Президента Российской Федерации СП-3615.2018.1.

## Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений и трещин

**Акопян В. Н., Агаян К. Л.**

*Институт механики НАН Республики Армения, Ереван*

Рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости, изготовленной путем поочередного соединения полос равных толщин из двух разнородных материалов. Предполагается, что полосы, изготовленные из первого материала, на срединных линиях по системе  $L_1$ , состоящей из конечного числа непересекающихся интервалов, расслаблены трещинами, а полосы, изготовленные из второго материала, на срединных линиях по системе  $L_2$ , также содержащей конечное число непересекающихся интервалов, усилены упругими тонкими включениями толщины  $h_*$  и приведёнными модулями деформаций  $E_7^*$ . При этом считается, что плоскость деформируется под воздействием одинаковых распределённых нагрузок, приложенных к берегам трещин, сосредоточенных нагрузок, приложенных к включениям, и равномерно распределённых растягивающих нагрузок, приложенных к полосам на бесконечности.

Решение задачи построено при помощи бигармонической функции напряжений (функция Эри). Сначала вводятся в рассмотрение неизвестные функции касательных контактных напряжений, действующих на длинные стороны включений и функции раскрытия берегов трещин. Затем решается вспомогательная граничная задача и определяются неизвестные коэффициенты, входящие в представление бигармонических функций через трансформанты Фурье введенных функций. Далее, удовлетворив условиям на трещинах и контактными условиям, приходим к определяющей системе интегральных и интегро-дифференциальных уравнений относительно касательных контактных напряжений и функции раскрытия берегов трещин. Решение определяющей системы уравнений в общем случае строится методом механических квадратур. В частном случае, когда кусочно-однородная равномерно слоистая плоскость усилена только внутренними параллельными бесконечными включениями и деформируется под воздействием сосредоточенных нагрузок, приложенных к включениям в точках и на бесконечности, а также равномерно распределённых растягивающих нагрузок, приложенных к полосам на бесконечности, получено замкнутое решение задачи в квадратурах.

Проведен численный анализ и изучены закономерности изменения касательных контактных напряжений, раскрытия трещин и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

Показано, что в зависимости от соотношения нагрузок и упругих характеристик разнородных полос и включений, касательные контактные напряжения могут стать знакопеременными.

Показано также, что в случае, когда одна из разнородных полос усилена бесконечным включением, как и в случае однородной плоскости, касательные контактные напряжения не зависят от нагрузок, приложенных к кусочно-однородной плоскости и включениям на бесконечности.

## Численное и экспериментальное исследование неосесимметричного выпучивания упругопластических цилиндрических оболочек с наполнителем при кручении

**Баженов В. Г., Казаков Д. А., Кибец А. И., Нагорных Е. В.**

*НИИ механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

В работе сформулирована динамическая постановка задачи и методика численного решения нелинейных задач упругопластического выпучивания оболочек вращения по осесимметричной и неосесимметричной формам, основанная на гипотезах Тимошенко для непологих оболочек с учетом геометрических нелинейностей. Деформирование оболочки с жестким или деформируемым наполнителем реализуется в текущей лагранжевой формулировке. Уравнение движения следует из баланса виртуальных мощностей работ. Физические соотношения описываются теорией пластического течения с комбинированным кинематическим и изотропным упрочнением. Контактное взаимодействие оболочки вращения и наполнителя реализуется исходя из условий непроникания по нормали к контактной поверхности, смещения с учетом трения в касательной плоскости и равенства сил действия и противодействия. Критическая нагрузка определяется с применением метода продолжения по параметру, в качестве которого принимается время. В квазистатических задачах скорость нагружения принимается такой, чтобы роль сил инерции была пренебрежимо мала. Численное решение определяющей системы уравнений осуществляется по явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» с привлечением моментной схемы МКЭ. Дискретизация расчетной области основана на восьмиузловых изопарметрических конечных элементах с полилинейными функциями формы. Программная реализация методики выполнена в вычислительном комплексе «Динамика-3».

Разработанная методика и программные средств апробированы на задачах о потере устойчивости пустотелых и заполненных цилиндрических оболочек ( $L = 92$  мм,  $R = 14.75$  мм,  $h = 1.5$  мм) из стали 35ХГСА при кручении. Заполнитель – стальной цилиндр. Натурные квазистатические испытания образцов проведены на универсальной испытательной машине Zwick Z100. В эксперименте и расчете при кручении пустотелой цилиндрической оболочки наблюдается неосесимметричная потеря устойчивости по второй форме в окружном направлении, т. е. в зоне потери устойчивости поперечное сечение оболочки приобретает форму эллипса. Наличие жесткого наполнителя предотвращает перемещение материала вовнутрь оболочки, что приводит к формированию выпучины, расположенной локально по винтовой линии, наклоненной под углом около  $45^0$  к меридиану. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными по интегральным характеристикам (зависимость крутящего момента от угла закручивания) и остаточным формам пустотелых и заполненных образцов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18–08–000814).

## Исследование закономерностей процесса растяжения стержней и оболочек с учетом влияния краевых эффектов

**Баженов В. Г., Осетров С. Л., Осетров Д. Л.**

*НИИ механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

Самым распространенным способом изучения свойств упругопластических материалов являются эксперименты на растяжение цилиндрических стержней и оболочек. Предположение о равномерном удлинении по всей рабочей части образца приводит к большим ошибкам в расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) из-за значительной неоднородности изменения поперечного сечения. При растяжении образцов участки вблизи краев растягиваются в меньшей степени, чем участки, расположенные в середине. Здесь имеет место нелинейный краевой эффект изменения толщины рабочей части образца. Наибольшее влияние краевых эффектов проявляется при деформировании образцов в режиме сверхпластичности. Из анализа литературы можно сделать вывод, что процесс образования и развития краевых эффектов, оценка их влияния на потерю устойчивости пластического деформирования и локализацию деформаций мало изучены и публикации по данной теме практически отсутствуют. Для проведения исследований при больших деформациях целесообразно использовать разработанный авторами экспериментально-расчетный метод, позволяющий в полной мере учесть неоднородность НДС при больших деформациях.

В работе проведены численные исследования процессов растяжения упругопластических цилиндрических стержней и оболочек. Определены основные закономерности образования и распространения краевых эффектов, степень их влияния на процесс деформирования и образование шейки. Результаты проведенных исследований показывают, что краевые эффекты в сплошных стержнях проявляются в меньшей степени, чем в оболочках. При увеличении толщин оболочек их роль снижается. Распространения краевых эффектов существенно зависят от истинной диаграммы деформирования материала. Сделан вывод, что место и момент потери устойчивости пластического деформирования однозначно определяются достижением максимальной интенсивностью деформаций в объеме образца критического значения, определенного по критерию Консидера. Как известно, развитие краевого эффекта приводит к увеличению скорости роста интенсивности деформаций в зоне равномерного НДС. Поэтому в оболочках шейка возникает при меньших удлинениях, чем в сплошных стержнях. К аналогичным результатам приводит уменьшение толщины оболочки, и длины рабочей части образцов. Отклонения по удлинениям в момент образования шейки для разных образцов могут достигать 10%–20%. На основе проведенных исследований определен параметр, который является параметром подобия процессов неравномерного деформирования упругопластических цилиндрических стержней и оболочек при растяжении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15–19–10039).



## О критических температурах и скоростях продольного движения термоупругого полотна и области стабильности

**Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Макеев Е. В., Сеницын А. В.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Данное исследование посвящено анализу устойчивости слоистого термоупругого полотна, движущегося между двумя роликовыми опорами. Представлена модель для движущегося слоистого полотна (непрерывной слоистой панели, составленной из изотропных материалов), в рамках которой рассмотрение ограничивается одним пролетом. Учитываются различные механические и температурные воздействия, а также характеристические свойства движущейся среды. Учитываемые в процессе поступательного движения поперечные колебания предполагаются малыми. Полотно шарнирно оперто на валках  $x = \pm l$  и свободно на боковых границах. Свободные поперечные колебания однородного полотна, движущегося продольно с постоянной скоростью  $V_0$ , нагретого до некоторой температуры и подверженного осевому натяжению  $T$ , описываются следующим уравнением для поперечных перемещений  $w$  с соответствующими шарнирному опиранию краевыми условиями

$$m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \left( T - \frac{EH}{1-\nu} \varepsilon_\theta \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4},$$

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0, \quad (w)_{x=l} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=l} = 0,$$

где  $H$ ,  $m$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $D$  - толщина полотна, масса на единицу площади, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и изгибная жесткость ( $D = EH^3/12(1-\nu^2)$ ), соответственно, а деформации  $\varepsilon_\theta$  определяются как

$$\varepsilon_\theta = \alpha_\theta \theta, \quad \theta = \theta_a - \theta_0.$$

Здесь  $\alpha_\theta$  - коэффициент линейного расширения,  $\theta_a$  - действительная температура полотна,  $\theta_0$  - температура, при которой деформации равны нулю. Рассматриваемая часть слоистого полотна принимается эффективно изотропной и однородной и занимает прямоугольную область в плане ( $0 < x < l$ ,  $-H/2 < z < H/2$ ). Полотно симметрично относительно срединной поверхности составлено из термоупругих слоев, характеризуемых некоторыми важными параметрами (масса на единицу площади, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и расстояния от срединной поверхности). Выведены выражения для эффективных модулей системы. Исследуется потеря устойчивости тонкостенных термоупругих пластинчатых систем в статической форме (дивергенция) и определяется область стабильности в пространстве основных рассматриваемых параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-19-01247).

## Бифуркация вращения жидкости вблизи свободной границы с учетом эффекта Марангони

**Батищев В. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Изучается проблема возникновения вращения неоднородной жидкости в термогравитационном пограничном слое вблизи свободной поверхности в результате локального охлаждения этой границы с учетом термокапиллярного эффекта Марангони. Результаты исследований могут объяснить одну из причин возникновения торнадо (смерчей) в атмосфере. Отметим, что исследования термокапиллярных эффектов активно проводились во второй половине прошлого века в связи с экспериментами в космосе. Однако, термогравитационные пограничные слои вблизи границ раздела почти не исследовались. Эффект Марангони создает касательные напряжения на свободной границе, тогда как в термогравитационном пограничном слое эти напряжения отсутствуют. В докладе приводится анализ результатов численных расчетов стационарного осесимметричного термогравитационного течения неоднородной жидкости в горизонтальном слое конечной толщины. Течение жидкости вызвано неравномерным охлаждением (нагревом) свободной границы. Учитывается термокапиллярный эффект Марангони. Поля скоростей, давления и температуры рассчитываются на основе уравнений движения жидкости в приближении Обербека-Буссинеска. Диффузионные коэффициенты вязкости и теплопроводности считаются малыми, что приводит к формированию термогравитационного пограничного слоя вблизи свободной поверхности. Применяется метод пограничного слоя для определения главных членов асимптотических разложений. В случае квадратичной зависимости поля температур от радиальной координаты возникает нелинейная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих несколько параметров. При численном решении краевых задач использовался метод пристрелки с использованием расщепления переменных. Показано, что при локальном охлаждении свободной границы возникает вращение жидкости в тонком пограничном слое вблизи свободной границы в результате бифуркации незакрученных режимов. В случае локального нагрева границы вращательный эффект отсутствует. При анализе численных результатов выделяются два типа решений - основные и вторичные. К основным режимам относятся незакрученные течения жидкости. Вторичные режимы описывают течения жидкости с вращением и возникают при бифуркации основных режимов. Отметим, что вращение появляется только в тонком пограничном слое вблизи свободной границы и при наличии набегающего потока жидкости. Вне пограничного слоя вращение отсутствует. Построена асимптотика вращательных режимов вблизи точки бифуркации путем введения двух малых параметров. При установлении связи между этими параметрами показано, что в результате бифуркации возникают два симметричных вторичных режима при сверхкритических значениях параметров.

## Измерение внутриглазного давления. Модель тонометра Шиотца

**Бауэр С. М., Венатовская Л. А.**

*Санкт-Петербургский государственный университет*

Уровень внутриглазного давления (ВГД) является важным показателем при диагностике и лечении ряда глазных болезней, а развитие и совершенствование методик определения ВГД до сих пор остается актуальной задачей. В настоящее время существует много различных устройств для измерения ВГД, при которых давление оценивается по деформации глазного яблока в результате механического воздействия на роговицу. Практически всегда оценки ВГД, полученные тонометрами, предполагают, что роговица имеет средние стандартные радиус кривизны и толщину. Однако современное оборудование показывает, что геометрические параметров глаз могут значительно меняться, особенно после операций по коррекции зрения. Известно также, что упругие характеристики разных глаз могут различаться многократно и могут изменяться с возрастом, заболеванием. Поэтому вопросам тонометрии и созданию моделей, позволяющих оценить влияние различных параметров глаза на показатели ВГД, уделяется большое внимание. В данной работе представлена конечно-элементная модель, описывающая изменение напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при нагружении тонометром импрессионного типа – тонометром Шиотца. Исследуется зависимость показателей внутриглазного давления от толщины центральной части роговицы (ЦТР). Рассматривается осесимметричная деформация составной оболочки, в которой роговица и склера представляются сопряженными сферическими сегментами с разными радиусами и разными упругими свойствами. Предполагается, что составная оболочка заполнена несжимаемой жидкостью под давлением. Решается задача о напряженно-деформированном состоянии составной трансверсально-изотропной оболочки под действием двух грузов с вогнутым основанием и внутреннего давления. Устройство и стандартная методика интерпретации данных, получаемых тонометром Шиотца, подробно описаны в работе Г.А. Любимова, И.Н.Моисеевой, А.А. Штейна, Изв. РАН, Механика жидкости и газа, 2014: «Роговица нагружается стопой весом 11 г с радиусом кривизны 15 мм, т.е. приблизительно вдвое больше, чем у нормальной роговицы человека. В центральной части стопы имеется отверстие, в которое свободно опускается грузик в виде тонкого стержня (плунжера). Диаметр стержня 3 мм, его вдавливающаяся в роговицу поверхность так же, как и стопа, вогнута и имеет тот же радиус кривизны. Вес стержня варьируется. Стандартный вес 5,5 (наиболее употребителен); 7,5; 10; 15 г. . . ». Измерение ВГД тонометром Шиотца моделируется контактной задачей в программном пакете ANSYS. В силу симметрии выполняется двумерное моделирование (2D) с использованием в качестве конечного элемента PLANE182. При моделировании используются контактные элементы «поверхность-поверхность» для создания двух жестко-податливых контактов между поверхностями тонометра (стопы и плунжера) с роговицей. Расчеты проводились для сферических слоев, материал которых близок к трансверсально-изотропному. Модули упругости в радиальном направлении оболочки полагались в 20 раз меньше, чем в тангенциальном.

## О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин и пологих сферических оболочек

**Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.**

*Санкт-Петербургский государственный университет*

В работе обсуждается существование несимметричных решений у нагруженных нормальным давлением неоднородных круглых пластин и пологих сферических оболочек. Подобная пластина (или оболочка) может быть простейшей моделью решетчатой пластины (РП) диска зрительного нерва человека. Одним из возможных объяснений появления отеков и складок по краю РП при резком увеличении внутриглазного давления может быть переход пластины в неосимметричное состояние. Предпосылки для такого перехода создают сжимающие напряжения, появляющиеся в окрестности края пластины или пологой оболочки, при больших прогибах.

Впервые решение, соответствующее несимметричным формам равновесия круглой пластины, было получено Пановым Д. Ю. и Феодосьевым В. И. в 1948 году при исследовании больших прогибов пластины. Строгое доказательство существования несимметричного решения для круглой пластины было проведено Морозовым Н. Ф. (1961), позже была доказана единственность такого решения (Piechocki, 1969). Численно значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной, были получены Cheo L. S. и Reiss E. L. для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения.

В данной работе рассматриваются аналогичные задачи о потере устойчивости круглой пластины и пологой сферической оболочки, при этом полагается, что модуль упругости пластины (сферической оболочки) изменяется при движении от центра пластины к краю. Решение для системы уравнений, описывающих деформации круглой неоднородной пластины, представлялось в виде  $w(r, \theta) = w_s(r) + w_m(r) \cos(m\theta)$ ,  $F(r, \theta) = F_s(r) + F_m(r) \cos(m\theta)$ , где функции  $w_s, F_s$  описывают докритическое симметричное решение, а функции  $w_{ms}(r, \theta) = w_m(r) \cos(m\theta)$ ,  $F_{ms}(r, \theta) = F_m(r) \cos(m\theta)$  — закритическое состояние пластины ( $m$  — число волн в окружном направлении после потери устойчивости). После разделения переменных исходная нелинейная система уравнений распадается на две: нелинейную, для определения симметричного решения  $w_s(r), F_s(r)$ , и линейную систему уравнений относительно  $w_m(r), F_m(r)$ , так как функции  $w_{ms}, F_{ms}$  полагаются малыми. Для каждого числа волн в окружном направлении  $m$  определялись такие значения нагрузки  $p_m$ , при которых существуют отличные от нуля функции  $w_m(r), F_m(r)$ . Критической нагрузке соответствует  $p_{cr} = \min_m p_m$ .

Показано, что при некоторых законах неоднородности потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходила при более низкой нагрузке (до 7 раз) и с образованием большего числа волн в окружном направлении, чем для однородной пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00832, с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Обсерватория экологической безопасности».

## Биомеханические исследования состояния структур опорно-двигательного аппарата при динамических нагрузках

**Бегун П. И.<sup>1,2</sup>, Бондаренко Д. И.<sup>2</sup>, Кондратенко И. В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)*

Разработка алгоритма и биомеханические исследования состояния структур опорно-двигательного аппарата при динамических нагрузках в норме и после реконструкции.

Алгоритм исследований построен на основе компьютерного метода, представляющего симбиоз биомеханического компьютерного моделирования и анализа биологических структур по данным клинических исследований. Построены модели для биомеханических исследований шейного отдела позвоночника (ШОП) и стопы с лодыжкой пациентов в норме и после установки различных имплантов при динамических внешних воздействиях. Введены следующие допущения: 1. Материал позвонков, костей ступни и связок сплошной, изотропный и упругий; 2. В структурах отсутствуют начальные напряжения; 3. Динамические нагрузки приложены: 1) в ШОП по нормали к боковым массам изаднему бугорку первого шейного позвонка, 2) в ступне к большеберцовой кости; 4. Нижняя часть седьмого шейного позвонка в ШОП и задняя часть пяточной кости и первые фаланги четырех пальцев ступни жестко закреплены. При использовании КТ и МРТ ШОП и ступни и комплекса инженерных компьютерных программ Mimics, SolidWorks, проведены биомеханические исследования структур исследуемых биологических объектов как в норме и патологии, так и при коррекции. Построены параметрические компьютерные модели объектов пациентов: 1. Проведено программное 3D-моделирование по срезам КТ или МРТ в специализированной программе MIMICS; 3. Экспортированы поверхности объектов в формате .stl и выбрано оптимальное числа итераций сглаживания при максимальном количестве полигонов; 4. Оболочечные объекты импортированы в программу SolidWorks 2018, где созданы твердотельной модели; 6. Созданы модели связок, межпозвонковых дисков и костей ступни в SolidWorks 2018; 7. Созданы геометрические модели имплантов; 8. Произведены сборки всех элементов, входящих в модели.

Проведен сравнительный анализ напряжений, перемещений и деформаций: 1) в ШОП в норме и после установки титанового контейнера Mesh ; 2) в стопе с лодыжкой в норме, при переломе и с имплантом для фиксации отломков лодыжки. Вычисления проведены методом конечных элементов (КЭ). Расчёты напряжений и перемещений в стопе и лодыжке проведены при задании 41902 тетраэдральных КЭ. Компьютерные модели шейного отдела позвоночника в норме и с установленным титановым контейнером Mesh разбиты на 163731 КЭ. Наибольшим перемещениям в реконструированном ШОП - 0.9 мм - подвержена зона дугоотросчатых суставов второго позвонка, расположенных выше установленной системы фиксации. Они не превышают допустимые значения перемещений – 3 мм, до которых система фиксации считается стабильной.

## Движение жесткого выпуклого штампа по гетерогенной полуплоскости

**Беляк О. А., Суворова Т. В.**

*Ростовский государственный университет путей сообщения*

В настоящей работе исследуется напряженно-деформированное состояние вязкоупругого гетерогенного полупространства с микроструктурой при движении по его свободной границе параболического жесткого штампа. Штамп движется с невысокой постоянной скоростью в условиях отсутствия поворота под действием касательных и нормальных усилий, которые приложены к штампу так, чтобы обеспечить равномерное движение, то есть штамп находится в состоянии предельного равновесия и имеет место полный контакт с поверхностью гетерогенного полупространства. Вид внешней силы позволяет рассматривать задачу в двумерной постановке. Контактные нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона-Амонтона. Для описания внутренней микроструктуры полуплоскости, состоящей из упругого скелета и наполнителя, обладающего свойствами вязкоупругого тела и вязкой аморфной жидкости использованы, как определяющие, уравнения гетерогенной двухфазной среды Био-Френкеля.

$$\begin{aligned}
 A \nabla \cdot \nabla u + 2N \nabla \nabla \cdot u + Q \nabla \nabla \cdot v &= \rho_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
 Q \nabla \nabla \cdot u + R \nabla \nabla \cdot v &= \rho_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
 \sigma_{ij}^s &= A e \delta_{ij} + 2N e_{ij} + Q \varepsilon \delta_{ij} \sigma^f = Q e + R e, \quad i, j = 1, 2,
 \end{aligned}$$

где  $u, v$ - вектора перемещений твердой и жидкой фазы соответственно,  $A, N, Q, R$ - механические характеристики двухфазной среды  $\sigma_{ij}^s$ - тензор напряжений действующий на вязкоупругий скелет,  $\sigma^f$ -давление, действующее на жидкость в порах. После применения интегрального преобразования Фурье краевая задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Ядро интегрального уравнения зависит от механических характеристик вязкоупругой матрицы и наполнителя. Изучены свойства ядра полученного интегрального уравнения, построен итерационный процесс для приближенного решения такого интегрального уравнения. Проведен численный эксперимент по расчету напряжений в зоне контакта, в зависимости от скорости движения штампа, от пористости и содержания разных фаз в гетерогенной среде.

## Влияние параметров неоднородности покрытия на трансформацию поверхностного волнового поля в пьезоэлектрических структурах

**Белянкова Т. И.<sup>1,2</sup>, Ворович Е. И.<sup>3</sup>, Тукодова О. М.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

<sup>3</sup>*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

В работе представлена модель пьезоэлектрической структуры с неоднородным пьезоэлектрическим покрытием. Покрытие с жестким или податливым относительно подложки интерфейсным включением моделируется функционально-градиентным слоем с кусочно-непрерывным изменением свойств. Предполагается, что в качестве опорного материала структуры используется пьезоэлектрик гексагональной сингонии класса  $6mm$ , векторы поляризации покрытия и подложки либо совпадают, либо противоположны по направлению. В рамках модели рассмотрена задача о распространении сдвиговых горизонтально поляризованных поверхностных волн, инициированных удаленным источником. Операционными методами решение задачи строится в пространстве образов Фурье на основе подхода, сочетающего аналитические методы построения решения для однородных и численные методы восстановления решения для неоднородных составляющих структуры. При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений II порядка с переменными коэффициентами для неоднородных составляющих сведена к системе начально-краевых задач Коши с матрицей, элементы которой не содержат производных от функций, описывающих свойства материала среды. Для решения начально-краевой задачи использована модификация метода Рунге-Кутты. Используемая в работе модель позволяет учитывать различную интенсивность и характер изменения упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических свойств материала, сочетать участки как с однородным, так и с неоднородным монотонным или немонотонным изменением свойств.

В рамках задач с электрически открытыми либо закрытыми условиями на свободной поверхности пьезоэлектрической структуры с неоднородным покрытием изучена трансформация поверхностного волнового поля в зависимости от плотности и жесткости внутреннего интерфейсного включения. Установлены закономерности распространения поверхностных акустических волн и особенности частотного поведения эффективного коэффициента электромеханической связи в зависимости от характера неоднородности покрытия при различном соотношении скоростей объемных сдвиговых волн включения и подложки. Показано, что за счет специально подобранного изменения плотности внутреннего слоя можно получить структуру, по поверхности которой распространяются волны Лява или высокоскоростная волна Гуляева-Блюшштейна, либо структуру, в которой в определенном частотном диапазоне поверхностные волны отсутствуют. Результаты, полученные в рамках использования функционально-градиентного слоя с кусочно-непрерывным изменением свойств с большой точностью (до  $10^{-10}$ ) совпали с результатами, полученными аналитическим методом с использованием трехслойной модели среды.

Пространственная контактная задача о сжатии  
трансверсально-изотропного упругого тела конечных размеров  
гладкими выпуклыми жесткими штампами

**Бобылев А. А.**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Рассматривается пространственная контактная задача о сжатии трансверсально-изотропного упругого тела конечных размеров гладкими выпуклыми жесткими штампами. Сжимаемое тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда, две грани которого параллельны плоскости изотропии. Сжатие тела производится вдоль оси, перпендикулярной этой плоскости. На площадках возможного контакта тела со штампами (гранях параллелепипеда, параллельных плоскости изотропии) задаются условия идеального одностороннего контакта: непроникания, неотрицательности нормальных напряжений, отсутствия нормальных напряжений в точках отсутствия контакта, отсутствия касательных напряжений. Фактические площадки контакта заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи. Остальные грани упругого тела свободны от внешних нагрузок. Объёмные силы отсутствуют.

Одним из наиболее эффективных подходов к решению пространственных контактных задач с заранее неизвестными площадками фактического контакта для тел конечных размеров является применение вариационного метода. В настоящей работе для рассматриваемой задачи получены вариационные формулировки в перемещениях в виде вариационного неравенства и эквивалентной ему задачи минимизации функционала потенциальной энергии на множестве кинематически допустимых перемещений. Для дискретизации задачи использован метод конечных элементов. Применялись тетраэдральные и гексаэдральные конечные элементы с первого порядка. В результате дискретизации получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств, для решения которой предложен вариант метода сопряженных градиентов, учитывающий специфику ограничений задачи.

Разработанный вычислительный алгоритм реализован в виде отдельного модуля пакета прикладных программ для решения контактных задач. Проведено численное исследование напряженно-деформированного состояния сжимаемого трансверсально-изотропного упругого тела. Методом вычислительного эксперимента определены оптимальные параметры конечно-элементной сетки. Отмечено образование ядер уплотнения под площадками контакта со штампами, а также зон растягивающих напряжений вблизи контуров площадок контакта и между ядрами уплотнения. Исследовано влияние пяти независимых параметров тензора упругой податливости, соотношения геометрических размеров упругого тела, радиусов кривизны жестких штампов, глубины их внедрения на характерные параметры напряженно-деформированного состояния сжимаемого упругого тела. В частности, на величины максимальных сжимающих, касательных и растягивающих напряжений, положение точек, в которых они достигаются, а также на размеры площадок фактического контакта и размеры ядер уплотнения.



## Идентификация механических характеристик неоднородного электроупругого цилиндра

**Богачев И. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В современных сложных технических устройствах активно применяются неоднородные пьезоэлектрические преобразователи, что требует активного развития моделей неоднородных электроупругих тел, механические и электрические свойства которых непрерывно изменяются относительно координат. Такие материалы называют функционально-градиентными пьезоматериалами (ФГП). Ввиду того, что современные технологии позволяют создавать материалы со значительным спектром изменения свойств, ввиду чего обратные задачи определения характеристик получаемых материалов и их верификация на предмет соответствия расчетным являются весьма актуальными. Гипотезы однородности, а также применяемые при моделировании композитов теории смесей в случае ФГП являются неприменимыми и требуется создание новых моделей, учитывающих существенную неоднородность исследуемых материалов, а также разработка эффективных методик определения их параметров.

В данной работе рассмотрена обратная задача идентификации свойств неоднородного электроупругого цилиндра, поляризованного по толщине. Рассматривался режим установившихся колебаний. В качестве дополнительной информации использовался акустический отклик, а именно значения функции смещения в некоторой точке внешней поверхности цилиндра в заданном частотном диапазоне. В качестве допущения считалось, что модули упругости для неполяризованной керамики являются известными и требуется определить законы изменения пьезоэлектрических характеристик как функции радиальной координаты. На практике изменение этих характеристик чаще всего является монотонным и наибольший интерес представляет задача определения уровня поляризации и характера ее монотонности (возрастание, убывание). Для решения обратной задачи представлен специальный подход - метод алгебраизации, при котором искомые функции представлялись в виде разложений по некоторым системам линейно независимых функций. После подстановки разложений в исходные уравнения колебаний обратная задача сводилась к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов разложения функции смещения и последующем решении системы нелинейных уравнений относительно коэффициентов разложения функций пьезоэлектрических характеристик. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению функций различного характера, демонстрирующих эффективность предложенного подхода.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00354 А) и Минобрнауки РФ (проект № 9.4726.2017/8.9).

## Об определении характеристик неоднородного покрытия цилиндрического волновода

Богачев И. В.<sup>1</sup>, Явруян О. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, Владикавказ*

Покрытия изделий и конструкций различного функционального назначения в промышленности, машиностроении, транспортных и космических системах играют существенную роль в повышении износостойкости и работоспособности конструкций, работающих в сложных условиях динамического нагружения. Практический потенциал поверхностных слоев охватывает широкий круг важных инженерно-практических задач, таких как защитная функция объекта от внешнего воздействия – температурных или коррозионных негативных воздействий; ускорение или замедление физических, химических или механических процессов; улучшение акустического фона (в случае рассеивателей с покрытиями). При этом возникает важный класс обратных задач, связанный с определением механических параметров такого рода покрытий.

Один из способов моделирования слоя-покрытия — описание его в виде функционально-градиентного материала (ФГМ) со значительно отличающимися значениями соответствующих механических характеристик на границе с основным телом. Это происходит, например, при технологическом процессе спекания подложки и покрытия. В этом случае можно лишь примерно (в процентном соотношении) указать толщину слоя покрытия ввиду того, что возникает промежуточный слой между основным материалом и покрытием; механические свойства этого слоя неизвестны.

В работе в качестве примера рассмотрена задача об идентификации неоднородных свойств изотропного покрытия упругого цилиндрического волновода. Покрытие считалось неоднородным по толщине, при этом его характеристики могут значительно отличаться от характеристик материала основного волновода, считающихся в данных экспериментах известными. Обратная задача заключалась в восстановлении трех функций – коэффициентов Ляме и плотности. Рассмотрены два режима воздействия на объект, которые возбуждают нормальные и крутильные колебания. В качестве дополнительной информации в обратной задаче использовались данные акустического зондирования внешней поверхности цилиндра. С использованием интегрального преобразования Фурье задача сведена к одномерным краевым задачам относительно осредненных характеристик смещения. На основе метода линеаризации для решения обратных задач построены два итерационных процесса, на каждом шаге которых решаются соответствующие краевые задачи с помощью метода пристрелки и системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно поправок к восстанавливаемым функциям с помощью регуляризационных методик. В результате удается определить все три функции, характеризующие свойства неоднородного изотропного покрытия. Проведен большой набор вычислительных экспериментов, показавшими достаточно высокую точность.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФ (код проекта 18-11-00069).

## Исследование прочности композитов армированных углеродным волокном при наличии межфазного слоя

**Бодягина К. С., Павлов С. П., Бекренев Н. В.**

*Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина*

В данном исследовании предполагается, что композиты состоят из повторяющихся микроструктур, известных как периодические представительные ячейки. Для установления связи между свойствами композиционного материала с микроструктурой и его макроскопическими характеристиками (эффективными упругими свойствами) применяется метод асимптотической гомогенизации. Для сложных микроструктур аналитическое определение напряжений и деформаций чрезвычайно трудно, поэтому часто гомогенизация проводится на основе численных методов, таких как метод конечных элементов.

На границе раздела матрицы и включения композитного материала образуется межфазный слой в виде дополнительной фазы. Эта фаза отличается по своим свойствам от фазы матрицы и фазы включения. Прочностные характеристики композитов во многом определяются структурой и свойствами межфазного слоя. Для традиционного композита, где радиус волокон/частиц находится в диапазоне нескольких микрометров или больше, влияние межфазного слоя на жесткость композитного материала может быть незначительным и он может быть смоделирован как двухфазная система материалов. Однако, если наполнителем являются нано размерные волокна/частицы или углеродные нано трубки, то его влияние на эффективные свойства композита может быть существенным. Например, для отношения толщины межфазного слоя к радиусу включения равному 0,8, межфазная объемная доля превышает 200% от объемной доли включения, так, что упругие свойства межфазного слоя доминируют над свойствами включения. Таким образом, в целом термомеханические свойства композита будут зависеть от отношения толщины межфазного слоя к размеру включения. Кроме того, параметры самого межфазного слоя, как правило, являются неоднородными по толщине и он может не полностью прилегать к волокну/частице, то есть образует пустоты. Обычно оценки эффективных упругих характеристик композита не учитывают возможного наличия межфазного слоя. Однако периодические поля напряжений и деформаций, а, следовательно, и прочность зависят от микроструктуры композиционного материала.

В данной работе исследовано влияние свойств межфазного слоя, а также формы включений на эффективные характеристики композита как для монолитного межфазного слоя, так и для межфазного слоя с нарушением контакта матрицы и включения. Это исследование позволило предложить технологию структурирования межфазного слоя за счет модифицирования путем электрофизических воздействий, например в СВЧ электромагнитном поле, что значительно проще реализовать, поскольку процесс является легко управляемым за счет регулирования технологических режимов без вмешательства в синтез материала.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ № 17-03-00720.

## Дифракция ультразвуковых волн на скоплении препятствий в двумерной упругой среде с учетом их всевозможных отражений и трансформаций

**Боев Н. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Исследована задача прохождения ультразвуковых волн через скопления препятствий (в том числе и периодической структуры), находящихся в бесконечной двумерной упругой среде. Препятствия в скоплениях могут быть двух типов: абсолютно твердые и полостные.

В скопление препятствий вводится импульс с тональным заполнением несколькими периодами плоской высокочастотной, монохроматической продольной или поперечной упругой волны, а в некоторой области упругой среды принимается прошедшая волна с любыми возможными отражениями (продольной волны в продольную, поперечной волны в поперечную) и трансформациями (продольной волны в поперечную, поперечной волны в продольную).

Высокочастотный режим колебаний позволяет строить решение задачи на основе геометрической теории дифракции и проблема сводится к исследованию задачи коротковолновой дифракции упругих волн в локальной постановке. Строятся траектории лучей распространения упругих волн с учетом их отражений и трансформаций в точках зеркального отражения на граничных контурах препятствий. Траектории лучей представляют собой плоские ломаные линии. При прохождении каждого луча из источника волны через скопление препятствий образуется конечное число лучей с различными типами отражений и трансформаций упругих волн. В область приема могут попасть как все образовавшиеся лучи, так и часть их.

Интегральные представления перемещений в отраженных волнах выписаны на основе физической теории дифракции Кирхгофа. Асимптотической оценкой кратных дифракционных интегралов методом многомерной стационарной фазы выписан явный вид геометрооптического приближения перемещений в многократно отраженных волнах. Фаза переотраженной волны определяется расстояниями между точками зеркального отражения луча, расстоянием между источником волны и первой точкой зеркального отражения, расстоянием между последней точкой зеркального отражения и точкой приема волны, волновыми числами продольной и поперечных волн, матрицей Гессе и числом точек зеркального отражения. Элементы ленточной матрицы Гессе размера  $N \times N$  выписаны при любых типах переотражений и трансформаций упругих волн в точках зеркального отражения. Они определяются длинами звеньев траектории волны, кривизнами контуров препятствий в точках зеркального отражения, направлениями падающих, отраженных и трансформированных волн, волновыми числами продольных и поперечных волн.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант № 15-19-10008-П.

## Об одном методе идентификации в задачах низкочастотной дефектоскопии

**Бочарова О. В., Калинин В. В.**

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Проблема разработки методов мониторинга состояния и прочностного ресурса узлов и деталей инженерных конструкций ответственного назначения является ключевой для повышения надежности их эксплуатации и предотвращения аварийных ситуаций. Современное развитие технологий производства новых материалов и повышенные требования к эксплуатационным характеристикам деталей конструкций, выполненных из этих материалов, приводят к необходимости создания простых и эффективных методов постоянного мониторинга состояния объекта, не наносящих при этом ему ущерба. В настоящей работе предложен метод определения наличия дефекта и распознавания его характеристик, основанный на контроле изменения параметров динамических процессов на поверхности среды. Любое изменение напряженного состояния или структуры среды (возникновение или изменение геометрических размеров внутреннего дефекта) приводит к изменению параметров поверхностного волнового поля. Тем самым, контролируя динамические характеристики волнового поля на поверхности среды и сравнивая их с образцовыми характеристиками, можно на стадии производства контролировать структуру и свойства материала для оценки качества изготовления. Достоинствами данного подхода является отсутствие каких-либо принципиальных ограничений, как на материал, так и на форму изделия, а также возможность получения интегральной оценки о состоянии и структурных изменениях объектов. Колебания исследуемой точки поверхности среды регистрировали калиброванным малогабаритным ИСР акселерометром 352A24 фирмы PCB Piezotronics. Сигнал с акселерометра усиливался предварительным ИСР усилителем ZETLAB 440. Аналоговый сигнал подавался на вход аналого-цифрового преобразователя L-Card E14-140, обрабатываются на компьютере программой PowerGraph и сохранялся для дальнейшей математической обработки. Параллельно проведен вычислительный эксперимент. Для расчета волнового поля на поверхности образца, ослабленного неоднородностью, использовался конечно-элементный пакет ANSYS. При обработке регистрируемого сигнала применялся специальный математический подход. Этот подход основан на использовании оптимальных ортогональных разложений сигналов по базису, который специально настраивается на максимально возможную чувствительность к размерам и расположению того или иного дефекта. Такая настройка производится каждый раз при обработке регистрируемого сигнала. Проведена серия экспериментов. Рассмотрены задачи об идентификации дефектов различного типа: полостей, трещин, включений. Использование предложенного подхода обеспечило достаточную возможность распознавания параметров дефекта, как по размеру, так и по положению в пространстве.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов: 18-38-00871\_мол\_а, 18-08-01012, 16-08-00802.

## Исследование затухающих гармонических колебаний пластин, взаимодействующих с жидкостью и газом

Бочкарёв С. А.<sup>1</sup>, Каменских А. О.<sup>2</sup>, Лекомцев С. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Институт механики сплошных сред Пермского федерального НЦ УрО РАН*

<sup>2</sup>*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

Значительная часть представленных в литературе исследований, связанных с анализом пластин, полностью погруженных в жидкость или окруженных газообразной средой, посвящена определению собственных частот колебаний. Наряду с этим, в динамике тонкостенных конструкций важную роль играют демпфирующие свойства системы. С практической точки зрения представляет интерес нахождение декремента не только вынужденных, но и гармонических затухающих колебаний, причём на разных режимах (изгибный, крутильный и др.). В данной работе такая задача решается с помощью метода лазерной виброметрии на разработанной экспериментальной установке, которая представляет собой толсто-стенный призматический бак со съёмной верхней крышкой. Возможность фиксации любого из краёв, предусмотренная в конструкции, позволяет анализировать различные варианты закрепления. Источник возбуждения, в качестве которого в зависимости от требуемых условий может выступать акустический динамик или электромагнит, прикрепляется к расположенной над баком горизонтальной части П-образной рамы. Установка помещается на металлический постамент, положение которого регулируется с помощью подъёмных винтов и лазерного угломера. На испытательном стенде выполнено исследование собственных частот и соответствующим им декрементов гармонических колебаний взаимодействующих с жидкостью дюралюминиевых пластин при разных вариантах закрепления. Снятие показаний проводилось цифровым лазерным виброметром Polytec PDV-100 с частотой дискретизации 48 кГц. Положение точек на поверхности тела, в которых осуществлялось возбуждение и измерялось значение виброскорости, было найдено на основании анализа собственных форм колебаний, полученных из конечно-элементного решения соответствующей модальной задачи. Возбуждение заданной частоты обеспечивалось с помощью электромагнитного поля. Результаты экспериментальных наблюдений демонстрируют, что для консольно закреплённых пластин декремент, соответствующий одному типу колебаний (изгибные или крутильные), возрастает с увеличением числа узловых линий. Кроме этого, в ходе измерений установлено, что величина нормальной компоненты вектора скорости пластины снижается более чем в 10 раз при её взаимодействии с жидкостью. На основе полученных данных проведены теоретические исследования, направленные на выбор модели и граничных условий, адекватно описывающих колебания тонкостенных конструкций, взаимодействующих с жидкой и газообразной средой. Численное решение соответствующей связанной нестационарной задачи выполнено с помощью метода конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-41-590646).

## Численное моделирование пространственных колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью

**Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н.**

*Институт механики сплошных сред Пермского федерального НЦ УрО РАН*

Содержащие жидкость или газ коаксиальные цилиндрические оболочки являются частью многих промышленных приложений и используются в различных областях техники. Уже значительное время они выступают в качестве объекта разнообразных теоретических исследований. При этом, как правило, рассматриваются конфигурации, при которых внутренняя оболочка и/или зазор между оболочками заполняются неподвижной или текущей средой полностью. Данный факт позволяет рассматривать задачу в осесимметричной постановке. В случае частичного заполнения жидкостью горизонтально ориентированных коаксиальных оболочек требуется построение трёхмерной модели.

В настоящей работе анализ собственных частот и форм колебаний коаксиальных оболочек, полностью или частично заполненных неподвижной вязкой жидкостью, осуществляется с использованием метода конечных элементов. Безвихревое возмущённое движение жидкой среды описывается в рамках акустического приближения в терминах потенциала возмущения скорости. Соответствующие конечно-элементные соотношения для волнового уравнения с учётом надлежащих граничных условий формулируются с использованием метода Бубнова–Галёркина. Для определения гидродинамического давления, действующего со стороны жидкости на оболочки, используется уравнение Бернулли. Криволинейная поверхность тонкостенной конструкции аппроксимируется совокупностью плоских элементов, одновременно воспринимающих как мембранные, так и изгибающие силы. Деформации определяются в рамках теории тонких оболочек на основе гипотез Кирхгофа–Лява. Для математической постановки задачи динамики упругих тел используется вариационный принцип возможных перемещений, в который включаются нормальные и касательные напряжения, действующие со стороны вязкой жидкости, а также силы инерции. Решение задачи сводится к вычислению частот связанной системы уравнений. Верификация разработанной модели произведена путём сопоставления результатов с известными теоретическими и численными данными для случая полностью заполненного кольцевого зазора между оболочками при различных линейных размерах и граничных условиях.

Целью численных экспериментов являлось изучение влияния уровня заполнения оболочек жидкостью на спектр собственных частот и соответствующих им форм колебаний при различных вариантах закрепления оболочек (свободное опирание или жёсткая заделка с обоих краёв, консольное закрепление) и разной величине кольцевого зазора между оболочками. Оценено влияние полного или частичного заполнения внутренней оболочки на динамические характеристики системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-41-590646).

## Моделирование процесса напыления микрочастиц, распределенных в разогретом газовом потоке

**Бураго Н. Г.<sup>1</sup>, Никитин А. Д.<sup>2</sup>, Никитин И. С.<sup>2</sup>, Стратула Б. А.<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

<sup>3</sup>*Московский авиационный институт*

*(национальный исследовательский университет)*

В работе численно и аналитически исследуется процесс напыления микрочастиц металлического сплава. Такого рода технологии используются для поверхностного упрочнения ответственных элементов конструкций или при послойном наращивании изделий для устранения эксплуатационных дефектов. Микрочастицы распределены в горячем газовом потоке, падающем на подвижную подложку. Влияние повышенной температуры, близкой к температуре плавления, проявляется в малом значении предела текучести материала частицы.

Постановка и схема решения задачи с некоторыми уточнениями соответствует классической одномерной модели Тейлора для задачи соударения жесткопластического цилиндрического стержня с недеформируемой преградой (Дж. Зукас, Т. Николас, 1985). Для закона упрочнения, близкого к линейному, методом возмущений получены приближенные аналитические оценки для толщины «сплюсненной» частицы, ее радиуса и времени соударения в зависимости от скорости полета частицы.

Для оценок геометрических параметров частицы после удара в аналогичной задаче с учетом динамической вязкости за пределом текучести (жестковязкопластическая модель поведения материала частицы) использовано приближенное решение А. Ю. Ишлинского (1986). Результаты определяются безразмерными параметрами задачи - числами Сен-Венана  $s = s_T L_0 / (V_0 \mu)$  и Рейнольдса  $Re = \rho V_0 L_0 / \mu$ ,  $s_T$  - предел текучести,  $L_0$  - характерный размер частицы,  $V_0$  - скорость соударения,  $\rho$  - плотность,  $\mu$  - динамическая вязкость сплава.

Моделировались результаты экспериментов с напылением, проведенных с микрочастицами из титановых сплавов. В литературе приводятся экспериментальные данные о значениях предела текучести  $s_T$  титановых сплавов при повышенных температурах порядка 1000 – 1400<sup>0</sup>C (П. Г. Микляев, 1994, Б. А. Колачев, И. С. Польшкин, В. Д. Талалаев, 2000). Однако при температурах, близких к температуре плавления  $T_m = 1665^0$ C для значений предела текучести существует большая неопределенность. Поэтому для оценок значений  $s_T$  в этом температурном диапазоне была использована линейная интерполяция. Принималось, что при  $T = T_m$  предел текучести  $s_T = 0$ .

Проведено сравнение численно-аналитических результатов в одномерном приближении с многомерным моделированием нестационарного процесса соударения по конечно-элементным схемам (Н. Г. Бураго, В. Н. Кукуджанов, 1991) и конечно-объемным схемам (И. С. Никитин, 1994). Показана работоспособность полученных формул для оценки толщин наращиваемых слоев в зависимости от скорости частиц и температуры потока.



## Моделирование роста краевой усталостной трещины при высокочастотном нагружении

Бураго Н. Г.<sup>1</sup>, Никитин А. Д.<sup>2</sup>, Никитин И. С.<sup>2</sup>, Ткаченко В. Г.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

<sup>3</sup>*Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)*

Анализ режимов эксплуатации некоторых элементов авиационных конструкций, таких как диски и лопатки газотурбинного двигателя (ГТД), шестерни редукторов и др. показывает, что существенную роль в накоплении усталостного повреждения может играть низкоамплитудное, высокочастотное нагружение. Воздействие высокочастотного нагружения (сверхмногоцикловая усталость СВМУ) может приводить к зарождению усталостной трещины за те же характерные времена эксплуатации элемента, что и нагружения, связанные с полетными циклами (мало- и многоцикловая усталость) (И. С. Никитин, Н. Г. Бураго и др., 2017). Особую опасность представляют режимы высокочастотного нагружения в окрестности собственной частоты исследуемого элемента. С развитием трещины жесткость элемента будет падать и собственная частота будет уходить от частоты нагружения. Однако на ранних этапах роста усталостной трещины определяющим будет резонансный режим нагружения. Количество опубликованных результатов исследований в области роста усталостных трещин при резонансных режимах нагружения для отечественных материалов на данный момент не велико (А. Nikitin, Т. Palin-Luc, А. Shanyavskiy, 2016). В первую очередь это связано с отсутствием отечественных стандартизованных методов проведения исследований при частотах нагружения, превышающих 1000 Гц, сложностью определения и контроля параметров нагружения.

В настоящей работе предлагается метод численного моделирования и проведения испытаний на рост усталостных трещин при частоте нагружения порядка 20 кГц применительно к отечественному авиационному сплаву ВТЗ-1. Следуя принципам высокочастотного нагружения (С. Bathias, 2005) и общепринятым мировым методам проведения исследований на рост трещин при килогерцовом нагружении (S. Tscheegg, 2001, Т. Palin-Luc, 2010) строится численная модель образца с краевой трещиной. Численно определяется напряженно-деформированное состояние у вершины трещины при различных положениях фронта с целью построения геометрической функции для коэффициентов интенсивности напряжения (КИН) с учетом эволюции модальных характеристик образца. Представлены оригинальные результаты испытаний на рост усталостных трещин при высокочастотном нагружении для титанового сплава ВТЗ-1. Получена кинематическая диаграмма роста трещины при СВМУ нагружении, которая в дальнейшем используется при моделировании роста трещины с произвольным фронтом. Вдоль линии фронта определяется величина КИН, после чего прирост длины трещины в направлении нормали к выбранному участку проводится с учетом кинематических характеристик. Результаты численного эксперимента сравниваются с данными СВМУ испытаний.

## Экспериментальное исследование прогиба растущей по толщине сферической оболочки

**Бычков П. С.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Одним из активно развивающихся направлений в данное время являются аддитивные технологии – методы создания деталей машин и приборов с помощью послойного нанесения материала на заготовку. Примерами аддитивных технологий являются селективное лазерное спекание, наплавка, сварка, электрокристаллизация и т.п. Однако, у этих технологий существуют нежелательные эффекты, в частности, накопление остаточных напряжений и, как следствие, к искажению формы детали. Один из путей минимизации внутренних напряжений изделий является внесение предварительных искажений в САД-модель еще на стадии проектирования. Для того, чтобы внести эти искажения, необходимо знать напряженно-деформированное состояние тела. Имея математическую модель и зная искажение тела во время роста, можно определить напряженно-деформированное состояние.

В настоящей работе исследуется процесс электрохимического осаждения металла на тонкую подложку. Разработана схема эксперимента, в ходе которого определяется эволюция поля перемещений жестко заземленной по контуру сферической подложки в ходе электрохимического процесса. При этом металл осаждается на одну лицевую поверхность подложки, а измерение перемещений производится для другой лицевой поверхности. Перемещения определяются методом голографической интерферометрии в реальном режиме времени. Область осаждения металла ограничивается маской. Это позволяет осуществлять осаждение металла на сферической поверхности внутри областей с различной формой границы и анализировать влияние этой формы на краевой эффект. Подложка выполняется из медной фольги, а для осаждения используется сернокислый электролит меднения.

Интерферометр построен по схеме Лейта-Упатниекса. Интерференция голограммы и реального волнового фронта позволяет получить детальную картину прогиба наблюдаемой поверхности. В результате измерений фиксируются изолинии поля перемещений с некоторым шагом по времени. Первичная обработка изображений, записанных на ССД камеру, подвергается цифровой фильтрации (с помощью быстрого преобразования Фурье), что позволяет избавиться от локальных минимумов и максимумов, возникающих на любой голограмме в силу ее спекл-структуры. Далее определяются сечения двумерной матрицы интенсивностей в полярных координатах и определяются локальные минимумы, по которым восстанавливаются изолинии поля перемещений.

В результате исследований получены экспериментальные зависимости прогиба сферической пластины при осаждении тонкого слоя металла от времени осаждения и плотности тока. Установлено, что напряжения, возникающие в двухслойной пластине, носят сжимающий характер.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 18-38-00235.

## Об определении коэффициентов в граничных условиях для неоднородных упругих и вязкоупругих структур

**Васильев Л. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Анализ спектральных задач и параметров, содержащихся в граничных условиях и оказывающих непосредственное влияние на точки спектра, представляет большой интерес для исследования. Такого рода задачи можно использовать и для решения обратных коэффициентных задач. Балочные модели, которые содержат один спектральный параметр, являются одними из наиболее часто используемых при моделировании различных объектов и их колебания описываются дифференциальными уравнениями 4 порядка. При этом оценка упругости опор конструкции важна как для различных технических приложений, например, трубопроводов, строительных конструкций, так в биомеханике для диагностики элементов биомеханической системы кость-фиксатор для реальной оценки ее деформативности. Из ряда методов, которые позволяют оценить характеристики упругих систем, стоит отметить акустические, позволяющие производить неразрушающий контроль материала и определять его характеристики по резонансным значениям и амплитудам смещения. В случае однородных задач оператор имеет постоянные коэффициенты, поэтому можно строить частотное уравнение в явном виде и производить дальнейший анализ алгебраических выражений, тогда как при наличии неоднородностей у материала составление частотного уравнения в явном виде становится невозможным, поэтому приходится использовать численные методы. В настоящей работе была изучен ряд прямых и обратных задач для неоднородных структур, а именно: прямая и обратная задача о реконструкции граничных параметров для консольно закрепленного на одном конце и имеющего на правом конце упругие связи, ограничивающие перемещение и поворот, стержня с неоднородностью по длине в виде переменной жесткости; решение прямой и обратной задачи для вязкоупругого стержня с вязкоупругими связями на правом конце и консольно закрепленного на левом; обратная задача по восстановлению параметров в граничных условиях для неоднородного упругого волновода, контактирующего со средой на внешней границе, что характеризуется упругими связями, связывающими перемещения с напряжениями, задача отличается от предыдущих наличием уже двух спектральных параметров, а именно безразмерная частота и волновое число. Исследования проведены на основе использования численных методов, а именно метода пристрелки и анализа некоторых систем алгебраических уравнений второго порядка. Оценено влияние рассматриваемых параметров в граничных условиях на резонансные значения и смещения. Сформулированы условия единственности решений обратных задач, рассматриваемых в данной работе. Проведены вычислительные эксперименты для различных функций неоднородности, которые показали достаточную точность работы описываемого метода. Так же проведены вычислительные эксперименты по зашумлению входных параметров.

## Взаимодействие деформационных и электрических процессов в миокарде

**Вассерман И. Н., Шестаков А. П.**

*Институт механики сплошных сред Пермского федерального НЦ УрО РАН*

На основе анализа микроструктурной модели Р.Е. Hand, В.Е. Griffith, С.С. Peskin (Bull.Math.Biol.(2009),**71**(7)) построена модель изменения внутриклеточной проводимости миокарда, при его деформации. Сердечная ткань рассматривалась, как периодическая решетка, где клетки являются прямоугольными призмами, заполненными изотропным электролитом, а проводимость щелевых соединений учитывалась через граничные условия на сторонах этих призм и считалась постоянной. С помощью метода гомогенизации в виде, предложенном в работе G. Richardson and S. J. Chapman.(SIAM Journal Appl. Math. (2011).**71**(3)), построены аналитические зависимости проводимости ткани от ее деформации, где тензор, обратный тензору проводимости миокарда, может быть представлен, как сумма обратных приведенных тензоров проводимости миоплазмы и щелевых соединений.

$$\mathbf{d} = \beta(\mathbf{d}_c^{-1} + \mathbf{d}_g^{-1})^{-1},$$

где

$$\mathbf{d}_c = \sigma_c \mathbf{I}, \quad \mathbf{d}_g = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{d}_{g0} \mathbf{F}^T$$

– приведенные тензоры проводимости цитоплазмы и щелевых соединений,  $\sigma_c$  – удельная проводимость миокарда,  $\beta$  – объемная доля клеток во всей ткани,  $\mathbf{F}$  – тензор градиента деформации,  $J = \det(\mathbf{F})$ ,  $\mathbf{d}_{g0}$  – приведенный тензор проводимости щелевых соединений в недеформированном состоянии. Как и в работе Р.Е. Hand et al предполагалось, что, что внеклеточная проводимость слабо зависит от деформации.

Было проведено сравнение с моделью, предложенной в книге Sachse. Для продольной проводимости обе модели могут быть хорошо согласованы для удлинений, в интервале от 0.8 до 1.2.

Было рассмотрено распространение волны возбуждения в прямоугольной области при удлинении  $\lambda = 1.4$  вдоль горизонтальной оси, соответствующей направлению волокна. Влияние деформации оказывается сильно “разбавлено” внеклеточной проводимостью.

Был рассмотрен пример, иллюстрирующий более тонкие эффекты - возникновение областей деполяризации и гиперполяризации (виртуальные электроды) при точечном катодном возбуждении внеклеточной среды в двумерной прямоугольной области. Здесь влияние деформации оказывается более значительным.

Кроме того, деформация миокарда вызывает возникновение в нем дополнительных трансмембранных токов (активируемые деформацией ионные каналы). Рассмотрена возможность построения модели активации каналов при сложном деформировании. Здесь клетка рассматривалась, как цилиндр, на боковой поверхности которого равномерно распределены активируемые деформацией каналы.

## Об индентировании градиентных упругих структур с покрытием

**Ватульян А. О., Плотников Д. К.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

При изготовлении различных элементов инженерных конструкций с целью придания им желаемых свойств используется нанесение функционально-градиентных покрытий. Важным этапом в разработке градиентных покрытий является первоначальное определение их свойств. Одним из наиболее распространенных способов идентификации свойств новых материалов, в том числе и покрытий, является метод индентирования. Применение методов индентирования для оценки свойств неоднородных структур, таких как функционально-градиентные композиты и тела с покрытиями, требует исследования ряда контактных задач в рамках неоднородной теории упругости.

В работе представлена приближенная модель деформирования тонкой неоднородной упругой полосы с покрытием. Исследована контактная задача о действии жесткого штампа гладкой формы на функционально-градиентную полосу, жестко заземленную по основанию. Решена вспомогательная задача о действии нормальной нагрузки, локализованной на некотором отрезке верхней границы полосы. Для построения приближенной модели приняты гипотезы о характере компонент поля перемещений, которые зависят от законов изменения неоднородности полосы и, таким образом, позволяют учитывать произвольные изменения свойств полосы по толщине, в том числе, позволяющих учесть разрывный или сильно градиентный характер законов. Введение гипотез о характере компонент поля перемещения позволяет упростить выражение удельной потенциальной энергии деформации и с помощью вариационного принципа Лагранжа построить систему двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами относительно компонент вектора смещений на верхней границе полосы. С помощью преобразования Фурье построена передаточная функция, связывающая трансформанты Фурье вертикального смещения и нагрузки. На основе построенной передаточной функции сформулировано интегральное уравнение контактной задачи. Решение интегрального уравнения сведено к исследованию операторного уравнения, связывающего вертикальные перемещения свободной поверхности полосы с контактным давлением. Построено решение контактной задачи, найдено распределение напряжений под индентором, определено смещение верхней границы полосы. Установлена связь между величиной внедрения и размером площадки контакта. Построена зависимость силы, действующей на штамп, от глубины внедрения. Приведены результаты вычислительных экспериментов для различных законов неоднородности, как непрерывных, так и содержащих сильную градиентность и разрывы, оценено влияние неоднородностей на основные характеристики решения. Проведено сравнение результатов решения контактной задачи в рамках предложенного приближенного подхода с решениями для других моделей, в основе которых лежат иные гипотезы о характере изменения компонент поля смещений по толщине, не учитывающие градиентность свойств.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект №18-11-00069).

## О волнах в преднапряженном функционально-градиентном цилиндрическом волноводе

Ватульян А. О., Юров В. О.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В результате технологических процессов и действия скрытых нагрузок в цилиндрических волноводах могут возникать предварительные напряжения и области, в которых механические характеристики изменяются существенно градиентным образом. Для выявления закономерностей прохождения волн через такие структуры решена задача о вынужденных колебаниях неоднородного предварительно напряженного цилиндрического волновода с сильным градиентом свойств в узкой области.

В осесимметричном случае осуществлено моделирование процесса распространения волны в предварительно напряженном цилиндрическом волноводе, вызванного действием нагрузки, сосредоточенной в кольцевой области и периодической во времени. Поля перемещений и напряжений внутри и на внешней границе волновода находились в два этапа. На первом этапе использовалось интегральное преобразование Фурье по продольной координате. Выполнено построение численного решения задачи в трансформантах методом пристрелки, а задачи Коши, возникающие в процессе реализации этого метода, решены методом Рунге-Кутты 4 порядка. На втором этапе осуществлено обращение интегрального преобразования Фурье на основе использования контурного интегрирования и теоремы о вычетах. Разработан алгоритм по нахождению вычетов от полученных численно мероморфных функций и получены приближенные значения смещений и напряжений.

Проведены вычислительные эксперименты для волновода, механические характеристики которого кусочно-постоянны или непрерывно изменяются по толщине. Такие законы неоднородности позволили проанализировать разницу в волновых полях для двухслойного волновода и волновода с промежуточным градиентным слоем. Найден закон распределения предварительных напряжений в поперечно-неоднородном волноводе, отвечающий действию внутреннего давления. Проанализировано влияние предварительного напряжения и закона неоднородности на дисперсионное множество и волновые поля на внешней границе волновода. Исследование полей произведено как в регулярном, так и в нерегулярном случаях. Выявлены частотные области, в которых идентификация предварительных напряжений наиболее результативна. Найдено оптимальное количество полюсов, которые нужно учитывать для получения решения в дальней от источника зоне с заданной точностью, проанализировано влияние вклада каждого полюса в общее решение, проведены вычислительные эксперименты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 18-11-00069).

## Численное и экспериментальное исследование расщепления частот цилиндрической оболочки с дефектами

**Вахлярский Д. С.<sup>1,2</sup>, Гуськов А. М.<sup>1</sup>, Басараб М. А.<sup>1</sup>, Лунин Б. С.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

<sup>2</sup>*АО «ОКБ „ГИДРОПРЕСС“», Подольск*

<sup>3</sup>*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

В работе рассматривается задача вычисления расщепления собственных частот цилиндрической оболочки с дном, отвечающих окружному волновому числу  $n=2$ . На цилиндрической части оболочки имеется два участка постоянной толщины различные между собой. Толщина оболочки отсчитывается от внутренней цилиндрической поверхности. Возникновение расщепления частот связано с погрешностями изготовления оболочки. В работе при численном исследовании рассматриваются следующие погрешности: погрешность радиуса внутренней цилиндрической поверхности, погрешность толщины оболочки, погрешность плотности и модуля Юнга материала. Численное моделирование проводится методом конечных элементов. Дефекты, накладываемые на идеальную цилиндрическую оболочку для получения численного расщепления, распределены в окружном направлении по первым восьми гармоникам разложения в ряд Фурье, измеренным на экспериментальных образцах. Для сопоставления результатов расчета и эксперимента были изготовлены 11 стальных цилиндрических оболочек. На экспериментальных образцах с помощью кругломера были измерены первые восемь гармоник погрешностей внутренней и внешней поверхностей оболочек. Измерения проводились для 10 сечений по высоте. Распределение дефектов по высоте цилиндрической части определялось с помощью интерполяции на основе измерений, проведенных для 10 сечений. Погрешность толщины вычисляется как разность погрешностей внешней и внутренней поверхностей. Окружное распределение погрешностей материала в экспериментах не измерялось. Поскольку расщепление частот при малых значениях погрешностей является малой величиной по отношению к самим частотам, необходимо проверить достоверность результатов, полученных классическим методом конечных элементов. Для этого был разработан конечный элемент, построенный на теории тонких оболочек совместно с методом возмущений. Показано, что результаты, полученные в коммерческом ПО, реализующем метод конечных элементов, совпадают с результатами, полученными в авторской программе, реализующей метод конечных элементов совместно с методом возмущений. Экспериментальное измерение расщепления частот проводилось в вакуумной камере, чтобы исключить влияние газовой среды на собственные частоты. Экспериментальное значение расщепления частот вычислялось как разность измеренных частот, соответствующих «лёгкой» и «тяжелой» осям оболочки. Сравнение результатов экспериментального измерения расщепления частот с расчётным показывает неплохое совпадение значений в среднем по всем 11 оболочкам.

Формулировка граничных условий и применение уточненной теории растяжения пластин для описания дисперсии планарной краевой волны

Вильде М. В., Сурова М. Ю.

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского*

Рассматриваются гармонические колебания полубесконечной пластины, отнесенной к декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и занимающей область  $\{-\infty < x_1 < \infty, x_3 \geq 0, -h \leq x_3 \leq h\}$ . Лицевые поверхности и торец пластины считаются свободными от напряжений. Изучается распространение волны вида  $v_i = V(x_2, x_3)e^{i\gamma(x_1 - ct)}$ , где  $v_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – компоненты вектора перемещений,  $V(x_2, x_3)$  – функции, экспоненциально затухающие при  $x_3 \rightarrow -\infty$ . Изучается волна, форма которой характеризуется симметрией напряженно-деформированного состояния относительно срединной поверхности ( $V_1, V_2$  – четные функции по  $x_3$ ,  $V_3$  – нечетная). Для длинных волн ( $\gamma h \ll 1$ ) колебания пластины могут быть описаны теорией обобщенного плоского напряженного состояния пластин, приводящей к уравнению для определения постоянной скорости волны  $c = c_R^{\text{пл}}$ . Однако решение по трехмерной теории упругости показывает, что симметричная краевая волна обладает дисперсией. Для учета этого эффекта в данной работе применяется асимптотическая теория растяжения пластин второго порядка точности, предложенная в монографии Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V., Dynamics of thin walled elastic bodies, San Diego: Academic Press, 1998. Разрешающие уравнения этой теории имеют погрешность  $O[(\gamma h)^4]$ . Особенностью применения приближенных теорий для описания краевых волн является необходимость уточнения граничных условий свободного края в соответствии с порядком уточнения уравнений движения. Выражения для асимптотически второстепенных членов, приведенные в указанной монографии, позволяют записать выражения для напряжений, усредненных по толщине, с погрешностью  $O[(\gamma h)^4]$ :

$$\sigma_{ii}^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\nu}{6(1 - \nu)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \nu \frac{h^2}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \text{div } \mathbf{u} \right],$$

$$\sigma_{ij}^* = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\nu}{3(1 - \nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \text{div } \mathbf{u} \right], \quad i, j = 1, 2, i \neq j,$$

где  $u_i(x_1, x_2)$  – компоненты вектора перемещений элементов срединной поверхности,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $c_2 = \sqrt{E/2\rho(1 + \nu)}$  – скорость волны сдвига. Анализ взаимодействия основного НДС с погранслоями типа Сен-Венана, выполненный в данной работе, показывает, что в симметричном случае влияние последних на скорость краевой волны имеет порядок  $O[(\gamma h)^4]$ . Таким образом, в асимптотической теории растяжения пластин второго порядка точности достаточно удовлетворения условий свободного края для средних напряжений, вычисленных по представленным выше формулам. В данной работе построенная теория применяется для вывода асимптотики скорости краевой волны. Сравнение с результатами численного решения трехмерной задачи показывает, что полученная асимптотика правильно описывает поведение дисперсионной кривой при  $\gamma h \rightarrow 0$ .



## Моделирование погруженных и встроенных волноводов

**Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Для определения характеристик бегущих волн, распространяющихся в волноводе произвольного поперечного сечения, исходная трехмерная задача обычно сводится к двумерной с помощью подстановки искомого решения в уравнения и граничные условия в виде бегущей волны с неизвестным волновым числом и амплитудной вектор-функцией. Или, что эквивалентно, с помощью преобразования Фурье по оси волновода. Возникающая при этом задача на собственные значения решается численно, например, методом конечных элементов (МКЭ), на основе сеточной аппроксимации ограниченной области поперечного сечения. Полученный в результате набор вещественных и близких к вещественной оси собственных значений в комплексной плоскости волнового числа определяет дисперсионные характеристики (фазовую и групповую скорость) и возможный декремент затухания бегущих волн, а соответствующие собственные решения – их собственные формы.

К погруженным или встроенным волноводам относят такие, у которых вся внешняя поверхность или ее часть контактирует с неограниченной внешней средой или с другой слоистой структурой, уходящей на бесконечность в боковом направлении (скважины, тоннели, заглубленные трубопроводы, рельсовое полотно на грунте, сварные швы, стрингеры на обшивке фюзеляжа и т.п.). Распространение бегущих волн сопровождается здесь оттоком волновой энергии в боковом направлении (просачивающиеся моды), а задача усложняется неограниченностью области поперечного сечения. Такие задачи часто называют 2.5-мерными.

Применение МКЭ предполагает выделение ограниченной области для сеточной аппроксимации, например, с помощью введения искусственных поглощающих границ, что реализовано во многих МКЭ пакетах. Однако искусственное ограничение области приводит к появлению бесконечного набора паразитных собственных решений, среди которых нелегко отыскать конечное число требуемых решений, дающих бегущие и просачивающиеся волны. Для избавления от паразитных мод необходим строгий учет бокового оттока волновой энергии на бесконечность. Такую возможность предоставляет гибридная численно-аналитическая схема, разработанная и реализованная для двумерных акустических и упругих волноводов с локальными препятствиями. Обсуждаются особенности ее реализации в случае 2.5-мерных задач. Приводятся численные результаты, показывающие совпадение с тестовыми результатами для встроенного в слой волновода прямоугольного сечения.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, проект № 17-11-01191.

## Определение эффективных упругих модулей анизотропного композита: пьезоэлектрические нанонити в полимерной матрице

Глушков Е. В.<sup>1</sup>, Глушкова Н. В.<sup>1</sup>, Бойко О. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

<sup>2</sup>*Институт нанонаук Парижа, Франция*

Известно, что использование III-нитридов (InN, GaN, AlN) в форме нанонитей имеет преимущества, важные для перспективных приложений нанотехнологии (диоды для гибких сенсорных экранов (LED), микропьезогенераторы и др.). Этим определяется актуальность исследования их физических и механических свойств. На практике, однако, нанонити, как правило, не могут быть отдельно стоящими. Их погружают (запекают) в другой материал, например, в полимерную матрицу. Слой такого композитного материала толщиной порядка одного микрона располагается на более толстой подложке (обычно кремниевой с тонкой токопроводящей прослойкой) и покрывается металлическим слоем толщиной в 100-200 нанометров. Поэтому при проектировании микроэлектронных устройств на основе таких слоистых сэндвич-структур необходима оценка эффективных упругих модулей не отдельных нанонитей, а полимер-нитридного композита в целом.

В Центре нанонаук и нанотехнологий и Институте нанонаук Парижа (University Paris Sud и Sorbonne Universités) разработана технология измерения дисперсионных характеристик поверхностных акустических волн (ПАВ), бесконтактно возбуждаемых и регистрируемых в таких микроструктурах с помощью лазеров (Transient Grating Method - TGM). С помощью этого метода для широкого набора образцов, изготовленных с использованием галлий-нитридных нанонитей (GaN), запеченных при различных температурах в диапазоне от 300 до 550 градусов в полимер Hydrogen Silsesquioxane (HSQ), получены наборы точек дисперсионных характеристик ПАВ в плоскости длина волны - частота.

Основной идеей настоящего исследования является определение эффективных модулей упругости анизотропного композиционного материала HSQ-GaN посредством минимизации целевой функции, определяющей невязку между этими измеренными точками и точками, получаемыми в рамках компьютерной модели, разработанной для расчета характеристик ПАВ. Верификация программного комплекса, реализующего данный подход, предварительно была проведена на образцах без нанонитей, с известными модулями упругости материалов.

Приводятся примеры дисперсионных кривых, рассчитанных для полученных эффективных упругих модулей. Анализируется их зависимость от густоты и строения нанонитей и условий запекания образцов. Показано, что наряду с материальными параметрами в рамках разработанной модели могут быть определены и толщины слоев рассматриваемых сэндвич-структур, которые недостаточно точно контролируются при изготовлении.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, проект № 17-11-01191.

## Сценарий возникновения автоколебаний при протекании идеальной жидкости через канал

**Говорухин В. Н.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Доклад посвящен численному анализу сценария возникновения автоколебаний при протекании идеальной несжимаемой жидкости через плоский прямоугольный канал. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что обычно движения идеальной жидкости порождают консервативную динамическую систему, и не допускают возникновения автоколебаний. Однако, при наличии не связанной с вязкими эффектами диссипации специального вида идеальная жидкость может демонстрировать явления, характерные для диссипативных система. Одним из таких случаев является протекание жидкости через область в постановке Н.Е.Кочина и В.И.Юдовича. При протекании жидкость втекает и вытекает из канала через части его границы внося и вынося завихренность и энергию. Этот механизм и порождает специфическую диссипацию в исследуемой задаче.

Изучение диссипативных свойств идеальной жидкости начато в работе Алексеева (1977), где установлена возможность асимптотической устойчивости стационарных течений, которая означает то, что малые начальные возмущения полностью вымываются из канала за конечное или бесконечное время. Дальнейший численный анализ проблемы показал, что интенсивные начальные вихри частично запираются в канале и формируют сложные вихревые конфигурации с рециркуляционными зонами, см. работы Говорухин, Моргулис, Юдович (2007), Govorukhin, P'in (2009), Govorukhin, Morgulis, Vladimirov (2010), Говорухин (2012). Были обнаружены стационарные режимы, область течения которых состоит из связной проточной зоны, и нескольких рециркуляционных зон, в которых сохраняется консервативная динамика. Также в вычислительном эксперименте была обнаружена возможность реализации автоколебаний. До настоящего времени сценарии возникновения автоколебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале детально не изучались.

В докладе излагаются результаты численного изучения бифуркаций, приводящих к автоколебаниям в задаче протекания идеальной жидкости сквозь прямоугольный канал с постоянной скоростью на границах и заданным распределением завихренности на входе в канал. Представлены использованные и разработанные численные методы: поиска и анализа устойчивости стационарных режимов, расчета нестационарных течений, исследования свойств автоколебаний. С помощью вычислительного эксперимента показано, что при малых интенсивностях распределения завихренности определенного вида на входе в канал устанавливается устойчивый проточный стационарный режим. При росте интенсивности завихренности этот режим специфически теряет устойчивость, и в канале возбуждаются автоколебания.

## Собственные напряжения в нелинейно упругом шаре с распределёнными дислокациями

**Головешкина Е. В., Зубов Л. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрена задача о собственных напряжениях полого изотропного упругого шара при наличии распределённых краевых и винтовых дислокаций в случае, когда тензорное поле плотности дислокаций  $\boldsymbol{\alpha}$  обладает сферической симметрией общего вида:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1(r)\mathbf{g} + \alpha_2(r)\mathbf{d} + \alpha_3(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{g} = \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{d} = \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\phi.$$

Здесь  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\phi$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  — единичные векторы, касательные к координатным линиям в сферической системе координат  $r$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ .

Статическое напряжённое состояние нелинейно упругого тела с непрерывно распределёнными дислокациями описывается системой уравнений, состоящей из уравнений равновесия для тензора напряжений Пиолы  $\mathbf{D}$ , уравнений несовместности относительно тензора дисторсии  $\mathbf{C}$  и определяющих соотношений:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{D} = dW/d\mathbf{C}. \quad (1)$$

Граничные условия, означающие отсутствие напряжений на внутренней и внешней поверхностях полого шара, представляют собой нелинейные соотношения для компонент тензора дисторсии. Однако для частных моделей материала, а именно для полулинейной модели сжимаемого материала и модели Бартенева—Хазановича несжимаемого материала, удаётся перейти к линейным граничным условиям.

Для несжимаемого материала к системе уравнений (1) добавляется условие несжимаемости:

$$\det\mathbf{C} = 1,$$

а определяющие соотношения в (1) приобретают вид:

$$\mathbf{D} = dW/d\mathbf{C} - p\mathbf{C}^{-T},$$

где  $p$  — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию.

Установлено, что при заданном распределении дислокаций задача о равновесии полого шара имеет два сферически симметричных решения. Разъясняется физический смысл этих решений. На основе численного решения нелинейной краевой задачи выполнен анализ влияния дислокаций на напряжённое состояние шара.

Показано, что при специальном распределении дислокаций, которое описывается тензорным полем

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\gamma_0}{r}\mathbf{g} + \frac{\beta_0}{r}\mathbf{d} + \frac{2\gamma_0}{r}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r, \quad \gamma_0 = \sin \omega, \quad \beta_0 = 1 - \cos \omega, \quad \omega = \text{const},$$

в шаре возникает квазитвёрдое состояние, которому соответствует тензорное поле дисторсии, задаваемое собственно ортогональным тензором. Квазитвёрдое состояние характеризуется нулевыми напряжениями и неоднородным полем поворотов элементарных объёмов упругой среды.

## Моделирование динамики интерфейсов с периодически и стохастически распределенными трещинами

Голуб М. В., Дорошенко О. В.

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Повреждения многих композитных материалов нередко связаны с образованием и развитием микротрещин, расположенных на границах раздела сред с различными или одинаковыми свойствами. Внутренние микродефекты не только приводят к возможности разрушения материала при накоплении их до критического состояния, но и изменяют его дифракционные свойства. Последнее можно использовать для решения обратных задач об определении степени поврежденности композита. В случае образования интерфейсных микротрещин во время эксплуатации образца естественно предполагать их стохастическое распределение в поврежденной зоне. С другой стороны, периодические структуры, в том числе составленные из разрезов различных форм, представляют интерес при проектировании периодических композитов (фононных кристаллов или акустических метаматериалов) с улучшенными свойствами, позволяющими управлять волновыми потоками. При моделировании распространения волн через интерфейсы со стохастически и периодически распределенными неоднородностями типа разрез и трещина используются одни и те же граничные условия, что делает интересным сравнение волновых полей, возникающих в этих двух случаях.

В настоящей работе решается задача о прохождении упругих волн через границу раздела двух сред со стохастически распределенными круговыми дефектами одинакового радиуса. Коэффициенты прохождения и отражения упругих волн через поврежденный интерфейс выражаются через средний скачок перемещений на трещинах, для определения которого используется схема решения в случае одиночного дефекта. С помощью метода граничных интегральных уравнений решается граничное интегральное уравнение для одиночной трещины. При этом строится зависящее от частоты асимптотическое решение, которое может использоваться для достаточно широкого диапазона частот, что демонстрируется для различных пар материалов. В случае дважды периодического массива круговых планарных трещин с различными вариантами решетки (прямоугольная, косоугольная, гексагональная) используется условие, связывающее скачки смещений на трещинах, что позволяет численно решить возникающее граничное интегральное уравнение. Демонстрируется сходимость и проводится анализ влияния различных вариантов периодических решеток и формы разрезов на прохождение и блокирование волн. Изучается эффект увеличения коэффициента прохождения через границу раздела двух сред за счет введения периодического массива. Приводятся результаты сравнения коэффициентов прохождения для стохастических и периодических распределений.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект №9.1022.2017/4.6).

## О моделировании деформирования ортотропной неоднородной по толщине полосы

**Грибанов Ю. С., Лапина П. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Функционально-градиентные материалы благодаря свойствам высокой твердости и термической стойкости широко используются в различных областях промышленности, таких как высокотехнологичные производства, металлообработка, горнодобывающая промышленность и др. Неоднородность элементов конструкций из таких материалов обусловлена как неоднородностью свойств составляющих, так и особенностями технологических процессов при их изготовлении. В настоящее время с целью улучшения поверхностных свойств используемых деталей часто применяются различные напыления и покрытия. Однако не все способы изготовления позволяют получать равномерное распределение свойств в покрытии, что является существенным отличием от однородных металлов и композитов. Изучение свойств материалов, обладающих неоднородностью, представляют интерес для современных исследователей. Одним из часто используемых методов идентификации свойств материалов является контактный способ оценки податливости исследуемого объекта, что требует подробного исследования прямых задач о действии нагрузки или вдавливании штампа.

Работа посвящена исследованию деформированного состояния неоднородной по толщине ортотропной полосы. Рассмотрена задача о равновесии полосы под действием сосредоточенной нагрузки на поверхности полосы. На основе преобразования Фурье получена система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, для решения которой был использован метод пристрелки. В случае однородного материала коэффициенты полученной системы постоянны и решение может быть построено в аналитическом виде. Рассмотрены также две приближенные модели структуры полей смещений. Первая модель отражает линейную зависимость полей перемещений от вертикальной координаты и удовлетворяет граничным условиям на нижней грани. Вторая модель кроме перечисленных свойств первой модели учитывает также равенство нулю касательных напряжений на поверхности. Решение в рамках моделей построено на основе вариационного принципа Лагранжа и преобразования Фурье. Проведен численный анализ решений, а именно передаточных функций и полей смещений. Осуществлено сравнение результатов, полученных в рамках моделей, и точного решения.

Авторы выражают благодарность профессору А. О. Ватульяну за внимание к работе.

## Динамическая контактная задача для неоднородной пористоупругой полосы

Гусаков Д. В.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Одним из актуальных вопросов современной механики является задача о взаимодействии массивного фундамента с грунтовым основанием, на котором он расположен. Такое основание, как правило, представляет собой набор различных слоев почвы, большинство которых являются водонасыщенными. Наиболее удобным инструментом для описания такой структуры является модель пористоупругости Био. Однако, в большинстве современных работ все рассуждения касаются однородного случая в то время как учет неоднородности механических характеристик пористоупругого грунта может значительно повысить точность расчетов.

В работе исследуется плоская задача динамического контактного взаимодействия массивного твердого тела, жестко сцепленного с неоднородной пористоупругой полосой, закрепленной вдоль нижней грани. Процесс отыскания контактных напряжений и волновых полей разбит на несколько шагов. 1. Формулировка двух основных краевых задач: задачи о вынужденных колебаниях полосы и задачи о колебаниях массивного тела. 2. Дискретизация этих задач и численное решение связанной задачи при помощи метода коллокаций. 3. На основе связи между амплитудой колебаний твердого тела с волновыми полями пористоупругой полосы сформулировано интегральное уравнение, причём символ ядра этого уравнения представляет собой четную мероморфную функцию, убывающую на бесконечности. Полюса такой функции образуют «комплексные пары» относительно начала координат. В результате дискретизации интегрального уравнения получена алгебраическая система, коэффициенты которой вычислены при помощи теории вычетов, которые находятся из анализа вспомогательной краевой задачи.

В работе проведена серия вычислительных экспериментов по определению контактных напряжений в зоне соприкосновения твердого тела и полосы, проанализирована эффективность метода коллокаций на примере нескольких сеток разбиения. Показано наличие значительного влияния закона распределения упругих характеристик полосы на распределение контактных напряжений под массивным телом. Анализ сходимости метода коллокаций позволил определить оптимальное число отрезков разбиения при расчете контактных напряжений. Отдельно исследован вопрос о наличии «квази-резонансных» ситуаций в зоне частот до первой частоты толщинного резонанса для соответствующей упругой задачи. Проанализировано влияние массы твердого тела и значений параметров связанности Био на движение «квази-резонансов» системы пористоупругая полоса — массивное твердое тело.

Автор благодарит А. О. Ватульяна за внимание к работе.

## Об обратной задаче определения параметров включения в балке в рамках модели Тимошенко

**Гущина К. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Балки представляют собой простейший и основной элемент, который работает на изгиб. Они находят свое применение в строительных объектах, а именно в конструкциях общественных, гражданских и промышленных зданий, междуэтажных перекрытиях, в балочных площадках, мостах, эстакадах, а также в конструкциях затворов и гидротехнических шлюзов и других сооружениях. К преимуществу балок относится надежность в работе и простота изготовления, чем обусловлено широкое распространение. Довольно часто составляющие сооружений, механизмов и машин обладают неоднородными характеристиками, эти неоднородности могут образовываться как на стадии изготовления, так и в процессе эксплуатации. Наличие дефекта может привести к снижению и потере несущей способности, а иногда к полному разрушению. Необходимо отметить, что в наибольшей степени исследованы задачи о колебаниях пластин и стержней с дефектами типа трещин и полостей. Наименее детально исследованы обратные задачи для упругих тел с дефектом типа включения. В работе изучены колебания упругой однородной балки для модели Тимошенко и балки с дефектом типа включения, которое имеет эллипсоидальную форму. Сформулирована общая постановка задачи о колебаниях неоднородной балки в рамках модели Тимошенко. Осуществлено приведение к безразмерному виду задачи и составление канонической системы уравнений. Механические характеристики неоднородной балки отличны от характеристик балки без дефекта. Получены резонансные значения однородной балки. Построены амплитудно-частотные характеристики в окрестности трех резонансных значений и собственные формы. Проведен анализ влияния местоположения (на оси и вне нее) и параметров включения на резонансные значения балки с дефектом на основе метода пристрелки. С помощью методов теории возмущений построены формулы для поправок к резонансным частотам, которая связывает резонансные значения для неповрежденной балки и балки с дефектом. На основе полученного соотношения к резонансным значениям решены две обратные задачи. В первой реализован поэтапный метод восстановления геометрических характеристик включения эллипсоидальной формы, а именно координаты центра и объема включения. Во второй задаче выполнено восстановление механических характеристик неоднородной балки, а именно соотношение модулей упругости и плотности. Продемонстрирована высокая точность результатов, которая свидетельствует о применимости предложенного метода.

Автор благодарит профессора А. О. Ватульяна за внимание к работе.



## Распространение в слое связанных термоупругих возмущений с учетом перекрестных диффузионных эффектов

Давыдов С. А.<sup>1</sup>, Земсков А. В.<sup>1,2</sup>, Тарлаковский Д. В.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт*

*(национальный исследовательский университет)*

<sup>2</sup>*Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова*

Одним из современных направлений, позволяющих наиболее точно описать реальное поведение сплошной среды, является моделирование взаимного влияния различных физико-механических полей. Частный случай такой связанности – модель термоупругости с учетом диффузии. Такая модель позволяет описать взаимное влияние поля перемещений и поля температур, учитывая также возмущение поля концентрации упругой среды.

На данный момент времени большинство имеющихся моделей термоупругости с учетом диффузии представлены в стационарной или квазистационарной постановке. При этом для решения нестационарных задач в основном используются численные алгоритмы. Однако для моделирования и анализа сложных физико-механических процессов часто требуется получить аналитически нестационарное решение. Также крайне редко встречаются нестационарные термоупругие модели с перекрестными диффузионными эффектами, которые могут быть использованы для более точного описания таких технологических процессов, как диффузионная пайка, цементация сталей и т.д.

В представленной работе рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругости с учетом диффузии для изотропного двухкомпонентного слоя. Математическая постановка задачи в прямоугольной декартовой системе координат представляет собой связанную систему уравнений в частных производных, состоящую из уравнений движения, теплопереноса и двух уравнений массопереноса. Уравнения массопереноса также учитывают взаимное влияние полей концентрации компонент среды. На границах слоя задаются перемещение, тепловой и диффузионные потоки. Начальные условия принимаются нулевыми.

Решение задачи ищется в интегральной форме, которая представляет собой свертку по времени функций Грина с правыми частями граничных условий. Для нахождения функций Грина используется преобразование Лапласа по времени и разложение искомым функций в неполные ряды Фурье. Такой подход сводит исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения изображений искомым функций, которые, в свою очередь, являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа. Их оригиналы находятся с помощью известных теорем операционного исчисления.

Представленный алгоритм разработан для случая двухкомпонентной сплошной среды, однако его можно обобщить для случая трёх и более компонент.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №17-08-00663 А и №18-31-00437 МОЛ\_А).

## Метод конечных объемов для решения задачи зонального электрофореза

**Долгих Т. Ф.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Процесс зонального электрофореза — разделение многокомпонентной смеси на составляющие — в бездиффузионном приближении описывается системой квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, тип которой может быть как гиперболическим, так и эллиптическим в зависимости от значений концентраций отдельных компонент и от проводимости всей смеси. В начальный момент времени известны концентрации отдельных компонент. Для определения распределения концентраций в процессе эволюции имеем следующую задачу Коши

$$\mathbf{U}_t + A(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = 0, \quad \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0.$$

Задача решается для двухкомпонентной смеси, так как именно в этом случае имеется большое количество данных для проведения сравнений аналитических и численных результатов.

В случае двухкомпонентной смеси вектор  $\mathbf{U}$  и матрица  $A(\mathbf{U})$  имеют вид

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad A_k^j(\mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \frac{\mu^1 \mu^2 \mu^j u^j}{1 + u^1 + u^2} \right),$$

где  $u^k = u^k(x, t)$  — «эффективные» концентрации компонент смеси, а  $\mu^j$  — их постоянные подвижности,  $j, k = 1, 2$ .

Решение поставленной задачи проводилось с помощью метода конечных объемов (МКО). В исходной постановке задача Коши определена на бесконечной оси  $-\infty < x < \infty$ . При численной реализации естественно выбирался конечный интервал такой, на котором происходят основные изменения концентраций. Использовалась обычная сетка с постоянным шагом  $x_i = ih$ . При этом ячейки  $\Omega_i$  размером  $h$  для МКО задавались с центрами  $x_i$ .

Интегрирование исходных уравнений по области каждой ячейки  $\Omega_k$  приводит к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = (\mathbf{RHS})_i,$$

где  $(\mathbf{RHS})_i$  — обозначение правой части уравнения, для получения которой применялся алгоритм решения задачи Римана с HLL аппроксимацией и линейной реконструкцией. В частности, это позволило в случаях, когда система имеет гиперболический тип, улучшить расчеты для решений, соответствующих ударным волнам. Для решения системы ОДУ использовался явный метод Эйлера с постоянным шагом по времени  $\tau$ .

Приведен сравнительный анализ полученных результатов с ранее проведенными исследованиями процесса зонального электрофореза.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 1.5169.2017/8.9 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Извлечение клинически значимых данных  
из биомеханического моделирования протяженной фиксации  
при повреждениях грудного отдела позвоночника

Донник А. М.<sup>1</sup>, Кириллова И. В.<sup>1</sup>, Коссович Л. Ю.<sup>1</sup>, Киреев С. И.<sup>2</sup>,  
Левченко К. К.<sup>2</sup>, Лихачев С. В.<sup>2</sup>, Норкин И. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Саратовский государственный медицинский университет  
им. В. И. Разумовского

Нормальное физиологическое состояние позвоночника позволяет человеку вести активный образ жизни. Резкое изменение оказываемых на позвоночник нагрузок приводит к непрерывному процессу дегенеративно-дистрофических изменений в его элементах. Нередко такие изменения приводят либо к травмам, либо к изменению физиологических параметров позвоночника, отвечающих за его нормальное функционирование. В таких случаях хирургическое вмешательство является наиболее эффективным методом лечения. К повреждениям элементов позвоночного столба относятся: переломы тел позвонков, переломы дуг позвонков, переломы остистых отростков, переломы поперечных отростков, травматический спондилолистез и др. Успешным методом хирургического лечения в настоящее время является фиксация позвоночно-двигательного сегмента, содержащего повреждения. Однако, после фиксации увеличиваются нагрузки, действующие на элементы позвоночника, расположенные краниальнее верхней зоны фиксации. В связи с этим увеличивается риск развития дегенеративно-дистрофических изменений, приводящих к таким осложнениям как синдром смежного сегмента (ASD) или проксимальный переходный кифоз (РЖК), и требуется повторное хирургическое вмешательство. Правильно подобранный способ хирургического лечения позволяет снизить риск развития осложнений в постоперационном периоде.

Эффективным подходом к планированию хирургического лечения конкретного пациента является биомеханическое моделирование, которое позволяет оценить напряженно-деформированное состояние в элементах рассматриваемого отдела позвоночника и подобрать вариант хирургической реконструкции с меньшими рисками.

Рассмотрен клинический случай. Диагноз: компрессионный перелом тела позвонка Th11 переходного грудопоясничного отдела позвоночника. Метод лечения: установка транспедикулярной фиксации на уровне позвонков Th10-Th12. При повторной травме диагноз: компрессионный перелом тел позвонков Th10, Th11. Предполагаемое лечение: установка протяженной транспедикулярной фиксации с кейджем на уровне поврежденных тел позвонков и межпозвонковых дисков. В результате биомеханического эксперимента получены значения поля полных перемещений, позволяющие сделать вывод о стабильности планируемой к установке металлоконструкции, а так же значения напряжений эквивалентных по Мизесу, на основе анализа которых выделены наиболее нагруженные области смоделированного отдела позвоночника.

## Оценка эффективности пульсирующего режима перекачки неньютоновских флюидов по трубам

**Дроздова Ю. А., Смирнова М. В.**

*Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И. М. Губкина, Москва*

Трубопроводная транспортировка вязких ньютоновских или неньютоновских флюидов насосами может осуществляться как на стационарном, так и на нестационарном режиме, зависящем от типа и мощности используемой системы нагнетания. Как правило, при добыче, транспортировке и переработке углеводородов нестационарность, в частности возникновение пульсаций, является нежелательным фактором. Однако, в некоторых случаях подобное поведение флюидов оказывается весьма полезным для промышленных задач. Развитие сети магистральных водонефте-газопроводов высокого давления, трубопроводов, ряда специальных агрегатов является повышает актуальность рассмотрения задач неустановившегося движения. В представленной работе рассматривается нестационарное течение для которого градиент давления включает в себя как постоянную, так и осциллирующую составляющую. На основе математической модели движения по трубе жидкостей с различной реологией проведена оценка эффективности пульсирующего режима перекачки. В работе проведены численные расчеты для течения ньютоновского и степенного флюидов. По результатам численных расчетов построены профили скорости для ньютоновского и степенного флюида для различных значений определяющей частоты при фиксированном индексе течения, радиусе трубы и отношении амплитуды колебаний к постоянной составляющей градиента давления. Также рассчитан средний за период колебаний расход жидкости. Определено, как наложение пульсаций на постоянный градиент давления влияет на параметры течения для рассматриваемых флюидов. Для ньютоновского флюида скорость увеличивается к середине периода и уменьшается к концу, а для дилатантного флюида скорость растет на протяжении всего периода пульсации, что, несомненно, является важным результатом. Показано, что при невысоких значениях определяющей частоты для дилатантного флюида пульсации снижают скорость течения. Большие значения определяющей частоты пульсации несут существенно влияют на скорость течения вне зависимости от значения индекса течения. Для ньютоновского флюида наложение пульсаций незначительно влияет на расход, для степенного флюида увеличивает его в несколько раз.

## Об определении уровня предварительных напряжений в неоднородных электроупругих телах

Дударев В. В.<sup>1,2</sup>, Мнухин Р. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный математический институт – филиал ВНИИ РАН, Владикавказ*

На сегодняшний день развитие современных технологий позволяет создавать и проектировать материалы с достаточно сложной структурой для придания им особых свойств. Например, функционально-градиентные пьезоматериалы обладают свойствами, которые изменяются по некоторым законам, зависящим от пространственных координат. Производство таких материалов является сложным процессом, включающим различные технологические операции, в результате которых могут возникать предварительные (остаточные) напряжения. Такие напряжения также могут возникать в результате действия некоторых скрытых воздействий в процессе эксплуатации объекта. Поскольку пьезоэлектрики обычно используются в высокоточных приборах и изделиях, то существует потребность проводить аттестацию их свойств, включая оценку уровня предварительных напряжений. Акустический метод является наиболее востребованным методом неразрушающей диагностики, поскольку позволяет исследовать широкий класс объектов, сохраняя основные свои преимущества (экономичность, простота реализации, оперативность получения результатов).

В работе на основе общей постановки задачи о движении неоднородного электроупругого тела с учетом предварительного напряженно-деформированного состояния рассмотрены задачи об установившихся радиальных колебаниях тонкого диска и продольных колебаниях стержня с переменными свойствами. Для стержня рассмотрены два случая с различными граничными условиями. Решение каждой прямой задачи об определении функции смещения после перехода к безразмерной системе дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами реализовано численно на основе метода пристрелки. Проведен анализ изменения основных акустических характеристик рассматриваемых объектов для различных законов изменения упругих свойств и уровней предварительных напряжений. Сформулированы и исследованы новые обратные коэффициентные задачи об определении уровня преднапряжений в неоднородных электроупругих телах. В качестве дополнительной информации использованы данные о значениях собственных частот колебаний, формах свободных колебаний объекта без предварительных напряжений и законах изменения преднапряжений. Получены необходимые приближенные формулы для решения сформулированных обратных задач. На основе проведенных численных экспериментов дана оценка точности построенных решений. Представлены практические рекомендации для реализации предложенных подходов диагностики уровня преднапряжений в электроупругих телах.

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-3179.2017.1), РФФИ (проект 16-01-00354 А).

## Определение одномерного ядра уравнения вязкоупругости с источником типа взрыва

**Дурдиев Д. К.<sup>1</sup>, Тотиева Ж. Д.<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup>*Бухарский государственный университет, Узбекистан*

<sup>2</sup>*Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, Владикавказ*

<sup>3</sup>*Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ*

К настоящему моменту существует много работ, посвященных одномерным и многомерным обратным задачам для системы вязкоупругой среды с учетом ее предыстории. Математически такие системы описываются интегро-дифференциальными уравнениями, содержащими интегральный оператор типа свертки по временной переменной. Определение ядра этого оператора по некоторой информации об обобщенных решениях системы является важным направлением современных исследований. Объектом исследования является интегро-дифференциальная система уравнений вязкоупругости с правой частью, представляющей собой источник возмущений типа «взрыва».

Рассмотрим при  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ ,  $t \in R$ ,  $x_3 > 0$  систему интегродифференциальных уравнений

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_i(x, t), \quad i = 1, 2, 3;$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u_i|_{t < 0} \equiv 0, \quad T_{3j}|_{x_3=+0} = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$  — вектор смещений;  $T_{ij}$  — тензор напряжений:

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t k(t - \tau) \sigma_{ij}[u](x, \tau) d\tau,$$

$\sigma_{ij}$  — напряжения, для которых согласно закону Гука имеет место представление

$$\sigma_{ij}[u](x, t) = \mu(x_3) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda(x_3) \operatorname{div} u,$$

$$\begin{pmatrix} F_1(x, t) \\ F_2(x, t) \\ F_3(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \nabla \delta(x) \delta(t).$$

В матрице  $A$  имеются по крайней мере два ненулевых диагональных элемента  $A_{11}$  (или  $A_{22}$ ) и  $A_{33}$ , а также ненулевой элемент  $A_{12}$ . Решение задачи сводится к последовательной серии обратных задач для скалярных гиперболических уравнений. Для каждого случая обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений для неизвестных функций. К последней в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами применяется принцип сжатых отображений. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости и получены оценки устойчивости решения обратных задач.

## Мультистабильность решений в популяционной модели с идеальным свободным распределением

**Епифанов А. В., Цибулин В. Г.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Согласно закону Фика, если  $u(x, t)$  и  $q$  обозначают плотность и поток популяции, соответственно, в момент времени  $t$  в точке  $x$ , то

$$u_t = -q_x. \quad (1)$$

В случае, когда поток дается формулой

$$q(x, t) = \frac{\sqrt{\frac{m(x)}{m(x-\Delta x)}}u(x-\Delta x)\Delta x - \sqrt{\frac{m(x-\Delta x)}{m(x)}}u(x)\Delta x}{\Delta t}, \quad (2)$$

переходя к пределу по  $\Delta x$  и  $\Delta t$ , для динамики вида получаем уравнение

$$u_t = k \frac{\partial}{\partial x} \left( m \frac{\partial u}{\partial x} \right) = k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \ln m}{\partial x} \right). \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что вероятность миграции в этом случае пропорциональна плотности ресурса в точке, в которую происходит миграция.

Уравнение (3) при однородных краевых условиях Неймана допускает идеальное свободное распределение  $u \equiv m$  [Fretwell, Lucas, 1970; Cantrell, Cosner, Lou, 2010]. В данном случае равновесие  $u \equiv m$  является динамическим: в каждый момент времени особи в соседних точках меняются местами пропорционально плотности ресурса. Более естественным миграционным поведением, допускающим идеальное свободное распределение, представляется миграция в направлении увеличения приспособленности. В этом случае динамика популяции описывается уравнением

$$u_t = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \frac{\partial}{\partial x} \left( 1 - \frac{u}{m} \right) \right]. \quad (4)$$

Для исследования экологических эффектов и эволюции миграции может быть предложена следующая модель

$$u_t = \nabla \cdot (k_1 \nabla u - u \nabla P) + \eta_1 u \left( 1 - \frac{u+v}{m} \right) \quad (5)$$

$$v_t = \nabla \cdot (k_2 \nabla v - v \nabla Q) + \eta_2 v \left( 1 - \frac{u+v}{m} \right), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Здесь  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  — плотности подпопуляций,  $k_i$  — коэффициенты случайной миграции,  $\alpha_i$  — коэффициенты направленной миграции,  $m(x)$  — функция ресурса,  $\eta_i$  — скорости роста при малых плотностях. В операторной форме систему (5)–(6) можно записать в виде  $w_t = Fw$ . При  $P = k_1 \ln m$ ,  $Q = k_2 \ln m$  и однородных краевых условиях Неймана система имеет семейство равновесий, а возмущенная система  $w_t = Fw + \varepsilon Qw$ , где  $Qw = (\nabla \cdot \beta_1 u \nabla v, \nabla \cdot \beta_2 v \nabla u)$  имеет положительное равновесие, которое отвечает от равновесия семейства с номером  $\theta = \frac{\beta_1/\eta_1}{\beta_1/\eta_1 + \beta_2/\eta_2}$ .

## Устойчивость составной толстой плиты с неоднородным полем предварительных напряжений

**Еремеев В. В.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Подавляющее число работ по устойчивости трехмерных нелинейно-упругих тел касается однородных тел. Число же работ, рассматривающих составные тела, а также тела, в которых начальные напряжения не совпадают, существенно меньше. Целью данной работы является исследование некоторых задач для составных толстых плит, у которых слои получены в результате выпрямления сектора цилиндра, что порождает в них неоднородное поле начальных напряжений. Практическим примером таких конструкций могут служить двухслойные плиты, составленные из разных материалов, при учете технологических напряжений. Например, это может быть осаждаемая на гибкую полимерную подложку металлическая пленка. Такие задачи оказались важны для разработки устройств гибкой электроники. Для подобных задач существенным элементом трехмерного анализа, проводимого в рамках нелинейной теории упругости, является отсутствие единой ненапряженной отсчетной конфигурации, поскольку для каждого слоя она может быть своя. Решения такого рода задач практически неизвестны в литературе, что делает данное исследование актуальным.

В данной работе рассматривалась задача о выпучивании составной прямоугольной плиты, образованной двумя слоями. Полученная плита симметрична по толщине. Каждый слой был получен в результате выпрямления сектора кругового цилиндра. Такая деформация в случае несжимаемых материалов является универсальной, другими словами, форма решения не зависит от выбора модели материала. В качестве модели материала были выбраны уравнения состояния несжимаемого материала Трелоара (неогукова материала). В работе изложены основы метода наложения малых деформаций на конечные, который лежит в основе анализа устойчивости равновесия. При консервативных внешних нагрузках статическую устойчивость произвольного заданного состояния нелинейно упругого тела можно исследовать на основе метода линеаризации, который также называется статическим методом Эйлера. Получены линеаризованные уравнения равновесия и граничные условия, дополненные соответствующими линеаризованным условием несжимаемости, решения которых строились полуаналитическим методом. Проведен анализ критических значений параметров нагружения в зависимости от геометрии задачи и свойств материала. Результаты исследования показывают, что поля начальных напряжений меняют не только значения критических нагрузок, но и характер потери устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-31-00135.



Установившиеся колебания  
пьезомагнитоэлектрических наноразмерных композитных тел  
со связанными поверхностными и интерфейсными эффектами

Еремеев В. А.<sup>1,2</sup>, Наседкин А. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Гданьский политехнический университет, Польша*

В работе изучаются задачи об установившихся колебаниях пьезомагнитоэлектрических (магнитоэлектрических или электромагнитоупругих) наноразмерных тел с учетом связанных демпфирующих и поверхностных эффектов. Для гомогенной модели считается, что магнитоэлектрический композитный материал может рассматриваться как однородный с соответствующими эффективными свойствами. Для рассматриваемых задач предлагается математическая модель, обобщающая модели упругих и пьезоэлектрических сред с затуханием в смысле подхода Рэлея и модели поверхностных эффектов Гуртина-Мурдоха на случай более общих магнитоэлектрических материалов. В данной модели механические, электрические и магнитные поля связываются с учетом анизотропии не только по определяющим соотношениям в объеме материала, но и по аналогичным определяющим соотношениям на поверхности. В этих определяющих соотношениях введены также диссипативные члены, причем как для механических полей, так и для электрических и магнитных. Разработанная модель допускает рассмотрение аналогичных задач для магнитоэлектрических композитных тел, состоящих из наноразмерных пьезоэлектрических и магнитоэлектрических фаз. Для таких композитов наноразмерность включений моделируются межфазными условиями, подобными граничным условиям для поверхностных полей, причем также с учетом связанности полей различной природы и затухания.

Для дальнейшего анализа представлены слабые или обобщенные постановки задач об установившихся колебаниях, а также спектральных задач на собственные частоты. Для численного решения этих задач представлены аппроксимации метода конечных элементов. Рассмотрен набор эффективных конечно-элементных схем, использующих симметричную структуру конечно-элементных матриц. Отмечено, что поверхностные или интерфейсные эффекты можно моделировать специальными поверхностными или межфазными конечными элементами. Эти элементы могут быть получены из соответствующих объемных элементов в результате процедур коллапса противоположных узлов. Для задач об установившихся колебаниях отмечено, что предлагаемые модели при одинаковых объемных и при одинаковых поверхностных коэффициентах затухания позволяют использовать метод суперпозиции мод, эффективный для анализа вкладов отдельных мод колебаний.

Описаны также процедуры гомогенизации магнитоэлектрических наноструктурированных композитных материалов с пьезоэлектрическими и пьезомагнитными фазами на основе методов эффективных модулей и конечных элементов. В этих процедурах используются разработанные модели с интерфейсными эффектами, редуцированные на случаи статических задач гомогенизации.

Работа выполнена в рамках проекта РФФ № 15-19-10008-П.

## Моделирование рассеяния бегущих упругих волн на трехмерных неоднородностях в слоистых волноводах

**Еремин А. А., Новиков О. И., Варелджан М. В.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Изучение взаимодействия бегущих упругих волн с макронеоднородностями различной природы в слоистых упругих материалах – одна из традиционных задач волновой динамики, возникающих в ультразвуковом неразрушающем контроле и диагностике состояния инженерных конструкций, сейсмике, медицине и других областях. Важным этапом ее решения является разработка и реализация математических и компьютерных моделей, адекватно описывающих соответствующие дифракционные процессы. Данные модели позволяют не только провести анализ характерных особенностей рассеяния набегающих волн на неоднородностях разных типов (прямые задачи), но и в случае их вычислительной эффективности служат основой для их идентификации ультразвуковыми методами (обратные задачи).

В настоящем докладе аспекты моделирования трехмерной дифракции обсуждаются на примере задачи взаимодействия фундаментальных волн Лэмба с дефектом типа локализованного изменения толщины цилиндрической формы с произвольной гладкой направляющей – точечное коррозионное воздействие, характерное для тонкостенных конструкций из металлов. В области низких и средних частот развивается подход, основанный на использовании приближенных теорий пластин нулевого и первого порядков (аппроксимация Миндлина для фундаментальной антисимметричной моды и теория Лява для симметричной волны). При решении задачи в полной трехмерной постановке используется полуаналитический метод слоистых элементов, в рамках которого рассеянное поле представляется в виде суперпозиции полей точечных или распределенных потенциалов простого слоя для упругого волновода (слоистых элементов), по построению тождественно удовлетворяющих однородным граничным условиям на плоскопараллельных границах структуры. Таким образом, дискретизировать необходимо только границу неоднородности. Кроме того, обсуждаются возможности применения и реализации гибридных численно-аналитических подходов, основанных на сопряжении численного (сеточного) решения в локальной окрестности препятствия с асимптотическими представлениями бегущих упругих волн в бесконечной внешней области. В качестве примеров использования разрабатываемых компьютерных моделей приводятся результаты параметрического анализа диаграмм направленности рассеянного волнового поля в зависимости от геометрических параметров дефекта и типа набегающей волны. В случае глубокого дефекта выявлены почти вещественные комплексные резонансные частоты рассеяния (дискретный спектр задачи дифракции), наличие которых подтверждено экспериментально.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01191).

## Влияние седиментации примеси на рельеф дна водоема

**Жуков М. Ю.<sup>1,2</sup>, Ширяева Е. В.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, Владикавказ*

На основе математической модели двухслойной сплошной среды исследовано влияние седиментации примеси в потоке жидкости на рельеф дна водоема (морфология дна). Модель построена при помощи метода осреднения по толщине слоев. Первый (верхний) бесконечный горизонтальный слой считается заполненным жидкостью с примесью, а второй (нижний) бесконечный горизонтальный слой представляет собой примесь, выпавшую в осадок. При осреднении уравнений движения предполагается, что равновесное течение в верхнем слое является турбулентным с логарифмическим профилем вертикальной скорости, а при осреднении уравнений диффузии с переносом считается, что равновесный вертикальный профиль распределения концентрации совпадает с профилем Роуза. Все границы слоев — верхняя, нижняя и граница между слоями, предполагаются движущимися и их поведение определяется в процессе решения задачи. Построенная модель представляет собой систему квазилинейных уравнений гиперболического типа с коэффициентами, зависящими от координат и времени. При этом оказывается, что замкнутую математическую модель можно получить лишь задавая заранее поведение одной из указанных границ.

На основе общей модели строится серия асимптотических моделей. В частности, рассмотрено приближение кинематических волн для осредненного пространственно одномерного течения, когда в качестве известной границы выбирается верхняя свободная граница слоев. Указанный выбор связан с тем, что именно поведение этой границы возможно контролировать, например, при экспериментальных измерениях.

Для полной модели приведены результаты расчетов профилей скорости, концентрации, и определено поведение границ слоев. Вычисления проводились при помощи метода конечных элементов и метода конечных объемов на структурированных сетках. Оказалось, что многие гидрологические эффекты, в частности, образование пространственных структур на дне водоема, хорошо описываются предложенной моделью, если в качестве динамического условия на границе между слоями выбирается обычное равенство касательных напряжений.

В случае приближения кинематических волн, после ряда дополнительных упрощающих предположений, в частности, требования малости толщины слоя осадочной примеси по сравнению с толщиной слоя жидкости, удалось свести задачу к исследованию одного квазилинейного уравнения. Показано, что даже малый периодические возмущения толщины верхнего слоя приводят к образованию на нижней границе слоев ударных волн — на дне водоема возникает дюнообразный рельеф.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 1.5169.2017/8.9 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

О касательных напряжениях на границе между слоями  
для двухслойной модели седиментации примеси в потоке жидкости

**Жуков М. Ю.<sup>1,2</sup>, Ширяева Е. В.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, Владикавказ*

Для описания процесса седиментации примеси в потоке жидкости используется двухслойная модель сплошной среды. Верхний слой считается заполненным жидкостью со взвешенной примесью, а нижний слой состоит из жидкости и осадочной примеси. Для построения уравнений, описывающих седиментацию, использован метод осреднения по толщине для двух бесконечных горизонтальных слоев. В качестве равновесных профилей вертикальной скорости и вертикального распределения концентрации при осреднении выбирается логарифмический профиль скорости и степенное распределение концентрации, соответственно. Такие вертикальные профили возникают при решении полной квазистационарной гидростатической модели в предположении, что турбулентная вязкость и турбулентная диффузия заданы функциями квадратичными по толщине слоя.

В гидрологии при построении моделей седиментации, как правило, используется большое количество полуэмпирических законов, определяющих поток жидкости, скорость седиментации примесей и т. п. В частности, большое внимание уделяется коэффициенту (формуле) Шези, связывающему полуэмпирическим соотношением среднюю эффективную скорость потока жидкости с толщиной и уклоном слоя. Удалось показать, что в случае, когда уклон верхнего слоя постоянен и на границе между слоями со взвешенной и осадочной примесью в качестве динамического условия выбрано естественное требование равенства касательных напряжений, формула Шези является точной, а вовсе не полуэмпирической. Значение коэффициента Шези, вычисленное по точной формуле, близко к тем значениям коэффициента, которые в гидрологии обычно предлагается выбирать в виде приближенных значений.

При конструировании математической модели седиментации примеси в двухслойной среде при помощи метода осреднения выяснилось, что замкнутую модель можно получить лишь в случае, когда одна из границ слоев задана, тогда как поведение двух других слоев описывается уравнениями модели. Оказалось, что обычно используемое в гидрологии предположение об адаптации слоев — границы верхнего и нижнего слоев описываются одними и теми же соотношениями, применимо лишь в случае, когда границы слоев являются плоскими. Показано, что выбор одной из границ — верхней, нижней или между слоями, в качестве известной, приводит к различным моделям для описания процесса седиментации. Рассмотрены различные законы оседания примеси в поле тяжести (для крупных, мелких и средних частиц примеси) и даны некоторые рекомендации по их выбору.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 1.5169.2017/8.9 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

## Проявление эффекта кривизны геометрического концентратора в условиях упруго-пластического деформирования

**Журавлев Г. А.<sup>1</sup>, Дроботов Ю. Е.<sup>1,2</sup>, Вакулов Б. Г.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*ООО НПП «Вибробит», Ростов-на-Дону*

Применение в телах сложной формы с выступами, нагруженными в условиях поперечного изгиба (Патент СССР № 1075041, 26.12.1980г.; Евразийский патент № 011706, 28.04. 2009), выявленного ранее Г. А. Журавлевым эффекта кривизны геометрического концентратора (ЭКГК), дает возможности снижения концентрации напряжений с одновременным уменьшением размеров радиуса и других размеров геометрического концентратора.

Такие малоразмерные концентраторы (с реализацией ЭКГК) получили оценку напряженно-деформированного состояния (НДС) в форматах аналитических решений упругих (плоской и пространственной) задач, приведенных в предыдущих работах авторов (Zhuravlev G. A., Drobotov Yu. E., 2013; Drobotov Yu. E., Zhuravlev G. A., 2016). Здесь будут даны (в развитие работы Г. А. Журавлева, 1981) решения задач о концентрации напряжений в условиях упруго-пластического деформирования.

В качестве упругого аналога принято аналитическое решение Г. Нейбера плоской задачи о чистом изгибе стержня с симметричными глубокими гиперболическими выточками. Данное решение основано на представлении пространственной функции напряжений в виде комбинации гармонических функций (до Нейбера данный метод был использован Г. Д. Гродским и П. Ф. Папковичем). Так, для плоского напряженного состояния имеем следующие основные уравнения:

$$\begin{cases} F = \Phi_0 + x\Phi_1, & \Phi_i = \Phi_i(x, y), \\ \Delta\Phi_i = 0, & i = 0, 1. \end{cases}$$

В рамках настоящей работы получено решение данной задачи для случая следующей изометрической криволинейной системы координат:

$$\begin{cases} x(u, v) = \sinh(u)\varphi(v), \\ y(u, v) = -\cosh(u)\varphi'(v), \end{cases} \quad \varphi(v) = A \cos(v) + B \sin(v),$$

где выбор значений  $A = 1$  и  $B = 0$  обеспечивает систему координат, введенную Г. Нейбером. Использование же более общей системы координат позволяет ставить вопросы, в частности, о напряженном состоянии стержня с произвольной шириной опасного сечения, а также об использовании данной модели для определения напряженного состояния выступа сложной формы в разрабатываемом авторами методе локальных аппроксимаций.

В качестве основного результата настоящей работы показано, что нагружение стержня поперечным изгибом может привести (в том числе – и при упруго-пластическом деформировании) к качественно иному влиянию кривизны выточки стержня на концентрацию напряжений.

## Механизмы деформирования и закономерности локализованного разрушения песчаников при трехосном квазистатическом нагружении

Зайцев А. В.<sup>1</sup>, Карев В. И.<sup>2</sup>, Коваленко Ю. Ф.<sup>2</sup>, Пантелеев И. А.<sup>3</sup>,  
Сидорин Ю. В.<sup>2</sup>, Соколкин Ю. В.<sup>1</sup>, Устинов К. Б.<sup>2</sup>, Шевцов Н. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва

<sup>3</sup>Институт механики сплошных сред Пермского федерального НЦ УрО РАН

Для исследования закономерностей накопления повреждений в песчанике при многоосном нагружении проведены эксперименты на испытательной системе трехосного независимого нагружения (ИСТНН), с непрерывной регистрацией акустической эмиссии (АЭ). ИСТНН — уникальная установка, позволяющая определять деформационные и прочностные свойства пород при независимом трехосном нагружении по траекториям в виде многозвенных ломаных. Для регистрации АЭ была использована многоканальная высокопроизводительная система AMSY-6 (Vallen) с широкополосными датчиками. Программы нагружения разработаны так, чтобы были реализованы виды напряженно-деформированного состояния, связанные с практикой выполнения горных работ: двух- или трехосное сжатие, чистое формоизменение, одноосное сжатие с боковым распором.

При двухосном нагружении датчики АЭ закреплялись на свободной грани образца и плитах ИСТНН, участвовавших в нагружении. Установлено качественное соответствие между закономерностями изменения АЭ на образцах и плите позволило провести трехосные испытания с регистрацией АЭ на всех нагружающих плитах. Установлены характерные зависимости интенсивности потока АЭ от вида траектории нагружения. Выделены предвестниковые изменения параметров АЭ, связанные с появлением макродефектов. Проведена идентификация источников АЭ, получена их связь с механизмами разрушения на основе результатов решения задачи кластеризации импульсов методом *k*-средних. Наиболее вариативными характеристиками оказались максимальная амплитуда импульсов, частота максимума спектра и приведенное время нарастания.

Для исследования закономерностей перераспределения энергии в процессе эволюции дефектов, определения условий перехода к локализованному разрушению разработана двухуровневая структурно-феноменологическая модель хрупкой горной породы. Описаны локальная неустойчивость разрушения и смена механизмов накопления повреждений. Установлено, что появление признаков локальной неустойчивости свидетельствует о переходе от этапа дисперсного накопления повреждений, предопределяемого стохастической структурой и описываемого в рамках статистических представлений, к локализации, предопределяемой условиями перераспределения энергии внутри повреждаемого материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ-Урал № 17-41-590148).

Аналитические решения задач о равновесии горизонтальных ортотропных цилиндров, находящихся под действием гравитационных сил и неравномерного бокового давления

**Зайцев А. В., Кутергин А. В., Соколкин Ю. В.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

Потребность в решении задач для тяжелых анизотропных цилиндрических тел обусловлена широким спектром приложений в различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях нефте-газо-химического комплексов. Примерами могут служить задачи геомеханики хранения и добычи полезных ископаемых (монолитные крепи горизонтальных горных выработок), промышленного и дорожного строительства (конструкции и сооружения неглубокого залегания: реагентопроводы химических производств, пульпопроводы, облицовки туннелей), при решении которых необходимо учитывать осевую симметрию, равномерно и/или неравномерно распределенные внешнее и/или внутреннее давление. Получение новых аналитических решений важно и для разработки инженерных методов уточненного прочностного анализа, для тестирования численных алгоритмов решения более сложных задач, в которых отдельные элементы конструкций и сооружений имеют аналогичную геометрию и граничные условия, а также для отработки методик эксперимента с тяжелыми телами простейшей геометрии.

Получены новые точные аналитические решения задач о равновесии полых и составных толстостенных тяжелых цилиндрических тел, жестко закрепленных по внутренней или внешней поверхности и находящихся под действием равномерного или неравномерного внешнего или внутреннего давления. При интегрировании неоднородной системы уравнений Ламе в цилиндрических ортогональных координатах метод разделения переменных позволил понизить размерность задачи, а использование обобщенных степенных рядов — записать частное решение. Из полученных решений в частном случае следуют выражения для напряжений, деформаций и перемещений в точках полых и составных тяжелых изотропных цилиндров с аналогичными граничными условиями.

Рассмотрена задача о равновесии тяжелого железобетонного цилиндра, находящегося на грунтовом основании. Площадь контактной поверхности предполагалась известной и неизменной, а реакция основания считалась заданной в виде квадратичной функции (на части внешней поверхности тела, не имеющей общих точек с основанием принималась равной нулю), на которую налагалось условие равенства ее интегральной суммы весу конструкции. Это предположение позволило записать граничные условия для определения постоянных интегрирования частного решения, на основе которого были проанализированы распределения полей перемещений и напряжений в поперечных сечениях горизонтальных монолитных железобетонных цилиндров, нижняя половина которых вкопана в грунт.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ-Урал № 17-41-590148).

Неупругое деформирование уплотнительных элементов  
из терморасширенного графита и композитов на его основе  
при эксплуатации трубопроводной арматуры

**Зубко И. Ю., Кокшаров В. С., Шавкун Д. В.**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

Терморасширенный графит (ТРГ) — уникальный материал, который вне зависимости от условий эксплуатации (повышенные температуры, термоциклирование, контакт с агрессивными средами) обладает высокими деформационными свойствами и термо-химической стойкостью, низким коэффициентом трения. Уплотнительные элементы (УЭ) из ТРГ — «традиционные» уплотнительные кольца (УК) и разборные УЭ — надежны, не требуют дополнительной герметизации при эксплуатации, работают при температурах до 560 °С и давлениях до 40,0 МПа в кранах с уплотнениями по штоку и во фланцевых соединениях трубопроводов. Разработана модель начального режима работы УК и УЭ из ТРГ для трубопроводной арматуры большого диаметра, учитывающая цилиндрическую анизотропию, экспериментально определенные упругие и прочностные характеристики ТРГ. Контактное давление определялось экспериментально на основе разработанной методики с использованием ультратонких пленок Fuji Prescale, размещаемых в зоне контакта. Получены новые численные решения задач для отдельных колец и их пакетов в режиме «приработки» квазистационарных условиях без износа, проведена оценка начальной прочности при различных температурах и давлениях рабочей среды, различной толщине и количестве УК в сальниковой камере, различных режимах возвратно-поступательного и вращательного движения штока, а также различных условиях на поверхностях контакта.

Основной причиной выхода из строя трубопроводной арматуры является протечка во фланцевых соединениях, герметичность которых достигается путем точной установки УЭ, заданными моментами затяжки шпилек, обеспечивающих однородность давления по всей площади контакта, «жесткими» требованиями по шероховатости и отклонениям от параллельности поверхностей фланца. Для повышения прочности и износостойкости, было предложено новое конструктивное решение — армирование ТРГ перфорированной металлической пластиной (были определены эффективные свойства и коэффициенты концентрации напряжений), вызвавшей неоднородность распределения давления на поверхности контакта УЭ и фланца, что было подтверждено качественным и количественным совпадением результатов тестовых расчетов и натурных испытаний с использованием пленок Fuji Prescale на стенде для гидравлических испытаний на герметичность фланцевых уплотнений СИГ-1.400. Было показано, что перепады давлений, вызванные неоднородностью армированного УЭ, не оказывают влияния на эксплуатационные характеристики, а неоднородность контактного давления, вызванная отклонением от параллельности поверхностей фланца, приводит к значительным перепадам давлений и разгерметизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ-Урал № 17-41-590377).



## Универсальное решение нелинейной теории упругости для цилиндрической трубы с предварительно напряжёнными покрытиями

**Зубов Л. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается задача о больших деформациях составного нелинейно упругого полого цилиндра, подверженного внутреннему и внешнему давлениям и нагруженного по торцам продольной силой и крутящим моментом. Составное тело представляет собой цилиндрическую трубу с внутренним и внешним покрытиями в форме полых круговых цилиндров (втулок). Втулки присоединяются к трубе и скрепляются с ней после их предварительной деформации. Начальная деформация этих цилиндрических покрытий описывается 4-параметрическими семействами функций и представляет собой раздувание, растяжение и кручение в сочетании с образованием винтовой дислокации и клиновой дисклинации. Такой подход позволяет моделировать достаточно широкий класс статически возможных полей предварительных напряжений в покрытиях.

К появлению предварительных напряжений в отдельных слоях могут приводить такие современные технологии, как химическое парофазное осаждение и напыление, атомно-силовое осаждение и др. Анализ поведения конструкции с предварительно напряжёнными слоями актуален также для аддитивных технологий (3D-печать).

При решении задачи о растяжении-сжатии, кручении и раздувании составного цилиндра за отсчётную конфигурацию принимается такая, которая представляет собой естественное (ненапряжённое) состояние для среднего цилиндрического слоя и является предварительно напряжённой для цилиндрических покрытий.

Решение задачи о конечных деформациях составной трубы осуществляется в рамках общей модели изотропного несжимаемого нелинейно упругого материала. Свойства материалов средней части трубы и поверхностных покрытий, вообще говоря, описываются различными функциями отклика. Кроме того, допускается произвольная неоднородность материальных свойств по радиальной координате. Найденное точное решение поставленной задачи справедливо для любого изотропного несжимаемого материала, т. е. универсально в указанном классе упругих материалов.

Выраженное в квадратурах поле напряжений в составной трубе позволяет, в частности, вычислить продольную силу и крутящий момент в сечении трубы с покрытиями при заданных осевом удлинении, угле закручивания и величинах внешнего и внутреннего давлений, а также определить поле остаточных напряжений в трубе, возникающих при отсутствии внешних нагрузок.

Использованный в представленной работе метод решения пригоден также для многослойных цилиндров из ортотропных нелинейно упругих материалов и неоднородных цилиндрических тел с винтовой анизотропией.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-11-00069).

## Численное моделирование процессов упругопластического деформирования конструкционных сталей по многозвенным ломаным прямолинейным траекториям

**Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И.**

*Тверской государственный технический университет*

Рассматриваются основные положения и уравнения математической модели теории упругопластических процессов начально-изотропных материалов для плоских многозвенных ломаных траекторий. При численном моделировании использовалась математическая модель теории процессов с уточненными аппроксимациями функционалов, предложенными В.Г. Зубчаниновым, содержащая все параметры сложного нагружения для плоских траекторий. Материальные параметры аппроксимаций получены при обработке данных базовых опытов по типу «веера» двузвенных траекторий. Основные уравнения математической модели приведены к задаче Коши, для численного решения которых и получения расчетных результатов по заданной траектории деформирования используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Для верификации математической модели проведены исследования процессов упругопластического деформирования материала сталь 45 в векторном пространстве деформаций по четырехзвенной неаналитической траектории типа «песочные часы». Экспериментальные исследования проведены на автоматизированном испытательном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний Тверского государственного технического университета. Методика проведения экспериментальных исследований базируется на подходе теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина, в которой история изменения напряжений и деформаций с течением времени представляется соответствующими траекториями в пятимерных векторных пространствах. При этом связь между напряжениями и деформациями описывается скалярными свойствами, характеризующими связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, и векторными свойствами, характеризующими несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений. Экспериментальные исследования проводились с постоянной скоростью при комнатной температуре на трубчатых тонкостенных образцах из стали 45. Траектория деформирования состояла из четырех прямолинейных кусочно-ломаных участков с углами излома 135 градусов при одновременном растяжении либо сжатии с кручением. Были исследованы особенности и закономерности поведения скалярных и векторных свойств материала и построены экспериментальные зависимости между исследуемыми величинами.

Сравнение полученных результатов расчета с данными физического эксперимента показало, что предлагаемая математическая модель теории процессов дала результаты, хорошо соответствующие данным эксперимента, как по скалярным, так и векторным свойствам материала, что подтверждает достаточную для практических задач достоверность расчетных данных и точность построенных аппроксимаций функционалов процессов.

Плоская задача множественного контакта для основания  
с многослойным неоднородным покрытием

Казаков К. Е.<sup>1,2</sup>, Курдина С. П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

В настоящей работе рассматриваются плоские задачи взаимодействия регулярной системы жестких штампов и стареющего вязкоупругого слоя с продольно неоднородными многослойными упругими покрытиями, т.е. покрытиями, свойства слоев которых не меняются по глубине, но зависят от продольной координаты. Под регулярной системой штампов понимается множество одинаковых штампов, расстояния между которыми одинаковы. Продольная неоднородность обуславливается особенностями изготовления слоев покрытия, их обработкой (травление, лазерная обработка, термическая обработка, ионная имплантация и т. д.). Неоднородность может быть связана с использованием материалов с различными свойствами. Рассматривается случай, когда неоднородности слоев описываются различными периодическими функциями, однако их периоды одинаковы и равны расстояниям между осями штампов. Считается, что суммарная толщина слоев значительно меньше ширины штампов, между всеми слоями, на границе слоя и подстилающего недеформируемого основания, а также между верхним слоем и штампами осуществляется гладкий контакт. Рассматривается случай плоской деформации. Под воздействием приложенной к штампам нагрузки основание деформируется, а штампы перемещаются и поворачиваются. Нагрузка должна быть такой, чтобы, области контакта были равны ширинам штампов и со временем не изменялись.

Рассмотрены различные варианты возможной постановки задачи. Получена система разрешающих интегральных уравнений с системой дополнительных условий, которая приведена к одному операторному уравнению с тензорным ядром и двум векторным дополнительным условиям в функциональном векторном пространстве. Поскольку применение классических методов (например, метода ортогональных многочленов) приводит к необходимости исследования бесконечных систем интегральных уравнений Вольтера, то для нахождения ее решения использован проекционно-спектральный метод. Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы поверхности основания выделена в явном виде отдельным сомножителем. Это позволяет проводить расчеты для покрытий, неоднородности слоев которых описываются быстро изменяющимися и даже разрывными функциями. Также получены аналитические выражения для определения осадок и углов наклона штампов.

Авторы благодарят А.В. Манжирова за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы. Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) при частичной поддержке РФФИ (проект № 18-01-00770).

## Бифуркационное поведение решений системы Фитцхью — Нагумо с диффузией

**Казарников А. В.**

*Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, Владикавказ*

В настоящей работе рассматривается однородная система Фитцхью — Нагумо с диффузией

$$\begin{aligned} v_t &= \nu_1 \Delta v + \epsilon(w - \alpha v) \\ w_t &= \nu_2 \Delta w - v + \mu w - w^3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v = v(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega$ , состоящей из конечного числа непересекающихся замкнутых  $(m - 1)$ -мерных поверхностей класса  $C^1$ ,  $t > 0$  — время;  $\mu \in \mathbb{R}$  — управляющий параметр,  $\alpha \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$  — фиксированные параметры реакции,  $\nu_1 > 0$ ,  $\nu_2 > 0$  — фиксированные коэффициенты диффузии.

Модель (1) представляет собой пространственно-распределенный аналог двухкомпонентной редукции модели Ходжкина — Хаксли распространения нервного импульса в гигантском аксоне кальмара. В системе (1) одна компонента решения является быстрой и представляет собой потенциал мембраны, а вторая — медленной и играет роль переменной восстановления. В настоящей работе рассмотрен предельный случай системы Фитцхью — Нагумо, когда  $\epsilon = 1$  и обе компоненты считаются быстрыми.

Предполагается, что на границе области  $\Omega$  заданы краевые условия Дирихле

$$v|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

либо смешанные краевые условия, когда на части границы заданы краевые условия Дирихле, а на оставшейся границе — Неймана

$$v|_{S_1} = w|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{S_2} = \frac{\partial w}{\partial n}|_{S_2} = 0, \quad S_1 \cup S_2 = \partial\Omega, \quad (3)$$

либо краевые условия Неймана

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

В работе найдены критические значения управляющего параметра  $\mu$ , определена зависимость типа потери устойчивости от значений коэффициентов диффузии  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и фиксированного управляющего параметра  $\alpha$ . В случае одной пространственной переменной  $x \in [0, l]$  при краевых условия Неймана (4) методом Ляпунова — Шмидта построены первые члены разложения вторичных пространственно-неоднородных стационарных решений в степенной ряд, а также исследованы формулы для  $n$ -го члена разложения. Проведено численное исследование разрушения вторичных стационарных режимов.

## Антиплоские задачи об установившихся колебаниях при наличии поверхностных напряжений

**Калинина Т. И.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону  
Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ)  
им. М. И. Платова, Новочеркасск*

Задачи наномеханики в последние годы являются крайне популярными в силу все возрастающей их практической и научной значимости. Например, все больший интерес стали вызывать ультратонкие пленочные структуры. При этом экспериментальные и теоретические исследования показывают, что наноразмерные тела обнаруживают ряд свойств, отличных от свойств тел обычных размеров. Для описания этих наноразмерных эффектов были разработаны различные теоретические и инженерные подходы. Так, существует теория, основанная на методах молекулярной динамики, теория размерных эффектов и различные теории поверхностной упругости. В настоящей работе учет наноразмерности описывается в рамках теории поверхностных напряжений Гуртина-Мурдоха. Эта теория отражает размерный фактор, связанный с увеличением отношения поверхности тела к его объему при переходе на наноуровень.

В данной работе рассматриваются две задачи об антиплоских установившихся колебаниях упругого изотропного слоя (полосы) наноразмерной толщины. В обеих задачах рассматривается действие осциллирующих сдвиговых нагрузок на границах слоя, причем в первой задаче нагрузки прикладываются симметрично относительно средней поверхности слоя, а во второй задаче нагрузки прикладываются антисимметрично. Для учета наноразмерности считается, что на торцах слоя действуют помимо внешних нагрузок также поверхностные напряжения. Для этих поверхностных напряжений принимается «поверхностный» закон Гука с соответствующими поверхностными модулями жесткости, отличными как по величине, так и по размерности от модулей жесткости в объеме тела.

Описанные задачи решаются классическим способом с использованием принципа предельного поглощения, преобразования Фурье по бесконечно протяженной координате и теории вычетов при вычислении обратного преобразования Фурье.

В продолжении исследований дисперсионных соотношений, выполненных ранее (см. *Physica E*, 2013, vol. 49, pp. 13-17), в настоящей работе изучены задачи о вынужденных колебаниях и изучены энергетические характеристики нормальных волн в слое. Получены выражения для осредненных за период колебаний энергий и потоков энергий нормальных волн. Отмечено, что поверхностные эффекты оказывают существенное влияние при уменьшении толщины слоя, т.е. когда слой превращается в ультратонкую нанопленку.

Автор благодарит за помощь в работе заведующего кафедрой математического моделирования Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ А.В. Наседкина.

## Решение задач для анизотропных пластинок с отверстиями и краевыми трещинами

**Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Занько А. И.**

*Донецкий национальный университет*

С использованием комплексных потенциалов решены задачи теории упругости для пластинки с эллиптическими отверстиями и прямолинейными трещинами, которые представляются эллипсами, одна из полуосей которых равна нулю. Трещины могут выходить на контуры отверстий, а в случае конечных областей и на внешние контуры. При этом любые криволинейные контуры области аппроксимируются совокупностями дуг эллипсов или берегов трещин. С использованием конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера для комплексных потенциалов получены выражения вида

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad (1)$$

где  $\Gamma_k$  – постоянные, равные нулю в случае конечной пластинки и определяемые из условий на бесконечности, если пластинка бесконечная;  $\varphi_{kln}(z_k)$  – известные функции обобщенных комплексных переменных  $z_k$ ;  $a_{kln}$  – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах области и на берегах трещин обобщенным методом наименьших квадратов. При этом для определения  $a_{kln}$  получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая решается методом сингулярных разложений матриц. После нахождения этих постоянных комплексные потенциалы становятся известными и по ним можно вычислять напряжения

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1 - \mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (2)$$

в любой точке пластинки, а в случае трещин и коэффициенты интенсивности напряжений для их концов

$$(k_1^\pm, k_2^\pm) = \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (s_k, r_k) \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} n a_{kn}, \quad (3)$$

$s_k, r_k$  – известные величины.

Численные исследования проведены для случая кругового (эллиптического) диска с одной или двумя краевыми трещинами, для кругового (эллиптического) кольца с трещинами, выходящими на один из контуров, для пластинки с круговым отверстием и одной или двумя краевыми трещинами, для пластинки с двумя круговыми отверстиями и соединяющими их линейным разрезом. Показано согласие полученных результатов с известными для частных случаев.

Решение периодической задачи термоэлектромагнитоупругости для кусочно-однородной пластинки при действии линейного потока тепла

**Калоеров С. А., Глушанков Е. С.**

*Донецкий национальный университет*

Решена периодическая задача термоэлектромагнитоупругости для пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями, находящейся под действием линейного потока тепла. Методом суперпозиции и с использованием решения задачи о действии потока тепла в сплошной пластинке исходная задача сведена к нахождению обобщенных комплексных потенциалов задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости для пластинки и включений:

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{5l}^{-n}; \quad F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{5n}^{(l)} P_n(z_5^{(l)}); \quad (1)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \ln \zeta_{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{kl}^{-n}; \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} P_n(z_k^{(l)}), \quad (2)$$

$\Gamma_k, B_k$  — известные постоянные;  $\zeta_{kl}$  — переменные, определяемые из соответствующих конформных отображений внешностей единичных кругов на внешности эллипсов;  $P_n(z_k^{(l)})$  — полиномы Фабера для соответствующих эллипсов;  $c_5, c_{5n}, c_{5n}^{(l)}, a_{kn}, a_{kn}^{(l)}$  — постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах включений. Учитывая периодичность напряженного состояния и используя обобщенный метод наименьших квадратов, из граничных условий на контуре одного из включений исходная задача сведена к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений по определению неизвестных постоянных задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости. Эти системы решаются методом сингулярного разложения матриц.

Проведены численные исследования по изменению значений напряжений, индукций и напряженностей электромагнитного поля. Если включения являются прямолинейными, вычисляются и коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН). Исследованиями установлено, что пренебрежение электромагнитными свойствами приводит к значительному искажению реальных значений напряжений, причем чем больше пирозлектрические и пиромангнитные постоянные материала пластинки, тем больше это искажение. На значения напряжений в зонах между включениями значительно влияет расстояние между контурами, вне этих зон влияние расстояния незначительно. При расстояниях между контурами более 10 диаметров включений влияние одних включений на напряженное состояние около других незначительно и им можно пренебречь, ограничиваясь решением задачи при наличии только одного включения, для которой получается точное аналитическое решение. Если отношение полуосей эллипса меньше  $10^{-3}$ , то включение можно считать линейным и для него вычислять КИНИН, изменения которых подчиняются вышеуказанным закономерностям.

Расчет влияния дислокационной эмиссии из вершины трещины на коэффициенты интенсивности напряжения при смешанном нагружении

**Карпинский Д. Н., Санников С. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Явление вязко-хрупкого перехода в нагруженных твердых телах обусловлено сменой механизма эмиссии дислокаций из вершин трещин на механизм роста трещины (скол). Испущенные дислокации снижают концентрацию напряжения у вершины и увеличивают вязкость разрушения образца, а соотношение зависимостей затрат энергий на зарождение дислокации и роста трещины при любых радиусах вершины позволяет классифицировать материалы как хрупкие или вязкие. Зародившаяся дислокация образует ступеньку на поверхности вершины трещины (затупление вершины) и экранирует упругое поле трещины. Обычно анализируются энергетические затраты зарождения одной дислокации, в то время как на опытах наблюдают скопления дислокаций у вершины. Скопление испущенных дислокаций существенно влияет на форму вершины и экранирует напряжения у вершины трещины.

Цель расчета заключается в получении равновесного распределения скопления испущенных дислокаций из вершины трещины и зависимости коэффициентов интенсивности напряжения (КИН) от количества испущенных дислокаций. При этом расчет последовательно учитывает воздействие каждой дислокации на геометрию вершины (образование ступеньки) и упругое экранирование, а также влияние поверхностного натяжения на берегах трещины. Внешние растягивающее и сдвиговое внешние напряжения подобраны так, чтобы максимум сдвигового напряжения (напряжение Вестергарда) совпадали с системой легкого скольжения. Расчет показал существенное отличие результатов расчетов КИН, учитывающих затупление вершины трещины и без учета затупления.

Рассмотрим плоскую задачу об эмиссии дислокации из вершины затупленной трещины, расположенной в плоскостях скола бесконечного ОЦК кристалла. В расчете выбраны следующие плоскости скола: 1) плоскость скола (100), направление линии фронта трещины [001]; 2) плоскость скола (110), направление линии фронта трещины [001]; 3) плоскость скола (011), направление линии фронта трещины [0]; 4) плоскость скола (001), направление линии фронта трещины [110]. Углы между плоскостями скола и системами легкого скольжения  $\langle 111 \rangle$  110 и  $\langle 111 \rangle$  112 принимают значения: для ориентации 1)  $45^\circ$ , 2)  $45^\circ$ , 3)  $54,73^\circ$ , 4)  $35,26^\circ$ . К плоскостям кристалла приложены однородные напряжения растяжения (мода I) и сдвига (мода II), достаточных для эмиссии дислокаций, но недостаточных для ее роста. Дислокации испускаются из вершины трещины при выполнении условия превышения порогового значения КИН.

Расчет выполнен для кристалла  $\alpha - Fe$ . Результаты расчета показали, что с увеличением количества испущенных дислокаций происходит отклонение максимума сдвиговых напряжений от направления легкого скольжения, влияние поверхностных напряжений убывает при затуплении вершины трещины.



## Полуобратный анализ конечных деформаций тел с микроструктурой

**Карякин М. И.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Существует много подходов к изучению многоуровневой природы деформирования твердых тел. Один из них, так или иначе учитывающий влияние микроструктуры в рамках механики сплошных сред, был введен в рассмотрение братьями Коссера более ста лет назад и основан на гипотезе о кинематической независимости полей смещения и вращения. Новая волна интереса к таким моделям связана в первую очередь с потребностями наномеханики; кроме того, они актуальны во многих областях биомеханики. Это, в свою очередь, вызывает интерес к задачам разработки экспериментальных методик для идентификации параметров материальных соотношений сред с микроструктурой и для проверки используемых моделей. Создание подобных методик требует нахождения таких постановок задач о деформировании упругих тел, решения которых существенно отличаются в классической теории упругости и теории континуума Коссера. Именно с целью поиска этих постановок был проанализирован ряд более или менее классических задач для нелинейно-упругих тел для определения того, насколько их решения в рамках классической и микрополярной механики отличаются друг от друга.

Основным средством исследования послужил полуобратный метод или метод Сен-Венана нелинейной теории упругости. Основными объектами исследования стали эффекты второго порядка в задачах о кручении цилиндра (изменение длины при кручении — эффект Пойнтинга) и чистого изгиба панели (изменение высоты поперечного сечения), а также бифуркационные характеристики (параметры потери устойчивости) при растяжении, кручении и изгибе.

С помощью прямого численного исследования, а также асимптотического анализа показано, что для некоторых моделей, описывающих большие деформации микрополярных сред, существует не только количественное, но и качественное различие в поведении решений задач для классического континуума и континуума Коссера. Это различие может поменять характер (знак) известных эффектов второго порядка нелинейной теории упругости.

Анализ устойчивости проводился в окрестности так называемых зон неустойчивости материала, например, в окрестности точки максимума на диаграмме растяжения. Аналогичная точка максимума, за которой следует падающий участок, может также присутствовать на диаграммах изгиба и кручения. Достижение этого падающего участка обычно трактуется как наступление неустойчивости. Бифуркационный анализ, проведенный в рамках настоящего исследования, не показал заметного влияния микроструктуры на существование или положение падающего участка диаграммы нагружения в задачах чистого изгиба панели и одноосного растяжения тела цилиндрической формы в случае однородного нелинейно-упругого материала. В то же время установлено, что для неоднородной по высоте панели влияние микроструктуры на положение точек бифуркации в окрестности начала падающего участка является более существенным.

## Об устойчивости неоднородного нелинейно-упругого цилиндра при растяжении и раздувании

**Карякин М. И., Обрезков Л. П.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Несмотря на довольно долгую историю, задачи устойчивости упругих тел по-прежнему продолжают привлекать внимание исследователей. Это связано как с появившейся в последние годы возможностью использовать аппарат нелинейной теории упругости для анализа поведения трехмерных тел, так и с решением актуальных задач исследования материальной неустойчивости и использования его результатов для анализа применимости тех или математических моделей упругого поведения конструкционных или биологических материалов.

В большинстве работ, посвященных исследованию потери устойчивости трехмерных тел, рассматриваются различные варианты простого нагружения и/или случаи несжимаемых материалов. Целью настоящей работы являлось изучение явлений потери устойчивости тела цилиндрической формы из сжимаемого нелинейно-упругого материала при одновременном действии нескольких нагрузок. Кроме того, существенное внимание уделено анализу влияния различных типов неоднородностей, как материальных, так и конструкционных, на напряженно-деформированное состояние и устойчивость тела.

В работе рассмотрен ряд о равновесии и устойчивости полого цилиндра, подверженного одновременно одноосному растяжению / сжатию и раздуванию / обжатию. В качестве модели материала использовалась трехконстантная модель Блейтца и Ко, основным методом построения и исследования равновесного состояния — полуобратный метод нелинейной теории упругости.

Анализ устойчивости проводился с использованием бифуркационного подхода, основанного на линеаризации уравнений равновесия в окрестности построенного решения с использованием метода наложения малой деформации на конечную. Значение той или иной деформационной характеристики, при котором существовали нетривиальные решения однородной краевой задачи для получаемых в процессе линеаризации уравнений нейтрального равновесия, отождествлялось с критическим значением параметра нагружения, т.е. значением при котором система теряет устойчивость. В качестве таких параметров выбирались, как правило, коэффициент растяжения/укорочения цилиндра и коэффициент увеличения/уменьшения его внутреннего или внешнего радиуса. Построенное на первом этапе решение позволяло при необходимости легко переходить от этих деформационных характеристик к силовым — величине осевой силы и внутреннего или внешнего давления. Рассмотрены задачи осесимметричной и неосесимметричной потери устойчивости цилиндра, на плоскости упомянутых выше характеристик деформации построены области устойчивости при растяжении и сжатии, а также при сжатии внешним и раздувании внутренним давлением. Изучены два типа неоднородностей: первая связана с экспоненциальным изменением модуля сдвига по толщине цилиндра, вторая — со случаем двухслойного цилиндра с разными значениями модулей сдвига в каждом слое. Дан сравнительный анализ влияния неоднородностей различного типа.

## К вопросу о реконструкции профилей остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно упрочненных телах с плоской и цилиндрической поверхностями

Келлер И. Э., Петухов Д. С.

*Институт механики сплошных сред Пермского федерального НЦ УрО РАН  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

Поверхностный слой сжимающих тангенциальных остаточных напряжений существенно повышает ресурс деталей машин по отношению к развитию усталостного и контактного разрушения. Современные технологии создания такого слоя используют обдувку дробью, ударное воздействие ультразвуком и кавитацией, плазменное имплантирование ионами азота. Центральным моментом при математическом моделировании задач технологии и ресурса является метод экспериментального определения распределения по глубине детали полей остаточных напряжений и пластических деформаций. Найдены точные соотношения между профилями остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно упрочненных телах с плоской и цилиндрической поверхностями. Данные профили восстанавливаются по зависимости прогиба полоски или кольца, вырезанных из детали, от толщины стравленного слоя с упрочненной поверхности. Предложенные выражения позволяют восстанавливать пластические деформации по получаемой в лаборатории функции прогиба и внедрять их в численные схемы как источник остаточных напряжений, оставляя данные по последним для верификации. Анализ полученных выражений позволил сделать ряд важных качественных выводов относительно структуры полей остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно упрочненных телах. Выполнены эксперименты по дробеструйной обработке поверхности пластины и вала с последующим определением зависимости стрелы прогиба полоски и сегмента кольца, вырезанных из детали, от толщины снятого травлением слоя методом Давиденкова. С помощью этих экспериментальных данных в пакете ANSYS рассчитан профиль остаточных напряжений для детали с пластическими деформациями, восстановленными по предлагаемому методу в сопоставлении с остаточными напряжениями, найденными согласно данному методу, что показало корректность последнего. Результат необходим для решения задач технологии поверхностного упрочнения деталей машин и задач прогноза их ресурса к контактному и усталостному разрушению. Метод обладает определенными преимуществами по сравнению с другими методами, фигурирующими в современной литературе, используемыми для реконструкции методы решения некорректных задач либо приближенные выражения, имеющие качественные изъяны. В частности, дискретизация полученных точных явных выражений ведет к погрешности одного порядка для остаточных напряжений и пластических деформаций. Несмотря на это, демонстрируется необходимость предварительного сглаживания лабораторных данных.

## Задача устойчивости двумерных течений, близких к сдвиговым

**Кириченко О. В., Ревина С. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается задача устойчивости двумерных пространственно-периодических течений общего вида, близких к сдвиговым, в предположении, что отношение периодов стремится к нулю, а среднее скорости вдоль «длинного» периода отлично от нуля.

Такое движение описывается системой уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где  $\nu = \frac{1}{Re}$  — безразмерная вязкость,  $Re$  — число Рейнольдса. Период  $\ell_1$  будем считать равным  $2\pi$ , а отношение периодов характеризовать волновым числом  $\alpha \ll 1$ :  $\ell_2 = 2\pi/\alpha$ ,  $\alpha \rightarrow 0$

Через  $\langle f \rangle$  обозначим среднее по  $x_1$ , а через  $\langle\langle f \rangle\rangle$  — среднее по прямоугольнику периодов  $\Omega = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$ :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\ell_1} \int_0^{\ell_1} f(\mathbf{x}, t) dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2.$$

Средняя по пространству скорость считается заданной:  $\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}$ . Поле скорости предполагается периодичным по  $x_1, x_2$  с теми же периодами  $\ell_1, \ell_2$ , что и поле внешних сил. Строится длинноволновая асимптотика ( $\alpha \rightarrow 0$ ) задачи устойчивости стационарного течения, близкого к сдвиговому

$$\mathbf{V} = (\alpha V_1(x_2), V_2(x_1)), \quad \langle V_2 \rangle \neq 0. \quad (2)$$

Для нахождения асимптотики ответвляющихся автоколебаний применяется метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой в работах В. И. Юдовича (ПММ, 1972 г.) Найдены выражения первых членов асимптотики по малому параметру  $\alpha$  собственных значений и собственных функций. В частном случае, когда  $V_1(x_2)$  является нечетной функцией, показано, что коэффициенты разложения по  $\alpha$  собственных значений отличны от нуля лишь для нечетных степеней, а коэффициенты разложения критического значения вязкости отличны от нуля для четных степеней — так же, как в случае сдвигового течения.

Получены условия, при которых происходит колебательная потеря устойчивости, найдены первые члены длинноволновой асимптотики. Коэффициенты асимптотических разложений явно выражаются через некоторые вронскианы и интегральные операторы типа Вольтерра, как и в сдвиговом случае. Выявлена структура собственных значений и собственных функций для первых членов асимптотики, произведено сравнение со сдвиговым случаем. Исследованы подклассы рассматриваемого класса течений, в которых обнаруживаются общие свойства качественного поведения собственных значений и собственных функций. Построены графики нейтральных кривых. Численно найдены наиболее опасные возмущения. Приведены траектории движения пассивной примеси в линейном приближении.

## Моделирование формирования ребристой микроструктуры методом испарительной литографии в сочетании с инфракрасным нагревом

**Колегов К. С.**

*Астраханский государственный университет  
Каспийский институт морского и речного транспорта филиал ВГУВТ,  
Астрахань*

Существуют приложения, основанные на нанесении рельефных покрытий. Например, борьба с загрязнением погруженных в воду поверхностей морскими микроорганизмами, заключающаяся в использовании некоторых иерархических структур. Возможно снижение гидродинамического сопротивления судна за счет применения ребристой структуры поверхности корпуса. Есть несколько подходов в создании полимерных покрытий с топографической структурой на микро- и наноуровне. Широко известен метод фотолитографии, но этот процесс многоступенчатый, требующий специального оборудования и материалов. Структурированные поверхности в полимерах можно получить литографическими методами: ультрафиолетовая импринт-литография, нанопечатная и капиллярная литография. Эти способы обладают недостатками: отсутствие гибкости процесса и дорогое оборудование. Поэтому испарительная литография привлекает к себе все больше внимания. При неравномерном испарении с поверхности коллоидной пленки возникает течение, которое сносит частицы в области интенсивного испарения. К примеру, нужная структура получается при использовании маски, которая представляет собой пластину с отверстиями, размещенную над жидкостью. У метода есть два ограничения. Во-первых, общее время процесса испарения значительно возрастает из-за того, что маска блокирует большую часть поверхности жидкой пленки. Во-вторых, частицы стекловидных полимеров, температура плавления которых выше комнатной, не формируют пленку, а лишь — хрупкие покрытия. Эта проблема решается введением в систему ИК-источника. Локальный нагрев под открытыми областями в маске создает сильное испарение. Более того, ИК-нагрев вызывает слияние частиц и ведет к образованию твердых пленок без трещин с требуемой формой поверхности. По сравнению с другими методами создания текстурированных слоев этот способ проще, дешевле и применим практически к любой подложке без предварительной обработки. Методы математического моделирования помогут научиться лучше управлять процессом. Предлагается модель, описывающая перенос массы и тепла на гидродинамическом этапе, а также переход золя в полимерный расплав. Система включает уравнения неразрывности, конвекции–диффузии, теплопроводности для жидкости и подложки. Скорость течения рассчитывается с использованием приближения смазки. На основе экспериментальных данных построена эмпирическая зависимость вязкости коллоидного раствора от концентрации частиц. Плотность потока пара описывается модельным законом, учитывающим зависимость от концентрации частиц и температуры жидкости. Полученные численные результаты хорошо согласуются с экспериментом (Georgiadis A. et. al., 2011).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (16-38-00439 мол\_а).

## Об одном классе деформаций спиральной пружины

Колесников А. М.<sup>1</sup>, Сигаева Т. В.<sup>2</sup>, Судак Л.<sup>2</sup><sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*<sup>2</sup>*Университет Калгари, Канада*

Спиральные структуры, которые можно найти в природе в разных масштабах, все чаще получают распространение в искусственных изделиях и конструкциях. Природа, будучи лучшим и наиболее эффективным архитектором, использовала спиральные структуры в биологических макромолекулах, клетках, бактериях и растениях. Неудивительно, что инженеры, следящие за природой, нашли значительные преимущества при использовании спиральных структур в различных приложениях, начиная от биоматериалов, робототехники, авиации до наноматериалов. На данный момент наиболее распространённым методом для описания механики спиральных структур являются теории криволинейных и естественно закрученных стержней. Однако последние разработки показали, что существует потребность в более сложных моделях для адекватного описания поведения эластомерных пружин или лентообразных структур, подвергающихся большим деформациям.

Один из многих примеров включает использование эластомерных спиралей в качестве диэлектрических приводов. В процессе изготовления этих приводов из цилиндров вырезают спиральные пружины. Затем поверхности разреза покрывают проводящим веществом и склеивают в полый цилиндр. При склеивании пружина может быть предварительно закручена. Такие приводы продемонстрировали некоторые интересные механические и диэлектрические свойства. В этой работе предлагается аналитическая модель, которая описывает первые два этапа изготовления таких исполнительных механизмов, которые потенциально могут дать представление об их механических свойствах и предложить идеи по их улучшению.

В работе исследуется деформация несжимаемой изотропной нелинейной упругой спиральной пружины в полый цилиндр. Полученный преднапряжённый цилиндр затем может быть нагружен равномерными давлениями по боковым поверхностям изнутри и снаружи и подвергнут действию продольной силы и крутящего момента по торцам.

Первоначально проблема формулируется для общей энергии деформации. Для специального выбора лагранжевых координат и специальных полуобратных представлений деформации показано, что уравнения равновесия сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В качестве иллюстративного примера рассматривается пружина, выполненная из неогукковского материала. Анализируется влияние начальной геометрии (например, высота, толщина и радиусы витка) и предварительной деформации (скручивание при склеивании пружины в полый цилиндр) на общий механический отклик полученного преднапряжённого полого цилиндра.

## Раздувание тонкостенной трубки, частично надетой на негладкий цилиндр

Колесников А. М.<sup>1</sup>, Шубчинская Н. Ю.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Для тонкостенных конструкций, взаимодействующих с массивными телами, в области контакта кроме нормальной распределённой реакции возникает касательная составляющая реакции за счёт трения. Касательная поверхностная нагрузка может оказывать существенное влияние на напряжённо–деформированное состояние тонкостенной конструкции. Контакт резиноподобного материала с другими материалами является сложным явлением. При моделировании его с помощью закона Кулона коэффициент трения может принимать значения больше единицы в некоторых случаях (*Persson B. N. J. Theory of rubber friction and contact mechanics // The Journal of Chemical Physics. 2001. № 115 (8). С. 3840-3861*). В тоже время работ по исследованию контакта между резиноподобными мембранами и твёрдыми телами с учётом трения мало (*Selvadurai A. Deflections of a rubber membrane // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. (54 (6)). P. 1093-1119, Kumar N., DasGupta A. On the contact problem of an inflated spherical hyperelastic membrane // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. (57), P. 130-139, Kolesnikov, A.M. Tension of a cylindrical membrane partially stretched over a rigid cylinder // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. (97). P. 41-47*).

В данной работе рассматривается контактная задача для длинной тонкостенной высокоэластичной трубки при конечных деформациях. Один конец трубки надет на абсолютно твёрдый негладкий цилиндр большего радиуса. Контакт трубки с цилиндром происходит с трением, которое описывается законом Кулона, то есть касательная поверхностная нагрузка в области контакта меньше или равна нормальной поверхностной нагрузке в этой области с некоторым коэффициентом. Другой конец трубки закрыт. Вне области контакта трубка подвержена действию равномерно распределённого давления.

Равновесие раздуваемой трубки на жёстком цилиндре обеспечивается только за счёт сил трения при достаточном размере области контакта. Целью исследования является определение необходимой длины области контакта в зависимости от внутреннего давления при заданных геометрических размерах и коэффициента трения. Математическая модель строится в рамках теории нелинейно-упругих безмоментных оболочек. Материал трубки считаем высокоэластичным и несжимаемым. Уравнения равновесия и граничные условия сводятся к краевой задаче для одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в области контакта. Для модели материал Бартенева–Хазановича удалось построить аналитическое решение краевой задачи и выписать явную зависимость между необходимой длиной области контакта и давлением в трубке. Для других моделей материалов задача может быть решена численно.

## Об исследовании напряженного состояния и реконструкции свойств для неоднородных пьезокерамических цилиндров

**Кондратьев В. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Пьезоэлектрические элементы цилиндрической формы являются одними из наиболее распространенных типов пьезоэлементов и широко используются в структурах мониторинга. Решение задач для цилиндрических тел из пьезоактивных материалов представляет значительный интерес в связи с широким практическим применением подобных элементов. В настоящее время методики изготовления пьезоэлементов позволяют получить координатно-зависимое распределение свойств материала и широкий диапазон изменения пьезоэлектрических свойств, что характерно для функционально-градиентных материалов. Активно применяются пьезоэлементы с неоднородной поляризацией, которые изготовлены из композиционных материалов, сочетающих керамику, металл и полимер. Исследование колебаний таких конструктивных элементов осложнено тем, что законы изменения свойств зависят от координат. При анализе электроупругих полей в пьезоэлектрических структурах возникает необходимость оценки эффекта преобразования энергии - определение коэффициента электромеханической связи.

В настоящей работе рассмотрена задача о колебаниях цилиндрических пьезоэлектрических структур с радиальным и окружным типами поляризации. Все физические характеристики цилиндра могут являться функциями радиальной координаты; в частности, наиболее важным может являться случай, когда только пьезомодули обладают такой особенностью. Из основных уравнений электроупругости получены канонические системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных переменных для цилиндров с окружным и радиальным типами поляризаций. В силу переменности коэффициентов системы решение может быть получено лишь численно. Составлены программы, позволяющие определять резонансы и антирезонансы колебаний неоднородного пьезокерамического цилиндра. Выполнена серия расчетов, позволившая проанализировать зависимость резонансных частот от законов изменения физических характеристик и реологии. Проведен анализ распределения окружных и радиальных напряжений по толщине цилиндра и в зависимости от законов неоднородности, исследована зависимость резонансных и антирезонансных частот от физических и геометрических параметров задач. Проведены расчеты коэффициента электромеханической связи. Решена обратная задача об идентификации механических и пьезоэлектрических характеристик в различных постановках. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению переменных пьезоэлектрических характеристик, проведена серия расчетов при наличии зашумления входной информации.

Автор выражает благодарность за внимание к работе научному руководителю проф., д. ф.-м.н. Ватульяну А.О.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00354).



## Численное исследование эффективных свойств анизотропных упругих композитов со случайной и с открытой пористостью при учете поверхностных напряжений

**Корниевский А. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассматриваются пористые наноструктурированные анизотропные упругие композиты, в которых наноразмерность пор описывается в рамках теории поверхностных напряжений Гуртина-Мурдоха. Для определения эффективных свойств таких композитов применяется метод эффективных модулей, согласно которому решаются краевые задачи сравнения в представительном объеме композита со специальными линейными по перемещениям граничными условиями. Из решения данных задач находятся поля напряжений, и их осреднение по объему и по межфазным границам дает итоговые эффективные модули. Задачи сравнения в неоднородных представительных объемах решались численно по методу конечных элементов в программном комплексе ANSYS. При этом сравнивались три типа представительных объемов. В первом варианте представительный объем наделялся структурой случайной пористости, а в двух других случаях использовались алгоритмы пакета ACELAN-COMPOS, поддерживающие связность двух фаз композита (матрицы материала и пор). Конкретные расчеты эффективных свойств были проведены для материала пористого бериллия с учетом поверхностных напряжений. В работе описан алгоритм автоматического определения межфазных границ и размещения на них оболочечных элементов, сохраняющий работоспособность при различных размерах представительных объемов, построенных в форме кубической решетки гексаэдральных конечных элементов. Исследованы модели при различных значениях поверхностных модулей, пористости и количества пор. Отмечено влияние величины пористости и величин поверхностных модулей на эффективные материальные модули пористого материала наноразмерной структуры. В результате проведенных вычислительных экспериментов обнаружены тенденции, аналогичные отмеченным ранее в работах других авторов. Например, при небольшой пористости наноразмерное тело может обладать большей жесткостью, чем тело обычных размеров. Кроме того, эффективные упругие жесткости для тел обычных размеров убывают с ростом пористости, но для наноразмерного композита данные характеристики могут как уменьшаться, так и увеличиваться. Были сравнены результаты вычислений для композитов при различных алгоритмах генерации сеток. Было отмечено, что из-за учета поверхностных эффектов геометрические особенности тел могут оказывать гораздо большее влияние, чем для тел обычных размеров. Также численно подтвержден вывод, что чем меньше размер отдельных пор, тем выше жесткость композита.

Автор благодарит за помощь в работе профессора А.В. Наседкина.

Работа выполнена в рамках проектов РФФИ No 16-01-00785-а и конкурсной части государственного задания Минобрнауки России No 9.1001.2017/4.6.

## Математическая модель нелинейной динамики микрополярной цилиндрической оболочки Тимошенко сетчатой структуры

**Крылова Е. Ю.<sup>1</sup>, Папкина И. В.<sup>2</sup>, Кружилин В. С.<sup>2</sup>, Крысько В. А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

<sup>2</sup>*Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина*

Микросистемные технологии наряду с нано-технологиями считаются во всем мире революционными, определяющими направление развития стратегически важных отраслей экономики, таких как космическая, военная, медицинская, IT-техника, приборостроение для научных исследований, микро робототехника. Чрезвычайный рост активности в области нано-материалов связан с открытием углеродных нано-трубок. Нано-трубкам наряду с микро-размером и легкостью присущи очень высокие значения деформационных и прочностных характеристик, что обуславливает их широкое применение в микросистемных технологиях, что в свою очередь приводит к необходимости развития моделей механического поведения данных нано-масштабных объектов и совершенствованию методов анализа полученных моделей. Как механический объект углеродная нано-трубка представляет собой однослойную или многослойную нано-размерную цилиндрическую оболочку сетчатой структуры.

В работе построена математическая модель нелинейной динамики гибкой однослойной размерно-зависимой цилиндрической оболочки сетчатой структуры. Геометрическая нелинейность учитывается по модели Теодора фон Кармана. Классические континуальные модели не учитывают эффекты масштаба на нано-размерном уровне. В работе рассматривается неклассическая континуальная модель оболочки на основе среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуум). При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. В рассмотрение вводится дополнительный независимый материальный параметр длины связанный с симметричным тензором градиентом вращения. Уравнения движения элемента оболочки, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского - Гамильтона на основании кинематических гипотез Тимошенко, позволяющих учесть поворот нормали после деформации. Сетчатая структура оболочки учитывается согласно теории Г. И. Пшеничнова. Предполагается, что цилиндрическая оболочка состоит из  $n$  семейств ребер, каждое из которых характеризуется углом наклона относительно положительного направления оси, направленной по длине оболочки, и расстоянием между соседними ребрами. Материал оболочек изотропный, упругий и подчиняется закону Гука. Рассматривается диссипативная механическая система. Построенная в работе теория может быть, в том числе, использована для исследований поведения углеродных нано-трубок под действием статических и динамических нагрузок.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 18-01-00351а, № 18-38-00878 мол\_а, № 16-08-01108а, № 16-01-00721а.

## Об электропластичности металла при воздействии высокоэнергетическим электромагнитным полем

**Кукуджанов К. В., Левитин А. Л.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Электропластичность (уменьшение предела текучести материала или увеличение предельной пластической деформации до разрушения) наблюдается, если электромагнитное поле индуцирует в материале ток с плотностью тока от  $10^8$  до  $10^{11}$  А/м<sup>2</sup> в течение короткого интервала времени (не более нескольких 100 мкс). Рассеянная в течение указанного интервала времени удельная электромагнитная энергия в материале находится в диапазоне  $10^6 \leq e \leq 10^{10}$  Дж/м<sup>3</sup>. Импульсным высокоэнергетическим электромагнитным полем (ВЭМП) назовем поле, при воздействии которого рассеянная удельная электромагнитная энергией в материале находится в диапазоне  $10^8 \leq e \leq 10^{10}$  Дж/м<sup>3</sup>.

При протекании тока в металле происходит рассеяние свободных электронов ионами кристаллической решетки, в процессе которого выделяется тепловая энергия (джоулево тепло). Тепловыделение в областях с дефектами структуры материала (дислокациями, микротрещинами, включениями-примесями) и в областях, где такие дефекты отсутствуют, происходит по-разному. Известно, что дислокации обладают «легкой» подвижностью, т.е. требуются сравнительно небольшое касательное напряжение и небольшая энергия, чтобы переместить краевую дислокацию в зерне к его границе. Иначе обстоит дело в случае более «крупных» дефектов, таких как микротрещины и микропоры, которые образовались в процессе предварительного пластического деформирования поликристаллического металла. Моделирование показывает, что концентрация ВЭМП и неоднородное тепловыделение в окрестности микродефектов является причиной их залечивания. Процессы залечивания происходят в форме восстановления сплошности материала путем «сварки» берегов микротрещин.

Показано, что чтобы привести в движение границы микродефектов, требуется рассеять в единице объема материала электромагнитную энергию на 2 порядка большую по величине, чем для инициирования электронно-дислокационного взаимодействия и приведения в движение дислокаций. Величина «пороговой» рассеянной удельной энергии, необходимой для начала процесса залечивания дефектов, хорошо согласуется с величиной рассеянной удельной энергии, необходимой для начала электропластического деформирования, полученной в экспериментах по воздействию ВЭМП. %на различные материалы. Это подтверждает, что для инициирования процессов залечивания дефектов и существенного увеличения предельной пластической деформации до разрушения при электропластическом деформировании требуется воздействие именно импульсным ВЭМП.

На основе проведенного для межзеренных и внутризеренных микротрещин микромоделного анализа получена макроскопическая зависимость изменения поврежденности металла от рассеянной в нем удельной электромагнитной энергии импульсного ВЭМП и «длины» микротрещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-08-00958).

## Устойчивость томсоновского многоугольника в двухслойной жидкости

Куракин Л. Г.<sup>1,2</sup>, Лысенко И. А.<sup>1</sup>, Островская И. В.<sup>1</sup>,  
Соколовский М. А.<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Южный математический институт — филиал ВЦ РАН, Владикавказ

<sup>3</sup>Институт водных проблем РАН, Москва

<sup>4</sup>Институт океанологии им. П. П. Ширшова, Москва

Рассмотрена двухслойная квазигеострофическая модель точечных вихрей.

Проведен анализ устойчивости стационарного вращения системы  $N$  точечных вихрей одинаковой интенсивности, расположенных в вершинах правильного  $N$ -угольника на окружности радиуса  $R$  в одном слое двухслойной вращающейся жидкости (для определенности в нижнем слое толщины  $h_2$ ).

Задача устойчивости зависит от трех параметров: дискретного параметра  $N \geq 2$  и двух непрерывных параметров  $0 < \gamma R < +\infty$  и  $-1 < \alpha \leq 1$ , где  $\gamma^{-1} > 0$  — внутренний радиус деформации Россби,  $\alpha = h_2 - h_1$  — разность между толщинами слоев,  $h_1 + h_2 = 1$ .

Так как при всех значениях параметров имеет место неустойчивость по Ляпунову, то устойчивость стационарного вращения вихревого  $N$ -угольника интерпретируется как орбитальная устойчивость. Построена гамильтонова система с циклической координатой, в которой орбите стационарного вращения соответствует однопараметрическое семейство равновесий. Неустойчивость означает неустойчивость двумерного семейства орбит стационарного вращения. Найдены собственные значения матрицы линеаризации и матрицы Гессе для гамильтониана.

Данное исследование опирается на результаты по устойчивости томсоновского вихревого  $N$ -угольника в модели Кирхгофа (Куракин Л. Г., Юдович В. И. *Chaos*, 2002) и в модели бесселевых вихрей (Куракин Л. Г., Островская И. В., *Regular & Chaotic Dynamics*, 2017). Показано, в частности, что из одновременной экспоненциальной неустойчивости вихревого  $N$ -угольника в модели Кирхгофа и в модели бесселевых вихрей следует экспоненциальная неустойчивость вихревого  $N$ -угольника в двухслойной жидкости. Аналогичное утверждение справедливо и для линейной устойчивости.

Пространство параметров  $(N, \gamma R, \alpha)$  делится на область устойчивости в точной нелинейной постановке — (А), область линейной устойчивости, в которой требуется дополнительный нелинейный анализ — (В), и область экспоненциальной неустойчивости — (С).

Случай (А) имеет место при  $N = 2, 3, 4$  для всех значений  $R$  и  $\alpha$ . При  $N = 5$  встречаются множества (А) и (В), а при  $N = 6$  — множества (А) и (С). В случае  $N = 7$  возможны все ситуации (А), (В) и (С). В случае четных  $N = 2n \geq 8$  всегда имеет место экспоненциальная неустойчивость, а в при нечетных  $N = 2\ell + 1 \geq 9$  возможны два случая: (В) и (С).

Аналитические результаты подтверждены численными экспериментами.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.5169.2017/8.9).

## Задачи растяжения, кручения и изгиба канатов

**Курбатова Н. В., Портнов Е. Н., Устинов Ю. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Существуют различные конструкции канатов, которые отличаются способом плетения и профилем поперечного сечения проволоки, из которой они свиваются. Такое разнообразие вызвано различными условиями их эксплуатации. Наибольшее распространение получили круглые стальные канаты одинарной и двойной свивок. Известны два основных подхода в построении теории каната одинарной свивки. Один опирается на представление о канате как о дискретной системе криволинейных стержней, второй основывается на уравнениях упругой сплошной среды с криволинейной анизотропией.

В настоящей работе для определения НДС каната и его жесткостей  $d_{ij}$  используется новый подход, который позволяет получить выражения для элементов матрицы жесткостей в виде элементарных функций от параметра  $\alpha$  (угла между касательной к крайнему волокну и осью каната). На основе новых подходов получены выражения для жесткостей и на их основе системы уравнений, которые позволяют определить главный вектор и главный момент напряжений, действующих в сечении  $z = const$ :

$$P_z = d_{11}\varepsilon + d_{12}\varphi, \quad M_z = d_{21}\varepsilon + d_{22}\varphi \quad (1)$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\pi a^2 E' \ln(1 + kt_1^2)}{t_1 k} \\ d_{12} = d_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\pi a^3 E' (kt_1^2 - \ln(1 + kt_1^2))}{t_1^2 k^2} \\ d_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\pi a^4 E' (kt_1^2 - \ln(1 + kt_1^2))}{t_1^3 k^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Для каната, в случае задач изгиба (изгибающим моментом и поперечной силой), постоянные  $C_k$  связаны координатами изгибающего момента  $M_k$  и поперечной силы  $Q_k$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} d_{33}C_7 + d_{35}C_9 &= M_2 + iM_1 \\ d_{33}C_9 &= -Q_1 + iQ_2 \\ C_8 &= \bar{C}_7, \quad C_{10} = \bar{C}_9 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Q_j, M_j$  — проекции поперечной силы и изгибающего момента на оси основной системы координат  $Ox_1x_2x_3$ ,

$$\begin{aligned} d_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\pi a^4 k E'}{t_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\pi a^4 k E' \ln(1 + kt_1^2)}{t_1^4 k^2} \\ d_{35} &= \frac{4}{3} \pi a^4 G - \frac{4\pi a^4 G}{t_1^2 k^2} + \frac{4\pi a^4 G \arctan(kt_1)}{t_1^3 k^3} \end{aligned} \quad (4)$$

## Исследование режимов колебаний нано-балок Бернулли-Эйлера

**Кутепов И. Е., Крысько В. А.**

*Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина*

В работе рассматривается математическая модель размерно-зависимых балок с учетом геометрической нелинейности находящихся в стационарном температурном поле. Стационарное поле определяется из решения двумерного уравнения теплопроводности с краевыми условиями первого рода. Геометрическая нелинейность вводится с помощью соотношения Кармана. Уравнения изгиба балки построены на основе гипотезы Бернулли-Эйлера. Масштабный эффект учитывается по модифицированной моментной теории. На верхнюю грань балки действует знакопеременная распределенная нагрузка. Уравнение теплопроводности решается методом конечных разностей второго порядка точности для прямоугольной области. На распределение температуры по телу конструкции никаких ограничений не накладывается. Воздействие температурного поля учитывается по теории Дюамеля-Неймана. Уравнения движения балки, граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Остроградского-Гамильтона. Система уравнений движения, записанная в частных производных, сводится к задаче Коши методом конечных разностей второго порядка точности. Задача Коши решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Достоверность получаемых результатов, путем исследования сходимости решения по Рунге в зависимости от количества точек разбиения по пространственным координатам и шага по времени. Рассмотрены сценарии перехода колебательного процесса из гармонического режима в хаотический в зависимости от значения масштабного параметра. Для исследования режимов колебаний применено множество методов анализа, таких как – спектр мощности Фурье, вейвлет анализ, фазовый портрет, сечение Пуанкаре, модальный портрет. Получены карты режимов колебаний на основе эвристического анализа спектров мощности Фурье. Карты представляют собой графическую интерпретацию распознанного режима колебаний при множестве значений управляющих параметров, таких как частота и амплитуда внешней нагрузки. Полученные карты позволяют управлять режимом колебаний. Даны рекомендации по выбору оптимальной структуры элементов микро- и нано-механических датчиков инерциальной информации, обеспечивающие их эффективное функционирование при различных внешних воздействиях, и позволяют предупредить ситуации, при которых возможно возникновение хаотических колебаний, что может привести к отказу в работе микро- и нано-механических систем.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60027 мол\_а\_дк.

## Особенности формирования волнового поля в неоднородных предварительно напряженных термоупругих телах

**Леви Г. Ю.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону  
Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Распространение волн в термоупругих средах применимо в различных областях, таких как землетрясения, ядерные реакторы, резонаторы, неразрушающий контроль, создание акустоэлектронных устройств. В данной работе рассматриваются динамические связанные контактные задачи о возбуждении гармонических колебаний на поверхности термоупругих сред. Исследуемые тела представляют собой термоупругий слой, лежащий на термоупругом полупространстве. Слой и полупространство находятся в условиях предварительного нагрева и под воздействием начальных напряжений. Колебания индуцируются действием распределенной в ограниченной области на поверхности среды осциллирующего жесткого штампа или температуры. Вне этой области поверхность тела предполагается свободной от механических напряжений и теплоизолированной. На границе контакта слоя с полупространством рассматриваются следующие режимы граничных условий: 1) полное сцепление и идеальный тепловой контакт; 2) полное сцепление и теплоизоляция; 3) проскальзывание слоя и идеальный тепловой контакт. На бесконечности выполняется условие излучения. Краевая задача описывается линейризованными уравнениями движения термоупругой среды

$$\nabla_0 \cdot \Theta^{(n)} = \rho_0^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \theta_{ij}^{(n)} = c_{ijkl}^{(n)*} u_{k,l}^{(n)} - \beta_{ij}^{(n)*} u_4^{(n)}, \quad (1)$$

линеаризованным уравнением теплопроводности

$$\lambda_{ik}^{(n)} u_{4,ik}^{(n)} = \kappa^{(n)} \frac{\partial u_4^{(n)}}{\partial t} + \theta_1^{(n)} \beta_{ik}^{(n)*} \frac{\partial u_{k,i}^{(n)}}{\partial t}, \kappa^{(n)} = \frac{c_\varepsilon^{(n)} \rho_0^{(n)} \theta_1^{(n)}}{\theta_0} \quad (2)$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь  $n = 0$  обозначены параметры полупространства,  $n = 1$  - параметры слоя. Участвующие в уравнениях (1), (2) коэффициенты при однородной начальной деформации и предварительном нагреве определяются выражениями

$$c_{ijkl}^{(n)*} = \frac{\delta_{kj}}{2} \left( \sum_{m=1}^3 c_{ilm}^{(n)} \left( \nu_m^{(n)2} - 1 \right) - \left( \theta_1^{(n)} - \theta_0 \right) \beta_{ij}^{(n)} \right) + c_{ijkl}^{(n)} \nu_j^{(n)} \nu_k^{(n)}, \quad (3)$$

$$\beta_{ij}^{(n)*} = \nu_j^{(n)} \beta_{ij}^{(n)}. \quad (4)$$

Краевая задача со смешанными граничными условиями на поверхности методами операционного исчисления сведена к интегральному уравнению первого рода относительно неизвестной функции распределения теплового потока или механических напряжений в зоне контакта. Методом граничных элементов построено его решение. Исследованы особенности формирования волнового поля в зависимости от материалов и условий на границе раздела составляющих среды.

## Контактная задача для электромагнитоупругой среды

Леви М. О.<sup>1,2</sup>, Агаян К. Л.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup> Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>3</sup> Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

В работе развивается метод исследования задачи о контактном взаимодействии электромагнитоупругой среды с расширенной нагрузкой на ее поверхности. Колебания среды предполагаются устоявшимися и происходящими по гармоническому закону. Среда представляет собой гетероструктуру из пьезомагнитных и пьезоэлектрических материалов, в частности рассматриваются два популярных и широко используемых материала: оксид титаната бария  $\text{BaTiO}_3$  и феррит кобальта(II)  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ . Граничные условия между частями гетероструктуры предполагают, что поля напряжений и смещений в среде имеют жесткое сцепление. Для случая, когда на поверхности задан невесомый электрод предполагается что верхний слой выполнен из пьезоэлектрического материала, при этом имеется заземление на границе с пьезомагнитным материалом.

Условия распространения волн в среде соответствуют условиям колебаний волн в сагиттальной плоскости. Материалы имеют класс осевой симметрии  $2mm$ . Колебания в среде инициируются осциллирующей нагрузкой  $q(x_1, t) = q_0(x_1)e^{-i\omega t}$ , распределенной в области  $|x_1| \leq a$  ( $q = \{q_1, q_3, q_4, q_5\}$ , где  $q_1, q_3$  — компоненты вектора механической нагрузки в доль осей  $x_1$  и  $x_3$ ,  $q_4$  — электрическая нагрузка,  $q_5$  — магнитная нагрузка). Вне области  $|x_1| \leq a$  поверхность свободна от механических напряжений. Колебания электромагнитоупругой среды описываются соответствующими уравнениями движения и квазистатическими уравнениями Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{(n)} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0, \quad n = 1, 2;$$

Эти уравнения дополняются материальными уравнениями среды:

$$\begin{bmatrix} T^{(n)} \\ D^{(n)} \\ B^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(n)} & -e^{(n)} & -f^{(n)} \\ e^{T(n)} & \varepsilon^{(n)} & g^{(n)} \\ f^{T(n)} & g^{(n)} & \mu^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S^{(n)} \\ E^{(n)} \\ H^{(n)} \end{bmatrix}$$

Здесь  $\mathbf{T}^{(n)}$  и  $\mathbf{S}^{(n)}$  — компоненты тензоров напряжения и деформации второго порядка,  $\mathbf{D}^{(n)}$  и  $\mathbf{B}^{(n)}$  — векторы электрической и магнитной индукции,  $\mathbf{E}^{(n)}$  и  $\mathbf{H}^{(n)}$  — векторы напряжения электрического и магнитного полей,  $\mathbf{c}^{(n)}$ ,  $\mathbf{e}^{(n)}$ ,  $\mathbf{f}^{(n)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ ,  $\mathbf{g}^{(n)}$ ,  $\boldsymbol{\mu}^{(n)}$  соответственно тензоры упругих, пьезоэлектрических, пьезомагнитных, диэлектрических и магнитоэлектрических коэффициентов, а также тензор магнитной проницаемости,  $\rho$  — плотность материала.

Все расчеты представлены в обезразмеренном виде.

Для разных краевых задач аналитически была построена функция Грина электромагнитоупругой среды позволяющая устанавливать вариативные условия магнитные условия на внутренних границах между электроупругой и магнитоупругой частью среды. Используя метода фиктивного поглощения было решено интегральное уравнение и получены распределения электрического заряда электрода для различных частот.



## Разлет вращающихся осколков метеорного тела

**Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А.**

*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

На основе метода моделирования с помощью системы сеток разработан алгоритм решения сопряженной аэродинамической и баллистической задач.

Для описания внешнего невязкого поля течения используется равномерная по пространству сетка в виде прямоугольных ячеек. На данную сетку, покрывающую всю рассматриваемую область течения, накладывается набор сеток, моделирующих течение около поверхности обтекаемых тел. Данные сетки связаны с поверхностью обтекаемых тел и строятся только в некоторой их окрестности. Течение около тел рассчитывается на основе уравнений Навье-Стокса в приближении тонкого слоя.

Для определенной начальной конфигурации системы тел методом установления рассчитывается поле течения. Учитывается только положение тел относительно друг друга. По найденному распределению давления рассчитываются аэродинамические силы и моменты, действующие на каждое тело.

На следующем шаге решается баллистическая задача. При заданных начальных положении, скорости, угле поворота и скорости вращения в соответствии с определенными аэродинамическими силами и моментами и известными уравнениями динамики полета может быть определено состояние системы через заданный шаг по времени. Тела системы перемещаются в вычислительной области - каждое с учетом вычета среднего перемещения всей системы. Затем в соответствии с временным шагом баллистической задачи решается нестационарная газодинамическая задача по изменению поля течения из-за перемещения тел в системе. Шаг интегрирования по времени ограничен задаваемыми максимальными относительным перемещением тел и углом поворота.

Реализованный в виде программы алгоритм применен для расчета задачи о сверхзвуковом полете вращающегося тела. На примере тел прямоугольной формы показано, что для удлиненных тел аэродинамически более устойчивым положением является полет с большей по площади стороной поперек направления полета. Это приводит к полету с максимально возможным аэродинамическим сопротивлением из-за максимальной площади мишени.

Выполнены расчеты разлета двух одинаковых тел прямоугольной формы с учетом их вращения. Вращение приводит к тому, что тела разлетаются не только под действием расталкивающей аэродинамической силы, но и дополнительной боковой силы из-за приобретения угла атаки. Скорость разлета двух тел с учетом вращения в рассмотренных условиях увеличивается до трех раз по сравнению с вариантом, когда предполагается, что тела не вращаются.

Исследование проведено в целях оценки влияния различных факторов на скорость разлета осколков метеорного тела после разрушения для построения возможных траекторий частей метеорита. Разработанный алгоритм решения сопряженной аэродинамической и баллистической задач может быть использован для решения технических задач - например, для исследования динамики разделения ступеней летательного аппарата.

## Моделирование неидеального теплового контакта в задачах тепловыделения от трения

**Лунева Е. И., Азоян А. И.**

*Ростовский государственный университет путей сообщения*

В данной работе рассматриваются условия неидеального теплового контакта для взаимодействия полугограниченных тел трения. Представление контактных тепловых условий предполагает, что основное влияние на распределение плотности тепловых потоков оказывают микроскопические тепловые сопротивления тел, которые определяют разность между температурой в дискретных областях контакта и температурой на номинальной поверхности трения.

При решении контактных задач используют либо упрощенные модели покрытий, позволяющие получать удобные аналитические соотношения, либо численное моделирование (например, метод конечных элементов). Программный комплекс ANSYS позволяет рассмотреть задачу при наличии симметрии рассматриваемых областей и граничных условий в осесимметричной постановке, что позволяет существенно сократить время моделирования задачи и время ее решения. КЭ моделирования начинается с задания граничных условий, т.е. задание условий закрепления модели и задание сил. Далее проводится автоматический расчет задачи и, непосредственно, просмотр и анализ результатов. Результаты программы имеют графическое и табличное представление.

Исследование в области взаимодействия металлополимерной пары трения связано с тем, что полимеры обладают высоким коэффициентом линейного теплового расширения и низкой теплопроводностью, в связи с этим проблема распределения тепловых полей является чрезвычайно важной.

Численные расчеты производились при определенных геометрических и физических параметрах: для штампа (длина, ширина, толщина, скорость движения); для полосы (длина, толщина, ширина); а также для «третьего тела» (толщина между контактными поверхностями, величина вдавливающей силы, коэффициент трения).

В качестве полосы рассматривался фенилон, в качестве штампа - сталь 45. В результате исследования при изменении коэффициентов теплопроводности, теплоемкости и распределения тепловых потоков в полосе характер распределения температур не изменяется, изменяются только значения. Варьирование коэффициентов теплопроводности и теплоемкости приводят к незначительному изменению температуры. Влияние изменения коэффициента распределения теплового потока более существенно.

При увеличении нагрева значения нормальных напряжений уменьшаются. С нагревом разница между значениями нормальных напряжений, полученных при решении плоской и пространственных задач в различные моменты времени выравнивается. Установлено, что при оценке максимальных значений температуры в области контакта и влияние её на напряженно-деформированного состояния полосы приемлемо решение плоской задачи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-29-00116).

## Конечные деформации самонапряженного слоистого полого шара

Лычев С. А.<sup>1,2</sup>, Койфман К. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

Работа посвящена исследованию конечных деформаций тел, материал которых изотропен и однороден, однако, в силу разнообразных причин, например, технологии изготовления, локальные деформации в них несовместны. Они являются внутренними источниками собственных напряжений и причиной изменения по пространственным координатам касательных упругих модулей, характеризующих отклик тела на малые деформации. С этой точки зрения материал тела проявляет неоднородные и анизотропные свойства, хотя этот факт является в определенной мере фиктивным. В действительности, это лишь результат неравномерных искажений частей тела относительно их естественных состояний, которые удерживаются самоуравновешенными внутренними усилиями.

Несовместность деформаций характеризуется инвариантами неевклидовой (аффинной) связности на теле, которое представляется гладким многообразием. В работе предполагается, что поля этих геометрических объектов определяют слоистую структуру трехмерного тела: многообразие, представляющее его, является расслоением над одномерной базой, таким, что в каждом слое этого расслоения связность оказывается евклидовой. Это означает, что интегральные характеристики, например, кручение, обращаются в ноль при интегрировании по контуру, целиком принадлежащему слою. С точки зрения континуальной механики это означает существование семейства деформаций, элементы которого переводят соответствующий слой — материальную поверхность — в ненапряженное состояние. При определенных ограничениях на гладкость функций, характеризующих локальные деформации, модель слоистого тела можно рассматривать как предельный случай ступенчато самонапряженного тела, представляющего собой соединение конечного числа слоев конечной толщины. Для практического применения описанных методов представляет интерес сопоставление полей напряжений и деформаций, вычисленных по ступенчатой и непрерывной моделям.

В работе, в качестве модельной задачи, рассматриваются центрально-симметричные самонапряженные состояния полого гиперупругого шара, материал которой обладает: 1) ступенчатой структурной неоднородностью, 2) непрерывной структурной неоднородностью. Предполагая материал в неискаженном состоянии несжимаемым, изотропным и однородным, и используя для каждого слоя универсальные решения Ривлина — Эриксона, удается получить решения в аналитической форме. Первая задача приводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для решения второй задачи реализуется процедура построения неевклидового метрического тензора по семейству послойно ненапряженных конфигураций. Системы нелинейных уравнений, так же как и определяющие соотношения для семейства послойных отсчетных конфигураций, образуют рекуррентные последовательности, характеризующие условия возникновения послойной неоднородности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-08-01346.

## Замкнутые решения задачи термовязкоупругости для конечного цилиндра

**Лычёва Т. Н.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Математическое моделирование связанных термомеханических полей применяется при расчётах и проектировании слоистых микроструктур, создаваемых LbL процессингом, литографической технологией, в ходе различного рода аддитивных процессов. Характерный размер элементов таких структур (в частности, толщина слоя) имеет порядок 1 мкм. При моделировании процессов создания микроструктур возникает необходимость в учёте нестационарных динамических эффектов, характерное время которых порядка 1 мкс и менее. Для таких характерных масштабов пространства и времени существенную роль играют особые эффекты, которые в обычных инженерных масштабах не проявляют себя.

К ним, в частности, относится: 1) конечная скорость распространения теплового сигнала; 2) возможность теплопередачи без диссипации; 3) зависимость тепловых полей от предыстории процесса.

Известны различные модели динамической термомеханики, учитывающие перечисленные эффекты (С. А. Cattaneo, H.W. Lord and Y. Shulman., A.E. Green and K.A. Lindsay, Green A.E. and Naghdi P.M.). Однако, оценка их вклада и выбор конкретной модели, подходящей для описания связанных процессов теплопередачи и деформирования, осложняется ограниченным набором замкнутых решений соответствующих начально-краевых задач. Это, в частности, обусловлено математическими сложностями: дифференциальные операторы, порождаемые этими задачами, оказываются несамосопряжёнными, а их спектры (для ограниченных тел) содержат комплекснозначные собственные значения.

Настоящая работа имеет целью развитие замкнутых представлений для таких задач в форме спектральных разложений по биортогональным системам функций, определяемых как собственные функции взаимно сопряжённых пучков дифференциальных операторов. При этом особое внимание уделяется элементам представлений, вычисление которых является критическим при алгоритмической реализации: асимптотическим приближениям для собственных значений и вычислению нормирующих множителей.

Представления решений в форме спектральных разложений позволяют сформулировать эффективные вычислительные алгоритмы в случае, когда собственные функции прямого и сопряжённого пучков могут быть определены в замкнутом виде. Это оказывается возможным для тел канонической формы: шара, цилиндра, параллелепипеда и при определённых ограничениях на вид краевых условий. Несмотря на столь жёсткие ограничения, замкнутые решения представляются весьма полезными для иллюстрации эффектов на модельных задачах и тестировании численных процедур. В настоящей работе рассмотрим одну из таких задач, а именно обобщённую задачу термоупругости для конечного цилиндра.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-58-52033.

## Механические свойства графеновых нанолент

**Мазепа М. М., Колесникова А. С.**

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского*

Углеродный материал графен активно исследуется начиная с момента его открытия, за которое была присуждена Нобелевская премия (2010 г.) и до сегодняшних дней. Активный интерес к графену вызван его несравненной механической прочностью (экспериментальные данные показывают, что модуль Юнга графена равен 1 ТПа), электронной проводимостью (0,5-3 эВ), ультравысокой теплопроводностью (300-1300 Вт/мК, по некоторым данным 5000 Вт/мК).

Графеновые наноленты — это конечно-размерные структуры графена. Различают zigzag- и armchair-графеновые наноленты, судя по наибольшей стороне. Также существуют киральные наноленты — они обладают краями смешанного типа, киральность ленты определяется также, как киральность УНТ, с помощью угла.

Показано, что, во-первых, графеновые наноленты являются ортотропным материалом — их свойства зависят от направления исследования, а во-вторых, механические свойства чувствительны к киральности ленты и ее размерам.

Большинство теоретических работ показывает, что наибольшей механической прочностью, а также, тепло и электропроводностью обладают углеродные наноленты с типом края zigzag. Тепло- и электропроводные свойства также улучшаются по мере увеличения угла киральности. Однако, экспериментальные работы по синтезу нанолент показывают, что большинство лент синтезируется с так называемым краем hesszag — восстановленный зигзаг с дефектами 5-7.

При использовании графеновых нанолент в электронике, ультравысокая теплопроводность может оказывать отрицательное воздействие на работу устройства. Для минимизации теплопроводности применяют такие методы как использование деформированной наноленты: растянутая на 15% нанолента обладает сниженным вдвое коэффициентом теплопроводности, добавление дефектов по краю наноленты также уменьшает коэффициент теплопроводности.

Большинство теоретических работ по исследованию модуля Юнга наноленты показывают, что величина модуля Юнга наноленты вдоль торца armchair составляет 1 ТПа, вдоль торца zigzag 1.1 ТПа. Коэффициент Пуассона, по разным исследованиям колеблется от 0.12 до 0.25, в некоторых работах, наоборот, говорят об ауксетичности материала и коэффициенте Пуассона из отрицательного диапазона.

За счет высокой величины удельной поверхности и повышенной механической прочности исследуются варианты применения графена в сорбции, фильтрации, в том числе, радиоактивных отходов. Исследуются возможности применения графена в медицине — для борьбы с раковыми клетками, для их детекции. За счет проводящих свойств рассматриваются возможности применения графена в аккумуляторах. Особое поведение спина в графене может привести к созданию новых приборов спинтроники. Благодаря ультравысокой теплопроводности графен может послужить материалом для теплоотвода.

## Течение около проницаемых поверхностей

**Максимов Ф. А., Шевелев Ю. Д.**

*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

Течения с расположением в потоке проницаемых поверхностей представляют теоретический и практический интерес. В компоновках космических аппаратов присутствуют элементы с проницаемыми поверхностями, например, сетчатые или перфорированные экраны, раскрывающегося тормозного экрана или парашютного устройства. Традиционные подходы для численного моделирования обтекания проницаемой поверхности заключаются в постановке специальных граничных условий, связывающих нормальную скорость протекания и разность давлений по обе стороны поверхности. Необходимые коэффициенты зависят от материала и определяются экспериментально. Сложность моделирования течения около проницаемого экрана обусловлена многосвязностью тела, что накладывает определенные требования к построению вычислительной сетки.

По результатам экспериментальных исследований известно, что основным параметром, определяющим особенности сверхзвукового обтекания многосвязных тел при больших числах Рейнольдса, является коэффициент проницаемости. Данный коэффициент есть отношение площади протока к площади мидела. При подобии по данному параметру и геометрической форме составляющих частей проницаемого экрана можно провести численное исследование обтекания экрана. В соответствии с этим для моделирования обтекания проницаемой поверхности можно не учитывать точно все количество элементов, из которых составлена поверхность, а ограничиться некоторым ограниченным количеством элементов, обусловленным не только желанием максимально точно описать поверхность, но и реальными вычислительными ресурсами.

Авторами использован метод моделирования по многоблочной вычислительной технологии. Данная технология позволяет ввести в расчетную область множество тел, при построении сеток около которых используются простые алгоритмы и не накладывається существенных ограничений для их сопряжения. Реализовано моделирование двумерных плоских и осесимметричных течений и проведены расчеты обтекания простейших проницаемых поверхностей. Получены картины сверхзвуковых течений около проницаемой поверхности в виде части дуги при различных значениях коэффициента проницаемости и положениях дуги относительно набегающего потока. В зависимости от параметров реализуются различные режимы течения от образования единой головной волны, характерной для обтекания тела с непроницаемой поверхностью, до изолированного обтекания каждого из тел с образованием сложной интерференционной картины течения в следе. При расположении в потоке тела перед проницаемой поверхностью, как это реализуется в парашютных системах, из-за взаимодействия следа за телом с ударной волной от проницаемой поверхности могут образовываться зоны циркуляционного течения, что приводит к существенному изменению аэродинамических свойств проницаемой поверхности по сравнению с ее изолированным обтеканием. Работа выполнена в рамках исследований течений около парашютных устройств.

## Математическая теория аддитивного поверхностного роста: конечные и малые деформации

**Манжиров А. В.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва  
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

Технологии аддитивного производства являются частным случаем процессов поверхностного роста. Математическое моделирование технологий аддитивного производства направлено на повышение качества итоговой геометрии и механических параметров производимых таким способом устройств, машин и деталей механизмов. Современные исследования демонстрируют существенные отличия в механических характеристиках твердых тел, образованных в результате процессов роста, от собственно материала как континуума в традиционном смысле этого слова. Более того, классические подходы механики сплошной среды не дают верные результаты при моделировании поведения растущего тела. Их следует дополнить новыми идеями и методами современной механики, математики, физики и инженерных наук.

Рассматриваемый здесь подход предлагает возможность построения адекватной модели процессов поверхностного роста твердых тел. Этот подход основан на следующих положениях. Используется материальное (не отсчетное) описание процесса. Поверхностный рост твердого тела моделируется движением его границы вследствие притока нового материала к поверхности тела. Используется тензор деформации скоростей растущего твердого тела, который удовлетворяет условию совместности, в то время как тензор деформации, как правило, нет. Соответственно, тензор скорости напряжений, тензор деформации скоростей и вектор скорости движения границы роста являются определяющими переменными в задаче о поверхностном росте.

Формулируются уравнения и граничные условия краевой задачи, включающие новые квазистатические и кинематические условия на поверхности роста. Квазистатические условия на движущейся границе (поверхности роста) определяются из решения дополнительной контактной задачи, зависящей от особенностей процесса роста. Кинематические условия выражают закон сохранения состава растущего деформируемого твердого тела. В общем случае краевая задача для растущего твердого тела содержит три зависимые управляемые группы величин, а именно поверхностные и объемные нагрузки, напряжения на поверхности роста и скорости притока материала к поверхности роста. Приводятся примеры новых краевых условий для растущих тел, которые не могут возникнуть в классических случаях.

Выписываются общие уравнения, уравнения для тонкостенных конструкций и уравнения для массивных (толстостенных) тел. Дается классификация процессов и формулируются условия применения того или иного приближенного подхода для решения задач. Обсуждаются условия применения полученных ранее результатов для адекватного описания процессов аддитивного роста.

## Конечно-элементный анализ регенерации большеберцовой кости с имплантатом и аппаратом внешней фиксации

**Маслов Л. Б., Сабанеев Н. А., Ильина Е. Э.**

*Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина*

Переломы костей и заживление переломов так часто встречаются в нашей жизни, что легко упустить из вида, насколько это удивительное биомеханическое явление. Хорошо известно, что механическое воздействие может вызывать разрушение перелома, или изменить его биологический путь. Однако механизмы, которые вызваны механическим возбуждением, переходящие в биологический отклик, остаются частично неизвестными. Более глубокое понимание этих процессов позволит разработать более точные и рациональные стратегии лечения переломов и откроет перспективы исследований в других областях регенеративной медицины. Исследована регенерация большеберцовой кости с имплантатом и аппаратом внешней фиксации. Для этого с помощью базы данных фотографических снимков поперечных сечений тела человека в программе ANSYS построена трехмерная конечно-элементная модель. Модель включает в себя берцовую большую кость, рамку для фиксации, пористый имплантат и костную мозоль. Путем исследования сходимости тестового численного решения выбрана адекватная по точности сетка, состоящая из 3600 конечных элементов и 16276 узлов. Условия нагружения модели следующие: с одной стороны кость жестко закреплена, на костную мозоль действует давление поровой жидкости пороупругой среды, с другой стороны перпендикулярно сечению кости приложена нагрузка, которая разделена на статическую и динамическую части, действия от которых независимы. Уравнения гармонической нагрузки имеют вид:  $F(t, \omega) = F_{sta}(t) + F_{dyn}(t)e^{i\omega\tau}$ ,  $F_{dyn} = kF_{sta}$ , где  $F_{sta}$  – статическая нагрузка,  $F_{dyn}$  – динамическая составляющая нагрузки,  $k$  – коэффициент величины гармонической нагрузки. Задача проникновения мезенхимальных стволовых клеток в зону имплантата решена для периода 120 дней. Коэффициент диффузии  $J = 0,06/0,6/6,6$  мм<sup>2</sup>/день. Вычислительные эксперименты проводятся при пористости имплантата 50% и 90%. Начальными условиями служат концентрации активных клеток в объеме мозоли  $C_{oc} = 80\%$  и в объеме имплантата  $C_{oi} = 10/30/50$  %. Граничным условием является концентрация клеток на границе мозоли  $C_b = 100$  %. Для изучения влияния гармонической нагрузки приводится решение при  $f = 10/100/200$  Гц и коэффициентом величины гармонической нагрузки  $k = 0,01/0,1$ . Таким образом, разработаны математические и конечно-элементные модели, позволяющие решать механобиологические задачи о восстановлении костной ткани в объеме пористого имплантата. Результаты сопоставлены с литературными расчетными данными и с общей медицинской картиной регенерации кости. Модели подтверждают гипотезы и опубликованные данные о стимулирующем влиянии вибрации относительно высокой частоты и низкой амплитуды на процессы восстановления костной ткани. Существенно влияние пористости имплантата, что приводит к разным картинам сращения. Результаты могут быть использованы при планировании операций остеосинтеза.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-29-04825.



## К определению упругих свойств неоднородного цилиндра

**Мнухин Р. М., Дударев В. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В связи с развитием современных технологий производства сегодня все большее внимание уделяется задачам для тел со сложными свойствами. Учет неоднородной структуры позволяет более точно проводить анализ основных акустических характеристик. Неоднородные структуры имеют ряд преимуществ по сравнению с однородными. Создание материалов с переменными свойствами, которые изменяются по определенным законам, является сложным технологическим процессом, включающим такие операции как спекание, плавление, послойное прессование, напыление и т. д. Одним из наиболее эффективных и недорогих методов неразрушающей диагностики неоднородных свойств объекта является акустический метод.

В работе рассмотрена задача об установившихся колебаниях неоднородного упругого цилиндра. Параметры Ламе  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$  считаются переменными по радиусу. Колебания вызываются действием периодической распределенной нагрузки, приложенной к внешней части границы. Неизвестными и отличными от нуля являются радиальная  $u_r(r, z)$  и продольная  $u_z(r, z)$  компоненты поля перемещений. Решение прямой задачи строится с помощью метода однородных решений в виде рядов. С учетом характера колебаний и геометрии образца задача сведена к рассмотрению  $n$  систем четырех дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Решение этих систем реализовано численно с помощью метода пристрелки. Проведен анализ влияния законов изменения параметров  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$  на значения компонент поля перемещений, амплитудно-частотные характеристики и значения резонансных частот. Сформулирована обратная коэффициентная задача об определении упругих свойств рассматриваемого цилиндра. В качестве дополнительной информации использованы данные об изменении амплитудно-частотных характеристик цилиндра, измеренных на внешней границе в заданном частотном диапазоне. Решение сформулированной задачи построено численно с помощью итерационного процесса, заключающегося в определении на каждом шаге поправки к неизвестной функции. В качестве условий останковки выбраны следующие: достижение малости поправки или превышение максимального количества итераций. Проведена серия вычислительных экспериментов для различных входных данных. Дана оценка полученных результатов. Предложены рекомендации по осуществлению наиболее точной процедуры неразрушающей реконструкции в рамках разработанного метода решения обратной задачи, которые могут быть использованы для диагностики неоднородных цилиндрических элементов в объектах ответственного назначения.

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за предложенную задачу и методы ее решения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-71-10045).

## Влияние дефектов и включений на работоспособность тонких пластин

**Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н.**

*Санкт-Петербургский государственный университет*

Известно, что при исследовании работоспособности элементов конструкции следует обращать внимание не только на их возможное разрушение, но и потерю устойчивости конструкции, которая может произойти при нагрузках меньших разрушающих. Это явление характерно для тонкостенных структур. Замечено, что при растяжении тонкостенной конструкции с разного рода дефектами (включения, вырезы уплотнения, разрезы и т.п.) в их окрестности наблюдаются области сжимающих напряжений, в которых при определенных условиях происходит локальная потеря устойчивости. В частности, при растяжении пластин в окрестности дефектов происходит потеря плоской формы деформирования. Это нашло подтверждение как в экспериментальных, так и теоретических работах (смю, например, Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Кулиев Г.Г., Милованова О.Б. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев., Наук. думка, 1981; Бочкарев А.О., Даль Ю.М. Локальная устойчивость упругих пластин с вырезами. ДАН СССР. 1989. Том 308, №2, с.312-315).

В настоящее время происходит миниатюризация разного рода устройств и элементов конструкций. Поэтому исследование структур наноразмерной толщины, в которых наличие подобных неоднородностей может быть обусловлено как функциональными причинами, так и дефектами при их создании, представляет определенный интерес.

Следует отметить, что при наноразмерных толщинах тонкостенных элементов ситуация значительно усложняется, т.к. возрастает роль поверхностных напряжений, которые вносят значительный вклад как в эффективные упругие модули, так и изгибную жесткость тонкостенных элементов (Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений, Изв. РАН, Механика твердого тела, 2010, с.618-620).

Поэтому соответствующие поправки для эффективных упругих модулей и для изгибной жесткости оболочек должны быть учтены при оценке критических нагрузок, при которых происходит локальная потеря устойчивости в окрестности дефектов элементов конструкций наноразмерной толщины.

В рамках этой работы будет исследовано влияние формы и ориентации эллиптических вырезов, соотношений между упругими модулями пластины и включениями на разрушающую нагрузку и предельную нагрузку, при которой теряется устойчивость.

Показано, что достаточно тонкая пластина с включением из другого материала может потерять устойчивость при растяжении, когда модули Юнга материала пластины и включения совпадают, а коэффициенты Пуассона различны. Исследована устойчивость ортотропной пластины с включением из того же материала, но с повернутыми осями ортотропии.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-01-00884.

## Пересечение бифуркаций в задаче конвекции в горизонтальном слое бинарной смеси

**Моршнева И. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается задача о возникновении конвективных режимов в горизонтальном бесконечном слое двухкомпонентной смеси, состоящей из не реагирующих компонент. Предполагается, что границы слоя свободные, плоские и на них отсутствуют касательные напряжения. Значения температуры и концентрации примеси на границах считаются фиксированными. Расход жидкости через поперечное сечение предполагается равным нулю. Перекрестные эффекты — термодиффузия и диффузионная теплопроводность — не учитываются. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции смеси в приближении Обербека - Буссинеска в форме, выписанной Шапошниковым И.Г.

Уравнения движения имеют стационарное (основное) решение, соответствующее покоящейся смеси, в предположении, что градиенты температуры и концентрации постоянны и вертикальны. Рассматриваются плоские возмущения, периодические по горизонтальной переменной. Уравнения для возмущений инвариантны относительно круговой симметрии.

Данная работа посвящена изучению конвективных режимов, которые возникают в окрестности точки пересечения двух нейтральных кривых колебательной потери устойчивости основного режима. Точке пересечения нейтральных кривых (точке пересечения бифуркаций) в задачах с круговой симметрией отвечает четыре независимых нейтральных моды. Когда параметры системы изменяются в малой окрестности точки пересечения бифуркаций, становится возможным сильное взаимодействие различных мод, которое описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии. Впервые системы амплитудных уравнений для задачи Куэтта-Тейлора с цилиндрической симметрией были построены в работах В. И. Юдовича (1986), G. Iooss, P. Chossat (1987). Вид амплитудных систем зависит от соотношений между волновыми числами, а также между частотами. Если не выполняется ни одно из резонансных соотношений, то система сильно упрощается, в ней остаются только обязательные резонансные слагаемые, которые присутствуют во всех резонансных системах. Впервые все возможные резонансные системы были получены для задач с цилиндрической симметрией В. И. Юдовичем и С. Н. Овчинниковой (2001).

В данной работе построены и изучены на инвариантных подпространствах резонансные амплитудные системы для задач с круговой симметрией. Показано, что в условиях общего положения возможно возникновение периодических решений типа бегущих волн и их нелинейных суперпозиций, а также возникновение квазипериодических решений. Получены явные выражения для асимптотик возникающих решений и для величин, определяющих характер их ветвления и устойчивость. Развитая теория применена к рассматриваемой задаче конвекции в горизонтальном слое бинарной смеси.

## Задачи теории температурных напряжений в тороидальных координатах

Мурашкин Е. В.<sup>1</sup>, Дац Е. П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*

Тороидальная система координат находит широкое применение в моделировании процессов в объектах, геометрия которых может быть описана в данной системе наиболее простым образом. В астрофизике тороидальные координаты естественным образом задают геометрию спиралевидных галактик и позволяют исследовать их динамику движения. В термоядерной физике тороидальные камеры с магнитными катушками являются основными объектами для исследований процессов термоядерного синтеза, протекающими в них: в тороидальных координатах записывается система уравнений магнитогидродинамики, моделирующая поведение плазмы. Зависимости, полученные в тороидальных координатах могут быть использованы в исследовании работы магнитных ускорителей. Расчет деформированного состояния материала конструкций, имеющих тороидальную форму так же имеет востребованное значение в прикладной науке и технике.

Одним из разделов механики твердого тела, привлекающих внимание исследователей, является теория термоупругопластичности, позволяющая моделировать процессы деформирования материала, подверженного влиянию теплового градиента. В условиях осесимметричного температурного воздействия ранее были получены аналитические решения ряда краевых задач теории температурных напряжений с учетом пластических свойств материала. Были выявлены особенности расчета напряженного состояния в случае плоского напряженного и плоского деформированного состояния материала с учетом зависимости предела текучести от температуры. Исследование напряженно-деформированного состояния материала в условиях тороидальной симметрии способствует дальнейшему развитию теории температурных напряжений и может являться обобщением ранее полученных результатов.

В рассматриваемом докладе приведена система разрешающих уравнений теории температурных напряжений для расчета напряженно-деформированного состояния термоупругого материала в тороидальной системе координат. Рассмотрены особенности постановок краевых задач и численных расчетов полей температурных напряжений и перемещений в телах, обладающих тороидальной симметрией. Представлено решение краевой задачи об определении перемещений в термоупругом тороиде в условиях его равномерного теплового расширения.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844, 18-51-05012, 17-51-45054).

## Моделирование волнового транспорта тепла в гемитропных микрополярных средах

**Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Современные направления развития термомеханики континуума базируются на моделировании материалов с аномальными термомеханическими свойствами (например, гемитропность или хиральность). Поэтому, в термодинамике необратимых процессов появляются новые переменные, определяющие состояние исследуемой термомеханической системы. Дополнительные переменные состояния порождают новые термодинамические потоки или (в двойственных формулировках) обобщенные термодинамические силы. Термодинамическая сила стандартным образом определяется как пространственный градиент стандартной термодинамической полевой переменной. Следовательно, термодинамические потенциалы состояния (например, свободная энергия Гельмгольца) функционально зависят от дополнительных полевых переменных и их градиентов.

Деформируемое твердое тело, изотропное только по отношению к вращению трехмерного репера, но не по отношению к его инверсиям, называется ацентрическим, гемитропным („полуизотропным“). Хорошо известно, что подобными свойствами обладают различные классы материалов: метаматериалы, наноматериалы, биоматериалы, смарт материалы, ауксетики, что определяет актуальность развития и совершенствования математических моделей их термомеханического поведения. Для моделирования гемитропных тел можно использовать соответствующим образом обобщенную микрополярную теорию термоупругости Коссера. Подобные новые аспекты моделирования проявляются в процессах распространения волн перемещений, микровращений и тепла и связаны, прежде всего, с возникновением и распространением дополнительных лево- и правосторонних волновых мод. В математической теории гемитропной микрополярной термоупругости появляются асимметричные тензоры напряжений и моментных напряжений, которые термодинамически сопряжены асимметричным тензорам деформации и изгиба-кручения.

В представляемой работе рассматривается теоретико-полевой подход и соответствующие его обобщения к построению математических моделей связанных термоупругих гемитропных микрополярных континуумов с целью описания термомеханического поведения новых материалов. Для таких континуумов указывается плотность свободной энергии Гельмгольца. Исследованы закономерности распространения волновых поверхностей слабых разрывов перемещений, микровращений и температуры. Вычислены нормальные скорости распространения волновых поверхностей и определены поляризации векторов скачков. Получено и проанализировано детерминантное (частотное) уравнение для определения волновых чисел плоских монохроматических связанных термоупругих волн.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844-а).

## Конечно-элементная гомогенизация активных метаматериалов: влияние внутренней структуры и масштабные факторы

**Наседкин А. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе представлены исследования активных метаматериалов и механических, электрических и температурных полей. Данные материалы представляют существенный интерес для создания резонаторов мегагерцового и терагерцового диапазонов и эффективных микро- и наноустройств. Отдельные активные элементы из пьезоэлектрических и пироэлектрических материалов начинают использоваться как микро- и наноустройства для перестройки структуры и связей деформируемых метаматериалов и их управляющих частей.

Описан комплекс исследований, связанных с композитными пьезоэлектрическими, термоупругими и пироэлектрическими материалами периодической и квазипериодической структуры (метаматериалами) на различных масштабных уровнях. Приведены модели анизотропных композитных метаматериалов с анизотропными поверхностными эффектами (поверхностными или интерфейсными механическими напряжениями, электрическими и температурными полями). Данные модели допускают анализ как метаматериалов с несвязанными механическими, электрическими и температурными полями на границах или на интерфейсах, так и для полей с полной или с частичной связанностью.

Представлены конечно-элементные технологии методов решения задач на ячейках периодичности и решения задач гомогенизации для данных метаматериалов, включающие модели представительных объемов с учетом внутренней структуры и разработку специальных интерфейсных конечных элементов.

Отмечено, что поверхностные и интерфейсные конечные элементы со связанностью физико-механических полей можно получать как с использованием специальных оболочечных конечных элементов с опциями мембранных напряжений, так и из объемных элементов при коллапсе противоположащих узлов. Эта техника позволит использовать при расчетах конечно-элементные пакеты ACELAN-COMPOS и ANSYS. Однако, для этого, например, для ANSYS на макроязыке программирования APDL нужно реализовывать процедуры автоматического выбор межфазных границ, размещения на них дополнительных элементов и коллапса их вершин, расположенных вдоль нормалей к межфазным поверхностям. Обсуждаются проблемы, связанные с заданием анизотропных свойств поверхностных и интерфейсных конечных элементов, связанных с классами анизотропии составляющих фаз композитных метаматериалов.

Проведены расчеты наборов эффективных модулей композитных метаматериалов рассматриваемых классов и дан анализ влияния структур представительных объемов, объемных и поверхностных модулей на эффективные материальные свойства метаматериалов.

Работа выполнена в рамках проекта РФФ № 15-19-10008-П.

## Компьютерный дизайн гибких пьезоэлектрических преобразователей из пористой пьезокерамики с модифицированными свойствами на границах пор

**Наседкина А. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Пьезоэлектрические преобразователи находят широкое применение в разнообразных наукоемких и промышленных приложениях. Тем не менее, задачи повышения их эффективности являются актуальными и по настоящее время. Например, для большей связанности планарных и толщинных колебаний и увеличения гибкости были разработаны тарелкообразные (Cymbal) преобразователи. Эти преобразователи состоят из пьезокерамического диска с приклеенными на его торцевых поверхностях тонкими тарелкообразными металлическими накладками. Такая конструкция позволяет преобразовать радиальные колебания диска в толщинные колебания накладок, а также обеспечивает более низкочастотные толщинные колебания всей системы. Другим примером гибкого пьезопреобразователя является пьезоэлектрический диск с одной плосковогнутой поверхностью.

Повысить эффективность преобразователя можно также за счет использования композитных пьезокерамических материалов. Например, пористая пьезокерамика имеет малый акустический импеданс и практически постоянный толщинный пьезомодуль в широких пределах изменения пористости. В свою очередь можно улучшить и характеристики пористой пьезокерамики за счет металлизации поверхностей пор. Такие пьезокомпозиты могут быть получены разработанным А.Н. Рыбьянцом методом транспорта частиц специальных веществ в пьезокерамические материалы. Эти новые пористые материалы с металлизированными поверхностями пор имеют большую прочность и более высокие значения как толщинных, так и продольных пьезомодулей.

В настоящей работе методами вычислительной механики на основе программного комплекса ANSYS проводится анализ эффективности работы Cymbal преобразователя и преобразователя в форме диска с плосковогнутой поверхностью. В серии вычислительных экспериментов в качестве активного материала для обоих преобразователей использовалась плотная пьезокерамика, обычная пористая пьезокерамика и пористая пьезокерамика с металлизированными поверхностями пор. Как оказалось, пористая пьезокерамика обнаруживает ряд преимуществ при возбуждении акустических волн в сравнении с плотной, особенно при генерации волн источником тока. В свою очередь пористая пьезокерамика с металлизированными поверхностями пор улучшает характеристики гибких преобразователей в сравнении с обычной пористой пьезокерамикой. При этом, использование пористой пьезокерамики с поверхностями пор, покрытыми очень тонким слоем металла, повышает эффективность возбуждения колебаний в наибольшей степени.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 16-58-48009-Инд-оми. В ней использовался ряд частных результатов, полученных в соавторстве с А.В. Наседкиным, А.Н. Рыбьянцом и А. Раджагопалом.

Оценка влияния параметров начального напряженно-деформированного состояния на акустические характеристики неоднородной пластины с покрытием

Недин Р. Д.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

*Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН, Владикавказ*

В настоящее время новые композиционные и функционально градиентные материалы используются в различных областях науки и техники. Во многих инженерных приложениях для адекватной диагностики процессов деформирования и механических свойств объектов необходимо более тщательно подойти к вопросам моделирования и разработать методы решения соответствующих новых обратных задач.

В настоящей работе описана модель предварительно напряженного тела, в которой начальное деформированное состояние можно определить геометрически линейной теорией. Это допущение соответствует тому, что градиентами начальных перемещений можно пренебречь по сравнению с единицей. На основе общей линеаризованная теория колебаний упругого предварительно напряженного неоднородного тела рассмотрена частная задача о колебаниях прямоугольной пластины с неоднородным функционально-градиентным покрытием в условиях начального напряженно-деформированного состояния. На основе вариационного принципа построена постановка краевой задачи. Сформулирована слабая постановка задачи для пяти пробных функций – компонент вектора планарных перемещений, прогиба пластины и углов поворота нормалей к поверхности пластины. Построено численное решение задачи с помощью метода конечных элементов на основе слабой постановки исходной задачи. Проверено, что в частном случае, для однородной пластины, находящейся в условиях однородного предварительного напряженного состояния, при выполнении соответствующих условий деформирования согласно модели Кирхгофа, выведенная постановка задачи разделяется на две классические задачи об изгибных и планарных колебаниях пластины. Отметим также, что Е. Бринеллем получена постановка аналогичной задачи в том случае, когда в трансверсально-изотропной пластине с постоянными характеристиками имеется однородное плоское начальное напряженное состояние, характеризующееся тремя постоянными компонентами и действующее в срединной поверхности, а также учитывается начальный прогиб. По сравнению с ней описанная в работе модель обладает рядом преимуществ: в ней учтена полная неоднородность упругих характеристик материала и предварительных напряжений, включена планарная составляющая колебаний, а также отсутствует явная зависимость от начального прогиба, что представляет удобство при решении целого класса обратных задач об идентификации предварительного напряженного состояния.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-11-00069).



## Построение упрощенных моделей для термоупругих тел с покрытиями

**Нестеров С. А.**

*Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН, Владикавказ*

Термобарьерные покрытия служат для термоизоляции металлических частей различных механизмов, работающих в высокоинтенсивном термомеханическом окружении. Термобарьерные покрытия широко применяются, например, в качестве покрытий газовых турбин. К термобарьерным покрытиям применяются следующие требования: 1) высокая температура плавления, 2) отсутствие фазового превращения между комнатной температурой и рабочей температурой, 3) низкая теплопроводность, 4) химическая инертность, 5) близкие между собой коэффициенты теплового расширения субстрата и покрытия. Этим требованиям отвечают покрытия, состоящие из трех слоев: нижнего - металлического связывающего покрытия, верхнего - керамического и промежуточного слоя из функционально-градиентной металлокерамики, предназначенного для уменьшения напряжений, возникающих на границе раздела. Исследованию термомеханического поведения системы покрытие-подложка посвящено большое количество исследований. Вместе с тем в инженерной практике актуальной является задача построения упрощенных моделей поведения термоупругих тел с покрытиями, в состав которых входит узкий функционально-градиентный слой.

В работе рассмотрена задача о деформировании изотропного термоупругого слоя с термозащитным покрытием. Нижняя поверхность слоя жестко закреплена и поддерживается при нулевой температуре. На верхней поверхности действуют тепловые и механические нагрузки. Полагаем, что подложка изготовлена из однородного материала, а покрытие состоит из трех слоев, при этом второй слой изготовлен из FGM.

Предложен численно-аналитический метод решения задачи термоупругости для системы покрытие-подложка. Для этого были предложены гипотезы строения физических полей, учитывающие неоднородность характеристик покрытия. Для этого были введены функции температуры и перемещений на верхней грани слоя. Используя гипотезы о строении физических полей и аналог вариационного принципа Лагранжа для термоупругости были получены выражения для нахождения перемещений, температуры и напряжений при различных законах изменения материальных характеристик покрытия.

В ходе вычислительных экспериментов рассматривалось влияние тепловой и механической нагрузки, теплофизических и механических характеристик покрытия, толщины покрытия на напряжения, возникающие на границе покрытие-подложка. Были даны рекомендации по оптимизации покрытий.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 18-11-00069).

## Решение задач термоэластостатики для преднапряженных функционально-градиентных материалов

**Нестеров С. А.**

*Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН, Владикавказ*

В настоящее время пьезоэлектрические материалы находят широкое применение при создании различных диагностических приборов и температурных датчиков благодаря наличию эффекта взаимной связанности теплового, электрического и упругих полей. При описании механического поведения пьезоматериалов используют уравнения термоэластостатики, которые впервые были получены Миндлиным в начале 60-х гг. XX века. Для получения в различных устройствах на основе пьезоэффекта заданных свойств широко используются функционально-градиентные пьезоматериалы (ФГМП). ФГМП – это композиты, обладающие переменными физическими свойствами, в которых избегают скачков материальных характеристик через поверхность раздела, присущих слоистым материалам. Кроме того, пьезоматериалы могут находиться в условиях неоднородного преднапряженного состояния. В этом случае материальные характеристики пьезоматериалов являются не константами, а некоторыми функциями пространственных координат. Заметим, что задачи термоэластостатики для однородных и кусочно-однородных тел изучены достаточно подробно, для них получены аналитические решения. Актуальной является задача построения решения задачи термоэластостатики для преднапряженных тел при произвольных законах неоднородности.

Для решения задачи термоэластостатики для преднапряженных тел на основе вариационного подхода, используя метод множителей Лагранжа в пространстве трансформант по Лапласу был составлен единый функционал. В качестве примера применения вариационного подхода рассмотрена нестационарная задача термоэластостатики для преднапряженной пластины-полосы, находящейся в состоянии плоской деформации. Ставится задача нахождения наведенного потенциала на электродах, расположенных на верхней грани полосы. Учитывая тонкостенность пластины, в работе приняты гипотезы о строении физических полей, аналогичные гипотезам Кирхгофа. Были получены система уравнений и граничных условий в трансформантах по Лапласу, которые естественным образом разделяются на две независимые задачи: о растяжении-сжатии и изгибе. Каждая из полученных задач в трансформантах решалась на основе метода пристрелки. Обращение трансформант осуществлялось на основе метода Дурбина.

Проведены вычислительные эксперименты по влиянию различных законов распределения преднапряжений и материальных характеристик на наведенный электрический потенциал.

Работа поддержана РФФИ (грант № 16-01-00354).

## Динамика точек отрыва при вертикальном отрывном ударе плавающего кругового цилиндра

**Норкин М. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается динамическая смешанная задача о вертикальном отрывном ударе кругового цилиндра, полностью погруженного в идеальную, несжимаемую, тяжелую жидкость. Предполагается, что после удара цилиндр движется с постоянной скоростью или совершает свободные кавитационные движения под действием силы тяжести и силы реакции среды на цилиндр. На поверхности цилиндра образуется зона отрыва, которая уменьшается с течением времени. При малых скоростях можно пренебречь нелинейными слагаемыми в уравнении Эйлера (или в интеграле Коши–Лагранжа) и прийти к линеаризованной постановке задачи. Следует отметить, что наряду с указанной нелинейностью имеется другая, геометрическая нелинейность, обусловленная наличием неизвестной априори зоны отрыва частиц жидкости. Эта нелинейность сохраняется, поскольку именно благодаря ей определяется положение точек отрыва в каждый момент времени. Как показывают исследования, проведенные в этой области, именно при малых скоростях наблюдаются быстрые перемещения точек отрыва. Таким образом, поставленная задача исследуется в линеаризованной постановке, с учетом динамики точек отрыва, отделяющих на границе тела область безотрывного обтекания от зоны отрыва. В математическом плане дело сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. В случае свободных движений цилиндра эту задачу необходимо дополнить уравнением его движения. Отметим, что при свободных движениях время уже не входит в задачу как параметр. Поэтому для ее решения применяется метод шагов по времени. На каждом шаге по времени находится перемещение цилиндра и определяется новое положение точек отрыва. Для этих величин возникает связанная нелинейная задача, включающая в себя смешанную краевую задачу теории потенциала с граничными условиями типа неравенств и нелинейное уравнение, определяющее закон движения цилиндра. Для численного решения последней задачи используются два связанных итерационных процесса – внешний и внутренний. Внешний итерационный процесс представляет собой метод простой итерации для решения нелинейного уравнения, а внутренний итерационный процесс, который применяется на каждом шаге внешнего процесса, служит для решения задачи с односторонними ограничениями. Таким образом, при заданном перемещении цилиндра уточняются неизвестные заранее зоны отрыва частиц жидкости. Сами же перемещения уточняются при помощи метода простой итерации. Такой подход позволяет одновременно находить неизвестные заранее зоны отрыва частиц жидкости и закон движения цилиндра. Рассмотрены конкретные численные примеры, демонстрирующие динамику точек отрыва. Показано, что после удара зона отрыва уменьшается и за некоторый конечный промежуток времени полностью исчезает (происходит схлопывание тонкой каверны).

## Определение материальных свойств пористых тел с использованием комплекса ACELAN COMPOS

Оганесян П. А.<sup>1</sup>, Курбатова Н. В.<sup>1</sup>, Надолин Д. К.<sup>1</sup>, Холостов С. И.<sup>1</sup>,  
Соловьев А. Н.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассматривается задача определения материальных свойств упругих и электроупругих тел с закрытыми порами. Тело с такими свойствами соответствует композиту со связностью 3-0. В работе проводится исследование влияния процента пористости, размера пор, характера разбиения и возможности слипания пор. Все эти факторы могут оказать значительное влияние на свойства материала. В качестве основного инструмента моделирования использовался комплекс ACELAN COMPOS. Исходные данные об исследуемых задачах формировались в виде параметризованных скриптов. Такой подход позволяет проводить автоматизированные серии экспериментов и может быть использован в том числе и для решения обратных задач. Модели представительных объемов имели форму куба с регулярным разбиением. Количество элементов разбиения варьировалось в ходе численных экспериментов. При формировании локальных матриц жесткости использовался восьми узловой конечный элемент с динамическим выделением памяти в зависимости от числа степеней свободы. Для симуляции пор в материале был использован псевдо-материал со значительно пониженными физическими свойствами. Для решения систем линейных уравнений использовались итерационные и прямые решатели для симметричных разреженных матриц. Модули экспорта данных комплекса ACELAN позволяют переносить конечно-элементные сетки в ряд других КЭ пакетов, что сделало возможным провести параллельно серию экспериментов по валидации результата. Определение эффективных материальных свойств композита осуществлялось на основе метода осреднения. Для каждой комбинации входных параметров, описывающих распределение пор в композите, решался набор прямых задач для определения отдельных коэффициентов. Чтобы компенсировать влияние случайности, возникающей при формировании пор в модели, такой эксперимент для одних и тех же входных данных проводился несколько раз. Предложенный подход позволяет определять эффективные свойства пористых материалов с использованием заранее подготовленных наборов граничных условий и описаний геометрии материала. Архитектура пакета ACELAN COMPOS позволяет проводить исследования и использованием серверных вычислительных модулей, что значительно снижает требования к ЭВМ исследователя. В работе также представлена предварительная версия алгоритма определения оптимальной топологии пор на основе алгоритмов топологической структурной оптимизации ESO/BESO. В случае, когда процесс порообразования может быть зависим от метода формирования композита, информация о наиболее эффективной топологии пор при заданном проценте пористости может оказаться полезной.

Работа выполнена при поддержке гранта в рамках проектной части государственного задания (9.1001.2017/ПЧ).

## Исследование динамики относительно тонких слоев в процессе виброкипения с использованием метода дискретных элементов

**Орлова Н. С.**

*Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН, Владикавказ*

Рассматривался процесс виброкипения относительно тонких слоев (начальная толщина которых равна нескольким размерам частиц). Использовались частицы силикагеля, средний диаметр которых равен 4 мм. Толщина слоя составляла 15 мм и 20 мм. Коэффициент восстановления в случае столкновения частиц друг с другом был равен 0,15. Моделирование виброкипения осуществлялось с использованием метода дискретных элементов (МДЭ) (Discrete element method). Для проведения вычислений использовался свободный открытый программный код LIGGGHTS, в котором реализован МДЭ. Результаты расчетов были получены при амплитуде колебаний 1,5 мм и частоте 30 Гц, при амплитуде 2 мм, частоте 30 Гц и 36 Гц, а также при амплитуде 2,5 мм и частоте 33 Гц. Полученные результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными. Результаты расчетов среднего по времени распределения объемной доли частиц удовлетворительно описывает экспериментальные данные. В нижней и верхней части слоя по результатам расчетов значения объемной доли частиц занижены по сравнению с экспериментальными данными, в средней части слоя – завышены (как и в случае виброкипения монослоев с толщиной засыпки 6 мм). Получено, что с увеличением амплитуды и частоты колебаний растет степень расширения виброкипящего слоя (отношение максимальной высоты виброкипящего слоя к его начальной толщине). Так при амплитуде колебаний 2 мм и частоте 30 Гц средняя высота слоя составляет примерно 32 мм, при амплитуде 2 мм и частоте 36 Гц средняя высота примерно равна 40 мм, при амплитуде 2,5 мм и частоте 33 Гц – примерно 48 мм. В случае более толстого слоя (20мм) средняя высота при виброкипании примерно составляет 30 мм (следует учитывать, что результаты получены при меньшем значении амплитуды колебаний). Следует отметить, что в процессе виброкипания слоев, наблюдается волнообразная поверхность и отдельные всплески над поверхностью слоя. В результате предыдущих исследований было установлено, что на степень расширения виброкипящего слоя большее влияние оказывает амплитуда колебаний, частота колебаний влияет на количество всплесков в виброкипящем слое. Если сравнивать значения степени расширения виброкипящего слоя из выше приведенных вариантов расчетов, то наибольшее значение высоты виброкипящего слоя наблюдается в случае, когда амплитуда колебаний равна 2,5 мм. Также получено, что при более высоком значении частоты колебаний (36 Гц) количество всплесков возрастает, и максимальная скорость частиц имеет более высокие значения, чем в случаях относительно низких частот.

Конечноэлементный расчет параметров рассеяния для фильтров на поверхностных акустических волнах на основе пленок титаната бария стронция на подложке из оксида магния

Панькин А. В.<sup>1,2</sup>, Тимошенко П. Е.<sup>1,2</sup>, Калинин В. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

В последнее время широкое распространение получили устройства на поверхностных акустических волнах. Они осуществляют аналоговую обработку информации, а в качестве объекта переноса информации используют акустические волны в кристаллах. Неотъемлемым элементом данных устройств является преобразователь электрического сигнала в акустическую волну, выполняющий также и обратное преобразование. Конструкция преобразователя зависит от требований к его амплитудно-частотной характеристике, фазочастотной характеристике, а также зависит от вида используемой волны. В случае применения поверхностных волн на пьезоэлектрических пленках наиболее удобно использовать встречно-штыревой преобразователь, состоящий из двух групп металлических электродов (штырей), вложенных навстречу друг другу и расположенных на поверхности пьезоактивного звукопровода. Обычно они изготавливаются из тонкой пленки алюминия. На данный момент является актуальным изучение влияния электро-механических параметров среды и параметров встречно-штыревого преобразователя на распространение поверхностных волн в структурах, содержащих тонкие пленки титаната бария стронция.

В настоящей работе представлен порядок решения задач возбуждения, распространения и приема поверхностной акустической волны в тонкой пьезоэлектрической пленке титаната бария стронция на подложке из оксида магния посредством встречно-штыревых преобразователей, выполняющих преобразование электромагнитных волн в поверхностные акустические волны и обратно. Задача сводится к решению обобщенной системы дифференциальных уравнений, где в качестве независимых переменных выбираются три компоненты вектора механического смещения и электрический потенциал. Численные расчеты проводились в пакете конечноэлементного моделирования COMSOL.

В работе приведены результаты численного расчета параметров рассеяния  $S_{11}$  и  $S_{12}$  для структур, содержащих пленку титаната бария стронция, имеющую различную толщину и величину вынужденной деформации, которая, как известно, вследствие несоответствия кристаллических решеток пьезоэлектрического слоя и подложки приводит к изменению диэлектрической проницаемости и пьезоэлектрического коэффициента. В зависимости от величины вынужденной деформации происходит изменение материальных констант, которое особенно велико вблизи фазовых переходов, где вынужденная деформация пленки близка к критическому значению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01676).

## Хаотическая динамика и контактное взаимодействие двухслойной размерно-зависимой гибкой цилиндрической панели

Папкина И. В.<sup>1</sup>, Крысько В. А.<sup>1</sup>, Крысько А. В.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет

В работе построена математическая модель нелинейных колебаний и контактного взаимодействия двухслойной гибкой размерно-зависимой прямоугольной в плане цилиндрической панели, находящейся в температурном поле, с учетом контактного взаимодействия между слоями. Панель рассматривается как континуум Коссера со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуум). Уравнения движения элемента панели, граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Остроградского-Гамильтона на основании кинематических гипотез Кирхгофа – Лява. Геометрическая нелинейность учтена по модели Теодора фон Кармана. Температурное поле учитывается по модели Дюамеля-Неймана и находится из трехмерного уравнения теплопроводности с краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го рода. На распределение температурного поля никаких ограничений не накладывалось. Главная особенность предлагаемого метода состоит в исключении контактного давления из числа неизвестных функций путем введения явной связи с поперечным обжатием между балкой и штампом или самой балкой. В задачах о контакте балки с винклеровым основанием такая связь возникает естественным образом при взаимодействии балки со штампом она вводилась ранее, чтобы выразить прогиб через контактное давление. Уравнения в частных производных сводятся к задаче Коши методом конечных разностей второго порядка точностей, которая решается одним из методов типа Рунге-Кутты. Исследуется сходимость метода в зависимости от разбиений по пространственным координатам и времени. Уравнения движения элемента оболочки в работе записаны в смешанном виде. Система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе ОДУ методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка или методом Бубнова-Галеркина в высших приближениях. Система рассматривается как система с бесконечным числом степеней свободы. Задачи Коши решаются методами типа Рунге-Кутты различного порядка точности: метод Рунге-Кутты 4-го (RK4), 2-го (RK2) порядков, метод Рунге-Кутта-Фелберга 4-го порядка (rkf45), метод Кеш-Карпа 4-го порядка (RKCK), Рунге-Кутта Принса Дорманда восьмого порядка (rk8pd), неявный метод Рунге-Кутта 2-го (rk2imp) порядка и 4-го (rk4imp) порядка. Исследуется сходимость и сопоставление каждого метода в зависимости от шага по времени и координате, а также количества членов ряда разложения функций в методе Бубнова-Галеркина. Старший показатель Ляпунова определяется с помощью трех методов: Вольфа, Кантца, Розенштейна для доказательства истинности хаоса. Проведено исследование влияния учета размерно-зависимого параметра на нелинейную динамику гибкой цилиндрической панели в зависимости от геометрического параметра  $kx$  под действием поперечной равномерно распределенной знакопеременной нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 18-38-00878 мол\_а, № 16-08-01108а, № 16-01-00721а, № 18-01-00351а

Неклассическая задача о контакте с жестким основанием тяжелой конструкции, формируемой по аддитивной технологии из материала, проявляющего изменяющиеся со временем вязкоупругие свойства

**Паршин Д. А., Казаков К. Е.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва  
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

В расчете крупногабаритных конструкций силы тяжести играют первостепенную роль. В классических задачах механики действие сил тяжести учитывается путем приложения массовой нагрузки сразу ко всей рассчитываемой конструкции в целом. Однако при постепенном ее сооружении, которое, как правило, имеет место на практике, такой учет сил тяжести будет давать принципиально неверное представление о напряженно-деформированном состоянии конструкции. Это объясняется тем, что вес каждого, сколь угодно малого, материального элемента, дополнительно присоединяемого к конструкции в процессе ее сооружения, вызывает ее дополнительное деформирование и появление в ней дополнительных напряжений. Суммарный эффект от воздействия веса всех составляющих конструкцию элементов при их последовательном включении в ее состав в общем случае не тождественен эффекту от приложения сил тяжести ко всем этим элементам одновременно в составе уже готовой конструкции. Можно показать, что расчет весомых конструкций по конечной конфигурации должен, вообще говоря, существенно занижать оценки уровней действующих в них напряжений и не улавливать возможные зоны их локальной концентрации, возникающие в силу специфики конкретного способа сооружения конструкции. Адекватное описание процессов развития напряженно-деформированного состояния постепенно сооружаемых тяжелых конструкций может быть осуществлено в рамках механики наращиваемых тел, которая учитывает кинематические и силовые особенности самого процесса формирования конструкции, а не только деформирующие факторы, ассоциированные с ее окончательной конфигурацией.

В настоящей работе построена модель механики наращиваемых тел для описания квазистатических процессов аддитивного изготовления тяжелых полуциркульных сводчатых конструкций из стареющих вязкоупругих материалов (в частности, бетона) методом послойного утолщения заготовки, первоначально установленной на жесткое горизонтальное основание и закрепленной на нем посредством скользящей заделки. Модель учитывает влияние сил тяжести на протяжении всего процесса. Проведены многочисленные числовые расчеты. Обнаружена возможность целенаправленного формирования выгодных распределений контактных напряжений на опорных площадках аддитивно изготовленной конструкции посредством преднапряжения присоединяемых к ней в процессе изготовления конструктивных элементов и временных управляющих силовых воздействий на малую часть ее поверхности.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер государственной регистрации АААА-А17-117021310381-8) и частично в рамках проектов, поддержанных Российским фондом фундаментальных исследований (проекты №№ 18-01-00920-а, 18-01-00770-а).



## Взаимодействие трещин со связями в концевой области с границами раздела сред

**Перельмутер М. Н.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Задачи о взаимодействии трещин с препятствиями и границами раздела сред возникают при исследовании торможения трещин и управления их движением. Задачи такого рода возникают как при разработке методов предотвращения разрушения крупногабаритных конструкций, так и при отыскании путей повышения надежности изделий микроэлектроники. Для торможения трещин используют ребра жесткости, специальные прослойки, разгружающие отверстия, ремонтные накладки и заполнители трещины. В последнем случае между берегами трещины образуются связи, позволяющие снизить коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины.

В данной работе представлены результаты исследования эффекта торможения трещин в составных конструкциях при наличии зон неидеального соединения материалов, полученные методом граничных интегральных уравнений (ГИУ). Конструкция моделируется набором однородных подобластей с трещинами, расположенными на границах между подобластями. Такой подход позволяет рассматривать трещины в однородных телах при несимметричном нагружении, а также трещины на границах соединения различных материалов. Предполагается, что на участках идеального контакта подобластей выполняются условия непрерывности для перемещений и равновесия для усилий. На участках границ подобластей, содержащих трещины со свободными от связей берегами, перемещения в каждой подобласти рассматриваются как независимые переменные. Дополнительные условия вводятся при наличии связей между берегами в концевой области трещины или на участках неидеального соединения подобластей (обобщенный закон деформирования связей). Для численного решения ГИУ используются изопараметрические квадратичные граничные элементы и специальные граничные элементы вблизи вершины (фронта) трещины, учитывающие асимптотическое поведение переменных (перемещений и поверхностных усилий). Выполнено параметрическое исследование задачи о торможении краевой трещины подкрепляющим слоем материала. Трещина рассматривается как свободная от связей, так и заполненная связями. Нагрузка – одноосное растяжение по нормали к плоскости трещины. Закон деформации связей в концевой области трещины полагался линейно-упругим. Увеличение эффективной жесткости слоя приводит к значительному снижению КИН, при большой жесткости слоя его экранирующий эффект стабилизируется. Отметим также, что при идеальном соединении материалов с приближением вершины трещины с поверхности слоя его экранирующий эффект усиливается. Заполнение трещины связями приводит к существенному повышению эффективности упрочнения. Рассмотрено также влияние жесткости соединительного слоя между подобластями при учете неидеально контакта подобластей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №17-08-01312) и Программ РАН (проекты I.1.16 and I.2.32).

## Об индентировании градиентных упругих структур с покрытием

**Плотников Д. К., Поддубный А. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Одним из наиболее распространенных методов определения характеристик различных материалов является индентирование. Методы индентирования успешно применяются при определении приповерхностных свойств композитов, функционально-градиентных материалов, углей, а также при исследовании свойств различных биологических тканей (костной, мышечной, при определении упругих свойств отдельных клеток). Переменный характер свойств таких материалов требует учета неоднородности характеристик индентируемых структур при решении контактных задач.

В работе предложена приближенная модель деформирования двуслойной упругой полосы, жестко сцепленной с недеформируемым основанием, представляющей собой систему «покрытие-подложка». Рассмотрена задача о контактном взаимодействии бесконечной упругой полосы с жестким параболическим штампом. Трение между контактными поверхностями штампа и полосы не учитывается. Решена вспомогательная задача о действии нормальной нагрузки на некотором отрезке верхней грани полосы. Выражение удельной потенциальной энергии деформации упрощено путем введения гипотез о характере поля перемещений по толщине. Для каждого отдельного слоя введены линейные по толщине гипотезы, что позволяет учесть разрывный характер изменения упругих характеристик полосы при переходе от одного слоя к другому и корректно описать деформирование слоистой полосы. На основе вариационного принципа Лагранжа построена система двух дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами относительно компонент вектора смещений на границе слоев. С помощью преобразования Фурье построены передаточные функции, связывающие трансформанты Фурье смещений и нагрузки, представляющие собой дробно-рациональные функции параметра преобразования. Построено интегральное уравнение контактной задачи, найдено его решение, определено смещение свободной поверхности полосы, построено распределение контактного давления под штампом. Установлена связь между величиной внедрения и размером площадки контакта, определена зависимость «сила-внедрение», характерная для испытания материалов методом индентирования. Представлены результаты вычислительных экспериментов для различных законов неоднородности слоев. Исследовано влияние неоднородных свойств покрытия и подложки на характеристики индентирования. Представлено сравнение результатов вычислительных экспериментов с решением для модели, основанной на гипотезе линейного изменения смещений для всей полосы в целом.

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю профессору Ватульяну А. О. за помощь в работе.

Исследование выполнено при частичной поддержке Российского научного фонда (проект №18-11-00069).

## Трехмерные контактные задачи для неоднородных оснований

**Пожарский Д. А., Бедоидзе М. В.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Исследованы трехмерные контактные задачи с заранее неизвестной областью контакта о вдавливании недеформируемого жесткого штампа в неоднородное по глубине упругое полупространство. Предполагается, что коэффициент Пуассона упругого материала зависит от глубины, а модуль сдвига постоянный. Рассматриваются случаи гладкой, без учета сил трения, и шероховатой упругой поверхности, для моделирования которой выбирается модель нелинейного покрытия винклеровского типа. По аналогии с задачей Галина, исследуется случай, когда на поверхности полупространства вне области контакта действует дополнительная нормальная сосредоточенная сила. Формы штампов предполагаются следующие: эллиптический параболоид, четырехугольная пирамида и конус. Для вывода интегрального уравнения требуется знание нормального перемещения границы упругого полупространства, зависящее от нормальной нагрузки, которое получается из решения краевой задачи, методом интегральных преобразований Фурье, развитым Бородачевым А.Н. Для решения полученных интегральных уравнений используется численный метод Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и давления в этой области. Для улучшения сходимости ядер интегральных уравнений выделены и точно проинтегрированы плохо сходящиеся части. Для проведения расчетов подготовлена и отлажена компьютерная программа на языке Фортран. Выполнены расчеты для различных значений упругих характеристик материалов и геометрических параметров штампов. Изучено влияние приложенной дополнительной силы на симметрию распределения контактных давлений и вдавливающей силы штампа.

Также изучены трехмерные контактные задачи о взаимодействии жестких штампов с неоднородным упругим слоем, материал которого характеризуется переменным по глубине коэффициентом Пуассона и постоянным модулем сдвига. Модуль продольной упругости также изменяется по глубине соответствующим образом. Другая грань слоя лежит без трения на недеформируемом основании. Задачи сведены к интегральному уравнению относительно контактных давлений, для ядра которого построены точные выражения. При заранее неизвестной области контакта для решения применен метод нелинейных граничных интегральных уравнений, который позволяет одновременно определить область контакта и давления в этой области. Расчеты сделаны для пирамидального и конического штампов при изменении относительной толщины слоя и параметров закона неоднородности.

## Образование пространственно-временных структур в испаряющейся капле жидкости, содержащей примеси

**Полякова Н. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрена задача о поведении вращательно симметричной и протяженной испаряющейся капли жидкости, расположенной на горизонтальной плоскости. В основу математической модели положена осредненная по толщине капли система уравнений, описывающая поведение многокомпонентной сплошной среды. Предполагается, что жидкость заполняет область со свободной границей, которая является границей раздела фаз. Отметим две особенности процедуры осреднения. Во-первых, осреднение проводится по толщине области, которая изменяется в результате испарения жидкости. Во-вторых, при пересечении свободной поверхности капли с горизонтальной плоскостью возникают сингулярности, вызванные обращением толщины капли в нуль. В использованной для исследования модели диссипативными эффектами — вязкостью, теплопроводностью и диффузией, для рассматриваемого диапазона изменения параметров пренебрегается. Математически задача сводится к численному решению системы гиперболических квазилинейных уравнений методом конечных объемов с использованием специальных Riemann solvers, с линейной реконструкцией, в частности, HLL (Harten, Lax and van Leer) реконструкцией на структурированных и неструктурированных сетках.

Вычислительные эксперименты показали, что в результате испарения жидкости образуются пространственно-временные структуры примеси. Имеются, по крайней мере, две причины образования структур. Первая из них — это различие в подвижностях индивидуальных компонент многокомпонентной примеси. Разделение смеси на отдельные компоненты происходит в результате переноса компонент течением смеси, возникающем в результате испарения. Такой процесс аналогичен хроматографии — разделению смеси в заданном потоке жидкости. Вторая причина образования структур — это прилипание осадка примеси к горизонтальному основанию. Дело в том, что в результате испарения капли ее горизонтальный размер уменьшается. В области пересечения свободной поверхности капли с горизонтальным основанием возникают высохшие зоны примеси, которые и образуют пространственные структуры. Такой эффект известен как кофейные кольца. Для его описания требуется дополнительно уточнить механизм прилипания примеси к поверхности, и один из возможных механизмов предложен в работе.

Рассмотренная математическая модель и результаты исследования применимы для развития метода клиновидной дегидратации биологических жидкостей (кровь, слезная жидкость, ликвор и др.), который используется для медицинской диагностики различных заболеваний по структуре высохших капель.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 1.5169.2017/8.9 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

## Исследование деформирования решетчатой пластинки склеры на основе различных моделей

**Потетюнко О. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Характерные морфологические изменения диска зрительного нерва и решетчатой пластины (РП) считаются важным клиническим биомаркером прогрессирования глаукомы. Изучение характеристик РП имеет существенное значение в патогенезе глаукомного повреждения зрительного нерва, поскольку экспериментальные данные указывают на анатомические различия между РП здорового и больного глаз. Отметим, что моделирование должно производиться с учетом неоднородности, поскольку она оказывает существенное влияние на деформирование РП при повышении ВГД и позволяет определить точки перегиба, исследование местоположения которых играет важную роль в практической диагностике глаукомы. Кроме того, непосредственный контакт РП со склерой требует учета упругого закрепления, что позволит более точно оценивать прогиб и в рамках такой модели с большей точностью восстанавливать значение ВГД.

В работе рассмотрено несколько моделей деформирования пластин применительно к моделированию решетчатой пластинки склеры. Для описания малых прогибов использована модель Кирхгофа, в рамках которой РП представляется круглой упругой пластиной переменной жесткости с линейными упругими связями на краю. В осесимметричном случае сформулирована краевая задача. Для этого на основе вариационного принципа Лагранжа для пластины был сформулирован и решен численно на основе метода Рунге ряд вспомогательных задач, не содержащих искомым коэффициентов; получено представление прогиба как дробно-рациональной функции, содержащей искомые параметры, построена система нелинейных алгебраических уравнений, из которой и находятся коэффициенты жесткости заделки.

В рамках модели линейной вязкоупругости РП моделируется круглой вязкоупругой пластиной переменной жесткости с линейными вязкоупругими связями на краю. В рамках установившихся колебаний вязкоупругие связи на краю характеризуются двумя комплексными коэффициентами в граничных условиях. Использован принцип соответствия, согласно которому для изучения колебаний пластины из вязкоупругого материала необходимо заменить модуль упругости комплексной функцией частоты. В рамках такой модели также была поставлена и решена задача реконструкции параметров вязкоупругости на основе известного прогиба в наборе точек.

Кроме того, в работе рассмотрено моделирование упруго закрепленной РП с учетом больших деформации в рамках модели Кармана. Задачи о нахождении смещений и точек перегиба решены численно методом Рунге для различных законов неоднородности и значений параметров закрепления. Проведено сравнение с результатами, полученными по линейной теории Кирхгофа, произведен анализ влияния больших деформаций на деформирование пластины.

Автор благодарит профессора А. О. Ватульяна за внимание к работе.

## Трехмерная кинематика скольжений в неплотно связанных средах Кулона—Мора

**Радаев Ю. Н.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

Неплотно связанные среды состоят из множества отдельных в достаточной степени однородных частиц, которые могут взаимодействовать друг с другом, обеспечивая тем самым их связанность. Они способны сопротивляться только сжимающим нормальным напряжениям и не оказывают никакого сопротивления растягивающим. В механике неплотно связанных сред используются две основные математические модели: сплошная (континуальная) и зернистая (дискретная). В первом случае неплотно связанные среды прекрасно моделируются однородной изотропной сплошной средой, которая для широкого спектра механических состояний может сохранять свою форму, хотя и характеризуется полным отсутствием сопротивления растягивающим деформациям. Такие среды принято называть сыпучими. Механика сыпучих сред является важным в прикладном плане обобщением механики идеально пластических тел, когда на площадках скольжения сдвиговые напряжения зависят от нормальных сжимающих напряжений. Среда Кулона—Мора, характеризующаяся взаимным трением и сцеплением составляющих ее элементов, относится к так называемым конвенциональным моделям механики континуума. Деформация среды Кулона—Мора начинается и продолжается неопределенно долго, если максимальное касательное напряжение достигает предельного значения, зависящего от средней величины (полусуммы) наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Течение среды Кулона—Мора является необратимо сжимаемым.

В представляемой работе предложен новый метод исследования сжимаемых течений сред Кулона—Мора, реализующихся как система скольжений вдоль поверхностей максимальной скорости сдвига, который основан на понятии об асимптотических директорах тензора напряжений и приращения тензора деформаций. Асимптотические директора приращения тензора деформаций располагаются в плоскости, ортогональной главной оси с „промежуточным“ главным значением этого тензора. Приводятся оценки величины дилатации в процессах необратимого скольжения. Показано, что линейные элементы, перпендикулярные направлениям асимптотических директоров, не претерпевают мгновенных удлинений. Изучаются также кинематические соотношения в случае нулевого взаимного трения элементов среды (т.е. кинематика трехмерного скольжения для тел Треска—Сен-Венана), когда что плоский элемент, ортогональный промежуточной главной оси тензора напряжений и ориентированный вдоль направлений, делящих точно пополам угол между двумя другими главными направлениями, испытывает лишь мгновенную деформацию сдвига.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

## Применение метода системы пружин для генерации сеток в задачах аддитивного производства

**Романов А. А.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Очень часто в современных задачах механики растущих тел рассматриваются задачи, не имеющие аналитического решения, или задачи, для которых нахождения такого решения затруднено. Для оценки и количественной характеристики растущих тел в данных задачах применяются численные методы, например, метод конечных элементов, метод граничных элементов и метод конечных разностей. Наиболее популярным методом является метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий получить приблизительные значения перемещений, напряжений и деформаций в конечном наборе точек тела, а в остальных точках значения получаются с помощью интерполяции значений в точках. Данный набор точек является узлами конечно-элементной сетки, которую необходимо построить для исследуемого тела до начала решения. Задача построения является достаточно сложной, т.к. исследуемое тело может иметь многосвязную границу со сложной геометрией, и желательно тело разбивать на четырехугольники, т.к. такая сетка дает более точное численное решение.

В задачах растущих тел ко всему прочему добавляется проблема изменения границы тела из-за его роста, в следствии чего сетка, созданная в некоторый момент времени, может не отражать актуальную геометрию тела. Данная проблема приводит к необходимости модификации сетки на каждом шаге по времени. Для этой цели используется метод модификации сетки, основанный на замене всех ребер сетки пружинами с некоторой жесткостью. Такой подход позволяет сократить время перестройки сетки до  $O(n^2)$ , где  $n$  – количество узлов сетки. Данное время является достаточно малым по сравнению с временем генерации сетки заново другими методами.

В работе рассмотрены алгоритмы использования данного метода в программах для численного моделирования задач растущих тел, оптимальная настройка параметров метода для той или иной задачи, использование данного метода совместно с другими и точность генерируемой сетки для некоторых задач роста цилиндрических конструкций под действием гравитации. Особенно стоит отметить изменение сетки простым добавлением новых элементов на границе роста тела. При модификации сетки методом пружин происходит увеличение размеров каждого элемента, поэтому добавление новых элементов сетки позволяет сохранить размеры каждого элемента достаточно малыми, чтобы погрешность численных расчетов так же оставалась малой.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер государственной регистрации АААА-А17-117021310381-8) и в рамках проектов, поддержанных Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 18-01-00920-а и проект № 17-01-00712).

## Динамика наращиваемых по толщине слоистых сферических оболочек

**Сайфутдинов Ю. Н.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

Традиционные методы изготовления деталей сложной формы подразумевают технологические процессы обработки, связанные со снятием материала, например, резку, фрезеровку, сверление и т.п. Альтернативный класс технологических процессов основан на создании деталей путем последовательного нанесения материала на подложку или поверхность произвольной формы, например, в результате локальной полимеризации, электрохимической реакции, наклейки, наплавки, локального спекания и т.д. Подобные процессы принято относить к классу аддитивных технологий. Они позволяют быстро и относительно дешево создать пространственную деталь сколь угодно сложной формы и теоретически из любого материала. Аддитивные технологии базируются на современных принципах построения прецизионных систем с программным управлением (CNC). Однако, несмотря на возможность позиционирования элементов технологической установки с высокой точностью, отклонения геометрической формы изделия от проекта остается высокой, в первую очередь, в силу собственных деформаций (тепловых, усадочных и т.п.) изготавливаемого тела. С этими деформациями связаны остаточные (собственные). Остаточные напряжения могут вызывать потерю устойчивости для тонкостенных изделий и разрушение для массивных тел, причем потеря устойчивости и разрушение могут произойти уже в процессе изготовления. Все эти факторы существенно влияют на организацию и качество аддитивных технологических процессов. В этой связи актуальным является развитие методов математического моделирования эволюции напряженно-деформированного состояния (НДС) тела в ходе аддитивного технологического процесса. Моделирование позволяет расчетным путем предсказать нежелательные искажения НДС и оптимизировать качество процесса, в частности, учитывать при проектировании контрдеформации, нивелирующие технологические искажения. Математические модели основаны на идее описания структурной неоднородности, вызванной соединением несовместно деформированных частей, мера несовместности которых зависит от сценария аддитивного процесса. В настоящей работе общие идеи обсуждаемой теории иллюстрируются на частной модели – послойно наращиваемой сферической трехслойной оболочке. Предполагается, что оболочка (в технологической терминологии – сферическая подложка) представляет собой трехслойную тонкостенную конструкцию, внешние слои которой достаточно тонкие и могут быть представлены сферическими мембранами, в средний слой моделируется в рамках гипотез Тимошенко-Миндлина-Рейсснера. В момент начала аддитивного процесса оболочка свободна от напряжений. В ходе процесса к лицевым поверхностям оболочки непрерывно присоединяются бесконечно тонкие напряженные слои, причем оболочка с уже присоединенными слоями совершает нестационарные колебания. Эти два фактора приводят к образованию несовместной дисторсии в теле оболочки, и, как следствие, к искажениям формы и остаточным напряжениям.



Хаотическая динамика контактного взаимодействия  
размерно-зависимых балок, описываемых гипотезой первого  
приближения (Эйлера — Бернулли)

Салтыкова О. А.<sup>1,2</sup>, Крысько В. А.<sup>1</sup>, Крысько А. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Балочные структуры, размерность которых находится в диапазоне нано широко применяются в датчиках, гироскопах и измерительных приборах, где подвергаются различного рода внешним воздействиям. Поэтому актуальными являются исследования нелинейной динамики таких структур для выявления особенностей влияния размерно-зависимого параметра на поведение структуры в целом. В работе построена математическая модель контактного взаимодействия двух гибких балок Эйлера — Бернулли с учетом размерно-зависимого параметра на базе модифицированной моментной теории. Одна из балок находится под действием внешней знакопеременной, распределенной по поверхности нагрузки. Уравнения движения балок, с учетом гипотез первого приближения (Эйлера — Бернулли), а также граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Гамильтона — Остроградского. Для построения математической модели контактного взаимодействия двух балок используется модель Кантора Б. Я., геометрическая нелинейность балок учтена по модели по модели Т. фон Кармана (то есть фактически, мы имеем, математическую модель с сильной нелинейностью — геометрическая и конструктивная нелинейности). Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей второго порядка. Далее, задача Коши по времени решается методами типа Рунге — Кутты второго, четвертого, восьмого порядков. Исследование хаотической динамики проводится на базе качественной теории дифференциальных уравнений и методов нелинейной динамики. Строятся сигналы, спектры мощности Фурье, вейвлет спектры Морле, сечения Пуанкаре, фазовые портреты. Исследована нелинейная динамика балочной структуры в зависимости от величины размерно-зависимого параметра. Проведен анализ фазовой хаотической синхронизации изучаемой структуры с помощью вейвлет спектра Морле. При изучении хаоса использовано определение хаоса, данное Гуликом. Поэтому, вычисляются значения старшего показателя Ляпунова на базе алгоритмов Вольфа, Кантца и Розенштейна. Исследована сходимости полученных решений в зависимости от интервалов разбиения по пространственной и временной координате. Накладывалось жесткое ограничение совпадения основных функций в хаотических колебаниях для  $n$  и  $2n$  разбиений интервала интегрирования по пространственной координате.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 18-38-00878 мол\_а, № 16-08-01108а, № 16-01-00721а, № 18-01-00351а, № 16-31-60027 мол\_а\_дк.

## Реконструкция напряженно-деформированного состояния в концентраторах напряжений полых и сплошных цилиндрических образцов после поверхностного пластического упрочнения

Саушкин М. Н., Радченко В. П.

*Самарский государственный технический университет*

Рассматривается проблема реконструкции (математического моделирования) напряженно-деформированного состояния в цилиндрических гладких образцах и образцах с концентраторами напряжений в виде полукруговых надрезов после процедур технологического воздействия на их поверхность: изотропного поверхностно пластического упрочнения (пневно- и гидродробеструйная обработка поверхности, ультразвуковое упрочнение и т.д.); анизотропного упрочнения (обкатка роликом, алмазное выглаживание, дорнование и др.); опережающего поверхностно пластического упрочнения (проводится упрочнение образца, затем наносятся концентраторы напряжений).

Используется разработанный авторами феноменологический метод реконструкции полей остаточных напряжений и пластических деформаций в цилиндрических образцах по экспериментальным зависимостям окружной и/или осевой компонент тензора остаточных напряжений, который прошел детальную экспериментальную проверку в случаях изотропного и анизотропного поверхностно пластического упрочнения поверхности деталей.

Для реконструкции напряженно-деформированного состояния в надрезах полых и сплошных цилиндрических образцах после процедуры опережающего поверхностно пластического упрочнения используется метод расчета остаточных напряжений по заданным первоначальным деформациям, распределение которых задается из решения задачи для гладких цилиндрических образцов.

При решении рассматриваемых задач используется метод сведения исходной задачи к фиктивной задаче термоупругости, суть которого состоит в проведении аналогии между остаточными пластическими деформациями и упругими температурными деформациями в неоднородном поле температуры с неоднородным анизотропным полем тензора коэффициентов температурного расширения. Использование такого подхода (связи первоначальных деформаций с термоупругими деформациями материала) позволяет применять современные расчетные конечно-элементные комплексы для решения задач о распределении остаточных напряжений в любых гладких деталях с концентраторами напряжений после процедур технологического воздействия на их поверхность.

Проведено исследование распределения остаточных напряжений в полых и сплошных цилиндрических образцах из сплава ЭИ961 и стали 45, на которые после упрочнения наносилась серия полукруговых надрезов. Детально исследовано влияние радиуса надреза и параметра анизотропии упрочнения на характер распределения остаточных напряжений в наименьшем сечении цилиндрических образцов. Для некоторых частных случаев расположения концентраторов напряжений полученные численные решения сравниваются с известными (независимыми) решениями других авторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00249\_a).

## Численный анализ виброактивности составной оболочки вращения из полимерного композита при несимметричном нагружении

**Сафроненко В. Г., Шутько В. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Современные композитные конструкции часто имеют геометрически сложный характер и могут быть составлены из секций, представляющие собой различные оболочки вращения. В связи с этим рассмотрим несимметричные гармонические колебания составной конусо-цилиндрической оболочки из полимерного композита, состоящей из двух секций. Пусть первая секция имеет форму цилиндра, а вторая секция, сопряженная с ней, представляет собой конус. Условия закрепления между секциями и на границах оболочек, будем считать жесткими. Должны выполняться также условия сопряжения соседних секций. Нагрузка на поверхности оболочки расположена несимметрично. Для исследования процесса распространения стационарных колебаний в волокнисто-слоистой композитной с полимерным связующим оболочке вращения используем теорию типа Тимошенко. Уравнения состояния полимерного заполнителя соответствуют модели термовязкоупругого тела. Отличительной особенностью этих соотношений является учет зависимости релаксационных процессов при сдвиге не только от температуры, но и от объемных деформаций, возникающих вследствие тепловых и механических воздействий. При этом разработанная модель свободна от температурно-временной аналогии. Термомеханические параметры модели соответствуют материалу типа пропилен. Для численного исследования используется подход, связанный с модальным представлением искомых функций в виде разложений в комплекснозначные ряды Фурье. После отделения окружной координаты и приведения всех соотношений к безразмерному виду формируется комплекснозначная система нормального вида 10 порядка, решаемая методом ортогональной прогонки. Разработан алгоритм, позволяющий определять области наибольшей виброактивности на поверхности оболочек. Численно определены амплитудно-частотные характеристики, формы колебаний и координаты точек поверхности, в которых поперечные прогибы имеют максимальные значения.

## Математическое моделирование экспресс-метода клиновидной дегидратации

Сахарова Л. В.

*Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)*

Осуществлено математическое моделирование практически значимого метода клиновидной дегидратации биологических жидкостей, представляющей собой диагностический экспресс-метод выявления заболеваний (в том числе в доклинической стадии), основанных на исследовании геометрии фаций (твердых структур), возникающих при высыхании капель биожидкостей на твердом основании. Разработана комплексная модель процесса образования фаций при клиновидной дегидратации, представляющая собой совокупность начально-краевых задач и учитывающая: а) тепло- и массоперенос в высыхающих каплях исследуемых биологических жидкостей, представляющих собой многокомпонентную полидисперсную систему, на основе осреднения уравнений по тонкому слою испаряющейся жидкости; 2) дегидратацию и агрегацию белков на основе уравнений реакций химической кинетики; 3) процесс образования и растрескивания геля на основе теории активных неполярных гелей с последующим применением механики разрушения твердых тел. Для моделирования процесса тепло- и массопереноса в процессе клиновидной дегидратации исследуемых биожидкостей использовано приближение Обербека-Буссинеска. Исходный состав исследуемых биожидкостей учтен в модели в виде начальных и краевых условий соответствующей краевой задачи, включающих, в том числе, функции отклика системы на содержание патогенных включений. Параллельно учтен процесс выпадения из жидкости растворенных в нем органических и неорганических соединений (по достижении ими концентрации насыщения) посредством включения соответствующего краевого условия на изменяющейся во времени на границе раздела жидкость – твердое основание. Для моделирования дегидратационной самоорганизации с учетом превращения биожидкости в гель использована система уравнений гидродинамики активных гелей. Тензор напряжения состоит из трех частей: обычного тензора упругости, тензора диссипации и тензора химической активации, при построении которых учитывается кинетика химических реакций образования упругого каркаса геля в результате дегидратации и агрегации альбуминов. Для моделирования процесса возникновения трещин предложен следующий подход: исследование методом характеристик нормальных напряжений в геле с последующим построением линий уровня. Линиям с максимальными значениями (линиям разрыва) нормальных напряжений соответствуют линии трещин на поверхности фации по достижении предельного напряжения материала. Для исследования зависимости геометрии трещин от начальных биохимических характеристик исследуемой биологической жидкости предложена методика, заключающаяся в построении аналитических зависимостей, описывающих линии разрыва как функции координат. При этом концентрации органических и неорганических веществ исходного состава жидкости входят в указанные зависимости в виде числовых параметров.

## Биомеханическое моделирование сочетанной патологии аорты

**Скрипаченко К. К.<sup>1</sup>, Голядкина А. А.<sup>1</sup>, Челнокова Н. О.<sup>2</sup>,  
Мурылев В. В.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского*

<sup>2</sup>*Саратовский государственный медицинский университет  
им. В. И. Разумовского*

<sup>3</sup>*Первый Московский государственный медицинский университет  
им. И. М. Сеченова*

Сочетанные патологии одного из отделов аорты являются опасной аномалией сердечно-сосудистой системы с высоким летальным исходом. Чаще всего при данном заболевании наблюдаются сочетания таких патологий как атеросклеротическое поражение аортального клапана, аневризма, расслоение стенки сосуда и другие. Сочетанные патологии требуют углубленного изучения с применением современных методов. Одним из современных методов исследования влияния сочетанных патологий является биомеханический анализ с использованием виртуальной модели изучаемого объекта. Объектом изучения явилась аорта, с наличием сочетанной патологии восходящего отдела и дуги аорты. При диагностике наблюдалось аневризматическое 300% поражение восходящего отдела аорты с двукратным расширением стенок створок аортального клапана. Для построения виртуальных моделей аорты изучены данные компьютерной томографической ангиографии конкретного пациента. Построение виртуальной модели грудного отдела аорты выполнялся в программном комплексе Mimics. Дальнейшая доработка модели проводилась в САПР Solid Works. Численный анализ выполнялся методом конечных элементов в Ansys Workbench. Начальные и граничные условия, соответствуют систолической фазе сердечного цикла и были определены на основе данных медицинского диагностического оборудования и литературных источников. Кровь принималась как ньютоновская несжимаемая жидкость, с заданными плотностью 1050 кг/м<sup>3</sup> и динамической вязкостью 0,0037 Па\*с., что соответствует физиологическим показателям крови. Результаты биомеханического анализа показали, что максимальные значения давления кровотока на поверхность взаимодействия жидкости и стенки локализуются в области восходящего отдела дуги аорты, что является одной из возможной причиной дальнейшего развития аневризмы в дуге. Этот объясняет расширение просвета в проксимальной части дуги аорты на 20%. В области аневризматического расширения скорость кровотока превышает норму в 3 раза и составляет около 3 м/с. В зоне дуги аорты наблюдалось резкое падение значения скорости крови, что, возможно является причиной образования закрученного потока. Биомеханический анализ с использованием виртуальной модели, построенной основе данных компьютерной томографической ангиографии реального пациента позволяет визуально проводить анализ влияния патологии не только на геометрические показатели исследуемого объекта, но и на напряжено-деформированное состояние (НДС) стенки сосуда. Дальнейшее исследование посвящено будет изучению влияния патологии на НДС стенки сосуда.

## Виброизоляция устройств, чувствительных к угловым механическим колебаниям

**Собянин К. В., Шардаков И. Н., Шестаков А. П.**

*Институт механики сплошных сред Пермского федерального НЦ УрО РАН*

Проблемам виброзащиты за многие десятилетия их существования уделено огромное количество работ, в том числе фундаментальных. Однако только в конце 20-го века в связи с интенсивным развитием технологий стала набирать актуальность защита оборудования от угловых механических колебаний.

Помимо проблем вызванных увеличением амплитуды связанных колебаний, угловые колебания сами по себе могут быть причиной неправильной работы оборудования. Так одними из наиболее чувствительных к угловым колебаниям являются волоконно-оптические приборы основанные на эффектах Фарадея, Санныяка и Поккельса: такие как высокоточные датчики тока, напряжения, датчики поворота. Также угловые колебания могут быть причинами так называемых динамических ошибок (sculling error, coning error) при работе беспилотных инерциальных навигационных систем (БИНС).

Системы виброзащиты содержащие в себе в качестве основных виброзащитных элементов виброизоляторы получили наибольшее распространение в защите приборных платформ и прецизионного оборудования. В технике такой подход принято называть виброизоляцией или амортизацией. Самой простой системой виброизоляции имеющей вращательную степень свободы является «система с нулевой горизонтальной жесткостью» - плоская система с двумя степенями свободы, в которой возможны колебания центра масс только по вертикальной оси. При рассмотрении такой системы возникает важное понятие: «центр жесткости» («центр упругости»). В литературе нет устоявшегося определения этого термина, но в большинстве случаев центром жесткости считается точка, в которой условно сосредоточена общая жесткость всех виброизоляторов. Для системы с нулевой горизонтальной жесткостью легко показать, что условие совпадения центра жесткости и центра масс позволяет исключить вращательные колебания при произвольном трансляционном возбуждении. При рассмотрении более сложных моделей центр жесткости в общем случае перестает существовать и для снижения угловых колебаний центр масс системы необходимо поместить в некоторую оптимальную точку или область, определение которой отдельная задача проектирования систем виброизоляции.

Задача снижения угловых колебаний в системах виброизоляции не тривиальна и нуждается в обстоятельном рассмотрении и разработке общих подходов. Несмотря на очевидную актуальность проблемы, её детальному изучению уделяется крайне мало внимания в литературе. В работе представлены результаты серии исследований по теме снижения амплитуд угловых колебаний в системах пассивной виброизоляции.

## Прикладная теория изгиба трехслойного неоднородно поляризованного пьезопреобразователя

Соловьев А. Н.<sup>1,2</sup>, Оганесян П. А.<sup>1</sup>, Ле Ван З.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

<sup>3</sup>*Технический университет им. Ле Куй Дона, Ханой, Вьетнам*

В работе рассматривается модель трехслойного пьезопреобразователя в форме пластины. Предполагается, что использование неоднородной предварительной поляризации на активные слои подобного устройства и нанесение электродов определенной конфигурации может привести к значительному увеличению электромеханических свойств преобразователя. Так как слоистые преобразователи находят широкое применение, в том числе в устройствах накопления энергии, проектирование эффективных преобразователей является актуальной инженерной проблемой. Ранее были представлены работы, где для биморфных преобразователей проводились численные эксперименты, демонстрирующие рост коэффициента электромеханической связности, ширины полосы пропускания и максимального напряжения в цепи, подключенной к преобразователю. Прирост этих показателей позволяет считать построенные схемы устройств более эффективными. Эти исследования базировались на методе конечных элементов и моделировании неоднородной поляризации с помощью различных подходов: кусочно-постоянная поляризация с привязкой к геометрии модели, неоднородная поляризация с переменными значениями модуля и направления в отдельных элементах разбиения или в точках численного интегрирования. В ряде случаев было показано, что численное решение задачи может быть заменено без значительной потери точности на аналитическое решение на основе прикладной теории изгиба электроупругой пластины. В данной работе представлено развитие прикладной теории в случае трехслойного преобразователя с пассивным средним слоем. Приводится сравнение метода конечных элементов с прикладной теорией и определяются области применимости теории. Вычислительная реализация прикладной теории была построена в пакета Maple на основе параметризованной геометрии, что позволило проводить серии численных экспериментов в полуавтоматическом режиме. Рассматриваются граничные условия, обеспечивающие связность полей в модели. Неоднородная поляризация в терминах прикладной теории описывается с помощью продольно и поперечно поляризованных участков преобразователя. С использованием специализированного модуля комплекса ACELAN были построены векторные поля, возникающие при нанесении необходимой неоднородной поляризации. Сравнение полной и кусочно-постоянной модели поляризации позволяет определить случаи, когда преобразователь может быть сформирован без склейки отдельных элементов внутри слоя, неоднородность при этом возникает только за счет схемы электродирования при поляризации. Такой технологический процесс позволяет получить более эффективные устройства.

Работы выполнены при поддержке РФФИ номер гранта 16-01-00354 А.

Анализ модели нелинейного ангармонического взаимодействия нормальных волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре с гибким нерастяжимым покрытием границы

Сторожев В. И., Моисеенко И. А., Сидаш О. Ю.

*Донецкий национальный университет*

Разработка теоретических методик исследования нелинейных ангармонических эффектов при распространении нормальных волн деформаций в цилиндрических телах остается актуальной проблемой, связанной с развитием технологий неразрушающего ультразвукового контроля, а также совершенствованием характеристик акустоэлектронных устройств интегрирования и усиления сигналов. В частности, представляют интерес задачи описания характеристик ангармонических возмущений в цилиндрах с выраженной осевой анизотропией механических свойств, применительно к которым подлежат анализу различные варианты задания краевых условий на боковых поверхностях. В представляемом исследовании дана разработка численно-аналитической методики анализа нелинейных вторых гармоник комбинационного типа, генерируемых при одновременном распространении нескольких нормальных волн кручения из линейного спектра в протяженных трансверсально-изотропных цилиндрах с тонкими нерастяжимыми абсолютно гибкими покрытиями границ. В описании нелинейного волнового деформирования используется модель, базирующаяся на тензорной форме упругого потенциала с квадратичными и кубическими членами по конечным деформациям. Коэффициенты представления упругого потенциала выражаются через пять независимых упругих констант второго порядка и девять независимых упругих постоянных третьего порядка. В рамках используемой концепции малых нелинейных ангармонических эффектов полагается, что компоненты вектора волновых упругих перемещений представляются суммами линейных и квадратичных членов по степеням малого параметра в виде соотношения характерных амплитуд и длин рассматриваемых волн, и анализируемая проблема сводится к рекуррентной последовательности краевых задач для определения амплитудных составляющих комплексных функций перемещений в первых линейных гармониках и вторых гармониках, характеризующих нелинейные ангармонические возмущения. В результате применения разработанной методики применительно к рассматриваемому случаю получена аналитическая форма представлений комплексных функций волновых перемещений в нелинейных ангармонических возмущениях, описываемых суммой вторых гармоник с удвоенными частотами для отдельно взятых линейных монохроматических нормальных волн кручения и вторых гармоник комбинационного типа с частотами, равными суммам частот пар крутильных волн линейного спектра, характеризующих нелинейное взаимодействие. Показано, что вторые гармоники обоих видов являются осесимметричными волнами продольно-сдвигового типа. Реализован частотный параметрический анализ кинематических и энергетических характеристик нелинейного ангармонического взаимодействия для крутильных волн в цилиндре из гадолиния, и дана оценка степени влияния рассматриваемого типа краевых условий.



## Вихревой метод для расчета течения вязкой жидкости в канале

**Сумбатян М. А., Пискунов А. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается нестационарная задача о движении потока вязкой жидкости в канале постоянной ширины  $b$ . Задача решается в двумерном приближении. Для решения используется формулировка в терминах завихренности  $\omega$ – скорость  $\bar{v}$ . При этом уравнения Навье-Стокса в двумерном случае принимают вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega, \quad \nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad \bar{v} = \{v_1, v_2\}, \quad \omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (1)$$

В литературе обосновывается итерационный по времени алгоритм, для которого на каждом шаге можно отдельно решать сначала уравнение переноса для завихренности с отброшенным в правой части (1) вязким членом, а затем уравнение диффузии вихря с отброшенным в левой части конвективным членом:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega. \quad (2)$$

Применяемый алгоритм состоит в моделировании поля скоростей набором  $N$  элементарных вихрей некоторой интенсивности  $\gamma_i$ , ( $i = 1, \dots, N$ ). При этом формула Био-Савара для канала усложняется по сравнению со случаем неограниченной среды, т.к. должна учитывать условие непроницаемости на нижней ( $x_2 = 0$ ) и верхней ( $x_2 = b$ ) сторонах канала:

$$\begin{aligned} v_1^i &= U_0 + \sum_{j \neq i} \gamma_j [S_1(x_1^i - x_1^j, x_2^i - x_2^j) - S_1(x_1^i - x_1^j, x_2^i + x_2^j)], \\ v_2^i &= \sum_{j \neq i} \gamma_j [S_2(x_1^i - x_1^j, x_2^i - x_2^j) - S_2(x_1^i - x_1^j, x_2^i + x_2^j)] \end{aligned} \quad (3)$$

$$S_1(x_1, x_2) = \frac{\pi}{2b} \frac{\sin(\pi x_2/b)}{\operatorname{ch}(\pi x_1/b) - \cos(\pi x_2/b)}, \quad S_2(x_1, x_2) = \frac{\pi}{2b} \frac{\operatorname{sh}(\pi x_2/b)}{\operatorname{ch}(\pi x_1/b) - \cos(\pi x_2/b)} \quad (4)$$

При этом движение самих вихрей рассчитывается по уравнению движения в лагранжевой системе координат:  $(x_1^i)_{k+1} = (x_1^i)_k + (v_1^i)_k \Delta t$ ,  $(x_2^i)_{k+1} = (x_2^i)_k + (v_2^i)_k \Delta t$ , где  $k$  – номер итерации.

Оставшееся граничное условие прилипания обеспечивается генерированием на каждом шаге одного нового вихря вместо одного старого.

## Численное решение обратной задачи о восстановлении механических характеристик поперечно-неоднородного слоя

Углич П. С.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрены прямая и обратная задачи о вынужденных колебаниях поперечно-неоднородного упругого слоя. Механические характеристики слоя (упругие параметры и модуль сдвига) считаются функциями поперечной координаты.

Предложена методика решения прямой задачи, основанная на использовании интегрального преобразования Фурье. После применения интегрального преобразования Фурье исходная задача сведена к краевой задаче для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой неизвестными являются компоненты вектора перемещений и тензора напряжений. Построенная краевая задача может быть решена только численно. Решение задачи производится при помощи метода пристрелки, причем для решения вспомогательных задач Коши используются вложенные формулы Рунге порядка 4(5).

После решения краевой задачи строится поле перемещений в трансформантах и для того, чтобы найти оригиналы, производится обращение преобразования Фурье. Для обращения преобразования Фурье предложен метод, основанный на теории вычетов. При использовании теории вычетов необходимо знать полюсы подынтегральной функции. Построено дисперсионное уравнение для их приближенного отыскания, решение которого основано на методе Ньютона. При использовании метода Ньютона для отыскания корней требуется знать не только трансформанты перемещений и напряжений, но и их производные по параметру преобразования Фурье. Для отыскания производных по параметру преобразования построена вспомогательная краевая задача.

Далее рассмотрена обратная задача об отыскании законов распределения механических параметров по известной информации о волновом поле на части верхней поверхности. Построены итерационные последовательности интегральных уравнений. Интегральные уравнения относятся к интегральным уравнениям Фредгольма с гладким ядром, для их решения используется регуляризация Тихонова. Для решения системы линейных алгебраических уравнений, которая образуется при дискретизации регуляризованного уравнения, использован метод Воеводина, который основан на сведении исходной системы линейных уравнений к системе с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки. Метод позволяет организовать автоматический подбор параметра регуляризации, основанный на критерии обобщенной невязки. Приведены результаты численных экспериментов, даны рекомендации по оптимальному выбору частоты колебаний и отрезка, с которого снимается информация. Предложен алгоритм вычисления ядра, основанный на теории вычетов.

## Нестационарное пространственное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления

**Федотенков Г. В.<sup>1,2</sup>, Тарлаковский Д. В.<sup>1</sup>, Митин А. Ю.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

<sup>2</sup>*Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)*

Сформулирована постановка задачи о движении бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко под влиянием нестационарного давления, распределённого по произвольной области, принадлежащей боковой поверхности. Для описания движения оболочки использованы пространственные уравнения движения модели С.П. Тимошенко в перемещениях. Для построения решения все искомые и заданные функции раскладываются в тригонометрические ряды Фурье по угловой координате, затем после подстановки этих разложений в уравнения движения к полученным соотношениям применяются интегральные преобразования Фурье по продольной координате и Лапласа по времени. В результате задача сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно изображений по Фурье-Лапласу коэффициентов рядов разложения искомым функций. Её решениями являются изображения искомым коэффициентов, которые имеют сложный вид. Для решения задачи построения оригиналов разработан и реализован оригинальный алгоритм, основанный на связи интеграла Фурье с рядом Фурье на переменном интервале разложения. Его идея базируется на том, что исходные уравнения имеют гиперболический тип, а значит заранее известна скорость распространения перемещений по поверхности оболочки. Как было установлено, в некоторых случаях разработанный подход открывает возможности получения конечного аналитического результата. В более сложных случаях алгоритм позволяет строить оригиналы совместных интегральных преобразований Фурье-Лапласа аналитическими методами с любой наперед заданной точностью. При этом результат получается в виде ряда, в котором на практике можно ограничиться конечным числом членов. Предложенный метод был апробирован на ряде тестовых задач, решения которых открыли его несомненные преимущества по сравнению с методами численного обращения интегральных преобразований, среди которых метод численного обращения преобразования Фурье совместно с аналитическим обращением преобразования Лапласа (численно-аналитический метод), алгоритм численного обращения интегральных преобразований на основе метода Дурбина и квадратурных формул Филона. Следует отметить, что предложенный алгоритм одинаково хорошо работает как с обычными, так и с обобщенными функциями. Полученные в результате его применения ряды быстро сходятся. С использованием построенной функции влияния и принципа суперпозиции решена задача о пространственном движении оболочки типа Тимошенко при воздействии на неё нестационарного давления, распределённого локально по некоторой области, принадлежащей боковой поверхности. Приведены примеры расчетов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 18-58-00008\_Бел-а и 16-08-00261\_а).

## Исследование формирования плоских вихревых структур в идеальной жидкости

**Филимонова А. М., Говорухин В. Н.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Доклад посвящен анализу численных экспериментов по исследованию формирования мультипольных плоских вихревых структур невязкой несжимаемой жидкости, а также происходящих в них процессов массопереноса. Соответствующая математическая модель сформулирована в виде системы двух уравнений в частных производных относительно абсолютной завихренности  $q$  и функции тока  $\psi$  при условии что на границах области на функцию тока  $\psi$  наложены периодические краевые условия.

$$\begin{cases} \frac{Dq}{Dt} \equiv q_t + \psi_y q_x - \psi_x q_y = 0, \\ -\Delta\psi = \omega = q - f, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $x, y$  — координаты на плоскости,  $\psi$  — функция тока,  $q = \omega + f$  — абсолютная завихренность,  $\omega$  — относительная завихренность, а  $f = f(x, y) = \Omega \sin(\phi)$  — планетарная завихренность, описывающая влияние силы Кориолиса.  $\Omega$  — планетарная угловая скорость вращения,  $\phi$  — географическая широта, равная нулю на экваторе, и  $\pm \frac{\pi}{2}$  на полюсах.

Для решения задачи (1) использует вариант бессеточного метода вихрей-ячейках. В основе метода лежат аппроксимация поля абсолютной завихренности по его значениям в жидких частицах кубическими полиномами и разложение функции тока в ряд Фурье, коэффициенты которого находятся проекционным методом Бубнова — Галеркина. Динамика жидких частиц описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается псевдосимплектическим методом Рунге — Кутты.

Представлены результаты численного исследования формирования и развития различных вихревых структур. Изучены механизмы образования многосвязных ячеистых структур на плоскости из множества вихревых пятен различной интенсивности и размера. Исследовано влияние планетарной завихренности на сценарии взаимодействия вихревых пятен. Также представлены результаты анализа адвективного переноса частиц жидкости и процессов перемешивания в полученных вихревых структурах и исследования влияния на эти процессы топологии структуры.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 18-01-00453.

## Моделирование распространения и дифракции упругих волн в структурах с неоднородным волноводом, составленным из полубесконечных разномодульных частей

**Фоменко С. И.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Разрабатываются математические и компьютерные модели, описывающие распространение упругих волн в составных волноводах, а также дифракцию на стыках его разномодульных частей. Данные задачи имеют приложение как в сейсмологии (сложное взаимное расположение литосферных плит), нефте- и газоразведке (дифракция скважинных волн на внутренних неоднородностях и дна скважины), так и для решения задач мониторинга с помощью упругих волн составных корпусов конструкций различного назначения.

Традиционно для решения подобного класса задач прибегают к помощи прямых численных методов, таких, например, как метод конечных элементов (МКЭ), либо к помощи полуаналитических схем, приводящих к граничным интегральным уравнениям, которые дискретизируются и решаются затем одним из известных численных методов (проекторные методы, метод коллокаций и др.). К полуаналитическим методам также можно отнести метод фундаментальных решений (МФР), в котором в качестве базисных функций используются решения волновой задачи для заданных сосредоточенных сил в безграничной однородной упругой среде.

Предлагаемый подход относится к полуаналитическим численным методам решения задач. Для сопряжения двух полубесконечных волноводов используется модификация МФР, известная как метод слоистых элементов: в качестве базиса здесь выступают уже решения, удовлетворяющие граничным условиям на всех однородных (плоскопараллельных или цилиндрических) границах многослойной структуры. Данный метод позволяет значительно уменьшить размер систем алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений, обладает численной устойчивостью, кроме того, полученное решение автоматически учитывает все возбуждаемые в многослойной структуре бегущие и объемные волны, т.е. правильно описывает волновую структуру. Данный подход хорошо себя зарекомендовал в решении задач дифракции на локальных неоднородностях типа трещин и включений. В случае, когда составной волновод, содержащий разномодульные полубесконечные части, является внутренним в многослойной структуре, удовлетворение граничным условиям непосредственно на линиях стыка разномодульных материалов с помощью рассматриваемых базисных решений является недостаточным, так как данное разложение не удовлетворяет граничным условиям на интерфейсах с прилегающими слоями. В работе предложен метод, приводящий, однако, к дополнительным граничным интегральным уравнениям, но позволяющий автоматически учитывать волновую структуру решения и значительно снизить вычислительную сложность задачи.

## Задачи конвекции в пористой анизотропной среде и косимметричные эффекты

**Цибулин В. Г.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

На основе модели Дарси проводится анализ анизотропной конвекции в пористой среде с учетом косимметричных эффектов. Для изотропной задачи Д. В. Любимов (ПМТФ, 1975) обнаружил нетривиальный эффект ответвления семейства стационарных состояний от потерявшего устойчивость механического равновесия. Это явление было объяснено при помощи теории косимметрии В. И. Юдовичем (Мат. заметки. 1991; Chaos, 1995).

Рассматривается задача для прямоугольника, используются уравнения Дарси – Буссинеска:

$$\begin{aligned} \nabla p + M \cdot V + \lambda \theta \vec{\gamma} &= 0, \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= L_D \theta - \vec{V} \cdot \vec{\gamma} - (\vec{V} \cdot \nabla) \theta, \quad L_D = \partial_x (d_{11} \partial_x + d_{12} \partial_y) + \partial_y (d_{21} \partial_x + d_{22} \partial_y). \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{V}$  — скорость,  $p$  — давление,  $\theta$  — девиация температуры от линейного по высоте профиля,  $M$  обозначает тензор безразмерных коэффициентов обратной проницаемости  $\mu_{ij}$ ,  $d_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности,  $\vec{\gamma} = (0, -1)$  — единичный вектор, отвечающий направлению силы тяжести, и  $\lambda$  — фильтрационное число Рэлея. На границе ставятся условия непротекания и однородности девиации температуры.

Найдены соотношения между управляющими параметрами, когда система обладает нетривиальной косимметрией, и от состояния механического равновесия ответвляется однопараметрическое семейство стационарных конвективных режимов. Получены явные формулы для критических чисел Рэлея, отвечающих потере устойчивости механического равновесия. Использование косимметричного подхода позволяет далее анализировать ситуации, отвечающие разрушению косимметрии. Здесь эффективно используется аппарат селективных функций В. И. Юдовича (Докл. РАН, 2004).

Для вычисления конвективных режимов развиты конечно-разностные аппроксимации для уравнений в естественных переменных и для задачи относительно функции тока и температуры. Построены сохраняющие косимметрию аппроксимации на смещенных сетках (Абделхафиз М. А., Цибулин В. Г., ЖВМиМФ, 2017), совпадающие с разработанными для изотропного случая (Karasozen B., Nemtsev A. D., Tsybulin V. G., Computers and Mathematics with Applications, 2012). Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие формирование семейства режимов и разрушение семейства при некорректной аппроксимации.

## Контактная задача для составной полосы

**Чебаков М. И., Колосова Е. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается в прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$  антиплоская контактная задача теории упругости о чистом сдвиге штампом слоя  $S$  ( $-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty$ ) состоящей из двух симметрично расположенных относительно начала координат полубесконечных слоев  $S_1$  ( $-\infty < x < -b, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty$ ) и  $S_2$  ( $b < x < \infty, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty$ ) с одинаковым модулем сдвига  $G_2$  и прямоугольной полосы  $S_3$  ( $-b < x < b, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty$ ) с модулем сдвига  $G_1$ . Полубесконечные слои  $S_1$  и  $S_2$  жестко соединены с прямоугольной полосой  $S_3$  соответственно по границам  $x = -b$  и  $x = b$ . На границе  $y = h$  слоя  $S$  жестко закреплен штамп в области  $-a \leq x \leq a$  ( $a \geq b$ ), который силой  $P$  сдвигается вдоль оси  $z$  на некоторую малую величину  $\delta$ , нижняя граница  $y = 0$  слоя  $S$  жестко закреплена. Таким образом, штамп одновременно взаимодействует с двумя полубесконечными слоями  $S_1, S_2$  и прямоугольной полосой  $S_3$ . Ставится задача найти связь между силой  $P$  и перемещением  $\delta$ , а также распределение контактных напряжений под штампом. Особый интерес вызывает характер распределения контактных напряжений в окрестности точек  $(x = \pm b, y = h)$ .

Для решения поставленной задачи используется метод однородных решений. Предполагая, что в каждой из областей контакта штампа со слоями  $S_1, S_2$  и  $S_3$  известны напряжения, разыскиваем решение в этих слоях в виде суперпозиции однородных решений и неоднородного решения, полученного с помощью интегрального преобразования Фурье. Приравнивая перемещения и напряжения слева и справа на отрезках  $x = \pm b$  и используя условие ортогональности однородных решений на этих отрезках находим коэффициенты в разложениях по однородным решениям, что позволяет найти перемещения в слое при  $y = h$ . Приравнивая в дальнейшем полученные перемещения слоя в области контакта заданному перемещению штампа и используя симметрию задачи относительно оси  $x$ , получим относительно неизвестных контактных напряжений при  $0 \leq x \leq b$  и  $b \leq x \leq a$  систему интегральных уравнений с логарифмическими ядрами. Для решения системы интегральных уравнений использован прямой метод коллокаций.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и образования Российской Федерации (проект № 9.4726.2017/8.9).

## Исследование пьезоэлектрического генератора кантилеверного типа с активным основанием

Черпаков А. В.<sup>1</sup>, Паринов И. А.<sup>1</sup>, Чебаненко В. А.<sup>2</sup>, Рожков Е. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Исследована натурная модель пьезоэлектрического преобразователя кантилеверного типа механической энергии в электрическую (генератора ПЭГ). Данная модель имеет более совершенный тип, отличающийся от предыдущего в модифицированном основании, включающим пьезоэлементы, вырабатывающие энергию. Данный тип генератора является более совершенным по сравнению с моделями ПЭГ, описанными ранее. Основа модели ПЭГ состоит из кантилевера, представляющего собой консольную балку из упругого материала, на которую наклеены пьезоэлектрические элементы в виде биморфа. Один конец консольной балки закреплен в основании. На свободном конце укреплена дополнительная присоединенная масса. Основание данной модели является активным. В нем дополнительно установлены четыре пьезоэлемента, имеющие положение в виде: два сверху и два снизу относительно балки. Пьезоэлементы имеют противоположные направления вектора поляризации. Плоскости их электродов прижаты с помощью элементов основания к проводящим слоям тонких металлизированных с одной стороны упругих прокладок. ПЭГ является преобразователем механической энергии в электрическую, работающим на основе применения прямого пьезоэлектрического эффекта, которые могут быть использованы в качестве маломощного источника электрического тока для питания маломощных электронных систем. Возбуждение ПЭГ происходит путем смещения основания. При воздействии внешних механических сил типа удара и вибраций на основание пьезогенератора в консольной балке возникают колебания, и, действуя на дополнительные пьезоэлементы, в которых возникают деформации сжатия за счет сил реакции опор с частотой внешних сил ударов и вибраций, а вследствие прямого пьезоэффекта на электродах дополнительных пьезоэлементов генерируется переменное электрическое напряжение и, следовательно, дополнительная электрическая энергия, тем самым повышается мощность и эффективность преобразования КПД преобразователя. Это переменное напряжение и дополнительная электрическая энергия могут быть преобразованы с помощью мостовых выпрямителей в постоянное, которое накапливается в аккумуляторах с помощью систем накопления и хранения энергии. Возбуждение колебаний в консольной балке может производиться механическим воздействием как на основание, в котором закреплена консольная балка, так и на свободный конец консольной балки, при этом максимальная выходная мощность достигается, когда частота внешнего механического действия совпадает с собственной частотой слоистого кантилевера, т.е. на резонансе. Пьезоэлектрические элементы могут быть соединены параллельно или последовательно. Выбор между этими двумя видами соединения элементов зависит от устройства, которое необходимо запитать. Получена первичная оценка выходных характеристик генератора при некоторых параметрах пьезопреобразователя.



## Идентификация дефектов в элементах ферменной стержневой конструкции на основе вибрационного анализа

**Черпаков А. В.<sup>1</sup>, Чайка Ю. А.<sup>2</sup>, Паринов И. А.<sup>1</sup>, Рожков Е. В.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Проведены исследования колебаний ферменной стержневой конструкции с дефектами трещинообразного типа. Рассматривалась задача идентификации дефектов в ферменной стержневой конструкции на основе анализа параметров форм колебаний при ударных и стационарных воздействиях. Проведен анализ колебаний натурной и КЭ моделей ферменной стержневой конструкции с множественными дефектами. Построен экспериментальный измерительный комплекс для натурального вибрационного диагностирования ферменной конструкции. Модель Ферменной конструкции имела секции типовой треугольной конфигурации. Проанализированы колебания при вынужденных и ударных воздействиях. При моделировании колебаний применялся мобильный лабораторный комплекс для динамических исследований, состоящий из 16 трехосных акселерометров. Применялось разработанной в рамках лаборатории программное обеспечение. На основе методик, представленных в работе проведены исследования. Дефектные элементы представлены в виде надреза в сечении, локализованного в окрестности стыковочных узлов фермы и крепления стержня. Проведен модальный анализ конструкции. Рассмотрена зависимость собственных частот и параметров форм колебаний от величины дефекта. Анализ показывает, что модальные признаки идентификации позволяют выявить дефектный узел в конструкции на основе применения экспериментального измерительного комплекса для натурального диагностирования ферменной конструкции. В качестве объекта исследований была выбрана модель секции мостовой ферменной конструкции со стержневыми элементами. Модель ферменной конструкции может иметь множественные дефекты, расположенные в определенных узлах. Модель имеет жесткую фиксацию перемещений во всех направлениях в опорных узлах закрепления, в узлах модели фиксируются вертикальные смещения. При упрощенном моделировании в КЭ комплексе Ansys в качестве элементов конструкции использовался стержневой КЭ элемент типа Beam188. Сечение элемента прямоугольное полнотелое, имеет размеры: длина стержневого элемента 250 мм, высота поперечного сечения 8 мм, ширина 4 мм). Дефекты моделировались в виде уменьшения сечения по высоте и шириной  $ld=1$  мм, в области окрестности узла одного из стержней нижнего пояса конструкции. Величина дефекта вычислялась как отношение высоты поврежденного (остаточного) сечения к первоначальному: Анализ колебаний модели показывает, что в окрестности узловой точки расхождение амплитуд колебаний в направлении OZ для четырех стержней минимально. При этом анализ графиков форм кривизны в направлении OZ показывает некоторое расхождение графиков при восстановлении их точки пересечения. Данный признак может быть достаточным основанием для выявления дефекта в узле конструкции.

Исследования выполнены при частичной поддержке Минобрнауки России (проект БЧ0110-11/2017-20) а также РФФИ (проект 16-08-00740)

## Вычисление величин, характеризующих изменения состояния упругопластического материала Мурнагана при течении

**Швед О. Л.**

*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск*

Модель упругого материала Мурнагана обобщается на упругопластический материал. Решаются известные проблемы геометрически нелинейной теории упругопластичности: определяется поверхность текучести, которая образуется своими девиаторными сечениями, описывается явление роста упругой деформационной анизотропии, однозначно находится объективная производная по времени, нестандартно определяется момент разрушения. Однако возникает новая проблема: решение краевых задач для неидеального материала. Поэтому предполагаются известными история нагружения, напряженно-деформированное состояние и скорости перемещений. Рассматривается задача о вычислении критериального девиатор-оператора, вектора внешней нормали к поверхности девиаторного сечения, левой меры упругих искажений и параметра роста анизотропии. Программная реализация решения данной задачи является необходимым элементом системы численного моделирования процессов обработки металлов давлением. При выводе соотношений применяются средства символьных вычислений системы MathCAD 8. Используется описание в инвариантных тензорах для пространства напряжений, полученного ортогональным преобразованием тензора напряжений Коши с собственно ортогональным тензором упругого поворота. Получены процедуры вычисления трех слагаемых критериального девиатора: изотропного, анизотропного и вихревого. С использованием условий потенциальности оператор представляется симметричной матрицей в ортонормированном базисе пятимерного векторного пространства. Пять ее собственных значений действительные числа, а соответствующие разным собственным значениям пять собственных векторов взаимно ортогональны. Из них выбирается вектор внешней нормали, как ближайший к вектору нормали для изотропного материала. В окрестности сингулярной точки девиаторного сечения поверхности текучести требуется дополнительная визуальная проверка для анизотропного материала. Проверяется критерий разрушения, и вычисляются скорости параметров упрочнения. Из определяющих уравнений получена система одного тензорного и одного скалярного уравнений, которая сводится к системе семи скалярных линейных уравнений относительно неизвестных шести компонент скорости левой меры упругих искажений и параметра роста упругой анизотропии. Представлены процедуры программной реализации формирования матрицы системы и решения задачи на основе разработанных программных модулей комплекса программ на языке Фортран.

## Влияние поверхностных напряжений на устойчивость нелинейно-упругого шара

**Шейдаков Д. Н., Федоренко А. Г.**

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Вследствие развития современных технологий и появления новых материалов весьма актуальным становится вопрос анализа устойчивости равновесия деформируемых тел с учетом различных поверхностных явлений. Например, характер деформирования микро- и наноразмерных тел зачастую существенно отличается от поведения тел макроразмеров, что может быть объяснено поверхностными эффектами. Кроме того, данные эффекты могут играть значительную роль в механике тел, на поверхности которых нанесено сверхтонкое покрытие или произведена некоторая обработка поверхности, изменяющая ее свойства. В последнее время для моделирования поверхностных явлений получила развитие теория упругости с поверхностными напряжениями. В рамках этой теории помимо обычных напряжений, распределенных в объеме, учитываются еще и независимые поверхностные напряжения на границе тела или ее части, которые обобщают известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твердых тел. Введение поверхностных напряжений позволяет, в частности, описать характерный для наноматериалов размерный эффект.

Целью настоящего исследования является изучение влияния поверхностных напряжений на потерю устойчивости нелинейно-упругих сферических тел. В рамках общей теории устойчивости проведен анализ бифуркации равновесия полого шара при внутреннем давлении. Для описания его поведения использовалась модель Гертца — Мердока. Данная модель тела с поверхностными напряжениями с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений в рамках модели Гертца — Мердока может рассматриваться как тензор усилий, действующий в этой мембране.

Для определения начального (докритического) напряженно-деформируемого состояния шара в условиях больших деформаций применялся полуобратный метод. При выводе линеаризованных уравнений равновесия в объеме и на поверхности использовался метод линеаризации, адаптированный к задачам нелинейной теории упругости. Путем численного решения полученной линеаризованной краевой задачи для ряда конкретных материалов найдены спектры критических значений внутреннего давления и соответствующие им моды выпучивания. Используя полученные результаты подробно проанализирован размерный эффект и изучено влияние упругих свойств внутренней и внешней поверхности полого шара на потерю устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-08-00802-а, 16-01-00647-а, 16-48-230068-р\_а).

Задача о потоках степенных жидкостей на наклонной плоскости.  
Аналитическое решение

Эглит М. Э.<sup>1</sup>, Якубенко А. Е.<sup>2</sup>, Дроздова Ю. А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

<sup>2</sup>Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

<sup>3</sup>Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И. М. Губкина, Москва

Рассматриваются крупномасштабные природные склоновые потоки, движущиеся под действием силы тяжести, такие как снежные лавины и сели. Изучается движение по широкому длинному однородному склону достаточно большого уклона, на котором не происходит торможения и остановки потока. Для расчета скорости и толщины потока применяются уравнения гидравлического типа, то есть, уравнения, осредненные по глубине. Считается, что движение ламинарное, а трение на дне складывается из двух составляющих – кулоновского, не зависящего от скорости, и трения, зависящего от отношения скорости к толщине потока в некоторой степени, как в неньютоновских степенных жидкостях. В работе рассматривается так называемый фронтальный механизм вовлечения – на переднем фронте потока происходит разрушение структуры слоя впереди лежащего материала и вовлечение его в поток. По мере движения поток вытягивается вдоль склона, а скорость фронта стремится к константе. Это позволяет разбить всю область, занятую потоком, на две зоны: основную, которую можно описать уравнениями теории кинематических волн, и относительно узкую зону вблизи переднего фронта, где необходимо использовать полные уравнения с учетом инерционных членов. Эту узкую зону можно моделировать кинематическим скачком. При больших временах вовлеченная масса оказывается много больше начальной массы, внезапно пришедшей в движение. Если длиной области, занятой начальной массой, пренебречь, и считать, что на кинематическом скачке выполняется только условие сохранения массы, то решение уравнений кинематической теории представляет собой центрированную простую волну, а скорость переднего фронта вычисляется в явном виде из условия эволюционности фронта. Такое решение для основной части потока обосновано только при некотором условии. Исследование показало, что если прочность впереди лежащего слоя больше некоторой величины, то такое решение, описывающее структуру, всегда существует. В противном случае решение существует только при дополнительном условии, связывающем толщину потока на фронте основной части потока с толщиной на фронте разрушения. Наличие дополнительного условия приводит к изменению условий эволюционности, и, соответственно, формулы для скорости фронта и вида распределения скорости и толщины потока: он в этом случае состоит из простой волны (в хвостовой зоне) и потока постоянной толщины, возникающего за фронтом разрушения. Численные расчеты подтверждают полученные результаты. Выведенные явные формулы могут быть использованы для оценки динамических параметров склоновых потоков без применения сложных численных методов.

Работа поддержана РФФИ (проект 17-08-00115).

## Полуобратный метод в задаче изменения формы оболочки вращения

Юдин А. С.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Представлено развитие и применение полуобратного метода к решению актуальных задач изменения формы оболочек вращения. Трансформация оболочек происходит с большими перемещениями, изменением метрики и работе материала в нелинейной зоне. Силовыми воздействиями являются равномерное давление и краевые реакции связей. Для замкнутых в полюсе оболочек добавляется сосредоточенная сила. Выполнено приложение метода к следующим задачам: 1) вытяжка пластины в купол при действии давления в сочетании с сосредоточенной силы в апексе и без неё; 2) раздувание цилиндра внутренним давлением; 3) изменение торопластинчатой оболочки в оболочку аналогичного типа, но с другой формой торовой части; 4) изменение формы нижнего днища ёмкости для перевозки жидких грузов. Используются уравнения больших осесимметричных деформаций изотропных оболочек вращения типа Э. Рейсснера, обобщённые на относительные удлинения, сравнимые с единицей, и учитывающие поперечное обжатие материальной нормали. Уравнения допускают большие перемещения и углы поворота. Свойства несжимаемого материала определяются физическими соотношениями типа Дэвиса-Надаи и степенной аппроксимацией диаграммы «интенсивность напряжений – интенсивность логарифмических деформаций». В полуобратном методе априори задается форма меридиана получаемой оболочки и реакции связей. На основе разрешающей системы уравнений путём интегрирования выводится формула функционала для давления, зависящего от вектора варьируемых параметров задачи. Управляя параметрами, функционал нужно вывести на константу. Константа равна значению равномерного давления, под действием которого оболочка деформируется до заданного уровня характерного перемещения. Разработано два варианта построения поля деформаций (относительных удлинений) в зависимости от типа оболочек. В случае задач 1 и 2 значительны все три компоненты деформаций срединной поверхности. И здесь существенным этапом является подбор аппроксимации толщины, использование условия несжимаемости материала и построения итерационного процесса для определения радиального перемещения. В случае оболочек 3 и 4 изменение формы происходит преимущественно за счёт изгиба меридиана, растяжение которого мало. Это позволяет проще строить деформационное поле срединной поверхности. Радиальное перемещение определяется интегрированием одного из уравнений. Обжатие нормали следует из условия несжимаемости материала. Техника решения задач типа 1 и 2 рассматривалась в предыдущих работах. В настоящем докладе показаны возможности применения метода на оболочках типа 3 и 4. Оболочка типа 3 является плоским домкратом, применяемым для подъёма и выравнивания тяжёлых сооружений. Рассмотрено математическое моделирование работы плоского домкрата в диапазоне перемещений, близких к предельным.

Работа выполнена в рамках проекта №БЧ0110-11/2017-20.

## Теория контактного взаимодействия нанопластины, подкрепленной нанобалкой

Яковлева Т. В.<sup>1,2</sup>, Крылова Е. Ю.<sup>3</sup>, Салтыкова О. А.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет

<sup>3</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет

С внедрением в инженерную практику новых композиционных материалов значительно возрос интерес к построению соответствующей теории расчета пластинок и балок, выполненных из этих материалов, учитывающей особенности их поведения и их существенную зависимость от их размеров (нано). В настоящей работе разработана теория для изучения контактного взаимодействия прямоугольной в плане нанопластины, подкрепленной в центре ребром жесткости в виде нанобалки. Для учета размерно-зависимых коэффициентов применяется модифицированная моментная теория упругости. Подобные многослойные балочно-пластинчатые структуры являются составными элементами конструкций приборов современной техники, например датчики, переключатели, гироскопы, размеры которых имеют нануровень. Под воздействием внешних факторов отдельные элементы конструкций вступают в контактное взаимодействие, которое может оказывать существенное влияние на точность и надежность работы всего прибора. Пластина и балка постоянной толщины выполнены из изотропного, упругого материала. Искомые дифференциальные уравнения для пластины и балки получены с помощью вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. При этом используются кинематические модели первого приближения (для пластины – Кирхгофа, для балки – Эйлера-Бернулли). Контактное взаимодействие учитывается по методике Б.Я. Кантора. Появление зон сцепления маловероятно, поскольку контактное давление между слоями невелико. Условия контакта между слоями могут зависеть от координат и включать все виды несовершенного одностороннего контакта. Рассматриваемые в работе задачи нелинейные, поэтому важным является вопрос о корректности данных уравнений и существовании решений. С этой целью доказываются теоремы о существовании решений поставленной задачи. В случае решения нелинейной стационарной задачи строятся приближенные решения по методу Бубнова-Галеркина. Далее для них устанавливаются априорные оценки типа энергетических неравенств. С помощью теорем вложения С.Л. Соболева на основе этих оценок доказывается компактность семейства приближенных решений, что является доказательством существования решения. Построены итерационные методы решения контактных задач размерно-зависимых пластины и балки для стационарных задач. Приводятся теоремы сходимости этих методов для рассматриваемого класса задач. Достоверность результатов обеспечивается сопоставлением решений, полученных по методу установления академика Тихонова, с решением, полученным предложенной итерационной процедурой. Искомая задача решается методом Бубнова-Галеркина в высших приближениях, как для пластины, так и для балки. Проведены численные эксперименты для статических задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 18-38-00878 мол\_а, № 16-08-01108а, № 16-01-00721а, № 18-01-00351а.

Нелинейная динамика контактного взаимодействия  
балочно-пластинчатой структуры с учетом внешнего аддитивного  
цветного шума

**Яковлева Т. В.<sup>1,2</sup>, Кружилин В. С.<sup>1</sup>, Ерофеев Н. П.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина*

<sup>2</sup>*НИИ механики Национального исследовательского Нижегородского  
государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

Элементы конструкции современной техники подвержены внешнему динамическому воздействию различного вида (силовому и шумовому). Это обуславливает актуальность и значимость комплексного исследования поведения и предельных состояний конструкций. С этой целью в работе построена математическая модель сложных колебаний механических структур, являющихся составными элементами конструкций современной техники. Для решения поставленной задачи осуществлен учет контактного взаимодействия элементов и влияния цветных шумов различной природы (розового, броуновского и др.). Известно, что случайные воздействия играют весьма существенную роль в поведении динамических систем в таких областях, как физика, химия, биология. Однако влияние цветных шумовых полей на сложные колебания механических систем мало изучено. В качестве механической структуры в работе рассмотрена пластина, подкреплённая в центре балкой, с малыми зазорами. Для описания пластины применена кинематическая гипотеза Кирхгофа, для балки — Эйлера — Бернулли. Контактное взаимодействие учтено по теории Б. Я. Кантора. Для моделирования случайных во времени свойств внешней среды хорошо подходит цветной шум. Цветовые соответствия различных типов шумового сигнала определяются с помощью графиков спектральной плотности, то есть распределения мощности сигнала по частотам. При анализе сигналов большое значение имеет оценка автокорреляционной функции процесса. В работе проведен комплексный анализ влияния внешних шумовых воздействий на поведение рассматриваемой балочно-пластинчатой структуры. Решение поставленной задачи сложных колебаний механических структур и ее исследование проведено несколькими методами для того, чтобы избежать погрешности вычислений и получить достоверные результаты. А именно, применен метод Бубнова — Галеркина в высших приближениях, метод конечных разностей по пространственной координате с аппроксимацией  $O(h^2)$  и  $O(h^4)$ , методы Рунге — Кутты 4-го, 6-го, 8-го порядка точности по времени. Для анализа влияния цветных шумов различной интенсивности на нелинейную динамику рассматриваемых механических систем применены методы качественной теории дифференциальных уравнений. Для этого строились такие характеристики как сигнал, спектр мощности Фурье, 2D и 3D вейвлет спектры с использованием материнского вейвлета Морле, сечения Пуанкаре, 2D и 3D фазовые и модальные портреты, автокорреляционная функция.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ (проект №15-19-10039-П)

## Содержание

Абделхафиз М. А. Мультистабильность стационарных движений в анизотропной задаче конвекции Дарси для прямоугольника . . . . .	3
Абросимов Н. А., Елесин А. В., Новосельцева Н. А. Численный анализ динамической потери устойчивости предварительно напряженных композитных цилиндрических оболочек . . . . .	4
Айзикович С. М., Волков С. С., Васильев А. С. Плоская задача о контакте двух упругих тел с функционально-градиентными покрытиями . . . . .	5
Акопян В. Н., Агаян К. Л. Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений и трещин . . . . .	6
Баженов В. Г., Казаков Д. А., Кибец А. И., Нагорных Е. В. Численное и экспериментальное исследование неосесимметричного выпучивания упругопластических цилиндрических оболочек с наполнителем при кручении . . . . .	7
Баженов В. Г., Осетров С. Л., Осетров Д. Л. Исследование закономерностей процесса растяжения стержней и оболочек с учетом влияния краевых эффектов . . . . .	8
Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Макеев Е. В., Сеницын А. В. О критических температурах и скоростях продольного движения термоупругого полотна и области стабильности . . . . .	9
Батищев В. А. Бифуркация вращения жидкости вблизи свободной границы с учетом эффекта Марангони . . . . .	10
Бауэр С. М., Венатовская Л. А. Измерение внутриглазного давления. Модель тонометра Шиотца . . . . .	11
Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин и пологих сферических оболочек . . . . .	12
Бегун П. И., Бондаренко Д. И., Кондратенко И. В. Биомеханические исследования состояния структур опорно-двигательного аппарата при динамических нагрузках . . . . .	13
Беляк О. А., Суворова Т. В. Движение жесткого выпуклого штампа по гетерогенной полуплоскости . . . . .	14
Белянкова Т. И., Ворович Е. И., Тукодова О. М. Влияние параметров неоднородности покрытия на трансформацию поверхностного волнового поля в пьезоэлектрических структурах . . . . .	15
Бобылев А. А. Пространственная контактная задача о сжатии трансверсально-изотропного упругого тела конечных размеров гладкими выпуклыми жесткими штампами . . . . .	16
Богачев И. В. Идентификация механических характеристик неоднородного электроупругого цилиндра . . . . .	17
Богачев И. В., Явруян О. В. Об определении характеристик неоднородного покрытия цилиндрического волновода . . . . .	18
Бодягина К. С., Павлов С. П., Бекренев Н. В. Исследование прочности композитов армированных углеродным волокном при наличии межфазного слоя . . . . .	19



Боев Н. В. Дифракция ультразвуковых волн на скоплении препятствий в двумерной упругой среде с учетом их всевозможных отражений и трансформаций . . . . .	20
Бочарова О. В., Калинин В. В. Об одном методе идентификации в задачах низкочастотной дефектоскопии . . . . .	21
Бочкарёв С. А., Каменских А. О., Лекомцев С. В. Исследование затухающих гармонических колебаний пластин, взаимодействующих с жидкостью и газом . . . . .	22
Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н. Численное моделирование пространственных колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью . . . . .	23
Бураго Н. Г., Никитин А. Д., Никитин И. С., Стратула Б. А. Моделирование процесса напыления микрочастиц, распределенных в разогретом газовом потоке . . . . .	24
Бураго Н. Г., Никитин А. Д., Никитин И. С., Ткаченко В. Г. Моделирование роста краевой усталостной трещины при высокочастотном нагружении . . . . .	25
Бычков П. С. Экспериментальное исследование прогиба растущей по толщине сферической оболочки . . . . .	26
Васильев Л. В. Об определении коэффициентов в граничных условиях для неоднородных упругих и вязкоупругих структур . . . . .	27
Вассерман И. Н., Шестаков А. П. Взаимодействие деформационных и электрических процессов в миокарде . . . . .	28
Ватульян А. О., Плотников Д. К. Об индентировании градиентных упругих структур с покрытием . . . . .	29
Ватульян А. О., Юров В. О. О волнах в преднапряженном функционально-градиентном цилиндрическом волноводе . . . . .	30
Вахлярский Д. С., Гуськов А. М., Басараб М. А., Лунин Б. С. Численное и экспериментальное исследование расщепления частот цилиндрической оболочки с дефектами . . . . .	31
Вильде М. В., Сурова М. Ю. Формулировка граничных условий и применение уточненной теории растяжения пластин для описания дисперсии планарной краевой волны . . . . .	32
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А. Моделирование погруженных и встроенных волноводов . . . . .	33
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Бойко О. В. Определение эффективных упругих модулей анизотропного композита: пьезоэлектрические нанонити в полимерной матрице . . . . .	34
Говорухин В. Н. Сценарий возникновения автоколебаний при протекании идеальной жидкости через канал . . . . .	35
Головешкина Е. В., Зубов Л. М. Собственные напряжения в нелинейно упругом шаре с распределёнными дислокациями . . . . .	36
Голуб М. В., Дорошенко О. В. Моделирование динамики интерфейсов с периодически и стохастически распределенными трещинами . . . . .	37

Грибанов Ю. С., Лапина П. А. О моделировании деформирования ортотропной неоднородной по толщине полосы . . . . .	38
Гусаков Д. В. Динамическая контактная задача для неоднородной пористоупругой полосы . . . . .	39
Гущина К. В. Об обратной задаче определения параметров включения в балке в рамках модели Тимошенко . . . . .	40
Давыдов С. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Распространение в слое связанных термоупругих возмущений с учетом перекрестных диффузионных эффектов . . . . .	41
Долгих Т. Ф. Метод конечных объемов для решения задачи зонального электрофореза . . . . .	42
Донник А. М., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Киреев С. И., Левченко К. К., Лихачев С. В., Норкин И. А. Извлечение клинически значимых данных из биомеханического моделирования протяженной фиксации при повреждениях грудного отдела позвоночника . . . . .	43
Дроздова Ю. А., Смирнова М. В. Оценка эффективности пульсирующего режима перекачки неньютоновских флюидов по трубам . . . . .	44
Дударев В. В., Мнухин Р. М. Об определении уровня предварительных напряжений в неоднородных электроупругих телах . . . . .	45
Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Определение одномерного ядра уравнения вязкоупругости с источником типа взрыва . . . . .	46
Епифанов А. В., Цибулин В. Г. Мультистабильность решений в популяционной модели с идеальным свободным распределением . . . . .	47
Еремеев В. В. Устойчивость составной толстой плиты с неоднородным полем предварительных напряжений . . . . .	48
Еремеев В. А., Наседкин А. В. Установившиеся колебания пьезомагнитоэлектрических наноразмерных композитных тел со связанными поверхностными и интерфейсными эффектами . . . . .	49
Еремин А. А., Новиков О. И., Варелджан М. В. Моделирование рассеяния бегущих упругих волн на трехмерных неоднородностях в слоистых волноводах . . . . .	50
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Влияние седиментации примеси на рельеф дна водоема . . . . .	51
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. О касательных напряжениях на границе между слоями для двухслойной модели седиментации примеси в потоке жидкости . . . . .	52
Журавлев Г. А., Дроботов Ю. Е., Вакулов Б. Г. Проявление эффекта кривизны геометрического концентратора в условиях упруго-пластического деформирования . . . . .	53
Зайцев А. В., Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Пантелеев И. А., Сидорин Ю. В., Соколкин Ю. В., Устинов К. Б., Шевцов Н. И. Механизмы деформирования и закономерности локализованного разрушения песчаников при трехосном квазистатическом нагружении . . . . .	54

Зайцев А. В., Кутергин А. В., Соколкин Ю. В. Аналитические решения задач о равновесии горизонтальных ортотропных цилиндров, находящихся под действием гравитационных сил и неравномерного бокового давления . . . . .	55
Зубко И. Ю., Кокшаров В. С., Шавкун Д. В. Неупругое деформирование уплотнительных элементов из терморасширенного графита и композитов на его основе при эксплуатации трубопроводной арматуры	56
Зубов Л. М. Универсальное решение нелинейной теории упругости для цилиндрической трубы с предварительно напряжёнными покрытиями	57
Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультяев В. И. Численное моделирование процессов упругопластического деформирования конструкционных сталей по многозвенным ломаным прямолинейным траекториям . . . . .	58
Казаков К. Е., Курдина С. П. Плоская задача множественного контакта для основания с многослойным неоднородным покрытием . . . . .	59
Казарников А. В. Бифуркационное поведение решений системы Фитцхью-Нагумо с диффузией . . . . .	60
Калинина Т. И. Антиплоские задачи об установившихся колебаниях при наличии поверхностных напряжений . . . . .	61
Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Занько А. И. Решение задач для анизотропных пластинок с отверстиями и краевыми трещинами . . . . .	62
Калоеров С. А., Глушанков Е. С. Решение периодической задачи термоэлектромагнитоупругости для кусочно-однородной пластинки при действии линейного потока тепла . . . . .	63
Карпинский Д. Н., Санников С. В. Расчет влияния дислокационной эмиссии из вершины трещины на коэффициенты интенсивности напряжения при смешанном нагружении . . . . .	64
Карякин М. И. Полуобратный анализ конечных деформаций тел с микроструктурой . . . . .	65
Карякин М. И., Обрезков Л. П. Об устойчивости неоднородного нелинейно-упругого цилиндра при растяжении и раздувании . . . . .	66
Келлер И. Э., Петухов Д. С. К вопросу о реконструкции профилей остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно упрочненных телах с плоской и цилиндрической поверхностями . . . . .	67
Кириченко О. В., Ревина С. В. Задача устойчивости двумерных течений, близких к сдвиговым . . . . .	68
Колегов К. С. Моделирование формирования ребристой микроструктуры методом испарительной литографии в сочетании с инфракрасным нагревом . . . . .	69
Колесников А. М., Сигаева Т. В., Судак Л. Об одном классе деформаций спиральной пружины . . . . .	70
Колесников А. М., Шубчинская Н. Ю. Раздувание тонкостенной трубки, частично надетой на негладкий цилиндр . . . . .	71
Кондратьев В. С. Об исследовании напряженного состояния и реконструкции свойств для неоднородных пьезокерамических цилиндров	72

Корниевский А. С. Численное исследование эффективных свойств анизотропных упругих композитов со случайной и с открытой пористостью при учете поверхностных напряжений . . . . .	73
Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Кружилин В. С., Крысько В. А. Математическая модель нелинейной динамики микрополярной цилиндрической оболочки Тимошенко сетчатой структуры . . . . .	74
Кукуджанов К. В., Левитин А. Л. Об электропластичности металла при воздействии высокоэнергетическим электромагнитным полем . . . . .	75
Куракин Л. Г., Лысенко И. А., Островская И. В., Соколовский М. А. Устойчивость томсоновского многоугольника в двухслойной жидкости . . . . .	76
Курбатова Н. В., Портнов Е. Н., Устинов Ю. А. Задачи растяжения, кручения и изгиба канатов . . . . .	77
Кутепов И. Е., Крысько В. А. Исследование режимов колебаний нанобалок Бернулли-Эйлера . . . . .	78
Леви Г. Ю. Особенности формирования волнового поля в неоднородных предварительно напряженных термоупругих телах . . . . .	79
Леви М. О., Агаян К. Л. Контактная задача для электромагнитоупругой среды . . . . .	80
Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А. Разлет вращающихся осколков метеорного тела . . . . .	81
Лунева Е. И., Азоян А. И. Моделирование неидеального теплового контакта в задачах тепловыделения от трения . . . . .	82
Лычев С. А., Койфман К. Г. Конечные деформации самонапряженного слоистого полого шара . . . . .	83
Лычёва Т. Н. Замкнутые решения задачи термовязкоупругости для конечного цилиндра . . . . .	84
Мазепа М. М., Колесникова А. С. Механические свойства графеновых нанолент . . . . .	85
Максимов Ф. А., Шевелев Ю. Д. Течение около проницаемых поверхностей . . . . .	86
Манжиров А. В. Математическая теория аддитивного поверхностного роста: конечные и малые деформации . . . . .	87
Маслов Л. Б., Сабанеев Н. А., Ильина Е. Э. Конечно-элементный анализ регенерации большеберцовой кости с имплантатом и аппаратом внешней фиксации . . . . .	88
Мнухин Р. М., Дударев В. В. К определению упругих свойств неоднородного цилиндра . . . . .	89
Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н. Влияние дефектов и включений на работоспособность тонких пластин . . . . .	90
Моршнева И. В. Пересечение бифуркаций в задаче конвекции в горизонтальном слое бинарной смеси . . . . .	91
Мурашкин Е. В., Дац Е. П. Задачи теории температурных напряжений в тороидальных координатах . . . . .	92
Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Моделирование волнового транспорта тепла в гемитропных микрополярных средах . . . . .	93

Наседкин А. В. Конечно-элементная гомогенизация активных метаматериалов: влияние внутренней структуры и масштабные факторы . . .	94
Наседкина А. А. Компьютерный дизайн гибких пьезоэлектрических преобразователей из пористой пьезокерамики с модифицированными свойствами на границах пор . . . . .	95
Недин Р. Д. Оценка влияния параметров начального напряженно-деформированного состояния на акустические характеристики неоднородной пластины с покрытием . . . . .	96
Нестеров С. А. Построение упрощенных моделей для термоупругих тел с покрытиями . . . . .	97
Нестеров С. А. Решение задач термоэлектроупругости для преднапряженных функционально-градиентных материалов . . . . .	98
Норкин М. В. Динамика точек отрыва при вертикальном отрывном ударе плавающего кругового цилиндра . . . . .	99
Оганесян П. А., Курбатова Н. В., Надолин Д. К., Холостов С. И., Соловьев А. Н. Определение материальных свойств пористых тел с использованием комплекса ACELAN COMPOS . . . . .	100
Орлова Н. С. Исследование динамики относительно тонких слоев в процессе виброкипения с использованием метода дискретных элементов	101
Панькин А. В., Тимошенко П. Е., Калинин В. В. Конечноэлементный расчет параметров рассеяния для фильтров на поверхностных акустических волнах на основе пленок титаната бария стронция на подложке из оксида магния . . . . .	102
Папкова И. В., Крысько В. А., Крысько А. В. Хаотическая динамика и контактное взаимодействие двухслойной размерно-зависимой гибкой цилиндрической панели . . . . .	103
Паршин Д. А., Казаков К. Е. Неклассическая задача о контакте с жестким основанием тяжелой конструкции, формируемой по аддитивной технологии из материала, проявляющего изменяющиеся со временем вязкоупругие свойства . . . . .	104
Перельмутер М. Н. Взаимодействие трещин со связями в концевой области с границами раздела сред . . . . .	105
Плотников Д. К., Поддубный А. А. Об индентировании градиентных упругих структур с покрытием . . . . .	106
Пожарский Д. А., Бедоидзе М. В. Трехмерные контактные задачи для неоднородных оснований . . . . .	107
Полякова Н. М. Образование пространственно-временных структур в испаряющейся капле жидкости, содержащей примеси . . . . .	108
Потетюшко О. А. Исследование деформирования решетчатой пластинки склеры на основе различных моделей . . . . .	109
Радаев Ю. Н. Трехмерная кинематика скольжений в неплотно связанных средах Кулона — Мора . . . . .	110
Романов А. А. Применение метода системы пружин для генерации сеток в задачах аддитивного производства . . . . .	111

Сайфутдинов Ю. Н. Динамика наращиваемых по толщине слоистых сферических оболочек . . . . .	112
Салтыкова О. А., Крысько В. А., Крысько А. В. Хаотическая динамика контактного взаимодействия размерно-зависимых балок, описываемых гипотезой первого приближения (Эйлера — Бернулли) . . . . .	113
Саушкин М. Н., Радченко В. П. Реконструкция напряженно-деформированного состояния в концентраторах напряжений полых и сплошных цилиндрических образцов после поверхностного пластического упрочнения . . . . .	114
Сафроненко В. Г., Шутько В. М. Численный анализ виброактивности составной оболочки вращения из полимерного композита при несимметричном нагружении . . . . .	115
Сахарова Л. В. Математическое моделирование экспресс-метода клиновидной дегидратации . . . . .	116
Скрипаченко К. К., Голядкина А. А., Челнокова Н. О., Мурылев В. В. Биомеханическое моделирование сочетанной патологии аорты . . .	117
Собянин К. В., Шардаков И. Н., Шестаков А. П. Виброизоляция устройств, чувствительных к угловым механическим колебаниям . . . . .	118
Соловьев А. Н., Оганесян П. А., Ле Ван З. Прикладная теория изгиба трехслойного неоднородно поляризованного пьезопреобразователя .	119
Сторожев В. И., Моисеенко И. А., Сидаш О. Ю. Анализ модели нелинейного ангармонического взаимодействия нормальных волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре с гибким нерастяжимым покрытием границы . . . . .	120
Сумбатьян М. А., Пискунов А. С. Вихревой метод для расчета течения вязкой жидкости в канале . . . . .	121
Углич П. С. Численное решение обратной задачи о восстановлении механических характеристик поперечно-неоднородного слоя . . . . .	122
Федотенков Г. В., Тарлаковский Д. В., Митин А. Ю. Нестационарное пространственное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления . . . . .	123
Филимонова А. М., Говорухин В. Н. Исследование формирования плоских вихревых структур в идеальной жидкости . . . . .	124
Фоменко С. И. Моделирование распространения и дифракции упругих волн в структурах с неоднородным волноводом, составленным из полубесконечных разномодульных частей . . . . .	125
Цибулин В. Г. Задачи конвекции в пористой анизотропной среде и косимметричные эффекты . . . . .	126
Чебаков М. И., Колосова Е. М. Контактная задача для составной полосы	127
Черпаков А. В., Паринов И. А., Чебаненко В. А., Рожков Е. В. Исследование пьезоэлектрического генератора кантелеверного типа с активным основанием . . . . .	128
Черпаков А. В., Чайка Ю. А., Паринов И. А., Рожков Е. В. Идентификация дефектов в элементах ферменной стержневой конструкции на основе вибрационного анализа . . . . .	129

Швед О. Л. Вычисление величин, характеризующих изменения состояния упругопластического материала Мурнагана при течении . . . . .	130
Шейдаков Д. Н., Федоренко А. Г. Влияние поверхностных напряжений на устойчивость нелинейно-упругого шара . . . . .	131
Эглит М. Э., Якубенко А. Е., Дроздова Ю. А. Задача о потоках степенных жидкостей на наклонной плоскости. Аналитическое решение . . . . .	132
Юдин А. С. Полуобратный метод в задаче изменения формы оболочки вращения . . . . .	133
Яковлева Т. В., Крылова Е. Ю., Салтыкова О. А. Теория контактного взаимодействия нанопластины, подкрепленной нанобалкой . . . . .	134
Яковлева Т. В., Кружилин В. С., Ерофеев Н. П. Нелинейная динамика контактного взаимодействия балочно-пластинчатой структуры с учетом внешнего аддитивного цветного шума . . . . .	135