Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
 Российский Национальный комитет
 по теоретической и прикладной механике
 Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
 Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
 Южный федеральный университет
 Донской государственный технический университет

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

# ТРУДЫ ХХ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.

В двух томах Том I

Ростов-на-Дону – Таганрог Издательство Южного федерального университета 2020

## УДК [531+532+533+539.3]: 001.895(063) ББК 22.25я43

C56

XX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант №20-01-20007

Программный комитет:

В. Н. Акопян, Х. Альтенбах, Б. Д. Аннин, В. А. Бабешко (сопредседатель),
А. А. Буренин, А. О. Ватульян (сопредседатель), Д. В. Георгиевский, Е. В. Глушков,
И. Г. Горячева (сопредседатель), Д. А. Губайдуллин, Л. М. Зубов, Л. А. Игумнов,
М. А. Ильгамов, Д. А. Индейцев, Калинчук В. В., Г. И. Канель, Д. М. Климов,
В. И. Колесников, Л. Ю. Коссович, А. Г. Куликовский, А. М. Липанов, И. И. Липатов,
Е. В. Ломакин, В. П. Матвеенко, Н. Ф. Морозов (сопредседатель), В. В. Пухначев,
Ю. Н. Радаев, А. В. Саакян, С. Т. Суржиков, Ю. А. Устинов, В. М. Фомин,
Ф. Л. Черноусько

Организационный комитет:

М. И. Карякин (председатель), А. О. Ватульян, В. В. Дударев, М. Ю. Жуков,

А. М. Колесников, А. В. Наседкин, А. В. Попов, В. Г. Сафроненко, А. Н. Соловьев,

М. А. Сумбатян, В. Г. Цибулин, М. И. Чебаков

Отв. редактор А. О. Ватульян

Редакторы: М. Ю. Жуков, А. В. Наседкин, В. В. Дударев, Д. К. Плотников, А. В. Попов, В. О. Юров

С56 Современные проблемы механики сплошной среды : труды XX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.) : в 2 т. / отв. ред. А. О. Ватульян ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020.

ISBN 978-5-9275-3486-9 T. 1. – 2020. – 272 c. ISBN 978-5-9275-3487-6 (T. 1)

Сборник содержит научные доклады, представленные на XX Международную конференцию «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.).

Конференция посвящена 100-й годовщине со дня рождения выдающегося советского и российского учёного-механика, академика РАН Иосифа Израилевича Воровича.

В сборнике представлены результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, по устойчивости движений вязкой жидкости, аэрогидродинамике, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности, в механике контактных взаимодействий и теории оболочек, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и при их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

ISBN 978-5-9275-3487-6 (T. 1) ISBN 978-5-9275-3486-9 УДК [531+532+533+539.3]: 001.895(063) ББК 22.25я43 © Южный федеральный университет, 2020

© Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 2020

# Содержание

100 лет со дня рождения ИОСИФА ИЗРАИЛЕВИЧА ВОРОВИЧА Абросимов Н. А., Елесин А. В., Новосельцева Н. А. Численное исследо-	6
вание нелинейного деформирования и потери устойчивости цилин-	
дрических осолочек из композиционных материалов при комонии-	9
Агаян К. Л. Атоян Л. А. Саакян С. Л. Распространение упруго-спиновых	5
волн в составной ферромагнитной структуре с полубесконечной тре-	
щиной	14
Агаян К. Л., Джилавян С. А. Дифракция плоской электроупругой волны	
сдвига на системе полубесконечных трещин, периодически располо-	10
женных в пьезоэлектрическом пространстве	19
Акопян В. Н., Даштоян Л. Л. Плоско-деформированное состояние упру-	
гой составной плоскости с межфазными включениями под воздей-	0.4
ствием динамических нагрузок	24
Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Саакян А.В. Влияние колеолющегося на	
границе упругой полуплоскости жесткого штампа на напряженное	20
состояние вокруг внутреннего жесткого тонкого включения	29
Амирджанян А.А., Белубекян М В, Геворгян Г.З, Дарбинян А.З. Волны	<b>2</b> 4
типа Лява в системе жидкий слой-полупространство	34
Батищев В. А. Возникновение несимметричных закрученных режимов те-	
чений жидкости вблизи свободной границы	39
Белянкова Т. И., Ворович Е. И., Тукодова О. М. Влияние начальных на-	
пряжений на распространение ПАВ в структурах с ФГПМ покры-	10
тием из различных керамик на основе РДТ	43
Боев Н. В. Рассеяние ультразвуковых волн на скоплении препятствий в трехмерной упругой среде с учетом любых законов их отражений	40
	48
Васильев В. В., Лурье С. А. Несингулярные градиентные решения и кон-	50
цепция концентрации напряжений в механике трещин Ватульян А. О., Юров В. О. О восстановлении законов изменения харак-	53
теристик функционально-градиентного цилиндрического волновода	58
Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. Обратная нестационарная задача по	
идентификации дефекта в упругом стержне конечной длины	63
Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Ползучесть и вязко-	
пластическое течение в процессе неизотермического деформирова-	
ния плоского тяжелого слоя	67
Георгиевский Д.В. Устойчивость диффузионно-вихревых ньютоновских	
течений в полуплоскости	72
Годес А. Ю. Сравнение контактной и бесконтактной моделей дуговой тре-	
щины на границе раздела электрострикционных материалов	77
Головешкина Е.В., Зубов Л.М. Устойчивость нелинейно упругого шара	
с распределёнными дислокациями	82
Горохов В. А., Капустин С. А., Чурилов Ю. А. Алгоритм получения мате-	
риальных функций модели ползучести нержавеющих сталей в усло-	
виях нейтронного облучения	87

Дзебисашвили Г.Т. Оценка частот колебаний цилиндрической оболочки	
с прямоугольным поперечным сечением, сопряженной с пластиной.	92
Дудин Д.С., Келлер И.Э. Релаксационные процессы в системе связан-	
ной диффузии и вязкоупругого течения с сопровождающими хими-	
ческими реакциями и эволюцией микроструктуры	97
Зверев Н. А., Земсков А. В. Нестационарные упругодиффузионные волны	
в ортотропном сплошном цилиндре	102
Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Файкин Г.М. Нестационарный изгиб консольно-закрепленной балки Бернулли — Эйлера с учетом диффу-	
ЗИИ	106
Зимин Б. А., Качанов А. Б., Ялыч Е. С. Молекулярно-кинетическая мо-	
дель оценки времени действия «вакуум синдрома» при травматиче-	
ской и послеоперационной отслойке оболочки	111
Зимин Б. А., Судьенков Ю. В., Ялыч Е. С. Модель тепловыделения при	
квазистатическом деформировании металлов	114
Зимин В. Н., Крылов А. В., Павлов Н. Г., Чурилин С. А., Шахвердов А. О.	
Особенности математического моделирования динамики крупнога-	
баритных трансформируемых космических конструкций	118
Зубов Л.М. Сферически симметричное состояние упругой микрополяр-	
ной жидкости	123
Ильичев В. Г., Ильичева О.А. Дельта Дона — стабилизатор солености	
таганрогского залива?	128
Каменских А.О., Лекомцев С.В., Юрлов М.А. Пассивное подавление	
гидроупругих резонансных колебаний тонкой пластины с помощью	
пьезоэлемента, соединённого с внешней электрической цепью	132
Карапетьян Г. Я., Кайдашев Е. М., Днепровский В. Г., Минасян Т. А., Ку-	
тепов М. Е. Датчики на поверхностных акустических волнах на ос-	
нове тонких пленок и массивов наностержней оксида цинка	137
Каспарова Е. А., Перельмутер М. Н. Взаимодействие трещины и капсулы	1.40
при самозалечивании материалов	142
Колесников В.И., Иваночкин П.Г., Данильченко С.А. Моделирование	1 4 🗖
контактнои задачи для компонентов шлицевого соединения	147
Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Синичкина А. О. Моделирование поведе-	
ния микрополярной сетчатой цилиндрической панели Кирхгофа—	151
JIABA	191
Липатов И. И., Фам Б. К. пелинеиные эффекты при распространении воз-	156
Мариор И. П. Инатор А. А. Питричник С.Ю. Границио элементика ма	100
марков И. П., Ипатов А. А., Литвинчук С. Ю. Гранично-элементное мо-	
делирование динамики анизотропных упругих тел со связанными	160
	165
Морозов Н. Ф. Вавилов Л. С. Инлейнов Л. $\Lambda$ Муратиков К. П. Сомо	100
нов Б Н О влиянии предварительно напряжённого состояния на	
термоакустический сигнал в токопроволящих материалах	170
Terming our recently of the composed and the march and the second of the	110

Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Изгибные колебания много-	175
СЛОИНЫХ ПЛАСТИН	175
моршнева И. Б. Бозникновение пространственных автоколеоательных	180
Мисатора Н.К. Симбатан М. А. Расиёт эрукорого нона рбнизи босконон	100
мусатова п. к., Сумоатян м. А. гасчет звукового поля волизи оесконеч-	195
Holo KJUHa $\dots$ Holo	100
ные свойства пористого пьезокерамического материала с металли-	
зированными поверхностями пор	190
Нестеров С.А. Приближенные аналитические решения задачи градиент-	
ной термоупругости для составных тел	195
Норкин М. В. Динамика точек отрыва при вертикальном отрывном ударе	
плавающего кругового цилиндра	200
Петров А. Н., Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Ипатов А. А. Гранично-	
элементный анализ взаимодействия поверхностных волн с барьера-	
ми в частично насыщенном пороупругом полупространстве	205
Пожарский Д.А., Золотов Н.Б. Контактные задачи для неоднородных	
и составных цилиндрических тел	210
Полякова Н. М. Вращательно-симметричное турбулентное течение в ци-	
линдрическом сосуде с неравномерным профилем стенок	213
Радаев Ю.Н. Моделирование пространственных течений необратимо	
сжимаемых сред Кулона—Мора с помощью геометрии асимптоти-	
ческих направлений	218
Садовский В. М., Садовская О. В. Термодинамически согласованные мо-	
дели динамики упругопластических, сыпучих и пористых сред	223
Саркисян А.А. Задача устойчивости микрополярной упругой пологой	
оболочки	228
Саркисян С.О. Дискретная и континуальная модели деформаций графе-	
на по моментной теории	233
Степович М. А., Амрастанов А. Н., Калманович В. В., Серегина Е. В. Об	
особенностях одной математической модели нагрева многослойных	
проводящих структур электронным пучком	238
Тарлаковский Д. В., Нгуен Ван Лам. Действие нестационарных антисим-	
метричных кинематических возмущений на сферическую полость	
в среде Коссера	243
Филимонова А. М. Численное исследование динамики вихревого паркета	
на плоскости	247
Хакимов А. Г. Поперечное обтекание круглого трубопровода	253
Хохлов А. В. Свойства кривых нагружения и разгрузки, порождаемых	
нелинейной моделью типа Максвелла для вязкоупругопластичных	<b>25</b> 0
материалов, и индикаторы ее применимости	258
Циоулин В.Г., Ха Т. Д. Косимметрия системы пар хищников и жертв на	0.00
однородном ареале	263
швед О. Л. Построение поверхности текучести для ортотропного упру-	000
гопластического материала Мурнагана	268

### 100 лет со дня рождения ИОСИФА ИЗРАИЛЕВИЧА ВОРОВИЧА



21 июня 2020 г. исполняется 100 лет со дня рождения Иосифа Израилевича Воровича — выдающегося российского ученого, механика и математика, замечательного педагога, создавшего школу механиков в Ростове-на-Дону.

И.И.Ворович родился в старинном городке Стародубе на Брянщине, где и окончил среднюю школу.

В 1937 г. И.И.Ворович поступил в Московский государственный университет на отделение механики, где преподавали ученые, являющиеся гордостью русской и советской науки.

С начала Великой Отечественной войны И. И. Ворович в числе других студентов МГУ был призван в ряды Красной Армии и направлен на учебу в Военновоздушную инженерную академию им. Н. Е. Жуковского. Курсанты помимо приобретения инженерных знаний проходили производственную практику на прифронтовых аэродромах. И. И. Ворович в 1942 г. был авиамехаником на Волховском фронте. В 1944 г., окончив академию с отличием, был оставлен для прохождения службы, далее направлен в строевую часть для приобретения практического опыта, затем участвовал в войне с Японией на Забайкальском фронте в качестве авиатехника и авиаинженера. В 1945 г. в составе подразделения академии был участником Парада Победы

В 1947 г. он был отозван из строевой части для продолжения учебы в академии в качестве адъюнкта; в её стенах выполнил специальную научную работу по закрытой тематике, защитил кандидатскую диссертацию.

После демобилизации в 1950 году — переезд в Ростов-на-Дону вместе со своим товарищем по академии Н. Н. Моисеевым и начало педагогической работы на кафедре теоретической механики Ростовского госуниверситета. С тех пор жизнь И. И. Воровича навсегда связана с Ростовом-на-Дону, с РГУ, где он формируется как преподаватель и активно занимается научными исследованиями. В 1958 г. И. И. Ворович блестяще защитил докторскую диссертацию в Ленинградском университете на тему «Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек». Для анализа сложных нелинейных операторных уравнений были использованы новые топологические методы, с помощью которых были доказаны теоремы разрешимости для нелинейных краевых задач, обоснованы приближенные методы как для расчета деформирования, так и для оценки устойчивости.

В 1961 г. была образована кафедра теории упругости на физмате РГУ, которую возглавил И. И. Ворович. Он активно продолжает заниматься математическими аспектами теории оболочек, в первую очередь статистическими методами при оценке влияния случайных факторов на устойчивость оболочек. Появилось новое направление — контактные задачи теории упргости.

К концу 60-х гг. ХХ в. на кафедре теории упругости наряду с глубокими теоретическими разработками в области теории плит и оболочек, контактных задач уже выполнялись и экспериментальные исследования в области устойчивости тонкостенных оболочек, механики полимеров и другие. Был сформирован коллектив механиков-теоретиков и инженеров, активно участвующий не только в образовательном процессе, но и в выполнении различных работ для нужд народного хозяйства.

Новый этап в жизни И. И. Воровича связан с тем периодом, когда в 1971 г. был создан Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики (НИИМ и ПМ), директором которого он был назначен. В Институте получили развитие многие фундаментальные направления кафедры теории упругости, но вместе с тем развивались и прикладные исследования в области прочности подшипников, механики полимеров и сегнетоэлектриков, дефектоскопии, фундаментостроения и сейсморазведки, геоэкологии и другие. В области прикладной математики по инициативе И. И. Воровича, имевшего большой опыт исследований сложных механических систем, было создано новое для Ростовской математической школы научное направление — математическое моделирование сложных экологических и экономических систем.

Около тридцати лет И. И. Ворович успешно руководил институтом, привлекая к исследованиям не только опытных сотрудников, но и молодых исследователейвыпускников мехмата. Здесь формировались как исследователи и руководители лучшие ученики Иосифа Израилевича, формируя преемственность научных поколений. Из научной школы И. И. Воровича вышел ряд ректоров и заведующих кафедрами ведущих вузов России, среди них Лауреаты государственных премий, Заслуженные деятели науки РФ, академики, ученые, создавшие новые научные направления и свои научные школы.

Отметим ряд научных направлений в механике, в развитие которых И. И. Ворович внес значительный вклад:

- исследования в области нелинейной теории оболочек обоснование методов построения приближенных решений, доказательство теорем существования;
- проблема перехода от трехмерной задачи теории упругости к двумерной; разработка нового варианта асимптотического метода, на базе которого построены уточненные методы расчета пластин, оболочек и многослойных плит;

- смешанные статические и динамические задачи теории упругости для полуограниченных тел, построение решений на основе асимптотических методов;
- формулировка принципов устойчивости естественного ненапряженного состояния, на основе которого установлены ограничения на способы описания реологических свойств полимеров, решение ряд связанных задач термовязкоупругости в теории оболочек;
- исследования в области геометрических обратных задач теории упругости;
- математическое моделирование экологических систем.

Научная и педагогическая деятельность И.И. Воровича была по достоинству оценена научным сообществом. В 1970 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР по Отделению проблем машиностроения, механики и процессов управления; а в 1990 г. действительным членом АН СССР.

За разработку эколого-математической модели Азовского моря в 1983 г. коллективу, который возглавлял И.И.Ворович, была присуждена Государственная премия СССР.

За цикл работ по фундаментальным проблемам тонкостенных конструкций И.И.Ворович в составе группы исследователей был в 1998 г. удостоен Государственной премии РФ.

В течение 50 лет выдающийся ученый и талантливый педагог И. И. Ворович вел преподавательскую работу в Ростовском государственном университете. Большим авторитетом в России и за ее пределами пользуется созданная им научнопедагогическая школа ученых-механиков, среди которых около 50 докторов и более 160 кандидатов наук.

За боевые и трудовые заслуги он был награжден рядом орденов и медалей СССР и Российской Федерации, удостоен медалей академиков П. Л. Капицы и А. А. Благонравова.

Иосифа Израилевича нет с нами около 20 лет, но живет память о нем, она живет в сердцах учеников и ученых нашей страны, сердцах студентов мехмата; имя И.И.Воровича носит Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. Ростовчане гордятся человеком, который около 50 лет прожил в этом городе, сделав очень много для развития науки и образования; в 2017 году на аллее Звезд г. Ростова-на-Дону, состоящей из звездочек знаменитых и уважаемых горожан, зажглась звезда Иосифа Воровича.

Его творческое наследие продолжает служить следующим поколениям. Благодаря усилиям учеников, сотрудников кафедры теории упругости вышли в свет 2 тома монографии «Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд».

Память об Иосифе Израилевиче живет и на кафедре, которую он создал; каждый год 21 июня коллектив кафедры отмечает день рождения её основателя, молодые сотрудники и новые аспиранты внимательно слушают воспоминания учеников, знакомятся с эпизодами из его жизни.

И. И. Ворович оставил после себя не только огромное творческое наследие школу учеников и последователей, идеи, монографии, которые еще долго будут определять развитие научной мысли в области механики, но и сформировал некоторые нравственные принципы в науке, которые служат путеводной звездой для молодых поколений в сложном современном мире.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ ДЕЙСТВИИ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

### Абросимов Н.А., Елесин А.В., Новосельцева Н.А.

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Представлена методика численного исследования нелинейного нестационарного деформирования и потери устойчивости цилиндрических оболочек из композиционных материалов при комбинированном нагружении внешним давлением и осевым динамическим сжатием. Приведены результаты численного исследования влияния предварительного нагружения квазистатическим внешним давлением на процесс потери устойчивости стеклопластиковых цилиндрических оболочек различных структур армирования при последующем нагружении осевым динамическим сжатием с различными скоростями. Полученные результаты свидетельствуют о существенном влиянии структуры армирования и скорости осевого сжатия на формы потери устойчивости оболочки и в меньшей степени на величину критической нагрузки потери устойчивости.

Широкое использование композиционных материалов в различных областях современной техники делает актуальным исследование процессов деформирования и потери устойчивости композитных элементов конструкций, подверженных квазистатическим нагрузкам с последующим динамическим нагружением. Известные в этом направлении исследования посвящены, как правило, либо анализу нелинейного поведения и потери устойчивости цилиндрических оболочек, выполненных из традиционных изотропных материалов [1–4], либо потере устойчивости композитных цилиндрических оболочек при нестационарных воздействиях [5–7]. В то же время нелинейные пространственные задачи динамического деформирования и потери устойчивости предварительно нагруженных композитных цилиндрических оболочек исследованы явно недостаточно [8].

В докладе представлена методика численного исследования нелинейного нестационарного деформирования и потери устойчивости цилиндрических оболочек из композиционных материалов при комбинированном нагружении внешним давлением и осевым динамическим сжатием.

В рамках прикладной теории оболочек сформулирована разрешающая система уравнений и разработана численная методика, позволяющая на основе явной вариационно-разностной схемы решать как квазистатические, так и динамические задачи нелинейного неосесимметричного деформирования и потери устойчивости композитных цилиндрических оболочек. Кинематическая модель деформирования композитного материала основана на прикладной геометрически нелинейной теории оболочек [9]. Геометрические зависимости базируются на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости. Физические соотношения композитного слоя формулируются на основе обобщенного закона Гука для ортотропного материала с учетом гипотез прикладной теории оболочек. Определяющие соотношения в изотропной оболочке формулируются на основе дифференциальной теории пластичности с линейным упрочнением. Энергетически согласованная система уравнений движения прикладной теории оболочек выводится из условия стационарности функционала полной энергии оболочек выводится из условия стационарности функционала полной энергии оболочки [10]. Квазистатический режим нагружения моделируется заданием внешнего давления в виде линейно растущей функции с выходом на стационарное значение в течение трех периодов колебаний композитной цилиндрической оболочки по низшей форме. При этом осевое динамическое нагружение осуществляется через абсолютно жесткое кольцо. Критическая нагрузка потери устойчивости определяется по характерному излому на кривой зависимости максимального прогиба от амплитуды воздействия. Численный метод решения сформулированной задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме [10].

Проведена верификация разработанной методики путем сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными [11].

Ниже приведены результаты численного исследования влияния предварительного нагружения квазистатическим внешним давлением на процесс потери устойчивости стеклопластиковых цилиндрических оболочек различных структур армирования при последующем нагружении осевым динамическим сжатием с различными скоростями. Геометрические и физико-механические параметры материала оболочки были равны: R = 0.072 м, R/h = 112, L/R = 2.22,  $E_{11} = 200$  ГПа,  $E_{22} = E_{11}/30$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_{22}/2$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>.

Рисунок 1 иллюстрирует влияние предварительного квазистатического нагружения на характерные формы потери устойчивости оболочек. Для оболочек с армированием 90°, нагруженных только осевым динамическим сжатием, характерна форма потери устойчивости в виде сети кольцевых ромбовидных вмятин, а затем по мере увеличения внешнего квазистатического давления наблюдается уменьшение глубины вмятин в центральной зоне оболочки. Потеря устойчивости оболочек с армированием 60° и 45° характеризуется трансформацией деформированных конфигураций от форм с кольцевыми складками, число которых уменьшается по мере падения окружной жесткости, до форм, вытянутых вдоль образующей оболочки. Оболочки, армированные под углом 15°, теряют устойчивость по гофрообразной форме, причем по мере увеличения внешнего давления наблюдается уменьшение высоты гофров с последующим образованием вмятин расположенных между гофрами.

Влияние скорости осевого сжатия на процесс потери устойчивости оболочек армированных под углом 60° показано на рисунке 2. В диапазоне скоростей осевого сжатия  $F_1 = 10 \div 40$  ГПа/с по мере увеличения внешнего давления отмечается трансформация конфигурации потери устойчивости от форм в виде множественных кольцевых складок до форм вытянутых вдоль образующей оболочки. Для скорости осевого сжатия около  $F_1 = 80$  ГПа/с с увеличением величины внешнего давления наблюдается трансформация форм потери устойчивости от множественных кольцевых складок минимального диаметра в центральной части оболочки



 Армирование 15° относительно образующей

 a)
 6)
 в)

Рисунок 1 – Характерные формы потери устойчивости при скорости осевого сжатия  $F_1$ =40 ГПа/с для различных углов армирования и интенсивностей внешнего давления  $\bar{F}_3^-$ , которое в безразмерном виде определяется выражением  $\bar{F}_3^- = \frac{F_3^-}{E_{11}} \left(\frac{R}{h}\right)^2$ ,  $\bar{F}_3^-$ =0 (a),  $\bar{F}_3^-$ =0.6 (б) и  $\bar{F}_3^-$ =0.9 (в) соответственно

до форм с двумя кольцевыми складками на торцах оболочки и многочисленных кольцевых складок в средней части оболочки, усиленных «ребрами» жесткости, ориентированными вдоль образующей оболочки. Полученные результаты свидетельствуют о существенном влиянии структуры армирования и скорости осевого сжатия на формы потери устойчивости оболочки и в меньшей степени на величину критической нагрузки потери устойчивости.



Рисунок 2 – Характерные формы потери устойчивости при различных скоростях осевого сжатия для угла армирования 60° и интенсивностей внешнего давления:  $\bar{F}_3^- = 0$  (a),  $\bar{F}_3^- = 0.6$  (б) и  $\bar{F}_3^- = 0.9$  (в) соответственно

Разработка модели нелинейного деформирования выполнена при финансовой поддержке гранта правительства Российской Федерации (договор №14.У26.31.0031), численный анализ динамической потери устойчивости предварительно напряженных оболочек выполнен при финансировании гранта РФФИ (№ 18-08-01234).

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Маневич Л. И., Михайлов Г. В., Павленко И. Д., Прокопало Е. Ф. Исследование устойчивости оболочек при совместном действии статических и динамических нагрузок // Прикладная механика. 1977. Т. XIII. № 1. С. 27–32.

- [2] Баскаков В. Н., Костоглотов А. И., Швецова Л. А. Исследование динамической устойчивости гладких цилиндрических оболочек // Проблемы прочности. 1982. № 5. С. 31–33.
- [3] Бендюков В. В., Дерюшев В. В. Динамическая коротковолновая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек при локальном действии импульса внешнего давления // Проблемы прочности. 1995. № 4. С. 36–43.
- [4] Дубровин В. М., Бутина Т. А. Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей нагрузки // Мат. моделир. и числ. методы. 2015. № 6. С. 46–57.
- [5] Jansen E. L. Dynamic stability problems of anisotropic cylindrical shells via a simplified analysis // Nonlinear Dyn. 2005. V. 39. P. 349–367.
- [6] Bisagni C. Dynamic buckling of fiber composite shells under impulsive axial compression // Thin-Walled Struct. 2005. V. 43. P. 499–514.
- [7] Rahman T., Jansen E. L., Gurdal Z. Dynamic buckling analysis of composite cylindrical shells using a finite element based perturbation method // Nonlinear Dynamics. 2011.
   V. 66. № 5. P. 389–401.
- [8] Викторов И.В., Товстик П. Е. Некоторые задачи устойчивости анизотропных цилиндрических оболочек // Труды XIII Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». 2009. Т. І. С. 57–62.
- [9] Шаповалов Л. А. Об учете поперечного обжатия в уравнениях нелинейной динамики оболочек // Известия РАН МТТ. 1997. № 3. С. 156–168.
- [10] Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
- [11] Абросимов Н. А., Елесин А. В. Численный анализ динамического деформирования и потери устойчивости предварительно напряженных композитных цилиндрических оболочек // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79. № 4. С. 450–461.

Abrosimov N. A., Elesin A. V., Novoseltseva N. A. Numerical study of nonlinear deformation and loss of stability of cylindrical shells from composite materials under the combined action of quasistatic and dynamic loads. A technique for the numerical study of nonlinear non-stationary deformation and stability loss of cylindrical shells made of composite materials under combined loading by external pressure and axial dynamic compression is presented. The results of a numerical study of the effect of preloading by quasi-static external pressure on the process of stability loss of fiberglass cylindrical shells of various reinforcement structures during subsequent loading by axial dynamic compression at different speeds are presented. The results obtained indicate a significant effect of the reinforcement structure and the axial compression rate on the forms of shell stability loss and, to a lesser extent, on the critical load of stability loss.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГО-СПИНОВЫХ ВОЛН В СОСТАВНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СТРУКТУРЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

### Агаян К. Л.<sup>1</sup>, Атоян Л. А.<sup>1</sup>, Саакян С. Л.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики НАН Республики Армения, Ереван <sup>2</sup>Ереванский государственный университет

В данной работе рассматривается динамическая контактная задача распространения и дифракции сдвиговых упруго-спиновых плоских волн в составной конструкции, представляющей собой два примыкающих друг к другу ферромагнитных полупространства с полубесконечной трещиной на поверхности раздела.

Задача решается с использованием уравнений, учитывающих взаимосвязь спиновых (магнитных) и упругих возмущений с соответствующими граничными условиями. Получено определяющее функциональное уравнение поставленной дифракционной задачи. Из функционального уравнения для некоторых частных случаев получены явные выражения упруго-спиновых волновых полей.

**Введение.** В предлагаемой работе рассматривается динамическая стационарная контактная задача распространения и дифракции сдвиговых упруго-спиновых плоских волн в магнито-упорядоченной двухфазной конструкции, представленной в виде двух примыкающих друг к другу ферромагнитных полупространств с полубесконечной трещиной на поверхности раздела в предположении, что вне трещины имеет место полный контакт. При этом вся конструкция находится в постоянном внешнем магнитном поле.

Задача решается с использованием уравнений, учитывающих взаимосвязь спиновых (магнитных) и упругих возмущений с соответствующими граничными и контактными условиями [1–8]. Использованы упрощённые уравнения без учёта обменного взаимодействия, магнитной анизотропии, а также магнитного потенциала.

Получено определяющее уравнение поставленной задачи в виде функционального уравнения (задача типа Римана на действительной оси), правая часть которого является дельта-функцией Дирака. Рассмотрены частные случаи.

Постановка задачи. В выбранной декартовой системе координат 0xyz первое из полупространств заполняет область y > 0, а второе — область y < 0. Полупространства контактируют только по полуплоскости (x < 0; y = 0), а по другой полуплоскости (x > 0; y = 0) между ними акустический контакт, т. е. они разделены трещиной. Оси легкого намагничивания ферромагнитных кристаллов параллельны и направлены по оси 0z. Векторы объёмных намагниченностей насыщения двух полупространств  $\vec{M}_{0j} = \rho_j \vec{\mu}_{0j}$  (j = 1, 2) и вектор напряженности внешнего магнитного поля  $\vec{H}_0$  параллельны и направлены по оси 0z,  $\vec{\mu}_{0j}$  — массовая плотность намагниченности насыщения ферромагнетика,  $\rho_j$  — плотность. Уравнения, описывающие динамические процессы в структуре, представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{j} &= S_{j}^{2} \Delta w_{j} + f_{j} \mu_{0j} (\mu_{j,x} + \nu_{j,y}), \\ \dot{\mu}_{j} &= \omega_{M}^{(j)} (\hat{b}_{j} \nu_{j} + f_{j} \mu_{0j} w_{j,y}), \\ \dot{\nu}_{j} &= -\omega_{M}^{(j)} (\hat{b}_{j} \mu_{j} + f_{j} \mu_{0j} w_{j,x}), \end{aligned}$$
(1)

 $S_j$  — скорости сдвиговых упругих волн,  $f_j$  — коэффициенты магнитоупругой связи,  $\hat{b}_j = H_0/M_{0j}$  — величины, обратные магнитной восприимчивости,  $\omega_M^{(j)} = \gamma M_{0j}$ ,  $\gamma = 1, 8 \cdot 10^7 \cdot (3 \cdot c)^{-1}$  — гиромагнитное отношение,  $\mu_j$ ,  $\nu_j$  — компоненты вектора намагниченности  $\vec{\mu}_j(\mu_j, \nu_j)$ ,  $w_j$  — перемещение по Oz.

Полагаем, что в первой области (y > 0) из бесконечности распространяются заданные возбуждающие упруго-спиновые волны

$$(w_{\infty}^{(1)}, \mu_{\infty}^{(1)}, \nu_{\infty}^{(1)}) = (A_w, A_\mu, A_\nu) e^{i(p_1 x + q_1 y)} e^{-i\omega t},$$
(2)

где  $p_1 = k_1 \cos \beta$ ,  $q_1 = k_1 \sin \beta$  — компоненты волнового вектора по осям 0x и 0y,  $A_w$ ,  $A_\mu$ ,  $A_\nu$  — постоянные,  $\mu_\infty^{(1)}$ ,  $\nu_\infty^{(1)}$  — компоненты вектора намагниченности  $\bar{\mu}_\infty$ ,  $k_1$  — волновое число,  $\beta$  ( $0 < \beta < \pi/2$ ) — угол падения волн,  $\omega$  — круговая частота колебаний, t — время,  $w_\infty^{(1)}(x, y, t)$  — компонента упругого перемещения по оси Oz, соответствующая антиплоской деформации. Постоянные, входящие в (2) связаны соотношениями

$$A_{\mu} = \eta_1 A_w, \quad A_{\nu} = \delta_1 A_w,$$
  
$$\eta_1 = \frac{f_1 \mu_{01}(i\hat{b}_1 p_1 - \Omega_1 q_1)}{\Omega_1^2 - \hat{b}_1^2}, \quad \delta_1 = \frac{if_1 \mu_{01}(i\hat{b}_1 q_1 + \Omega_1 p_1)}{\Omega_1^2 - \hat{b}_1^2}, \quad \Omega_1 = \omega/\omega_M^{(1)}, \quad (3)$$

которые обеспечивают условия существования возбуждающих волн (2). Связь между  $\omega$  и  $k_1$  определяется дисперсионным уравнением

$$f_1^2 \mu_{01}^2 k_1^2 \hat{b}_1 - \left(\omega^2 - k_1^2 s_1^2\right) \left(\Omega_1^2 - \hat{b}_1\right) = 0.$$
(4)

Требуется определить полное распределение магнитоупругого волнового поля во всей рассматриваемой конструкции.

**Решение задачи и вывод определяющего уравнения.** Сформулируем задачу для амплитуд. Система уравнений, определяющая распределение магнитоупругого поля в рассматриваемой конструкции, при принятых выше допущениях, сводится к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений [1–3]:

$$-\omega^{2}w_{j}^{*}(x,y) = S_{j}^{2}\Delta w_{j}^{*} + f_{j}\mu_{0j}\left(\mu_{j,x}^{*} + \nu_{j,y}^{*}\right), -i\omega\mu_{j}^{*}(x,y) = \omega_{M}^{(j)}(\hat{b}_{j}\nu_{j}^{*} + f_{j}\mu_{0j}w_{j,y}^{*}),$$
(5)  
$$i\omega\nu_{j}^{*}(x,y) = \omega_{M}^{(j)}(\hat{b}_{j}\mu_{j}^{*} + f_{j}\mu_{0j}w_{j,x}^{*}), \quad j = 1, 2,$$

при граничных и контактных условиях:

$$\left[ G_1 w_{1,y}^* + f_1 \mu_{01} \nu_1^* \right] \Big|_{y=+0} = \left[ G_2 w_{2,y}^* + f_2 \mu_{02} \nu_2^* \right] \Big|_{y=-0} \right\}, \quad -\infty < x < 0$$
 (6)

$$\rho_1 \nu_1^*(x, +0) = \rho_2 \nu_2^*(x, -0) \} , \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

$$\left[G_1 w_{1,y}^* + f_1 \mu_{01} \nu_1^*\right]\Big|_{y=+0} = 0, \quad \left[G_2 w_{2,y}^* + f_2 \mu_{02} \nu_2^*\right]\Big|_{y=-0} = 0 \right\}, \qquad 0 < x < \infty$$
(8)

 $G_j$  — модуль сдвига. Общее решение системы (5) после комплексного преобразования Фурье сводится к следующим уравнениям:

$$\bar{W}_{j}''(\sigma, y) - (\sigma^{2} - K_{j}^{2})\bar{W}_{j} = 0; \quad \gamma_{j}^{2} = \sigma^{2} - K_{j}^{2}.$$
(9)

Здесь  $\bar{W}_2(\sigma, y)$  преобразование Фурье функции  $w_2^*(x, y)$ , а

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = \bar{w}_1^*(\sigma, y) + 2\pi W_\infty e^{-iq_1 y} \delta(\sigma + p_1),$$
(10)

где  $\delta(\sigma)$  — дельта-функция Дирака. Функции же  $\bar{M}_j$ ,  $\bar{N}_j$  выражаются через  $\bar{W}_j$  следующим образом:

$$\bar{M}_{j}(\sigma, y) = iA_{j}[\sigma\hat{b}_{j}\bar{W}_{j}(\sigma, y) + \Omega_{j}\bar{W}_{j}'(\sigma, y)],$$

$$\bar{N}_{j}(\sigma, y) = A_{j}[\sigma\Omega_{j}\bar{W}_{j}(\sigma, y) + \hat{b}_{j}\bar{W}_{j}'(\sigma, y)],$$
(11)

$$A_j = \frac{f_j \mu_{0j}}{\Omega_j^2 - \hat{b}_j^2}, \quad K_j^2 = \frac{\omega^2}{S_j^2 + S_{0j}^2}, \quad S_{0j}^2 = \frac{\hat{b}_j}{(f_j \mu_{0j})^2} \Omega_j^2 - \hat{b}_j^2.$$

Выберем ограниченные на бесконечности решения (9), представляющие собой уходящие волны в соответствующих областях

$$\bar{W}_j(\sigma, y) = C_j \exp((-1)^j \gamma_j y), \tag{12}$$

где  $C_j$  — постоянные. Для выбора соответствующих ветвей двухзначных функций  $\sqrt{\alpha^2 - K_1^2}$ , обеспечивающих условие уходящей волны, следует провести в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  соответствующие разрезы [9]. Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  введем функции:

$$\bar{w}_1^*(\sigma, +0) - \bar{w}_2^*(\sigma, -0) = 2\Phi^+(\sigma),$$

$$\left( G_j \frac{\partial \bar{w}_j^*}{\partial y} + f_j \mu_{0j} \bar{\nu}_j^* \right) \Big|_{y=\pm 0} = \bar{\Psi}^-(\sigma),$$

$$(13)$$

где  $\bar{\Phi}^+(\sigma)$ ,  $\bar{\Psi}^-(\sigma)$  — трансформанты Фурье неизвестных функций  $\Phi^+(x)$ ,  $\Psi^-(x)$ . При этом  $\Phi^+(x) = 0$  при x < 0, и  $\Psi^-(x) = 0$  при x > 0. Воспользовавшись соотношениями (10)–(13), с учетом граничных и контактных условий (6)–(8), приходим к функциональному уравнению:

$$\bar{\Psi}^{-}(\sigma) + 2\bar{R}(\sigma)\bar{\Phi}^{+}(\sigma) = 2\pi\bar{R}(-p_{1})\left[1 + \frac{W_{\infty}(\delta_{1} - iq_{1})}{\bar{A}_{1}\sqrt{p_{1}^{2} - K_{1}^{2}} + \bar{B}_{1}p_{1}}\right], \ -\infty < \sigma < \infty$$
(14)

Распространение волн в ферромагнитной структуре с трещиной

$$\bar{R}(\sigma) = \frac{G_1(\bar{A}_1\gamma_1 - \bar{B}_1\sigma)G_2(\bar{A}_2\gamma_2 + \bar{B}_2\sigma)}{G_2(\bar{A}_2\gamma_2 + \bar{B}_2\sigma) + G_1(\bar{A}_1\gamma_1 - \bar{B}_1\sigma)};$$

$$\bar{A}_j = 1 + \frac{(f_j\mu_{0j})^2}{\Omega_j^2 - \hat{b}_j^2}; \quad \bar{B}_j = \frac{f_j\mu_{0j}}{G_j}\frac{\Omega_j}{\Omega_j^2 - \hat{b}_j^2}.$$
(15)

Функциональное уравнение (14) представляет собой краевую задачу типа Римана на действительной оси, которую можно решить методом Винера — Хопфа. Постоянные  $C_j$ , входящие в представление (14) и (15), находятся в виде:

$$C_1 = \frac{-\bar{\Psi}^-(\sigma) + 2\pi G_1 W_\infty(\delta_1 - iq_1)\delta(\sigma + p_1)}{G_1(\bar{A}_1\gamma_1 - B_1\sigma)} , \quad C_2 = \frac{\bar{\Psi}^-(\sigma)}{G_2(\bar{A}_2\gamma_2 + B_2\sigma)}.$$
 (16)

Ввиду сложностей, связанных с факторизацией функции  $\bar{R}(\sigma)$ , полное решение пока не построено. В частном случае, когда полупространства находятся в условиях полного контакта, т.е. трещина отсутствует, это означает, что  $\Phi^+ = 0$ . Тогда решения задачи в обеих областях представляются следующим образом:

$$w_1^*(x,y) = W_\infty e^{i(p_1 x - q_1 y)} + W_\infty \bar{C}_1 e^{i\sqrt{p_1^2 - K_2^2}y + ip_1 x}; \quad y > 0$$
(17)

$$w_2^*(x,y) = W_\infty(1+\bar{C}_1)e^{-i\sqrt{p_1^2-\Omega_{02}^2}y+ip_1x}; \quad y < 0$$
(18)

$$\bar{C}_1 = \frac{G_{12}(\delta_1 - iq_1) - (A_2\gamma_2(-p_1) - B_2p_1)}{G_{12}(\bar{A}_1\gamma_1(-p_1) + \bar{B}_1p_1) + (\bar{A}_2\gamma_2(-p_1) - \bar{B}_2(p_1))}, \quad G_{12} = \frac{G_1}{G_2}.$$
 (19)

В другом частном случае, когда полупространства разделены трещиной (акустический контакт) в (17) следует подставить  $\bar{\Psi}^{-}(\sigma) = 0$ . Тогда получим:

$$w_1^*(x,y) = W_{\infty}e^{i(p_1x-q_1y)} + 2\pi W_{\infty}\frac{\delta_1 - iq_1}{\bar{A}_1\sqrt{p_1^2 - K_1^2} - \bar{B}_1p_1} e^{-\sqrt{p_1^2 - K_1^2}y + ip_1x},$$

$$w_2^*(x,y) = 0.$$
(20)

Подставляя решения (17)–(20) в (13) и (15), получим распределения упругоспиновых волновых полей  $\mu_j^*(x, y)$  и  $\nu_j^*(x, y)$  в соответствующих областях. При отсутствии магнитных взаимодействий решения (17)–(20) дают распределения соответствующих упругих полей.

Заключение. Получено определяющее функциональное уравнение поставленной дифракционной задачи. Из функционального уравнения для некоторых частных случаев получены явные выражения упруго-спиновых волновых полей, представляющие самостоятельный интерес.

#### ЛИТЕРАТУРА

- A. I. Akhiezer, V. G. Baryakhtar S. V. and Peletminskii. Spin Waves. North-Holland, Amsterdam, 1968. 368 p.
- [2] Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
- [3] *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. М.:Наука, 1973. 591 с.
- [4] Maugin G. A., Hakmi A. Magnetoelastic surface waves in elastic ferromagnets // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 77. P. 1010–1026.
- [5] Hasanyan D. J., Batra R. C. Antiplane shear waves in two contacting ferromagnetic half spaces // J.Elast. 2011. V. 103. P. 189–203.
- [6] Агаян К. Л., Атоян Л. А., Терзян С. А. Распространение упруго-спиновых волн в магнитоупорядоченных двухслойных структурах // Изв. НАН РА. Механика. 2019. Т. 72. № 1. С. 3–9.
- [7] Багдасарян Г. Е. Существование и характер распространения пространственных спиновых поверхностных волн в ферромагнетиках // Изв. АН РА. Физика. 2009. № 6. С. 405–416.
- [8] Белубекян М. В. О поверхностных волнах Лява в случае композиционного слоя. Сбор. Статей «Актуальные проблемы неоднородной механики». Ереван. 1991. С. 25–29.
- [9] Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Иностранная литература, 1962. 279 с.

Agayan K. L., Atoyan L. A., Sahakyan S. L. Distribution of elastic-spin waves in a composite ferromagnetic structure with a semi-infinite crack.

In this paper, we consider the dynamic, contact problem of the propagation and diffraction of shear elastic-spin plane waves in a composite structure, which is two adjacent ferromagnetic half-spaces with a semi-infinite crack at the interface.

The problem is solved using equations that take into account the relationship of spin (magnetic) and elastic perturbations with the corresponding boundary and contact conditions. The determining functional equation of the stated diffraction problem is obtained. For some special cases, explicit expressions of elastic-spin wave fields are obtained from the functional equation.

# ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ СДВИГА НА СИСТЕМЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТРЕЩИН, ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### Агаян К. Л.<sup>1</sup>, Джилавян С. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики НАН Армении, Ереван <sup>2</sup>Ереванский государственный университет

Пьезоэлектрическое пространство находится в условиях антиплоской деформации. Решение поставленной задачи дифракции электроупругой плоской волны сдвига на параллельных периодически расположенных полубесконечных трещинах строится при помощи ступенчатых функций. Принимаются дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении [1–3]. Задача определения дифрагированного электроупругого сдвигового волнового поля, в отличие от известных традиционных методов решения подобных задач, сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси. Используются методы интегрального преобразования Фурье, теории функции комплексного переменного и метод факторизации.

Рассматривается волновой процесс в пьезоэлектрической среде — пьезоэлектрике класса 6mm гексагональной симметрии при дифракции волн сдвига. Среда, отнесеннная к декартовой системе координат Oxyz, имеет параллельные трещины в плоскостях y = an при x < 0, где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, a > 0$ , главная ось пьезокристалла совпадает с осью Oz. На периодическую систему полубесконечных трещин с периодом a под углом  $\theta_0$  к плоскостям трещин падает распространяющаяся из бесконечности в полупространстве x > 0 плоская сдвиговая электроупругая волна

$$U_z(x,y,t) = W_\infty(x,y)e^{-i\omega t}, \quad \Phi_0(x,y,t) = \Phi_\infty(x,y)e^{-i\omega t}, \tag{1}$$

 $W_{\infty}(x,y), \Phi_{\infty}(x,y)$  — функции амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала падающей сдвиговой волны

$$W_{\infty}(x,y) = e^{-ikx\cos\vartheta_0 - iky\sin\vartheta_0},$$
  

$$\varepsilon_{11}\Phi_{\infty}(x,y) = e_{15}W_{\infty}(x,y).$$

Здесь  $\omega = kc$  — частота колебаний, t — время, k — волновое число,  $c = \sqrt{c_{44}(1+\chi)/\rho}$  — скорость распространения волны сдвига,  $\chi = e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$  — коэффициент электромеханической связи пьезосреды,  $c_{44}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $e_{15}$  — упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные среды,  $\rho$  — плотность.

Периодичность расположения полубесконечных трещин приводит к существенной перестройке волнового поля. Пьезоэлектрическое пространство находится в условиях антиплоской деформации (продольный сдвиг), вектор перемещения точек среды  $\vec{u}(0, 0, u_z(x, y, t))$ . Для всех составляющих электроупругого поля среды принимается гармоническая зависимость от времени

$$u_z(x, y, t) = w(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \Phi_t = \Phi(x, y)e^{-i\omega t}$$

Наличие полубесконечных трещин — концентраторов напряжений и свободных от напряжений поверхностей — в среде с пьезоэлектрическим свойством является причиной некоторых новых особых явлений при дифракции плоских волн сдвига. Задача определения дифрагированного электроупругого волнового поля сводится к решению уравнений относительно амплитуд перемещения и электрического потенциала w(x, y),  $\Phi(x, y)$  [1]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w = 0, \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 e_{15}w = 0.$$
(3)

Вводятся электромеханические условия на берегах полубесконечных трещин. Для амплитуды напряжения имеем условия [1, 3]

$$\sigma_{yz}(x,y) = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = an, \quad x < 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4)$$

а для амплитуд электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции при  $-\infty < x < \infty$  условия

$$\Phi(x,y)|_{y=an+0} = \Phi(x,y)|_{y=an-0}, \quad D_2(x,y)|_{y=an+0} = D_2(x,y)|_{y=an-0}, \quad (5)$$

где  $D_2(x,y) = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ .

Решение представляется в виде уходящей волны

$$u(x, y) = w(x, y) - W_{\infty}(x, y),$$
  
$$\varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_{\infty}(x, y),$$

и функци<br/>и $u(x,y),\,\varphi(x,y)$ определяются из следующих уравнений

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$
  

$$\varepsilon_{11} \Delta \varphi - e_{15} \Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$
(6)

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x, относительно трансформант искомых функций получим

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2)\bar{u} = 0, \quad \frac{d^2\bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2\bar{\varphi} + k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\,\bar{u} = 0.$$
(7)

Представим функцию  $\bar{u}(\sigma, y)$  в виде

$$\bar{u}(\sigma, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\theta(y - na)\bar{u}(\sigma, y) - \theta(y - (n+1)a)\bar{u}(\sigma, y)),$$

где  $\theta(z)$  — функция Хевисайда, т. е. решение представляется ступенчатыми функциями. Получим дифференциальное уравнение для определения функции  $\bar{u}(\sigma, y)$ , соответствующее уравнению (7),

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2)\bar{u} = \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta'(y - an)\bar{\psi}_n^-(\sigma),\tag{8}$$

где  $\delta'(y)$  производная функции Дирака по аргументу.

Функция  $\bar{\psi}_n(\sigma) = \bar{u}(\sigma, an + 0) - \bar{u}(\sigma, an - 0), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  характеризует разницу значений перемещений точек на берегах трещин

$$\psi_n^-(x) = \psi_n(x)\theta(-x).$$

Решение уравнения (8) представляется в виде

$$\bar{u}(\sigma, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y - an) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}|y - an|} \cdot \bar{\psi}_n^-(\sigma).$$
(9)

Выполняя условия излучения, примем  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}.$ Для функции  $\bar{\varphi}(\sigma, y)$  имеем

$$\bar{\varphi}(\sigma, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\bar{u}(\sigma, y) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(y - an)e^{-|\sigma||y - an|} \cdot \bar{\psi}_n^-(\sigma)$$

Известно, что из-за периодической структуры рассматриваемой области и вида падающей сдвиговой волны, имеет место следующее соотношение

$$\bar{\psi}_n^-(\sigma) = e^{-ikan\sin\theta_0} \bar{\psi}_0^-(\sigma), \tag{10}$$

где  $\bar{\psi}_0^-(\sigma) = \bar{u}(\sigma, +0) - \bar{u}(\sigma, -0).$ 

Введем новую функцию для представления напряжения при y = 0

$$q_0^+(x) = q_0(x)\theta(x), \quad q_0^+(x) = \sigma_{yz}(x,0).$$

Формулы для функций  $\bar{\varphi}(\sigma, y), \, \bar{q}_0^+(\sigma)$  имеют вид

$$\bar{\varphi}(\sigma, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}(\sigma, y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\bar{\psi}_0^-(\sigma)}{2} F(\sigma, y), \quad y \in (0, a),$$
$$\bar{q}_0^+(\sigma) = c_{44} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - 2\pi i f \delta(\sigma - k \cos \theta_0), \quad y = 0,$$

а для функции амплитуды напряжения —

$$\sigma_{yz}(x,y) = c_{44} \frac{\partial u}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i f e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0}.$$

Принимается во внимание, что

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha a n} \cos(akn \sin \theta_0) = \frac{\operatorname{sh} \alpha a}{\operatorname{ch} \alpha a - \cos(ak \sin \theta_0)},$$
$$F(\sigma, y) = \frac{\operatorname{ch} \sigma y \cdot e^{-ika \sin \theta_0} - \operatorname{ch} \sigma (y - a)}{\operatorname{ch} \sigma a - \cos(ak \sin \theta_0)},$$
$$f = kc_{44}(1 + \chi) \sin \theta_0,$$

$$u(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \bar{\psi}_0^-(\sigma) \cdot F(\gamma, y) d\sigma,$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \cdot \bar{\psi}_0^-(\sigma) \cdot (F(\sigma, y) - F(\gamma, y)) d\sigma,$$
(11)

задача сводится к определению функций  $\bar{\psi}_0^-(\sigma), \ \bar{q}_0^+(\sigma)$  и построению функции  $\bar{u}(\sigma, y)$  в слое  $y \in (0, a)$ , которая имеет вид

$$\bar{u}(\sigma, y) = -\frac{\bar{\psi}_0^-(\sigma)}{2} \cdot F(\gamma, y).$$

Функциональное уравнение относительно функций  $\bar{q}_0^+(\sigma)$  и  $\bar{\psi}_0^-(\sigma)$ , т.е. трансформант функций характеризующих напряжение и разницу перемещений на плоскости y = 0, имеет вид

$$\bar{q}_0^+(\sigma) + \frac{c_{44}}{2}\sqrt{\sigma^2 - k^2}K(\sigma)\bar{\psi}_0^-(\sigma) = -2\pi i f\delta(\sigma - k\cos\theta_0)$$

Таким образом получили краевую задачу типа Римана на действительной оси [4–6], где

$$K(\sigma) = \frac{(1+\chi) \sin a\gamma}{\cosh a\gamma - \cos(ak\sin\theta_0)} - \frac{\sigma}{\gamma} \frac{\chi \sin a\sigma}{\cosh a\sigma - \cos(ak\sin\theta_0)}$$

Функция  $K(\sigma)$  имеет только простые нули и полюса  $(ak \neq \pi n)$  и  $K(\sigma) \rightarrow 1$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Представим  $K(\sigma) = K^+(\sigma) \cdot K^-(\sigma)$ , где функции  $K^{\pm}(\alpha)$  регулярны и не имеют нулей при  $\operatorname{Im} \alpha > 0$  и  $\operatorname{Im} \alpha < 0$ ,  $\alpha = \sigma + i\tau$ , соответственно.  $K^{\pm}(\alpha) \rightarrow 1$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , в своих областях регулярности [4, 6]. Уравнение  $K(\sigma) = 0$  имеет конечное число действительных корней и бесконечное множество чисто мнимых.

$$K^{\pm}(\sigma) = \exp \Lambda^{\pm}(\sigma), \quad \Lambda^{-}(\sigma) = \Lambda^{+}(-\sigma),$$
$$\Lambda^{+}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln K(s)}{s - \sigma - i0} \, ds \,.$$

При контурном интегрировании имеется ввиду, что

$$i\pi\delta(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+i0} ,$$
  
$$2\pi i\delta(\sigma - k\cos\theta_0) = \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0}$$

Решение функционального уравнения представляется в виде

$$\bar{\psi}_{0}^{-}(\sigma) = -\frac{2(1+\chi)\sqrt{2k\sin\theta_{0}/2}}{K^{+}(k\cos\theta_{0})\sqrt{\sigma-k}K^{-}(\sigma)\cdot(\sigma-k\cos\theta_{0}-i0)},$$

$$\bar{q}_{0}^{+}(\sigma) = \frac{c_{44}(1+\chi)\sqrt{2k\sin(\theta_{0}/2)}\sqrt{\sigma+k}K^{+}(\sigma)}{K^{+}(k\cos\theta_{0})\cdot(\sigma-k\cos\theta_{0}+i0)}.$$
(12)

Определены компоненты дифрагированного сдвигового волнового поля в пьезоэлектрическом пространстве с периодически расположенными полубесконечными трещинами (11) при дифракции распространяющейся из бесконечности плоской электроупругой волны сдвига.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
- [2] *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323 с.
- [3] Григорян Э. Х., Джилавян С. А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве // Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т. 58. № 1. С. 38–50.
- [4] Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно–однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости // Уч. Зап. ЕГУ. 1979. № 3. С. 29–34.
- [5] Агаян К. Л., Григорян Э. Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью // Изв. НАН РА. Механика. 2010. Т. 63. № 1. С. 50–69.
- [6] Григорян Э. Х., Агаян К. Л., Джилавян С. А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве // Изв. НАН РА. Механика. 2014. Т. 67. № 4. С. 10–20.

Aghayan K. L., Jilavyan S. H. Diffraction of a plane electro-elastic shear wave on the system of semi-infinite cracks periodically located in a piezoelectric space. The piezoelectric space is in conditions of anti-plane deformation. The solution of the problem of diffraction of an electro-elastic plane shear wave on parallel, periodically located semi-infinite cracks is constructed by step functions. The differential equations of the dynamic theory of elasticity and the equations of electrodynamics in the quasi-static approximation are accepted [1–3]. In contrast to the well-known traditional methods for solving such problems, the problem of the determination of diffracted electro-elastic shear wave field, is reduced to solving a functional equation of the Riemann type on the real axis. The methods of the integral Fourier transform, the theory of functions of a complex variable, and the factorization method are used.

# ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

### Акопян В. Н., Даштоян Л. Л. Институт механики НАН Армении, Ереван

Динамическим контактным и смешанным задачам теории упругости посвящено много работ. Многие основные результаты по динамическим контактным и смешанным задачам теории упругости приведены в [1–4]. Укажем также на работы [5, 6], которые тесно связаны с настоящей работой.

Здесь рассмотрено плоское деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащей межфазные абсолютно жёсткие тонкие включения. Считается, что плоскость деформируется под воздействием периодически изменяющихся по времени сосредоточенных нагрузок, приложенных к включениям. Сначала построены разрывные решения уравнений движений плоской теории упругости для составной плоскости, на основе которых получены определяющие сингулярные интегральные уравнения поставленной задачи. Решения определяющих уравнений построены методом механических квадратур.

#### 1. Постановка задачи и построение разрывных решений.

Пусть составная упругая плоскость из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ  $\mu_1$ ,  $\lambda_1$  и  $\mu_2$ ,  $\lambda_2$  соответственно, отнесённая к декартовой системе координат Oxy, ось Ox которой направлена по линии стыка полуплоскостей, соответственно по линиям  $L = \bigcup_{j=1}^{N} (a_j, b_j)$ , состоящих из конечного числа непересекающихся конечных интервалов, содержит системы межфазных абсолютно жёстких тонких включений. Будем считать, что составная плоскость деформируется под воздействием периодически изменяющихся по времени сосредоточенных нагрузок  $P_j e^{i\omega t}$  (j = 1, ..., N) с частотой  $\omega$ , приложенных к включениям в точках  $x_0^{(j)}$  и составляющих угол  $\alpha_j$  с осью Ox. Снабдив характерные величины для разнородных полуплоскостей соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0,t) = \sigma_y^{(2)}(x,0,t) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0,t) = \tau_{xy}^{(2)}(x,0,t) \\ u_1(x,0,t) = u_2(x,0,t) \\ v_1(x,0,t) = v_2(x,0,t) \end{cases} (x \notin L)$$
(1a)

$$\begin{cases} u_j(x,0,t) = u_{jm}e^{i\omega t} & (a_m < x < b_m; \ j = 1,2; \ m = 1,...,N) \\ v_j(x,0,t) = (v_{jm} + \delta_{jm}x)e^{i\omega t} & (a_m < x < b_m; \ j = 1,2; \ m = 1,...,N) \end{cases}$$
(1b)

где  $u_j(x, y, t)$  и  $v_j(x, y, t)$  (j = 1, 2) — горизонтальные и вертикальные смещения верхней и нижней полуплоскостей соответственно, удовлетворяющие уравнениям движения, а  $\sigma_y^{(j)}(x, y, t)$  и  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y, t)$  — компоненты напряжения в этих полуплоскостях, связанные со смещениями известными формулами,  $u_{jm}$  и  $v_{jm}$  (m = 1, ..., N) постоянные, определяющие жёсткие смещения включений по направлениям осей координат Ox и Oy соответственно, а  $\delta_{jm}$  (m = 1, ..., N) — постоянные, определяющие угол поворота жёстких включений. Чтобы построить решение граничной задачи (1) сначала по формулам  $f(x, y, t) = f(x, y) e^{i\omega t}$  перейдём к амплитудам искомых функций и введем в рассмотрение амплитуды неизвестных функций разности безразмерных скачков напряжений на сторонах включений  $\sigma(x), \tau(x)$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_y^{(1)}(x,0) - \sigma_y^{(2)}(x,0) \end{bmatrix} / \mu_1 = \sigma(x) \quad (x \in L), \\ \begin{bmatrix} \tau_{xy}^{(1)}(x,0) - \tau_{xy}^{(2)}(x,0) \end{bmatrix} / \mu_1 = \tau(x) \quad (x \in L).$$
 (2)

Далее, решим вспомогательную задачу, подчиненную условиям (1a) и (2), и определим амплитуды компонент смещений на линии стыка полуплоскостей y = 0. Для этого решения уравнений Лямэ для амплитуд смещений представим в виде следующих интегралов Фурье:

$$u_{j}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ k\nu_{*}^{(j)}A_{j}(k) e^{(-1)^{j}\chi_{1}^{(j)}y} + (-1)^{j+1}\frac{\chi_{2}^{(j)}}{k}B_{j}(k) e^{(-1)^{j}\chi_{2}^{(j)}y} \right] i \ e^{-ikx}dk;$$

$$v_{j}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (-1)^{j+1}\nu_{*}^{(j)}\chi_{1}^{(j)}A_{j}(k) e^{(-1)^{j}\chi_{1}^{(j)}y} + B_{j}(k) e^{(-1)^{j}\chi_{2}^{(j)}y} \right] \ e^{-ikx}dk.$$
(3)

Тогда компоненты амплитуд напряжений представляются формулами:

$$\sigma_{y}^{(j)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \lambda_{j} - 2\mu_{j}\nu_{*}^{(j)} \left(\chi_{1}^{(j)}\right)^{2} \right] A_{j}e^{(-1)^{j}\chi_{1}^{(j)}y} + \left. + (-1)^{j}2\mu_{j}\chi_{2}^{(j)}B_{j}e^{(-1)^{j}\chi_{2}^{(j)}y} \right\} e^{-ikx}dk;$$

$$\tau_{xy}^{(j)}(x,y) = -\frac{i\mu_{j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2(-1)^{j+1}k\nu_{*}^{(j)}\chi_{1}^{(j)}A_{j}e^{(-1)^{j}\chi_{1}^{(j)}y} + \left[ k + \left(\chi_{2}^{(j)}\right)^{2}/k \right] B_{j}e^{(-1)^{j}\chi_{2}^{(j)}y} \right\} e^{-ikx}dk;$$

$$(4)$$

где  $\chi_i^{(j)} = \sqrt{k^2 - \left(\omega/c_i^{(j)}\right)^2}; \ \nu_*^{(j)} = \left(c_1^{(j)}/\omega\right)^2; \ c_1^{(j)} = \sqrt{(\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j}; \ c_2^{(j)} = \sqrt{\mu_j/\rho_j}.$ 

При этом выбраны те однозначные ветви функций  $\chi_i^{(j)}(k)$  (i, j = 1, 2), которые на бесконечности ведут себя как |k| [7]. Используя приведённые соотношения для амплитуд смещений и напряжений, удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и определим неизвестные коэффициенты  $A_j$  и  $B_j$  (j = 1, 2) через трансформанты Фурье неизвестных амплитуд функций скачков напряжений. Затем, используя полученные значения коэффициентов  $A_j$ ,  $B_j$  (j = 1, 2), напишем

разрывные решения уравнений движений плоской теории упругости для составной плоскости, выразив напряжения и смещения при помощи неизвестных амплитуд функций скачков. Приведём выражения компонент амплитуд смещений на линии стыка полуплоскостей y = 0, которые нам пригодятся в дальнейшем:

$$u'_{2}(x,0) = -l_{5}\sigma(x) - \int_{L} K_{11}(s-x)\sigma(s) ds - \frac{l_{6}}{\pi} \int_{L} \frac{\tau(s) ds}{s-x} - \int_{L} K_{12}(s-x)\tau(s) ds;$$

$$v'_{2}(x,0) = -\frac{l_{6}}{\pi} \int_{L} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} - \int_{L} K_{21}(s-x)\sigma(s) ds + l_{5}\tau(x) + \int_{L} K_{22}(s-x)\tau(s) ds;$$
(6)

 $u_1(x,0) = u_2(x,0) + u(x);$   $v_1(x,0) = v_2(x,0) + v(x).$ 

Здесь введены обозначения:

$$\begin{split} K_{mn}\left(x\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{m,n}\left(k\right)}{\Delta\left(k\right)} e^{-ikx} \, dk \; ; \; Q_{1,1}\left(k\right) = Q_{2,2}\left(k\right) = g_{5} - \Delta l_{5}; \\ Q_{1,2}\left(k\right) &= -i\left(g_{6,2} - \Delta l_{6}sgn\left(k\right)\right); \; Q_{2,1}\left(k\right) = -i\left(g_{6,1} - \Delta l_{6}sgn\left(k\right)\right); \\ \Delta &= \left(\mu^{2}R_{0,1}R_{2,2} + R_{0,2}R_{2,1} - \mu\left(2R_{1,1}R_{1,2} + \eta_{1}\eta_{2}\left(\alpha_{1,2}\alpha_{2,1} + \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\right)/4\right)\right); \\ R_{m,n} &= \left(1 - \eta_{n}/2\right)^{m} - \alpha_{1,n}\alpha_{2,n}; \; g_{1,m} = R_{1,1}R_{1,2} + \eta_{1}\eta_{2}\alpha_{1,m}\alpha_{2,3-m}/4 - \mu R_{2,2}R_{0,1}; \\ g_{5} &= \left(R_{0,2}R_{1,1} - \mu R_{0,1}R_{1,2}\right); \; g_{6,m} = \left(\eta_{1}R_{0,2}\alpha_{m,1} + \eta_{2}\mu R_{0,1}\alpha_{m,2}\right)/2; \\ d_{m} &= \left(-1\right)^{m}\left(1 + \mu\right) + \theta_{i}\left(1 - \mu\right); \; l_{5} = \left(\theta_{1}\left(1 + \theta_{2}\right) - \mu\theta_{2}\left(1 + \theta_{1}\right)\right)/d_{1}d_{2}; \\ l_{6} &= \left(\left(1 + \theta_{2}\right) + \mu\left(1 + \theta_{1}\right)\right)/d_{1}d_{2}; \; \mu = \mu_{2}/\mu_{1}; \; \theta_{m} = \left(c_{2}^{(m)}/c_{1}^{(m)}\right)^{2}; \\ \eta_{n} &= \left(\omega/k c_{2}^{(n)}\right)^{2}; \; \chi_{m}^{(n)} = |k| \; \alpha_{m,n}; \; \alpha_{1,n} = \sqrt{1 - \theta_{n}\eta_{n}}; \; \alpha_{2,n} = \sqrt{1 - \eta_{n}}; \end{split}$$

Отметим, что как и в работе [6], в случае, когда  $\Delta(k)$  не имеет действительных корней, ядра  $K_{m,n}(x)$  регулярные функции от x. В случае же когда  $\Delta(k)$ имеет действительные корни, несобственные интегралы Фурье, при помощи которых представлены эти функции, нужно понимать в обобщённом смысле.

Система определяющих уравнений и ее решение в случае одного включения. Используя полученные соотношения (5)–(6) и удовлетворив условиям (1b), первоначально дифференцируя их по x, придём к системе определяющих сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных амплитуд функций скачков напряжений. В частном случае, когда на интервале имеется только одно межфазное включение, получим следующую систему определяющих уравнений:

$$\begin{cases} l_{5}\sigma(x) + \int_{-a}^{a} K_{11}(s-x)\sigma(s) ds + \frac{l_{6}}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^{a} K_{12}(s-x)\tau(s) ds = 0\\ l_{5}\tau(x) - \frac{l_{6}}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\sigma(s) ds}{s-x} - \int_{-a}^{a} K_{21}(s-x)\sigma(s) ds + \int_{-a}^{a} K_{22}(s-x)\tau(s) ds = \delta_{1} \end{cases}$$
(7)

Систему (7) нужно рассматривать совместно с уравнениями движения жёсткого включения, которые можно записать в следующем виде:

$$\int_{-a}^{a} \sigma(x) \, dx = \frac{P_1 \cos \alpha}{\mu_1}; \quad \int_{-a}^{a} \tau(x) \, dx = \frac{P_1 \sin \alpha}{\mu_1}; \quad \int_{-a}^{a} x \sigma(x) \, dx = \frac{x_0^{(1)} P_1 \cos \alpha}{\mu_1}; \quad (8)$$

Введя комплексные комбинации скачков напряжений, приведём систему (7) к каноническому виду. Затем, при помощи замены переменных  $\{s, x\} = a \{\xi, \eta\}$ , напишем её на интервале (-1, 1) и, обозначив  $\varphi_j(\eta) = \sigma (a\eta) + (-1)^{j+1}i\tau (a\eta)$  (j = 1, 2),  $\delta_* = \delta_1/l_5 q = l_6/l_5$ ,  $P_1^* = P_1/a\mu_1$ ,  $x_0^* = x_0^{(1)}/a$  придём к следующей системе определяющих СИУ:

$$\varphi_{j}(\eta) + \frac{(-1)^{j}q}{i\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_{j}(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \sum_{n=1}^{2} \int_{-1}^{1} K_{jn}^{*}(\xi - \eta) \varphi_{n}(\xi) d\xi = (-1)^{j+1} i\delta_{*}, \quad (9)$$

где  $(|\eta| < 1; j = 1, 2)$ . При этом уравнения (8) примут вид:

$$\int_{-1}^{1} \varphi_j(\xi) d\xi = P_1^* e^{(-1)^{j+1} i\alpha}; \quad \int_{-1}^{1} \xi \left[\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)\right] d\xi = 2x_0^* P_1^* \cos \alpha \quad (j = 1, 2).$$
(10)

Здесь ядра  $K_{jn}^{*}(t)$ -линейные комбинации функций  $aK_{jn}(at)$ .

Установлено, что искомые функции в концевых точках интервала интегрирования имеют корневую особенность с осцилляцией и их можно представить в виде:

$$\varphi_{j}(\eta) = \frac{\varphi_{j}^{*}(\eta)}{\left(1+\eta\right)^{1/2+i(-1)^{j}\beta}\left(1-\eta\right)^{1/2-i(-1)^{j}\beta}}, \quad \left(\beta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\varkappa_{2}\left(\mu_{1}+\varkappa_{1}\mu_{2}\right)}{\varkappa_{1}\left(\mu_{2}+\varkappa_{2}\mu_{1}\right)}\right), \quad (11)$$

где  $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$  — постоянные Мусхелишвили,  $\varphi_j^*(\eta)$  — непрерывные функции, ограниченные вплоть до концов интервала [-1, 1]. Подставляя значения функций  $\varphi_j(\eta)$  в (10), (11) по стандартной процедуре [8], придём к системе алгебраических уравнений относительно значений  $\delta_*$  и  $\varphi_j^*(\xi_i)$  ( $j = 1, 2; i = \overline{1, n}$ ), где — корни многочлена Якоби . После определения нетрудно при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа восстановить функции  $\varphi_j^*(\eta)$  (-1 <  $\eta$  < 1) и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в двухкомпонентной плоскости.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 18T-2C290.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 207. № 2. С. 324–327.
- [2] Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
- [3] Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрацииупругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
- [4] Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. № 3. С. 500–507.
- [5] Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading // Proceedings of the Twelfth International Conference on Composites or Nano Engineering, ICCE-12 August 1-6, 2005. Spain.
- [6] Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами // Известия НАН РА. Механика. 2019. Т. 72. № 2. С. 6–23.
- [7] Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Иностранная литература, 1962. 279 с.
- [8] Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью // Известия НАН РА. Механика. 2000. Т. 53. № 3. С. 12–19.

Hakobyan V. N., Dashtoyan L. L. Plane stress state of an elastic compound plane with interfacial inclusions under the influence of dynamic loads. This paper considers the plane stress state of piecewise-homogeneous elastic planes from two heterogeneous half-planes with interfacial absolutely rigid thin inclusions. It is assumed that the plane is deformed under the action of a periodically changing load. In the beginning, discontinuous solutions are constructed to obtain the singular integral equations of governing system of the stated problem. Solutions of the governing equations are constructed by the method of mechanical quadrature. The numerical analysis is conducted in the case when a piecewise-homogeneous plane contains only one interfacial inclusion.

## ВЛИЯНИЕ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОКРУГ ВНУТРЕННЕГО ЖЕСТКОГО ТОНКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

#### Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Саакян А.В.

Институт механики НАН Армении, Ереван

Рассматривается плоское деформированное состояние упругой полуплоскости, на некоторой глубине от границы которой имеется абсолютно жесткое тонкое включение конечной длины. Полагается, что включение расположено параллельно границе, а полуплоскость деформируется под воздействием колеблющегося в вертикальном направлении жесткого штампа. Считается, что между штампом и полуплоскостью имеет место гладкий контакт. Решение определяющей системы сингулярных интегральных уравнений строится методом механических квадратур, позволяющим проведение достаточно подробного численного анализа и определение закономерности изменения амплитуд скачков напряжений, контактного давления под штампом и угла поворота включения в зависимости от частоты колебания, глубины залегания включения и его удаленности от штампа.

1. Введение. Динамические задачи теории упругости всегда входили в круг интересов исследователей. В литературе можно встретить множество работ в этой области, среди которых выделим лишь некоторые, более близкие к рассматриваемой в настоящей работе задаче [1–8]. Во всех указанных работах предполагается наличие только одного концентратора напряжений, главным образом жесткого штампа на границе полуплоскости, подверженного воздействию динамической нагрузки. В настоящей работе принимается, что, помимо колеблющегося на границе полуплоскости жесткого штампа, внутри полуплоскости имеется жесткое тонкое включение, параллельное ее границе.





Пусть имеем упругую полуплоскость с внутренним, параллельным границе, жестким включением конечной длины 2a. По отрезку [b, c] в границу полуплоскости вдавливается штамп с гладким плоским основанием, который колеблется в вертикальном направлении под действием гармонической нормальной силы  $P_0 e^{i\omega t}$ (рис.1). Полагая, что все компоненты напряженно-деформированного состояния тоже будут иметь гармониче-

ский характер, задачу сформулируем для их амплитуд.

Предварительно построим разрывные решения [9] для полуплоскости с внутренним концентратором напряжений, к границе которой приложена сосредоточенная нормальная гармоническая сила. Подобно работе [6], упругую полуплоскость представим как составную, составленную из полосы и полуплоскости с линией раздела y = -h. Полагая, что на отрезке [-a, a] этой линии и компоненты напряжений, и компоненты перемещений претерпевают определенный скачок, строятся решения уравнений движения для каждой из областей: полосы и полуплоскости, удовлетворяются граничные условия и условия сшивания, тем самым, все компоненты напряженно-деформированного состояния выражаются через функции скачков  $\sigma(x), \tau(x), U(x), V(x)$ .

Далее, заменяя влияние штампа неизвестным пока контактным давлением p(x), распределенным по отрезку [b, c], и используя полученные выражения в качестве функций Грина, будем иметь представления всех компонент напряженнодеформированного состояния через неизвестные пока указанные выше функции скачков и контактное давление под штампом.

В рассматриваемом случае, когда имеем сцепленное с основой жесткое включение, скачки перемещений, очевидно, равны нулю, т.е. U(x) = V(x) = 0, а для определения скачков напряжений  $\sigma(x)$  и  $\tau(x)$  следует удовлетворить условиям на одном из берегов включения. Учитывая, что включение может как поступательно перемещаться вдоль осей Ox и Oy, так и поворачиваться, такими условиями будут:

$$u(x, -h) = C_1, \qquad v(x, -h) = C_2 + \gamma x.$$

С другой стороны, так как рассматриваемая система неуравновешена, в качестве условий для вывода определяющих уравнений следует взять следующие условия, исключающие влияние поступательного перемещения системы в целом:

$$u'(x, -h) = 0,$$
  $v'(x, -h) = \gamma.$  (1)

Параметр  $\gamma$ , практически представляющий угол поворота включения относительно первоначального положения, подлежит определению из условия равенства нулю главного момента действующих на включение напряжений. Исходя из малости толщины включения, таким условием будет:

$$\int_{-a}^{a} x \,\sigma\left(x\right) dx = 0. \tag{2}$$

Для включения должны быть удовлетворены и условия равновесия, которые, при предположении, что включение свободно от внешних нагрузок, будут:

$$\int_{-a}^{a} \sigma(x) \, dx = 0; \qquad \int_{-a}^{a} \tau(x) \, dx = 0. \tag{3}$$

Для определения же контактного давления под штампом p(x) следует удовлетворить условию контакта

$$v'(x,0) = 0$$
 (4)

и условию равновесия штампа

$$\int_{b}^{c} p(x) dx = P_0.$$
(5)

Подставляя полученные ранее представления компонентов перемещения в условия (1) и (4), получим определяющую систему из трех сингулярных интегральных уравнений, которая вместе с условиями (2), (3) и (5) составляют полную систему уравнений, позволяющую однозначно определить искомые функции распределения контактных напряжений и неизвестный угол поворота включения.

**3.** Построение решения определяющей системы. Определяющую систему решаем методом механических квадратур [10]. Предварительно перейдем к безразмерным величинам и сведем интервалы интегрирования к интервалу (-1, 1). Введем следующие обозначения:

$$\{h_*, b_*, c_*\} = \frac{\{h, b, c\}}{a}, \quad \varphi_1(\xi) = \frac{a}{P_0} p\left(\frac{c-b}{2}\xi + \frac{c+b}{2}\right); \quad \{\varphi_2, \varphi_3\}(\xi) = \frac{a}{P_0} \left\{\sigma, \tau\}(a\xi)\right\};$$
$$\gamma_* = \frac{\mu\gamma a}{P_0}; \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad \theta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; \quad \eta = \frac{\omega^2 a^2}{c_2^2}.$$

В итоге определяющая система поставленной задачи примет вид:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_k(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi + \sum_{i=1}^{3} \int_{-1}^{1} Q_{ki} \left(\zeta - \xi\right) \varphi_i(\xi) d\xi = b_k; \quad \{b_k\} = \left\{0, 0, -\frac{4\pi\gamma_*}{1 + \theta}\right\};$$

$$\int_{-1}^{1} \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{2}{c_* - b_*}; \quad \int_{-1}^{1} \varphi_2(\xi) d\xi = 0; \quad \int_{-1}^{1} \varphi_3(\xi) d\xi = 0; \quad \int_{-1}^{1} \xi \varphi_2(\xi) d\xi = 0,$$
(6)

где ядра  $Q_{ij}\left(\zeta-\xi\right)\,\left(i,j=1,2,3
ight)$ имеют громоздкий вид и здесь не приводятся

Исследуя поведение сингулярных интегральных уравнений системы (6) в окрестности концов интервала интегрирования, нетрудно убедиться, что искомые функции имеют на концах корневую особенность, то есть их можно представить в виде:

$$\varphi_i(\xi) = \frac{\psi_i(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где новые искомые функции  $\psi_i(\xi)$  (i = 1, 2, 3) удовлетворяют условию Гельдера на отрезке [-1, 1].



 $h_* = 0.8$  0.4  $\phi_3(\xi)$   $h_* = 10^{0.2}$  -10 -0.2-0.4

Рисунок 2 – Нормальные напряжения

Рисунок 3 – Тангенциальные напряжения



Рисунок 4 – Графики изменения приведенного угла  $\gamma_*$  в зависимости от параметра d.

Далее, представляя искомые функции в виде интерполяционных многочленов Лагранжа по узлам многочлена Чебышева первого рода, при помощи метода механических квадратур система (6) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов интерполяционных многочленов и постоянной  $\gamma_*$ .

Проведен численный анализ системы (6). При численных расчетах полагалось, что длины зон контак-

та равны друг другу, т.е.  $c_* - b_* = 2$ , взаиморасположение штампа и включения определяется параметром  $d = (c_* + b_*)/2$ , при d = 0 штамп расположен над включением, при d > 0 он сдвинут вправо на величину d. Коэффициент Пуассона фиксирован  $\nu = 0.3$ . На рис. 2 совместно приведены графики распределения контактных напряжений под штампом (расположены выше) и скачка нормальных напряжений на включении при d = 1,  $\eta = 0.04$  и  $h_* = 0.8, 1.2, 1.6, 10$ . На рис. 3 приведены графики распределения скачка тангенциальных напряжений на включении при тех же значениях параметров.

На рис. 4 приведены графики зависимости приведенного угла поворота включения  $\gamma_*$  от расстояния d между центрами штампа и включения при различных значениях глубины залегания включения  $h_*$  и параметра  $\eta$ , характеризующего частоту колебаний штампа.

4. Заключение. Численный анализ показал, что изменение основных параметров задачи, каковыми можно считать частоту колебаний  $\omega$ , расстояние между штампом и включением в вертикальном  $h_*$  и горизонтальном d направлении, намного существеннее влияет на напряженно-деформированное состояние вокруг включения, чем под штампом. Поведение графиков изменения угла поворота включения явно указывает на то, что естественное убывание степени взаимовлияния двух концентраторов напряжений при удалении их друг от друга носит немонотонный характер. Сравнивая графики, замечаем, что чем выше частота колебаний, тем более выражен указанный немотонный характер, следовательно, можно утверждать, что указанное явление полностью обусловлено фактором колебания штампа. Очевидно, что и остальные компоненты напряженно-деформированного состояния около включения подвержены этой закономерности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОНКС РА в рамках научного проекта 18T-2C290.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Буряк В.Г. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости // Изв. АН СССР, МТТ. 1972. № 6. С. 155–159.
- [2] Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками // Изв. АН СССР, МТТ. 1972. № 5. С. 101–116.
- [3] Зильберглейт А.С., Златина И.Н. Динамическая контактная задача для полуплоскости и полупространства // Изв. АН АрмССР. 1978. Т. 31. № 3. С. 18–30.
- [4] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
- [5] Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
- [6] Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами // Известия НАН РА, Механика. 2019. Т. 72. № 2. С. 6–23.
- [7] Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. T. V Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», Горис, 2005. Р. 56–60.
- [8] Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Антиплоская динамическая контактная задача для составного полупространства с межфазной трещиной. Тр. IX межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 2018. Горис. С. 44–48.
- [9] Попов Г.Я. Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями // ПММ. 1978. Т. 42. № 1. С. 143–156.
- [10] Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 991. 012070

Hakobyan L.V., Amirjanyan H.A. Sahakyan A.V. The effect of a rigid punch oscillating at the boundary of an elastic half-plane on a stress state around an internal rigid thin inclusion. We consider a plane deformed state of an elastic half-plane, at a certain depth from the boundary of which there is an absolutely rigid thin inclusion of finite length. The inclusion is parallel to the boundary, and the half-plane is deformed under the influence of a rigid punch oscillating in the vertical direction. Between the punch and the half-plane there is a smooth contact. The solution of the determining system of singular integral equations is constructed by the method of mechanical quadrature, which allows a sufficiently detailed numerical analysis and determination of the pattern of change in the stress jumps at the inclusion, contact pressure under the punch and the angle of rotation of the inclusion, depending on the frequency of oscillation, the depth of the inclusion and its distance from the punch.

### ВОЛНЫ ТИПА ЛЯВА В СИСТЕМЕ ЖИДКИЙ СЛОЙ-ПОЛУПРОСТРАНСТВО

### Амирджанян А.А., Белубекян М В, Геворгян Г.З, Дарбинян А.З.

Институт механики НАН Армении, Ереван

В рамках антиплоской задачи теории упругости рассматривается распространение поверхностных волн в окрестности линии соединения вязкого жидкого слоя с упругой полуплоскостью. На линии контакта приняты условия равенства касательных напряжений и нормальных компонент перемещения. Получено дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости поверхностной волны. Решение полученного уравнения найдено численно. Для длинных волн получена также асимптотическая формула для определения фазовой скорости. Графически представлено сравнение асимптотической формулы и точного численного решения.

**Введение** Упругие поверхностные волны (Рэлея, Лява, Лэмба, Стоунли) хорошо исследованы учеными и инженерами из-за их практической применимости к таким дисциплинам, как сейсмология, акустика, геофизика, материаловедение и др.

Достаточно широкий обзор работ по распространению поверхностных волн приводится в [1]. Исследованию распространения волн в системе жидкий слойполупространство посвящены работы [2–6]. Одной из последних работ в этой области является [7]. Следует отметить, что указанные исследования носят, главным образом, численный характер. В данной работе рассмотривается антиплоская задача для упругой полуплоскости, покрытой слоем вязкой жидкости.

#### 1. Постановка задачи.

Рассматривается плоская задача теории упругости об антиплоской деформации упругого полупространства, контактирующего с жидким слоем (рис. 1)



Рисунок 1

Для компонент упругих перемещений полуплоскости имеем

 $u^{(2)} = 0$ ,  $v^{(2)} = 0$ ,  $w^{(2)} = w^{(2)}(x, y, t)$ ,

где t — время. Уравнения движения в перемещениях имеют вид [4]:

$$\mu^{(2)} \left( \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial y^2} \right) = \rho^{(2)} \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2},\tag{1}$$

где $\mu^{(2)}-$ коэффициенты Ламе,  $\rho^{(2)}-$ плотность материала полуплоскости,

Для вязкого жидкого слоя в условиях антиплоской задачи уравнение Навье— Стокса имеет вид:

$$\rho^{(1)}\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial t} = \mu^{(1)} \left( \frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial y^2} \right),\tag{2}$$

где  $v_z^{(1)} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t}, \, \mu^{(1)}$  — динамическая вязкость,  $\rho^{(1)}$  — плотность жидкости. Касательное напряжение  $\sigma_{yz}^{(1)} = \mu^{(1)} \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial y}.$ 

Граничные условия:

условие контакта при y = 0 имеет вид [8]:

$$w^{(1)} = w^{(2)}; \quad \sigma^{(1)}_{yz} = \sigma^{(2)}_{yz},$$

откуда

$$v_z^{(1)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial t}; \quad \mu^{(2)} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} = \mu^{(1)} \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial y} \tag{3}$$

условие на поверхности жидкого слоя

$$p_{yz}^{(1)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial y} \bigg|_{y = -h} = 0$$
(4)

условие затухания

$$\lim_{y \to \infty} w^{(2)} = 0 \tag{5}$$

#### 2. Построение решения.

Для полуплоскости  $-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty$  решение уравнения (1) ищем в виде [9]:

$$w^{(2)}(x, y, t) = f(y) e^{i(\omega t - kx)}.$$
(6)

Тогда уравнение (1) сведется к уравнению

$$f''(y) - k^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 c_T^2}\right) f(y) = 0,$$

где  $c_T = \sqrt{\mu^{(2)}/\rho^{(2)}}$  — скорость распространения сдвиговой волны. Общее решение уравнения будет:

$$f(y) = A_1 e^{-k\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2 c_T^2}}y} + A_2 e^{k\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2 c_T^2}}y}.$$

Вводя обозначение  $\eta=(\omega/kc_T)^2$ и полагая, что  $\eta$ не превосходит единицу, с учетом условия затухания по глубине получим

$$w^{(2)} = A e^{-k\sqrt{1-\eta} y} e^{i(\omega t - kx)}; \qquad 0 < \eta < 1.$$
(7)

Для жидкого слоя решение уравнения (2) ищем в виде:

$$v_z^{(1)} = g(y) e^{i(\omega t - kx)}.$$
 (8)

Подставляя (8) в (2), будем иметь

$$g''(y) - k^2 \left(1 + \frac{i\omega\rho^{(1)}}{k^2\mu^{(1)}}\right)g(y) = 0,$$

откуда нетрудно получить

$$v_z^{(1)} = \left(B_1 e^{k\lambda y} + B_2 e^{-k\lambda y}\right) e^{i\left(\omega t - kx\right)},\tag{9}$$

где  $\lambda = \sqrt{1 + \frac{i\omega\rho^{(1)}}{k^2\mu^{(1)}}}$ . Удовлетворяя граничным условиям (3) и (4), получим систему однородных линейных уравнений относительно коэффициентов  $A, B_1, B_2$ 

$$iA\omega - B_1 - B_2 = 0$$
  
-  $A\mu^{(2)}\sqrt{1 - \eta} + B_1\mu^{(1)}\lambda - B_2\mu^{(1)}\lambda = 0,$  (10)  
-  $B_1e^{-kh\lambda} + B_2e^{kh\lambda} = 0.$ 

Для существования ненулевого решения главный детерминант этой системы должен быть равен нулю. Откуда получается дисперсионное уравнение

$$i\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}}\omega\lambda\tanh(kh\lambda) = -\sqrt{1-\eta}.$$
(11)

Переходя к безразмерным величинам

$$v = \frac{\omega}{k c_T}; \quad k_h = k h; \quad l = c_T \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{h}; \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Представим дисперсионное уравнение в виде

$$1 - v^2 - \left(l k_h v \sqrt{1 + \frac{i \rho v}{l k_h}} \tanh\left[k_h \sqrt{1 + \frac{i \rho v}{l k_h}}\right]\right)^2 = 0.$$
(12)

При  $k_h \ll 1$ , разлагая (12) в ряд Тейлора по  $k_h$ , получим асимптотическую формулу для определения фазовой скорости

$$v \approx 1 - \frac{\rho^2}{2} k_h^2 + i \left( l\rho + \frac{\rho^3}{3l} \right) k_h^3.$$
 (13)

Проведен численный анализ уравнения (12). На рисунке 2, для сравнения асимптотической формулы (13) с численным решением, эти графики представлены совместно. В таблице и на рисунках 3 и 4 показаны зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от параметра  $k_h$ . Расчеты показывают, что при  $k_h < l$  приближенное решение (13) практически совпадает с точным решением.

На рисунке 2 приведены результаты расчета для моторного масла Агринол SAE15W-40 при температуре 0° C и полуплоскости, состоящей из материала с коэффициентом Ламе  $\mu_2 = 5 \cdot 10^5$  Па и плотностью  $\rho_2 = 800$  кг/м<sup>3</sup>, когда толщина
слоя h = 1 м. В этом случае l = 0.0664. Пунктирной линией показано приближённое решение (12), а сплошной — точное решения уравнения (11).



Рисунок 2 – Скорость поверхностной волны при малых  $k_h$ 

Таблица 1 – Зависимость скорости распространения волны от  $k_h$ 

$k_h$	$\operatorname{Re}\left(v\right)$	$\operatorname{Im}(v)$	$k_h$	$\operatorname{Re}\left(v\right)$	$\operatorname{Im}(v)$
0	1	0	0.05	0.998804	0.000713551
0.11	0.99742	0.00418342	0.17	0.997881	0.00788256
0.23	0.998905	0.0106406	0.29	0.999748	0.0127801
0.35	1.00028	0.0146647	0.41	1.00056	0.0164839
0.47	1.00066	0.0183203	0.55	1.0006	0.020847
0.7	1.00018	0.0258547	0.75	1.00001	0.0275917
0.8	0.999819	0.0293556	0.85	0.999628	0.031142







На рисунках 3, 4 приведены графики фазовой скорости волны и коэффициента затухания для материалов с l = 0.6 и  $\rho = 0.5$  — сплошная линия,  $\rho = 1$  — пунктирная линия, и  $\rho = 2$  — точечная линия.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
- [2] Волькенштейн М. М., Левин В. М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 4. С. 608–615.
- [3] *Гузъ А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х т. Т.1. Общие вопросы. К.: Наук. думка, 1986. 374 с.
- [4] Гузъ А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х т. Т.2. Закономерности распространения. К.: Наук. думка, 1986. 536 с.
- [5] Гузь А. Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. К.: А.С.К., 1998. 350 с.
- [6] *Гузъ А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. К.: A.C.K., 2004. 672 с.
- [7] Багио А. М Распространение волн в упругом слое, взаимодействующем со слоем вязкой жидкости // Прикладная механика. 2016. Т. 52. № 2. С. 36–45.
- [8] Белубекян М. В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупрастранство // Изд. НАН РА. Механика, 2005. Т. 58. № 2. С. 9–15.
- [9] Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах // В Сб.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела» Ереван: Изд. НАН Армении 1997. С. 79–96.

Amirjanyan H. A., Belubekyan M. V., Gevorgyan G. Z., Darbinyan A. Z. Love type waves in the liquid layer — elastic half-space system. In the framework of the antiplane problem of the theory of elasticity, the propagation of surface waves in the vicinity of the line of connection of a viscous fluid layer with an elastic half-plane is considered. On the contact line, the conditions of equality of tangential stresses and normal components of displacement are accepted. A dispersion equation is obtained for determining the phase velocity of a surface wave. The solution of the obtained equation is found numerically. An asymptotic formula for determining the phase velocity is also obtained for long waves. A comparison of the asymptotic formula and the exact numerical solution is graphically presented.

# ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

## Батищев В.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для уравнений Навье—Стокса рассчитаны термокапиллярные режимы течений жидкости в горизонтальном слое, ограниченном сверху свободной границей. Показано, что при локальном охлаждении свободной границы в случае осесимметричного течения жидкости в результате бифуркации появляется пара вращательных режимов, однозначно определяемых постановкой задачи. При отсутствии осевой симметрии возникают закрученные режимы, представляющие собой двухпараметрическое семейство, параметры которого не определяются внешними условиями.

1. Введение. Нелинейный пограничный слой вблизи свободной границы может возникать в однородной маловязкой жидкости вблизи свободной границы в результате неравномерного распределения температуры на этой границе. В результате зависимости коэффициента поверхностного натяжения свободной границы от температуры появляются касательные напряжения, которые приводят к термокапиллярному течению жидкости (эффект Марангони). Изучение термокапиллярных эффектов в нелинейных пограничных слоях активно выполняется со второй половины прошлого столетия. Большой цикл работ выполнен Пухначевым В.В. и его учениками. В работе [1] показано, что при локальном охлаждении свободной границы могут возникать два вращательных режима течений жидкости, которые однозначно определяются условиями задачи. Ниже показано, что при тех же граничных условиях в отсутствии осевой симметрии возможно возникновение вращательных режимов, которые зависят от двух произвольных параметров, заполняющих единичный круг.

**2.** Математическая модель. В горизонтальном слое бесконечной толщины рассчитывается стационарное течение вязкой теплопроводной жидкости, ограниченной сверху свободной границей Г, которая охлаждается неравномерно. Течение жидкости рассчитывается на основе системы Навье — Стокса и уравнения теплопроводности

$$(\boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{v}) = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g},$$
  
 $\boldsymbol{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$ 

Здесь  $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v_r}, \boldsymbol{v_{\varphi}}, \boldsymbol{v_z})$  вектор скорости,  $(r, \varphi, z)$  цилиндрические координаты,  $p, \rho$ и T соответственно давление, плотность и температура жидкости.  $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g_t),$  $g_t$  — ускорение свободного падения. Коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности предполагаются малыми.

На свободной границе выполняются динамические краевые условия для нормальных и касательных напряжений, кинематическое условие и задана температура  $T_{\Gamma}$ .

$$p = 2\nu\rho\boldsymbol{n}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{n} - \sigma\left(k_1 + k_2\right) + p_*,$$

### Батищев В.А.

$$2\nu\rho\left(\Pi\boldsymbol{n}-\left(\boldsymbol{n}\Pi\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\right)=\nabla_{\Gamma}\sigma,\ T=T_{\Gamma}\left(r,z\right),\left(r,\varphi,z\right)\in\Gamma.$$

Здесь П — тензор скоростей деформации;  $\boldsymbol{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной границе;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения, который считается линейно зависящим от температуры:  $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T| (T - T_*)$ , где  $\sigma_0, |\sigma_T|, T_*$  — известные постоянные;  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны свободной поверхности;  $p_* = const$  — давление на свободной границе;  $\nabla_{\Gamma}$  — градиент вдоль свободной поверхности поверхности Г. При удалении от свободной границы в поперечном направлении температура стремится к постоянному значению  $T_{\infty}$ , а скорость жидкости ограничена.

Свободная граница в главном приближении не деформируется и описывается уравнением z = 0. Температура свободной границы  $T_{\Gamma}$  задается формулой  $T_{\Gamma} = T_{\infty} + T_m (r^2/L^2 - 1)$  при  $r \leq L$  и  $T_{\Gamma} = T_{\infty}$  при r > L. Здесь  $T_m$  перепад температуры на промежутке  $r \in [0, 1]$ . Предполагаем, что при охлаждении свободной границы  $0 < T_m < T_{\infty}$ . При  $T_m > 0$  свободная граница охлаждается, а при  $T_m < 0$  нагревается. При переходе к безразмерным переменным, в качестве масштабов длины, температуры и скорости принимаются величины  $L, T_{\infty}, u_0$ , где  $u_0 = (T_{\infty}^2 \sigma_T^2 L^{-1} \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/3}$ . В формуле для  $u_0$  параметр  $T_{\infty}$  рассматривается как верхняя грань множества, которому принадлежит перепад температуры  $T_m$ . Введем параметр  $\varepsilon$  по формуле  $\varepsilon = \sqrt{\nu/u_0 L}$ . При конечных значениях L и малых  $\nu$  параметр  $\varepsilon$  мал.

При  $\varepsilon \to 0$  вблизи свободной границы возникает пограничный слой Марангони толщиной порядка  $O(\varepsilon)$ . Вне этого слоя возникает «внешнее» течение жидкости, удовлетворяющее в главном приближении уравнениям Эйлера невязкой жидкости. Считаем, что скорость «внешнего» течения  $\boldsymbol{v} = (v_{r0}, v_{\varphi 0}, v_{z0})$ , имеет порядок  $O(u_0)$ .

**3. Незакрученные режимы.** Решение задачи строится методом пограничного слоя [1]. Вводится преобразование растяжения  $s = z/\varepsilon$ . Вектор скорости, давление и температура строятся в виде асимптотических рядов по степеням параметра  $\varepsilon$ 

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{h}_0 + \varepsilon \left( \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{h}_1 \right) + \dots,$$
$$T = 1 + \theta_0 + \varepsilon \left( T_1 + \theta_1 \right) + \dots \quad (\varepsilon \to 0)$$

Аналогичный ряд строится и для давления. Здесь  $h_0, h_1, \theta_0, \theta_1$  определены в области пограничного слоя  $D_{\Gamma}$ , зависят от переменных  $s, \varphi, z$  и исчезают вместе с производными при выходе из  $D_{\Gamma}$ . Вектор-функции  $v_0, v_1$  и функция  $T_1$  определены в полупространстве  $z \leq 0$  и описывают решение задачи вне  $D_{\Gamma}$ . Отметим, что компоненты  $v_{\varphi 0} = v_{\varphi 1} = 0$ , так как предполагается, что течение жидкости вне пограничного слоя не вращается. Введем функции  $H_r = h_{r0} + v_{r0}|_{\Gamma}$  и  $H_z = h_{z1} + v_{z1}|_{\Gamma} + s \partial v_{z0}/\partial z|_{\Gamma}$ . Здесь учтено, что,  $v_1 = (v_{r1}, 0, v_{z1}), h_n = (h_{rn}, h_{\varphi n}, h_{zn}),$ где  $h_{z0} = 0, n = 0, 1$ . Функции  $H_r, H_z, h_{\varphi 0}$  удовлетворяют краевой задаче для уравнений пограничного слоя Прандтля. Предположим, что поле скоростей идеальной жидкости линейно зависит от координаты r на свободной границе, так что  $v_{r0}|_{\Gamma} = Ur$ , где  $U \geq 0$ .

Решения краевой задачи для уравнений Прандтля в пограничном слое описывают два типа режимов — вращательные  $(h_{\varphi 0} \neq 0)$  и не закрученные  $(h_{\varphi 0} = 0)$ .

Рассмотрим режимы течений без вращения для случая осевой симметрии. Решения уравнений пограничного слоя представим в виде  $H_r = r \left( \Phi'(\eta) + U \right)$ ,  $h_{\varphi 0} = 0$ ,  $H_z = 2 \left( \Phi + \eta U \right)$  Здесь  $\eta = -s$ . Для определения неизвестной функции  $\Phi(\eta)$  выводим краевую задачу

$$\Phi^{'''} = \Phi^{'2} + 2U\Phi^{'} - 2\Phi^{''}(\Phi + \eta U)$$
  
$$\Phi(0) = 0, \Phi^{''}(0) = 2\alpha, \Phi^{'}(\infty) = 0$$

Здесь  $\alpha$  — безразмерный перепад температуры, определяемый формулой  $\alpha = T_m/T_\infty$ , причем  $0 < \alpha < 1$ .

Параметр U — амплитуда скорости невязкой жидкости на поверхности Г. Анализ численных расчетов полученной краевой задачи показывает, что незакрученные режимы течений жидкости существуют только, если  $U \ge U_m$ , где  $U_m \approx 1.2145 \alpha^{2/3}$ . При каждом  $U > U_m$  существуют два не вращающихся режима, различающиеся формой профиля скорости. При  $U = U_m$  эти режимы сливаются.

**4. Бифуркация режимов.** Незакрученные режимы отсутствуют для  $U < U_m$ при охлаждении свободной границы. В этом случае существуют вращательные режимы, которые ответвляются от незакрученных режимов в точках бифуркации в пограничном слое. Для определения точек бифуркации краевая задача для уравнений пограничного слоя Прандтля линеаризуется вблизи незакрученных осесимметричных режимов. Решение задачи на собственные значения представим в виде  $H_r = r H_{rc}(\eta, \varphi), \ h_{\varphi 0} = r h_{\varphi c}(\eta, \varphi), \ H_z = H_{zc}(\eta, \varphi).$  Собственные функции строятся методом разделения переменных  $H_{rc} = u_c(\eta) f'(\varphi), h_{\varphi c} = v_c(\eta) f(\varphi), H_{zc} =$  $w_c(\eta) f'(\varphi)$ . Здесь  $f(\varphi)$  произвольная периодическая функция. Функции  $u_c, v_c, w_c$  и собственные числа  $U = U_*$  рассчитываются из линейной краевой задачи. Численно найдена ветвь простых собственных значений  $U = U_* \approx 1.3262 \alpha^{2/3}$  и рассчитаны соответствующие собственные функции  $v_c = c_0 g_*(\eta), u_c = -0.5 c_0 g_*(\eta), w_c = 0.$ Отметим, что  $c_0$  произвольная постоянная, не равная нулю. Функция  $g_*(\eta)$  определена на полуосии  $[0,\infty)$  монотонно убывает от единицы до нуля при  $\eta \in [0,\infty)$ . В осесимметричном случае  $f(\varphi) = const$ , поэтому собственное решение принимает вид  $h_{\varphi c} = c_1 g_*(\eta), H_{rc} = H_{zc} = 0$ , где  $c_1 = const.$ 

Построим асимптотику вращательных режимов вблизи точки бифуркации. Решения нелинейной задачи представим в виде  $H_r = r(\Phi'(\eta) + U) + rH_{rb}, h_{\varphi 0} = rh_{\varphi b},$  $H_z = 2(\Phi + \eta U) + H_{zb}$ . Введем два малых параметра  $\delta$  и  $\varepsilon_1$ , причем  $\delta = U - U_*$ . Здесь U и  $U_*$  текущее и бифуркационное значения параметра U. Очевидно, что  $\delta \to 0$  при  $U \to U_*$ . Функцию  $h_{\varphi b}$  представим в виде суммы  $h_{\varphi b} = \varepsilon_1 g_* f(\varphi) + v_b$ , где  $v_b = 0$  при  $\eta = 0$ . Параметр  $\varepsilon_1$  это амплитуда вращательного режима на свободной границе  $\varepsilon_1 = h_{\varphi b}|_{\eta=0}/f(\varphi)$ . Отметим, что вблизи точки бифуркации  $\varepsilon_1$  мал. Асимптотические решения, описывающие вращательные режимы вблизи точки бифуркации строятся в виде рядов по степеням параметра  $\varepsilon_1$ 

$$H_{rb} = \varepsilon_1 u_* + \varepsilon_1^2 u_1 + \varepsilon_1^3 u_2 + \dots, \ H_{zb} = \varepsilon_1^2 w_1 + \varepsilon_1^3 w_2 + \dots$$
$$h_{\varphi b} = \varepsilon_1 v_* + \varepsilon_1^2 v_1 + \varepsilon_1^3 v_2 + \dots \ (\varepsilon_1 \to 0)$$

Параметр  $\delta$  при  $\varepsilon_1 \to 0$  также разложим в асимптотический ряд

$$\delta = \varepsilon_1 V_0 + \varepsilon_1^2 V_1 + \varepsilon_1^3 V_2 + \dots$$

### Батищев В.А.

Функции  $u_*$  и  $v_*$  известны:  $u_* = -0.5g_*(\eta)f'(\varphi), v_* = g_*(\eta)f(\varphi).$ 

Коэффициенты асимптотических рядов находятся путем численного решения линейных краевых задач. Из условия разрешимости неоднородной краевой задачи для функции  $v_1$  получаем, что коэффициент  $V_0 = 0$ . Дифференциальное уравнение для функции  $f(\varphi)$  получается при выполнении условия разрешимости задачи для функции  $v_2$ . Решение этого уравнения имеет вид  $f(\varphi) = 1+\beta \sin 2\varphi + \gamma \cos 2\varphi$ . Здесь  $\beta$  и  $\gamma$  произвольные параметры, удовлетворяющие условию  $\beta^2 + \gamma^2 < 1$ . Приведем асимптотические формулы для компонент вектора скорости  $v_r$ ,  $v_{\varphi}$  вблизи точки бифуркации

$$v_{\varphi} = \pm \varepsilon_1 r g_*(\eta) \left(1 + \beta \sin 2\varphi + \gamma \cos 2\varphi\right) + O(\varepsilon_1^2)$$
$$v_r = r \left(\Phi_*'' + U_* \pm \varepsilon_1 g_* \left(\gamma \sin 2\varphi - \beta \cos 2\varphi\right)\right) + O(\varepsilon_1^2)$$

Функция  $\Phi_*$  совпадает со значением функции  $\Phi$  в точке бифуркации. Отметим, что в осесимметричном случае  $\beta = \gamma = 0$  и вращательные режимы определяются однозначно постановкой задачи. При отсутствии этой симметрии асимптотические формулы описывают вращательные режимы, зависящие от двух произвольных параметров  $\beta$  и  $\gamma$ , заполняющих единичный круг. Таким образом, ответвившиеся режимы зависят от параметров, которые не определяются внешними условиями. Такой же эффект получен в [2], где рассчитано бесконечное число вторичных режимов.

Заключение. В работе показано, что в случае локального охлаждения свободной поверхности при стационарном течении жидкости возникает бифуркация, которая приводит к появлению вращательных режимов в пограничном слое вблизи свободной границы. В условиях осевой симметрии возникают два вращательных режима, однозначно определяемые краевыми условиями. При отсутствии симметрии возникает двухпараметрическое семейство вращательных режимов, параметры которых не определяются постановкой задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Батищев В. А. Возникновение вращения жидкости в пограничном слое Марангони в области локального охлаждения свободной границы // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 3. С. 26–35.
- [2] Любимов Д. В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная механика и техническая физики. 1975. № 2. С. 131–137.

**Batishchev V.A.** The appearance of asymmetric swirled fluid flow regimes near the free surface. The problem of the occurrence of fluid rotation during local cooling of the free boundary is studied. It is shown that in the absence of axial symmetry a two-parameter family of rotational regimes arises, the parameters of which fill a circle of unit radius.

# ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПАВ В СТРУКТУРАХ С ФГПМ ПОКРЫТИЕМ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ КЕРАМИК НА ОСНОВЕ РZT

## Белянкова Т. И.<sup>1</sup>, Ворович Е. И.<sup>2</sup>, Тукодова О. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону <sup>2</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

В работе предложен подход к моделированию пьезоэлектрической структуры с преднапряженным неоднородным покрытием из двух материалов. Использованы линеаризованные в координатах Лагранжа определяющие соотношения и уравнения движения теории электроупругости. Начально-деформированное состояние покрытия вызвано действием механических напряжений, воздействие электрического поля не учитывается. На примере задачи о распространении поверхностных sh-волн в пьезоэлектрической структуре исследовано влияние вида и величины начальных механических воздействий на особенности распространения ПАВ и трансформацию поверхностного волнового поля при различных соотношениях физических параметров материалов покрытия и области локализации неоднородности.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о распространении SH-волн по поверхности составной пьезоактивной среды в направлении  $x_1$ . Среда представляет собой однородное полупространство  $x_2 \leq 0$ ,  $|x_1|, |x_3| \leq \infty$  с покрытием  $0 < x_2 \leq H$ , изменение свойств которого происходит непрерывно-немонотонным образом от параметров одного опорного материала до другого [1–3], в качестве которого использован пьезоэлектрик класса 6mm с осью симметрии направленной вдоль оси  $x_3$ , векторы поляризации полупространства и покрытия совпадают.

Начально деформированное состояние (НДС) покрытия однородно и наводится за счет действия начальных механических напряжений [4]. Гармонические колебания среды вызваны действием удаленного источника, режим колебаний — установившийся, динамический процесс удовлетворяет условиям (k = 3, 4, n = 0, 1, 2)

В рамках предположений, в материальных координатах Лагранжа, связанных с отсчетной конфигурацией, задача о распространении поверхностных волн в составной преднапряженной электроупругой среде описывается уравнениями [1–4]:

для покрытия  $0 < x_2 \leqslant H$ 

$$\sum_{k=1}^{2} \left[ \theta_{k33k}^{(1)} u_{3,kk}^{(1)} + \theta_{k34k}^{(1)} u_{4,kk}^{(1)} \right] + \sum_{k=3}^{4} \theta_{23k2,2}^{(1)} u_{k,2}^{(1)} = \rho^{(1)} \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^2},$$

$$\sum_{k=1}^{2} \left[ \theta_{k43k}^{(1)} u_{3,kk}^{(1)} + \theta_{k44k}^{(1)} u_{4,kk}^{(1)} \right] + \sum_{k=3}^{4} \theta_{24k2,2}^{(1)} u_{k,2}^{(1)} = 0$$
(1)

для подложки  $x_2 \leqslant 0$ 

$$\sum_{k=1}^{2} \left[ \theta_{k33k}^{(2)} u_{3,kk}^{(2)} + \theta_{k34k}^{(2)} u_{4,kk}^{(2)} \right] = \rho^{(2)} \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^2}, \quad \sum_{k=1}^{2} \left[ \theta_{k43k}^{(2)} u_{3,kk}^{(2)} + \theta_{k44k}^{(2)} u_{4,kk}^{(2)} \right] = 0$$
(2)

для вакуума  $x_2 > H$ 

$$\sum_{k=1}^{2} u_{4,kk}^{(0)} = 0 \tag{3}$$

С граничными условиями:

$$\Theta_{23}^{(1)}\Big|_{x_2=H} = \sum_{k=3}^{4} \left[ \theta_{23k2}^{(1)} u_{k,2}^{(1)} \right] \Big|_{x_2=H} = 0$$
(4)

$$D_{2}^{(1)}\Big|_{x_{2}=H} = \sum_{k=3}^{4} \left[ \theta_{2k42}^{(1)} u_{k,2}^{(1)} \right]\Big|_{x_{2}=H} = D_{2}^{(0)}\Big|_{x_{2}=H}, \qquad u_{4}^{(1)}\Big|_{x_{2}=H} = u_{4}^{(0)}\Big|_{x_{2}=H}$$
(5)

$$u_4^{(1)}\Big|_{x_2=H} = 0 \tag{6}$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{e}(1)}\Big|_{x_2=0} = \mathbf{u}^{\mathbf{e}(2)}\Big|_{x_2=0}, \quad \Theta_{23}^{(1)}\Big|_{x_2=0} = \Theta_{23}^{(2)}\Big|_{x_2=0}, \quad D_2^{(1)}\Big|_{x_2=0} = D_2^{(2)}\Big|_{x_2=0}$$
(7)

$$\mathbf{u}^{\mathbf{e}(2)}\Big|_{x_2 \to -\infty} \to 0, \qquad \mathbf{u}^{\mathbf{e}(0)}\Big|_{x_2 \to \infty} \to 0$$
 (8)

Здесь

$$\theta_{1331}^{(1)} = c_{44}^{(1)} v_3^2 + P_{11}, \quad \theta_{2332}^{(1)} = c_{44}^{(1)} v_3^2 + P_{22}, \quad \theta_{1341}^{(1)} = \theta_{1431}^{(1)} = \theta_{2342}^{(1)} = \theta_{2432}^{(1)} = e_{15}^{(1)} v_3,$$
  

$$\theta_{1441}^{(1)} = \varepsilon_0 \frac{v_2 v_3}{v_1} + \beta_{11}^{(1)}, \qquad \theta_{2442}^{(1)} = \varepsilon_0 \frac{v_1 v_3}{v_2} + \beta_{11}^{(1)}, \qquad \beta_{kn} = \varepsilon_{kn} - \varepsilon_0 \delta_{kn},$$
  

$$\theta_{lksp}^{(2)} = c_{lksp}^{(2)}, \qquad \theta_{lk4p}^{(2)} = e_{plk}^{(2)}, \qquad \theta_{l44p}^{(2)} = -\varepsilon_{lp}^{(2)}$$

Далее результаты исследований приведены в безразмерных параметрах [1–3], использованы безразмерные частоты  $\kappa_2 = \omega h/V_S^{(2)}$  и  $\kappa_{2e} = \omega h/V_{Se}^{(2)}$  ( $V_S^{(2)}$  и  $V_{Se}^{(2)}$  – скорости объемных сдвиговых волн без учета и с учетом пьезоэлектрических свойств). Далее штрихи опускаем.

Как и в [1–3], для решения задачи и анализа особенностей распространения поверхностных волн используется метод, основанный на численно-аналитическом построении и последующем исследовании функции Грина. Рассмотрим две задачи:

*задача* **I** — со свободной поверхностью, описывается уравнениями движения (1) – (3) с граничными условиями (4), (5) и (7), (8);

*задача II* — с металлизированной поверхностью, описывается уравнениями движения (1), (2) с граничными условиями (4), (6)–(8).

Использовано представление дисперсионных уравнений *задач* I и II для пьезоэлектрической структуры с  $\Phi\Gamma\Pi$ , приведенное в работах [1–4].

2. Численный анализ. Рассмотрена модель покрытия из двух материалов, исследования проводились для пьезоэлектрических структур, выполненных из сегнетокерамик, на основе РZT. Как и в [1–3] предполагается, что все физические параметры покрытия меняются по толщине от значений опорного материала ( $m_1 - PZT$ -5) до значений параметров материала включения  $m_2$  (PZT DL-61HD) или  $m_3$  (PZT DL-40). Выбор функциональных зависимостей изменения

свойств покрытия определен значениями параметров материалов его составляющих, локализацией и величиной зоны перехода материалов. Рассмотрены следующие виды НДС:  $1x_1 : P_{11} \neq 0, P_{22} = P_{33} = 0; 1x_3 : P_{33} \neq 0, P_{11} = P_{22} = 0; 2x_2 : P_{22} = 0, P_{11} = P_{33} \neq 0$ , отсутствие начального электрического поля определено условием равенства нулю вектора электрической индукции  $D_k = 0$ .

На рисунке 1 представлены функциональные зависимости изменения свойств покрытия  $f(x_2)$  (рисунок 1a) и изменение значений безразмерного параметра  $e_{15}^{(1)}(x_2)$  (рисунок 1б) при различных типах неоднородности и ее локализации. Цифрами на рисунке 16 отмечены кривые изменения свойств покрытия из материалов  $m_1/m_2$  (кривые 1) и  $m_1/m_3$  (кривые 2) при срединной локализации неоднородности покрытия. Верхние индексы «1» и «0» на рисунках отвечают приповерхностной и граничной с подложкой локализациям.

На рисунках 2 — 4 представлено влияние вида и величины начальных механических воздействий на фазовые скорости ПАВ для **задачи II** (рисунки 2, 3) и **задачи I** (рисунок 4). На рисунке 2а,6 цифрами 0, 1, 2 отмечены кривые фазовых скоростей в ЕС и НДС  $1x_1$  с деформациями  $v_1 = 0.97, 1.03$  соответственно для покрытий из  $m_1/m_2$  (рисунок 2а) и  $m_1/m_3$  (рисунок 2б). Для сравнения на рисунке 2в,г приведено частотное распределение фазовых скоростей в случае НДС  $1x_1$ ( $v_1 = 0.97, v_2 = 1.017, v_3 = 1.01$ ) и  $1x_3$  ( $v_3 = 0.97, v_1 = v_3 = 1.009$ ) (кривые 1, 2, рисунок 2в) и при НДС  $2x_2$  ( $v_2 = 1.03, v_1 = 0.967, v_3 = 0.98$ ) (рисунок 2г).

На рисунке 3 показано влияние локализации неоднородности покрытия из  $m_1/m_2$  (рисунок 3а,в) и  $m_1/m_3$  (рисунок 3б,г) в случае НДС покрытия  $1x_1$   $(v_1 = 0.97)$  (а,б) и в ЕС (в,г).

На рисунке 4 показано влияние локализации неоднородности покрытия из  $m_1/m_3$  в случае НДС покрытия  $1x_1$  ( $v_1 = 0.97$ ) (рисунок 4a) и в ЕС (рисунок 4б) для задачи с электрически свободной поверхностью (*задача I*).

Из рисунков видно, что влияние начальных механических напряжений приводит к существенным изменениям как значений скоростей ПАВ, так и их частотного распределения. Из рисунка 2а,б видно, что при срединной локализации неоднородности растяжение (кривые 2) приводит к уменьшению влияния типа неоднородности, которое сосредоточено в области низких и средних частот, с ростом частоты на значение скорости влияет только величина начального напряжения. В случае



Рисунок 1 – Изменение свойств материала по толщине покрытия. (a) — функциональные зависимости, (б) — изменение значений  $e_{15}^{(1)}$  по толщине покрытия



Рисунок 2 – Влияние начальных механических напряжений на скорости ПАВ. Задача II



Рисунок 3 – Влияние локализации неоднородности на скорости ПАВ. Задача II

сжатия (кривые 1) влияние типа неоднородности усиливается — меняется структура поверхностного волнового поля. Из сравнения рисунков 3 и 4 видно влияние начальных напряжений в трансформации структуры поверхностного волнового поля в зависимости от типа и локализации неоднородности. Из сравнения рисунков 36,г и 4а,б видно различие во влиянии начальных напряжений для задач с



Рисунок 4 – Влияние локализации неоднородности на скорости ПАВ. Задача I

электрически закороченной и свободной поверхностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 19-08-01051, 19-01-00719, 19-48-230042.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белянкова Т. И., Калинчук В. В. Особенности распространения пав в пьезоэлектрических структурах с неоднородным покрытием из различных видов пьезокерамик // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. трудов. 2019. Т. 3. С. 1159–1161.
- [2] Белянкова Т. И., Калинчук В. В. Распространение SH-волн в пьезоэлектрических структурах с функционально-градиентным покрытием из различных материалов // Проблемы машиноведения: материалы III междунар. н.-т. конф. 2019. Ч. 1. С. 39–46.
- [3] Белянкова Т. И., Ворович Е. И., Калинчук В. В., Тукодова О. М. Особенности поверхностного волнового поля в пьезоэлектрических структурах с неоднородным функционально-градиентным покрытием из различных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: Сб. трудов 9-й всерос. науч. конф. с междунар. уч. 2019. С. 29–32.
- [4] Калинчук В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.

Belyankova T. I., Vorovich E. I., Tukodova O. M. Influence of initial stresses on SAW propagation in structures with FGPM coating made of various PZT-based ceramics. The paper proposes an approach to modeling a piezoelectric structure with a prestressed inhomogeneous coating of two materials. The constitutive relations and motion equations of the electroelasticity theory linearized in the Lagrange coordinates are used. The initial deformed state of the coating is due to the action of mechanical stresses only. On the example of the problem of surface sh-waves propagation in a piezoelectric structure, we studied the influence of the type and magnitude of the initial mechanical effects on the SAW propagation features and on the transformation of the surface wave field for various ratios of physical parameters of the coating materials and localization regions of the inhomogeneity.

# РАССЕЯНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН НА СКОПЛЕНИИ ПРЕПЯТСТВИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЛЮБЫХ ЗАКОНОВ ИХ ОТРАЖЕНИЙ И ТРАНСФОРМАЦИЙ

## Боев Н.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках трехмерной задачи исследуется коротковолновая дифракция упругих волн на скоплении полостных дефектов, находящихся в упругой среде. Проблема сводится к решению классической задачи рассеяния высокочастотных волн, исходящих из точечного источника в упругой среде на расположенном в ней скоплении полостей. Рассматриваются многократные отражения с различными возможными трансформациями упругих волн. Для исследования задачи развит метод, основанный на оценке дифракционных интегралов методом многомерной стационарной фазы. Полученные явные выражения перемещений соответствуют геометрической теории дифракции упругих волн.

Введение. Задача рассеяния акустической волны на криволинейном контуре исследована различными методами [1, 2]. В случае однократного отражения упругих волн решение такой задачи в двумерном случае получено в [2, 3]. В трехмерном случае в [4, 5] получено коротковолновое приближение в замкнутом виде для давления в акустической волне при её однократном, а в [5] при многократном отражении от произвольных гладких поверхностей. В [6] исследованы однократное и двукратное отражение упругих волн со всевозможными трансформациями. В [7] исследовано прохождение плоской продольной волны через метаматериал, представляющий собой трехпериодическую систему твердых шаров вделанных в упругую матрицу. В настоящей работе, в рамках трехмерной локальной задачи излагается метод исследования последовательности любых многократных отражений и трансформаций, основанный на оценке дифракционных интегралов Кирхгофа методом многомерной стационарной фазы.

Постановка трехмерной локальной задачи. Пусть из точки  $x_0$  бесконечной упругой среды на граничную поверхность находящегося в ней скопления полостей падает сферическая монохроматическая высокочастотная волна. Волна порождается сосредоточенной в точке  $x_0$  силой  $\mathbf{Q} \ e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — частота колебаний. При этом перемещения в точке y упругого пространства определяются матрицей Купрадзе [8].

$$U_{j}^{(k)}(y,x_{0}) = U_{jp}^{(k)}(y,x_{0}) + U_{js}^{(k)}(y,x_{0}), \quad k,j = 1,2,3,$$
(1)

$$U_{jp}^{(k)}(y,x_0) = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left(\frac{e^{ik_p R_0}}{R_0}\right), \quad R_0 = |x_0 - y|, \quad (2)$$

$$U_{js}^{(k)}(y,x_0) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ k_s^2 \delta_{kj} \left( \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left( \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} \right) \right].$$
(3)

Здесь  $\rho$  — плотность,  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Лямэ,  $k_p = \omega/c_p$ ,  $k_s = \omega/c_s$ ,  $c_p$ ,  $c_s$  — волновые числа и скорости продольной и поперечной волн,  $\delta_{kj}$  — символы Кронекера.

Целью настоящей работы является исследование амплитудных характеристик рассеянного поля на поверхностях скопления полостных дефектов в упругом материале.

Метод решения. Зависимость характеристик задачи от времени монохроматическая, в частности, для перемещений в упругой среде она имеет вид:  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = Re[\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \exp(-i\omega t)].$ 

Матрица Купрадзе определяет в точке y в радиальном направлении  $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}_0 \mathbf{y}}{|\mathbf{x}_0 \mathbf{y}|}$ ненулевые перемещения в продольной (*p*-волне) и поперечной (*s*-волне) волнах. В высокочастотном режиме колебаний при  $k_p \to \infty$  и  $k_s \to \infty$  в направлениях  $\mathbf{q}$ и  $\mathbf{q}_1$  имеем асимптотические представления перемещений в падающей волне

$$\mathbf{u}_{\mathbf{q}}^{(p)}(y) = Q_{\mathbf{q}} \mathbf{q} \frac{k_p^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k_p R_0}\right) \right],\tag{4}$$

$$u_{\mathbf{q_1}}^{(s)}(y) = Q_{\mathbf{q_1}} \mathbf{q_1} \frac{k_s^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k_s R_0}\right) \right].$$
 (5)

Тангенциальное направление  $\mathbf{q}_1$  перпендикулярно  $\mathbf{q}$ .  $Q_{\mathbf{q}}$  и  $Q_{\mathbf{q}_1}$  — проекции силы  $\mathbf{Q}$  на направления  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}_1$ . Компоненты вектора перемещений в отраженной от свободной граничной поверхности волне в точке x упругой среды определяются следующим интегралом Сомильяны [9]

$$u_k(x) = \iint_S \mathbf{T}_y[\mathbf{U}^{(k)}(y,x)] \cdot \mathbf{u}(y) dS_y, \tag{6}$$

$$\mathbf{T}_{y}\left[\mathbf{U}^{(k)}(y,x)\right] = 2\mu \frac{\partial \mathbf{U}^{(k)}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div}\left(\mathbf{U}^{(k)}\right) + \mu\left(\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\left(\mathbf{U}^{(k)}\right)\right),\tag{7}$$

где матрица Купрадзе  $\mathbf{U}^{(k)}(y, x)$  получается из матрицы  $\mathbf{U}^{(k)}(y, x_0)$  (1) заменой  $x_0$ на x и  $R_0$  на R = |y - x|,  $\mathbf{T}_y$  — вектор силы в точке y,  $\mathbf{u}(y)$  — вектор полного поля перемещений на граничной поверхности,  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности S.

Как и в классической геометрической теории дифракции, разработанной в задачах скалярной акустики [10] и развитой в задачах динамической теории упругости [11], следует различать высокочастотную асимптотику в локальном и в глобальном смысле. Асимптотическое решение, построенное ниже, имеет локальный характер и дает главный член асимптотики амплитуды дифрагированного поля в малой окрестности любого луча, вышедшего из точки  $x_0$ , отразившегося от поверхностей полостей в точках зеркального отражения и пришедшего в точку приема.

Многократная дифракция высокочастотной волны может быть исследована как в рамках классической геометрической теории дифракции [1], так и на основе интегрального представления физической теории Кирхгофа [12]. Основу формирования интегрального представления перемещений в N раз переотраженной упругой волне составляет модификация интегрального представления Кирхгофа [13], реализованная при рассмотрении случая двукратного отражения [6].

Многократные отражения со всевозможными трансформациями упругих волн. Пусть для N раз отраженного луча в любом фиксированном порядке в точках зеркально отражения  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_{N-1}^*, y_N^*$  реализуются p - p и

### Боев Н.В.

s - s отражения соответственно  $N_1$  и  $N_3$  раз, а p - s и s - p трансформации соответственно  $N_2$  и  $N_4$  раз. В точке приёма  $x_{N+1}$  может быть принята как продольная волна  $u(x_{N+1}) = u_r^{(p)}(x_{N+1})$ , так и поперечная  $u(x_{N+1}) = \left(u_{\theta}^{(S)}(x_{N+1})\cos\alpha + u_{\psi}^{(S)}(x_{N+1})\cos\beta\right)\sin^{-1}\gamma$ , где  $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$  — направление отраженной волны относительно локальной декартовой системы координат в точке приёма  $x_{N+1}$ .

При этом амплитуда радиального или тангенциального перемещения N раз отраженного луча в точке  $x_{N+1}$  относительно локальной сферической системы координат  $r, \theta, \psi$  в точке  $y_N^*$  граничной поверхности препятствия представляется кратным интегралом Кирхгофа, который формируется по тем же законам, что и дифракционные интегралы [7] с учетом конкретных отражений и трансформаций распространяющегося луча в точках зеркального отражения.

$$u_{r}(x_{N+1}) = i^{N}B\left(\frac{k_{p}}{2\pi}\right)^{N_{1}+N_{2}}\left(\frac{k_{s}}{2\pi}\right)^{N_{3}+N_{4}}L_{0}^{-1}\prod_{n=1}^{N}L_{n}^{-1}\cos\gamma_{n}^{(2)}V(y_{n}^{*})\times$$
$$\times \iint_{S_{N}^{*}}\iint_{S_{N-1}^{*}}...\iint_{S_{2}^{*}}\iint_{S_{1}^{*}}e^{ik_{p}\varphi}dS_{1}dS_{2}...dS_{N-1}dS_{N},$$
(8)

$$\varphi = k_p^{-1} \left( k_1 \left| x_0 - y_1 \right| + \sum_{n=1}^{N-1} k_n \left| y_n - y_{n+1} \right| + k_N \left| y_N - x_{N+1} \right| \right)$$
(9)

$$L_0 = |x_0 - y_1^*|, \ L_n = |y_n^* - y_{n+1}^*|, ..., \ L_N = |y_N^* - x_{N+1}|, \ n = 1, 2, ..., N - 1$$

Здесь  $B = \frac{Q_{\mathbf{q}}}{4\pi\mu} \left(\frac{k_p}{k_s}\right)^2 \left(B = \frac{Q_{\mathbf{q}_1}}{4\pi\mu} \frac{k_s}{2}\right)$ , если первое отражение p - p или p - s (соответственно s - s или s - p).

В выражениях (8)–(9)  $\mathbf{q}_n^{(1)} = \left\{ \cos \alpha_n^{(1)}, \cos \beta_n^{(1)}, \cos \gamma_n^{(1)} \right\}$  и  $\mathbf{q}_n^{(2)} = \left\{ \cos \alpha_n^{(2)}, \cos \beta_n^{(2)}, \cos \gamma_n^{(2)} \right\}$  — соответственно направление падения и отражения волны в точке зер-

кального отражения  $y_n^*$ .

Выделим четыре варианта пар направлений 
$$\mathbf{q}_n^{(1)}$$
,  $\mathbf{q}_n^{(2)}$ :  
1.  $\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(p)}$ ,  $\mathbf{q}_n^{(2)} = \mathbf{q}_n^{(p)}$ ,  $V(y_n^*) = V_{pp}(y_n^*)$ ,  $(p-p)$ ;  
2.  $\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(p)}$ ,  $\mathbf{q}_n^{(2)} = \mathbf{q}_n^{(s)}$ ,  $V(y_n^*) = V_{ps}(y_n^*)$ ,  $(p-s)$ ;  
3.  $\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(s)}$ ,  $\mathbf{q}_n^{(2)} = \mathbf{q}_n^{(s)}$ ,  $V(y_n^*) = V_{ss}(y_n^*)$ ,  $(s-s)$ ;  
4.  $\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(s)}$ ,  $\mathbf{q}_n^{(2)} = \mathbf{q}_n^{(p)}$ ,  $V(y_n^*) = V_{sp}(y_n^*)$ ,  $(s-p)$ ;

если в точке  $y_n^*$  осуществляется соответственно указанное в скобках отражение или трансформация,  $V(y_n^*)$  — коэффициент отражения или трансформации [14] в точке  $y_n^*$  соответствующей волны. В фазе  $\varphi$  (9) параметр  $k_n = k_p (p - p, p - s)$  и  $k_n = k_s (s - s, s - p)$ , если осуществлены соответствующие указанные в скобках отражения или трансформации волны в точке  $y_n^*$ . Применяя для асимптотической оценки дифракционного интеграла (8) метод 2N-мерной стационарной фазы [15] получаем геометрооптическое приближение перемещений в прошедшей упругой волне

$$u(x_{N+1}) = B_2 \frac{\exp\left\{i\left[\sum_{n=0}^{N} k_n L_n + \frac{\pi}{4} \left(\delta_{2N} - 2N\right)\right]\right\}}{\prod_{n=0}^{N} L_n \sqrt{|\det\left(D_{2N}\right)|}}; \quad B_2 = B \prod_{n=1}^{N} \cos\gamma_n^{(2)} V\left(y_n^*\right), \quad (10)$$

где  $\delta_{2N} = \text{sign } D_{2N}$ , а  $D_{2N} = (d_{nm})$ , n, m = 1, 2, 3, ..., 2N — матрица Гессе, которая является ленточной и симметричной  $d_{nm} = d_{mn}$  со следующими ненулевыми элементами  $d_{nm}, n < m$ :

$$\begin{aligned} d_{2n-1,2n-1} &= \frac{k_{1n}}{k_p L_{n-1}} \cos \alpha_n^{(1)} + \frac{k_{2n}}{k_p L_n} \cos \alpha_n^{(2)} + k_1^n \left(\frac{k_{1n}}{k_p} \cos \gamma_n^{(1)} + \frac{k_{2n}}{k_p} \cos \gamma_n^{(2)}\right), n = \overline{1, N} \\ d_{2n,2n} &= \frac{k_{1n}}{k_p L_{n-1}} \cos \beta_n^{(1)} + \frac{k_{2n}}{k_p L_n} \cos \beta_n^{(2)} + k_2^n \left(\frac{k_{1n}}{k_p} \cos \gamma_n^{(1)} + \frac{k_{2n}}{k_p} \cos \gamma_n^{(2)}\right), n = \overline{1, N}, \\ d_{2n-1,2n} &= -\left(\frac{k_{1n}}{k_p L_{n-1}} \cos \alpha_n^{(1)} \cos \beta_n^{(1)} + \frac{k_{2n}}{k_p L_n} \cos \alpha_n^{(2)} \cos \beta_n^{(2)}\right), n = \overline{1, N}, \\ d_{2n-1,2n+1} &= \frac{1}{L_n} \left(\cos \alpha_n^{(1)} \cos \alpha_{n+1}^{(1)} - a_{11}^n\right), n = \overline{1, N-1}, \\ d_{2n-1,2n+2} &= \frac{1}{L_n} \left(\cos \alpha_n^{(1)} \cos \alpha_{n+1}^{(1)} - a_{21}^n\right), n = \overline{1, N-1}, \\ d_{2n,2n+1} &= \frac{1}{L_n} \left(\cos \beta_n^{(1)} \cos \alpha_{n+1}^{(1)} - a_{12}^n\right), n = \overline{1, N-1}, \\ d_{2n,2n+2} &= \frac{1}{L_n} \left(\cos \beta_n^{(1)} \cos \alpha_{n+1}^{(1)} - a_{22}^n\right), n = \overline{1, N-1}, \end{aligned}$$

Здесь  $\left\{ \cos \alpha_n^{(1)}, \cos \beta_n^{(1)}, \cos \gamma_n^{(1)} \right\}$  — направление падения волны;  $\left\{ \cos \alpha_n^{(2)}, \cos \beta_n^{(2)}, \cos \gamma_n^{(2)} \right\}$  — направление отражения волны в точке  $y_n^*$ ;  $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$  — главные радиусы кривизны граничной поверхности в точке  $y_n^*$ .

В диагональных элементах матрицы Гессе параметры  $k_{1n}$  и  $k_{2n}$  возможны четыре варианта пар значений:

1. 
$$k_{1n} = k_p, \ k_{2n} = k_p, \ (p-p)$$
  
2.  $k_{1n} = k_p, \ k_{2n} = k_s, \ (p-s)$   
3.  $k_{1n} = k_s, \ k_{2n} = k_s, \ (s-s)$   
4.  $k_{1n} = k_s, \ k_{2n} = k_p, \ (s-p)$ 

в зависимости от того какой вид отражения или трансформации волн реализуется в точке  $y_n^*$ .

Заключение. Таким образом, в работе получен главный член асимптотики (10) амплитуды перемещения  $u(x_{N+1})$  в отраженной вдоль луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - ... - y_N^* - x_{N+1}$  высокочастотной продольной или поперечной волне при произвольной последовательности отражений и трансформаций от N препятствий, находящихся в упругой среде в трехмерном случае. Траектория волны представляет собой пространственную ломаную линию с вершинами в точках зеркального отражения. Амплитуда и фаза перемещений в многократно отраженной упругой волне  $u(x_{N+1})$  (10) определяются всеми геометрическими и механическими параметрами задачи.

### Боев Н.В.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
- [2] Sumbatyan M. A., Boyev N. V. High-frequency diffraction by nonconvex obstacles // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 95. № 5. P. 2347–2353.
- Bojarski N. N. A survey of the physical optics inverse scattering identity // IEEE Trans. Anten. and Prop. 1982. № 5. P. 980–988.
- [4] Боев Н. В., Сумбатян М. А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью. // Доклады РАН. 2003. Т. 392. № 5. С. 614–617.
- [5] McNamara, D. A., Pistorius, C. W. I., Malherbe, I. A. G. Introduction to the uniform geometrical theory of diffraction. Norwood.: Artech House, 1990. 372 p.
- [6] Boyev N. V. Short-wave diffraction of elastic waves by voids in en elastic medium with double reflections and transformations // Advanced Structured Materials. Springer: Heidelberg. 2017. V. 59. P. 91–106.
- [7] Boyev N. V., Sumbatyan M. A. Ray Tracing method for a high-frequency propagation of the ultrasonic wave through a triple-periodic array of spheres // Advanced Structured Materials. Springer: Heidelberg. 2017. V. 59. P. 173–188.
- [8] Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.:Физматгиз, 1969. 472 с.
- [9] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [10] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
- [11] Achenbach, J. D., Gautesen, A. K., McMaken, H. Ray methods for waves in elastic solids with applications to scattering by cracks. Pittman, New York. 1982.
- [12] Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир. 1964. 428 с.
- [13] Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
- [14] *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
- [15] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

**Boyev N. V.** Diffraction of the ultrasonic waves by arrays of obstacles in a threedimensional elastic medium with arbitrary laws of their reflections and transformations. In frames of three-dimensional problems we study the short-wave diffraction of elastic waves by arrays of voids in the elastic medium. The problem is reduced to a classical problem of the highfrequency diffraction waves irradiated from a point source in the elastic medium by the array of voids. We study multiple reflections with various possible transformations of elastic waves. To study the problem, we develop a certain method based upon the estimate of diffraction integrals by the multi-dimensional stationary phase method. The obtained explicit expressions for displacements correspond to the geometrical diffraction theory for elastic waves.

# НЕСИНГУЛЯРНЫЕ ГРАДИЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ И КОНЦЕПЦИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

## Васильев В. В.<sup>1</sup>, Лурье С. А.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва <sup>2</sup>Институт прикладной механики РАН, Москва

Рассматриваются задачи механики трещин в нелокальной теории упругости для конечных и полубесконечных трещин. Определяются локальные поля напряжений, для которых формулируется критерий разрушения. Используется вариант нелокальной теории, позволяющий находить локальные напряжения как решения неоднородных уравнений Гельмгольца, в которых неоднородность определяется классическими напряжениям. Для построения решений используется метод радиальных множителей и представление Папковича-Нейбера. Показано, что в задачах механики трещин распределения локальных напряжений в окрестности вершин трещины являются несингулярными, имеют вид, характерный для концентрации напряжений, и зависят только от уровня действующих напряжений и величины масштабного параметра, который находится в результате механических испытаний образцов материала.

1. Введение. В последние годы широко обсуждается проблема сингулярностей в задачах теории упругости и механики трещин [1, 2]. Сингулярность решений для напряжений в линейной теории упругости в вершине трещины исключает применение критериев прочности тел с концентрацией напряжений. Напротив, градиентная упругость обеспечивает регуляризацию сингулярных решений дифференциальных уравнений теории упругости [3–5], позволяет описывать размерные эффекты и допускает возможность использования традиционных подходов к оценке прочности. В качестве короткого введения в нелокальную упругость приведем следующие простые соображения. Рассмотрим плоскую задачу и введем функцию U(x, y), равную среднему значению функции u(x, y) в прямоугольном представительном фрагменте  $a/2 \leq \alpha, \beta \leq a/2$ , т. е.

$$U(x,y) = \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} K(\alpha,\beta) (u(x,y;\alpha,\beta)d\alpha d\beta,$$
(1)

где  $K(\alpha, \beta)$  — ядро усреднения.

Используем далее разложение подынтегральной функции в степенной ряд по локальным координатам

$$u(x, y; \alpha, \beta) = u(x, y) + \alpha u_{,x} + \beta u_{,y} + (1/2) \left( \alpha^2 u_{,xx} + 2\alpha \beta u_{,xy} + \beta^2 u_{,yy} \right) + \dots$$
(2)

Можно показать, что существует такое ядро усреднения, что после подстановки (2) в (1) и интегрирования по фрагменту получаем  $U(x, y) \approx u(x, y) - s^2 \Delta u(x, y)$ , где s

масштабный параметр. Нелокальные функции могут быть введены также для векторных и тензорных полей, определяющих напряженно-деформированное состояние плоской задачи. В частности, показывается, что уравнения равновесия могут быть переписаны в терминах обобщенных напряжений [5, 6]  $\tau_{ij}$ :  $\tau_{ij} = (\sigma_{ij} - l^2 \Delta \sigma_{ij})$ Полагается, что законы Гука формулируются в терминах обобщенных напряжений и обобщенных деформаций, что естественно с физической точки зрения. Локальные напряжения используются для оценки прочности. При решении задачи в напряжениях на первом этапе рассматривается традиционная краевая задача для обобщенных напряжений  $\tau_{ij}$ , а значит и для обобщенных деформаций и перемещений. На втором этапе полученная функция  $\tau_{ij}$  подставляется в уравнение  $\tau_{ij} = (\sigma_{ij} - l^2 \Delta \sigma_{ij})$ , которое решается относительно локальных напряжений  $\sigma_{ij}$ .

**2.** Градиентное решение для конечной трещины. Рассмотрим плоскую задачу для бесконечной полосы, растягиваемой в направлении оси ОУ напряжениями  $\sigma$  и содержащей конечную трещину длиной  $2l, l \leq x \leq l, y = 0$ . Классическое решение этой задачи записывается в комплекснозначной форме (w = x + iy) через гармонический и бигармонический потенциалы  $\phi$  и  $\psi$ :

$$\tau_{11} = \sigma \operatorname{Re}(\phi + \psi), \ \tau_{22} = \sigma \operatorname{Re}(\phi - \psi), \ \tau_{xy} = \sigma \operatorname{Im} \psi, \tag{3}$$

где следует принять  $\phi = \phi_0$ ,  $\psi = \psi_0$ ,  $\phi_0 = w/(w^2 - l^2)^{-1/2}$ ,  $\psi_0 = l^2(w - \bar{w})/[2(w^2 - l^2)^{-3/2}]$ . Построим обобщенное решение, не имеющее особенностей в начале координат. Для этого найдем регулярные решения для гармонической и бигармонической функции  $\phi$  и  $\psi$ , удовлетворяющие уравнениям  $\phi - s^2 \nabla^2 \phi = \phi_0$ ,  $\psi - s^2 \nabla^2 \psi = \psi_0$ , компенсируя особенности частных решений неоднородных уравнений Гельмгольца (классических сингулярных решений) в сингулярных точках  $x = \pm l$ , y = 0 с помощью радиальных множителей [7]  $\chi_0 = e^{-r/s} w^{-1/2}$ ,  $\chi_1 = (r/s + 1) e^{-r/s} w^{-3/2}$ ,  $\chi_2 = ((r/s)^2 + 3 (r/s + 1)) e^{-r/s} w^{-5/2}$ , удовлетворяющих уравнению Гельмгольца и имеющих набор тех же самых особенностей. В результате найдем

$$\phi = \frac{w}{\sqrt{w^2 - l^2}} - \left(\frac{l}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{e^{-r^+/s}}{(w-l)^{1/2}} + i\frac{e^{-r^-/s}}{(w+l)^{1/2}}\right), \quad r^{\pm} = \sqrt{(w \mp l)(\bar{w} \mp l)},$$
$$\psi = \frac{l^2(w - \bar{w})}{2(w^2 - l^2)^{3/2}} - 4\left(\frac{l}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{15}{16}\frac{s^2}{l^2}\right) \left(\frac{e^{-r^+/s}}{(w-l)^{1/2}} - i\frac{e^{-r^-/s}}{(w+l)^{1/2}}\right) +$$

$$+\frac{6s^{2}l^{2}w}{(w^{2}-l^{2})^{5/2}} + \frac{3s^{2}}{16}\left(\frac{l}{2}\right)^{-1/2}\left(\frac{(r^{+}/s+1)e^{-r^{+}/s}}{(w-l)^{3/2}} + i\frac{(r^{-}/s+1)e^{-r^{-}/s}}{(w+l)^{3/2}}\right) - \frac{s^{2}}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{((r^{+}/s)^{2}+3(r^{+}/s+1))e^{-r^{+}/s}}{(w-l)^{5/2}} - i\frac{((r^{-}/s)^{2}+3(r^{-}/s+1))e^{-r^{-}/s}}{(w+l)^{5/2}}\right).$$
(4)

**3.** Градиентное решение для бесконечных трещин. Для построения регулярных решений для полубесконечных трещин в изотропной полосе воспользуемся представлением Папковича–Нейбера, чтобы записать классические решения в

удобной форме через одну комплекснозначную функцию  $f = f_x + if_y$ ,  $f = f(w, \bar{w})$ ,  $\nabla^2 f = 0$  и для полей перемещений  $U = U_x + iU_y$ ,  $U_x = \text{Re}U$ ,  $U_y = \text{Im}U$  и для полей напряжений  $\tau_{xx} = \text{Re}(P+T)$ ,  $\tau_{yy} = \text{Re}(P-T)$ ,  $\tau_{xy} = \text{Im}T$  (P, T – комплексные потенциалы). Показано, что классические решения для перемещений и напряжений выражаются через одну гармоническую функцию:

$$U = \frac{f}{\mu} - \frac{1}{4\mu(1-\nu)} \frac{\partial(\bar{w}f + wf)}{\partial\bar{w}},$$
  

$$P = \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial\bar{w}}\right),$$
  

$$T = 2\frac{\partial f}{\partial\bar{w}} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2(\bar{w}f + w\bar{f})}{\partial\bar{w}^2}.$$
(5)

Здесь  $f(w, \bar{w})$  – гармонический комплексный потенциал, который для трещин моды I, моды II и моды III имеет соответственно вид:

$$f = f_I = K_I \sqrt{2/\pi} \left( \frac{w^{1/2} - \bar{w}^{1/2}}{(5 - 8\nu)} \right) (1 - \nu),$$
  
$$f = f_{II} = -i K_{II} \sqrt{2/\pi} \left( \frac{w^{1/2} - 3\bar{w}^{1/2}}{(5 - 8\nu)} \right) (1 - \nu),$$
  
$$f = f_{III} = K_{III} \sqrt{2/\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{w^{1/2}}{2} \right).$$

Для градиентной теории локальные регулярные поля напряжений и перемещений находятся как решения неоднородных уравнений Гельмгольца

$$u - s^2 \nabla^2 u = U, \ p - s^2 \nabla^2 p = P, \ t - s^2 \nabla^2 t = T$$
 (6)

В правых частях (6) стоят сингулярные комплекснозначные функции U, P, T. Они выражаются для каждой моды трещин через одну гармоническую функцию (5). Регулярное локальное решение, т.е. потенциалы p и t, перемещения  $u = u_x + iu_y$  и напряжения  $\sigma_{xx} = \text{Re}(p+t), \sigma_{yy} = \text{Re}(p-t), \tau_{xy} = \text{Im}t$  строится с помощью метода радиальных множителей [7]. Для трещины моды I такое регулярное решение имеет вид:

$$u = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}\mu} \left[ \left( \frac{3}{2} - 2\nu \right) w^{1/2} - \frac{\bar{w}^{1/2}}{4} + \frac{s^2}{2} \left( 1 - \frac{(r/s)^2}{2} + 2\hat{h}_1(r) \right) \bar{w}^{-3/2} \right],$$

$$p = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \hat{h}_0(r)}{2} \left( w^{-1/2} + \bar{w}^{-1/2} \right), \quad (7)$$

$$t = -\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi}} \left[ \left( 1 - \hat{h}_0(r) \right) w^{-1/2} + 6s^2 \left( 1 - \frac{(r/s)^2}{6} - \frac{4}{3}\hat{h}_2(r) \right) \bar{w}^{-5/2} \right],$$

где  $\hat{h}_0(r) = e^{-r/s}, \ \hat{h}_1(r) = -\frac{r/s+1}{2}e^{-r/s}, \ \hat{h}_2(r) = \frac{(r/s)^2 + 3(r/s+1)}{4}e^{-r/s}.$ 

Регулярные решения строятся и для трещин моды II и для трещин моды III. Например, имеем для комплекснозначной функции перемещений для трещин моды II:

$$u = -i\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}\mu} \left[ \left(\frac{3}{2} - 2\nu\right) w^{1/2} - \frac{3\bar{w}^{1/2}}{4} + \frac{s^2}{2} \left(1 + \frac{(r/s)^2}{2} + 2\hat{h}_1(r)\right) \bar{w}^{-3/2} \right]$$
(8)

и, соответственно, регулярное решение для трещин моды III.

$$u_{z} = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$u_{z} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \hat{h}_{0}(r)\right) \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \hat{h}_{0}(r)\right) \cos \frac{\theta}{2}.$$
(9)

4. Концепция концентрации напряжений в механике трещин. Несингулярные решения, полученные с использованием градиентных моделей (3)-(9) являются основой для реализации концепции концентрации напряжений в механике трещин предложенной в работе [8]. Например, для трещины моды I выражение для напряжения  $\sigma_{yy} = \sigma[\sigma_{yy}{}^0(\hat{r}\lambda)], \hat{r} = r/l, \lambda = l/s,$  рассчитанное на продолжении трещины, может использоваться в качестве оценки прочности. Распределение  $\sigma_{uu}{}^{0}(\hat{r}\lambda)$  является положительной ограниченной и непрерывной функцией параметра  $\hat{r}$  на всем интервале определения  $0 < \hat{r} < \infty$  обращающуюся в ноль при  $\hat{r} = 0$ , типичной для концентрации напряжений. Прочность можно оценивать по уровню предельных напряжений  $\sigma_{yy}$ . Вместо  $\sigma_{yy}$  может использоваться и величина интенсивности напряжений  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}$ , если речь идет о пластических материалах. Найденные регулярные решения для напряжений позволяют рассчитать коэффициент концентрации напряжений  $k_{\sigma} = \sigma^m / \sigma$ , где  $\sigma^m$  – максимальное значение напряжений  $\sigma_{yy}$  (или интенсивности напряжений  $\sigma_i$ . Расчетный коэффициент концентрации напряжений зависит от параметра  $\lambda$ . Полученные расчётные оценки прочности сравниваются с экспериментальными. В результате определяется параметр  $\lambda = l/s$  и находится масштабный параметр s, который наряду с пределом прочности является характеристикой разрушения. Эксперименты проводились как для хрупких, так и для пластических материалов. Показано, что параметр *s* для конкретного материала является постоянной величиной и может наряду с пределом прочности рассматриваться в качестве параметра разрушения, давая с высокой точностью прогноз прочности материалов. Более того, концепция концентрации напряжений позволила теоретически предсказать эффект повышения предела пропорциональности в окрестности вершины трещины для пластических материалов, что подтверждено и экспериментом. Отмечено, что для пластичного материала этот параметр примерно на порядок больше значения, полученного для хрупкого материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 19-01-00355a и государственного задания ИПРИМ РАН АААА-А17-117032010137-0.

### ЛИТЕРАТУРА

 Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in Linear Elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today // Eng. Fract. Mech. 2009. № 76. P. 1771– 1784.

 $\sigma$ 

- [2] Sih G. S., Tang X. S Scaling of volume energy density function reflecting damage by singularities at macro-, meso- and microscopic level // Theor. Appl. Fract. Mech. 2005. № 43. P. 211–231.
- [3] Gutkin M. Y., Aifantis E. C Dislocations in the theory of gradient elasticity // Scripta mater. 1999. № 40(5). P. 559–566.
- [4] Lurie S.A., Belov P.A Gradient effects in fracture mechanics for nano-structured materials // Eng. Fract. Mech. 2014. № 130. P.3–11.
- [5] Васильев В. В., Лурье С. А. Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики // Прикладная математика и механика. 2018. № 82(4). С. 459–471.
- [6] Васильев В. В., Лурье С. А. Обобщенная теория упругости // Изв. РАН. МТТ. 2015.
   № 4. С. 16–27.
- [7] Lurie S., Volkov-Bogorodskiy D., Moiseev E., Kholomeeva A. Radial multipliers in solutions of the Helmholtz equations // Integral Transforms Special Funct. 2019. № 30. P. 254–263.
- [8] Васильев В. В., Лурье С. А. Новый метод исследования прочности хрупких тел с трещинами // Деформация и разрушение материалов. 2019. № 9. С. 12–19.

Vasiliev V. V., Lurie S. A. Nonsingular gradient solutions and concepts stress concentration in mechanics of cracks. The problems of crack mechanics in the nonlocal theory of elasticity for finite and semi-infinite cracks are considered. Local stress fields are determined for which the fracture criterion is formulated. A version of the nonlocal theory is used that allows one to find local stresses as solutions of the inhomogeneous Helmholtz equations in which the inhomogeneity is determined by classical stresses. To construct solutions, the radial factors method and the Papkovich-Neuber representation are used. It is shown that, in problems of crack mechanics, the distributions of local stresses in the vicinity of crack tips are nonsingular, have the form characteristic of stress concentration, and depend only on the level of acting stresses and the the scale parameter, which is found as a result of mechanical testing of material samples.

# О ВОССТАНОВЛЕНИИ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

## Ватульян А.О., Юров В.О.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Сформулирована новая обратная задача для неоднородного в радиальном направлении полого цилиндрического волновода. Итерационным образом восстановлены две функции неоднородности. На каждой итерации осуществлена линеаризация задачи и методом регуляризации Тихонова решена система интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Ядра и правые части интегральных уравнений построены с применением аппарата интегрального преобразования Фурье.

Постановка задачи. Аналогично статье [1] рассмотрены установившиеся продольно-радиальные колебания неоднородного в радиальном направлении и однородного в продольном направлении полого упругого цилиндрического волновода, занимающего область ( $a \leq r \leq b, -\infty < z < \infty$ ). Будем считать неизвестными функции неоднородности  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$ ,  $\rho(r)$ , характеризующие изменение параметров Ламе и плотности. Сформулируем задачу об отыскании полей перемещений и напряжений в волноводе, колебания которого вызваны периодической во времени с частотой  $\omega$  нагрузкой, приложенной в кольцевой области внешней границы. Остальная часть границы волновода свободна от напряжений.

Для решения обратной задачи о реконструкции функций неоднородности предпочтительно получить максимум информации об объекте исследования. Поэтому рассмотрим два режима нагружения 1)  $\sigma_r(b,z) = p_r \delta(z)$ ,  $\sigma_{rz}(b,z) = 0$ , 2)  $\sigma_r(b,z) = 0$ ,  $\sigma_{rz}(b,z) = p_{rz}\delta(z)$ , приводящие к двум решениям. Обе нагрузки являются осесимметричными и позволяют разыскивать осесимметричные решения задачи. Применим интегральное преобразование Фурье вдоль продольной координаты, и тем самым перейдем от задачи в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, краевую задачу для которой будем решать методом пристрелки. Для применения метода пристрелки запишем систему уравнений в виде векторного дифференциального уравнения первого порядка (канонический вид), которое в безразмерных величинах примет вид

$$\tilde{\mathbf{X}}'(x,\alpha,\kappa) = \mathbf{A}(x,\alpha,\kappa) \tilde{\mathbf{X}}(x,\alpha,\kappa), \text{ где } \tilde{\mathbf{X}} = \left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4\right)^T, x = rb^{-1}.$$
 (1)

Среди безразмерных компонент вектора  $\mathbf{X}$  содержатся трансформанты двух компонент вектора перемещений  $u_r = bX_1$ ,  $u_z = ibX_2$ , и двух компонент вектора напряжений  $\sigma_r = \mu_0 X_3$ ,  $\sigma_{rz} = i\mu_0 X_4$ ; здесь  $\mu_0$  — характерное значение модуля сдвига. Также введём параметры  $\xi_0 = ab^{-1}$ ,  $y = zb^{-1}$  и функции  $\lambda(xb) = \mu_0 g_1(x)$ ,  $\mu(xb) = \mu_0 g_2(x)$ ,  $\rho(xb) = \rho_0 g_3(x)$ , характеризующие неоднородность волновода;  $\kappa^{2} = \rho_{0}\omega^{2}b^{2}\mu_{0}^{-1}$ ;  $\rho_{0}$  — характерное значение плотности,  $\alpha$  — параметр преобразования. Ненулевые компоненты матрицы  $\mathbf{A}(x, \alpha, \kappa)$  представлены ниже

$$a_{11} = -\frac{g_1}{xG}, \ a_{12} = \alpha \frac{g_1}{G}, \ a_{13} = \frac{1}{G}, \ a_{21} = -\alpha, \ a_{24} = \frac{1}{g_2}, \ a_{31} = \frac{G}{x^2} - \frac{g_1^2}{x^2G} - g_3\kappa^2, \\ a_{32} = a_{41} = -\alpha \frac{2g_1g_2}{xG}, \ a_{33} = -\frac{2g_2}{xG}, \ a_{34} = \alpha, \ a_{42} = \alpha^2 \left(G - \frac{g_1^2}{G}\right) - g_3\kappa^2, \ a_{43} = -a_{12}, \\ a_{44} = -\frac{1}{G}$$
 For  $G = a_1 + 2a_2$ . Падее в тексте будем использовать обозначения  $\tilde{\mathbf{X}}(x)$ 

 $a_{44} = -\frac{1}{x}$ , где  $G = g_1 + 2g_2$ . Далее в тексте будем использовать обозначения  $\mathbf{X}(x)$ вместо  $\mathbf{X}(x, \alpha, \kappa)$ .

В силу линейности задачи амплитуда решения пропорциональна амплитуде внешней нагрузки. Для дальнейших построений удобно взять  $p_r = p_{rz} = \mu_0$ . Преобразованные по Фурье граничные условия для двух режимов нагружения примут вид

$$\tilde{X}_3(\xi_0) = \tilde{X}_4(\xi_0) = 0, \tilde{X}_3(1) = 1, \tilde{X}_4(1) = 0,$$
(2)

$$\tilde{X}_3(\xi_0) = \tilde{X}_4(\xi_0) = 0, \tilde{X}_3(1) = 0, \tilde{X}_4(1) = 1.$$
(3)

Далее рассмотрим две вспомогательные задачи Коши для операторного уравнения (1), со следующими начальными условиями

$$\tilde{X}_{1}^{(1)}\left(\xi_{0}\right) = 1, \ \tilde{X}_{2}^{(1)}\left(\xi_{0}\right) = 0, \ \tilde{X}_{3}^{(1)}\left(\xi_{0}\right) = \tilde{X}_{4}^{(1)}\left(\xi_{0}\right) = 0, \tag{4}$$

$$\tilde{X}_{1}^{(2)}\left(\xi_{0}\right) = 0, \tilde{X}_{2}^{(2)}\left(\xi_{0}\right) = 1, \ \tilde{X}_{3}^{(2)}\left(\xi_{0}\right) = \tilde{X}_{4}^{(2)}\left(\xi_{0}\right) = 0.$$

$$(5)$$

Решение задачи (1),(4) обозначено через  $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}$ , а решение (1),(5) через  $\tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ . Эти решения являются линейно независимыми и позволяют отыскивать решения задач (1),(2) и (1),(3) в виде следующих линейных комбинаций  $\tilde{\mathbf{X}} = c_1 \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + c_2 \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}} = d_1 \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + d_2 \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ , причем граничные условия на внутренней границе  $x = \xi_0$ удовлетворяются автоматически, а при удовлетворении граничным условиям на внешней границе возникают неоднородные СЛАУ относительно коэффициентов  $c_1, c_2$  и  $d_1, d_2$ . Решая системы для различных пар ( $\alpha, \kappa$ ), находим  $c_1, c_2, d_1, d_2$  и определяем  $\tilde{\mathbf{X}}(\alpha, \kappa)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}(\alpha, \kappa)$ . Решения существуют всегда, кроме некоторого множества пар ( $\alpha, \kappa$ ), которые образуют дисперсионное множество задачи [1, 2], одинаковое для  $\tilde{\mathbf{X}}$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}$  (так как левые части возникающих СЛАУ одинаковы).

Решение задачи в оригиналах представимо в виде следующего интеграла

$$\mathbf{X}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{X}}(x,\alpha) \exp\left(-i\alpha y\right) d\alpha.$$
(6)

Формула (6) представляет собой обобщённое обратное интегральное преобразование Фурье. Контур интегрирования Г получен из  $(-\infty, \infty)$  путём деформирования в окрестности вещественных полюсов подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения [3]. При нормальной дисперсии положительные полюса огибаются снизу, а отрицательные сверху. При аномальной дисперсии наименьший по модулю вещественный полюс контур Г обходит противоположным образом.

Применим теорему о вычетах для вычисления (6). В зависимости от знака y выполняется замыкание контура в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Так для

y > 0 решение представимо в виде суммы слагаемых, порожденных полюсами  $\alpha_j$  подынтегральной функции, расположенными в областях  $S = \{\alpha : Re\alpha < 0, Im\alpha = 0\}$  и  $M = \{\alpha : Im\alpha < 0\}$ 

$$\mathbf{X}(x,y) = -i\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Res} \tilde{\mathbf{X}}(x,\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_j} \exp\left(-i\alpha_j y\right).$$
(7)

При расчётах в сумме (7) удерживались слагаемые, относящиеся к полюсам  $\alpha_j$  из области S, что справедливо при построении решения в дальней зоне.

Решение обратной задачи. Исследуем задачу по определению функций  $(g_2(x), g_3(x))$  на основе дополнительной информации о полях смещений на некоторой части внешней границы. Получим информацию об объекте, прикладывая динамические нагрузки с разной частотой и измеряя поля радиальных и продольных перемещений в одной точке  $y_0$ . Выберем эту точку достаточно удалённой от области нагружения для корректного использования конечномодового приближения. Нагружение осуществляется так, как описано в прямой задаче. Обозначим

$$f_j = X_1 (1, y_0)|_{\kappa = \kappa_j}, \ f_{j+N} = X_2 (1, y_0)|_{\kappa = \kappa_j}, \ j = 1..N.$$
 (8)

Рассмотрим функционал невязки между заданным (комплексным) полем перемещений (8) и полем, соответствующим тестовой паре функций  $g_{2s}(x), g_{3s}(x)$ .

$$J_{s} = \max_{j=1..N} \left( \left| X_{1} (1, y_{0}) \right|_{\kappa=\kappa_{j}} - f_{j} \right|, \left| X_{2} (1, y_{0}) \right|_{\kappa=\kappa_{j}} - f_{j+N} \right| \right),$$
(9)

где  $X_1(1, y_0), X_2(1, y_0)$  вычислены при  $g_2(x) = g_{2s}(x), g_3(x) = g_{3s}(x).$ 

Алгоритм решения обратной задачи заключается в составлении последовательности функций, минимизирующих функционал невязки (9). Первый шаг в решении задачи — выбор начального приближения  $q_{20}(x)$ ,  $q_{30}(x)$ . Будем считать, что известны средние значения искомых функций из проведённых статических экспериментов, то есть начальные приближения для обеих функций являются константами. Также начальное приближение можно найти путём минимизации функционала невязки  $J_0$ , считая искомые функции постоянными. Второй шаг линеаризация операторного уравнения (1) в окрестности найденного начального приближения, осуществляемая в пространстве трансформант. Искомое решение представляется в виде суммы начального приближения и поправки:  $g_2 = g_{20} + \delta g_{20}$ ,  $g_3 = g_{30} + \delta g_{30}$ . Для нахождения поправок составлены 2 интегральных оператора в пространстве трансформант. Далее произведена процедура перехода к оригиналам, в результате чего получена система интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами, которые вычисляются на основе теоремы о вычетах. Отметим, что трансформанты (функции, не имеющие явного представления) имеют полюса второго порядка, и для подсчёта вычетов в них, составлены вспомогательные задачи Коши, которые решаются численно. Таким образом система интегральных уравнений для нахождения поправок имеет вид

$$\sum_{k=2}^{3} M_{jk} \hat{G}_k = F_j, \quad j = 1, 2,$$
(10)

где 
$$M_{jk}\hat{G}_{k} = \int_{\xi_{0}}^{1} K_{jk}(x, y, \kappa) \,\delta g_{k0}(x) \, x \, dx.$$

Произведена дискретизация интегральных операторов в (10) на основе квадратурных формул средних центральных прямоугольников; сформулированная СЛАУ решается методом регуляризации Тихонова, откуда находятся узловые значения функций  $\delta g_{20}$ ,  $\delta g_{30}$ . На третьем шаге используем сплайн аппроксимацию для вычисления нового приближения  $g_{21} = g_{20} + \delta g_{20}$ ,  $g_{31} = g_{30} + \delta g_{30}$  и вычисляем невязку  $J_1$ .

Также как по функциям  $g_{20}$ ,  $g_{30}$  построено новое (более близкое к точному) приближение  $g_{21}$ ,  $g_{31}$ , можно продолжать процесс, повторяя второй и третий шаг и формируя решение по принципу  $g_{2(n+1)} = g_{2n} + \delta g_{2n}$ ,  $g_{3(n+1)} = g_{3n} + \delta g_{3n}$ . Использован смешанный критерий выхода из итерационного процесса: достижение заданного числа итераций;  $J_n < 10^{-6}$ .

Вычислительный эксперимент. Реализован итерационный процесс для одновременного восстановления функций  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$ . Информация о полях перемещений для решения обратной задачи получена путём решения прямой задачи для следующего набора параметров:  $\xi_0 = 0.8$ ,  $g_1(x) = 1.5$ ,  $g_2(x) = 4(1+x^3)(\xi_0^3 + \xi_0^2 + \xi_0 + 5)^{-1}$ ,  $g_3(x) = 1 + 0.3(\sin(2.5\pi(x-\xi_0)) - 2\pi^{-1})$ , где функции неоднородности являются монотонно возрастающими. Из полученного решения сохранена следующая информация  $X_1(1,1)|_{\kappa=\kappa_j}$ ,  $X_2(1,1)|_{\kappa=\kappa_j}$ , где  $\kappa_j = 0.5 + 0.1j$ , j = 1...7.

Будем считать заданной информацию о средних значениях модулей упругости и плотности и соответственно примем  $g_{10}(x) = 1.5$ ,  $g_{20}(x) = 1$ ,  $g_{30}(x) = 1$ .



Рисунок 1 – Невязка на итерациях.

На рисунке 1 приведена зависимость невязки  $J_n$  от числа итераций n. Рисунок 1 свидетельствует о достаточной устойчивости описанного вычислительного процесса, что характеризуется монотонно убывающей невязкой; при n = 10 условие  $J_n \ge J_{n+1}$  перестало выполняться и итерационный процесс был остановлен.

На рисунке 2 приведены результаты восстановления функций  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$ . Сплошной линией обозначены заданные функции, пунктиром обозначен результат восстановления, достигнутый на десятой итерации. Максимальная погрешность



Рисунок 2 – Результаты восстановления.

восстановления наблюдается в окрестности внутренней границы и составляет 2.8% для  $g_2(x)$  и 3.6% для  $g_3(x)$ .

Заключение. Решена обратная задача по восстановлению двух функций, характеризующих изменение модуля сдвига и плотности в неоднородном цилиндрическом волноводе по информации о поле смещений в одной точке внешней границы в некотором наборе частот. Проведены вычислительные эксперименты, которые показали, что погрешность восстановления зависит от изменяемости функций, характеризующих неоднородность, и не превышает в среднем 2% для монотонных функций.

Исследование поддержано Российским научным фондом (проект № 18-71-10045).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О., Юров В. О. Анализ вынужденных колебаний в функциональноградиентном цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 649– 656.
- [2] Vatul'yan A. O., Yurov V. O. On waves processes in transversally-inhomogeneous waveguides. In: Karapetyants A., Kravchenko V., Liflyand E. (eds) Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis. OTHA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2019. V. 291. C. 427–449. Springer, Cham
- [3] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 320 с.

Vatulyan A. O., Yurov V. O. On restoration of laws of changes in the characteristics of a functionally graded cylindrical waveguide. A new inverse problem for a radially inhomogeneous hollow cylindrical waveguide is formulated. Two functions of inhomogeneity is iteratively restored. At each iteration, the problem is linearized and the system of Fredholm integral equations of the first kind is solved by the Tikhonov regularization method. The kernels and the right-hand sides of the integral equations are constructed using the apparatus of the integral Fourier transform.

# ОБРАТНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕФЕКТА В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

## Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

В работе представлено аналитическое решение прямой нестационарной задачи для трехступенчатого упругого стержня. Разработан и реализован численно-аналитический метод решения обратной нестационарной задачи по идентификации дефекта в упругом стержне.

Имеется упругий стержень конечной длины, один из концов которого жестко закреплен, а к другому концу прикладывается осевая сила с заданным законом изменения по времени. Стержень имеет переменные геометрические характеристики, которые изменяются по его длине в зависимости от присутствующего дефекта. Геометрическими характеристиками являются площади поперечного сечения стержня, а также координаты изменения этих площадей. Указанные выше геометрические характеристики будем называть параметрами дефекта стержня.Отметим, что даже в такой постановке получить точное аналитическое решение поставленной прямой задачи не представляется возможным.

Для построения аналитического решения задачи, истинный дефект приближенно заменяется модельным аналогом, который представляет собой скачкообразное изменение площади поперечного сечения на некотором заранее неизвестном участке стержня. Таким образом, задача сводится к представлению стержня с реальным дефектом в виде трехступенчатого стержня. При этом областью дефекта является одна из трех его ступеней, геометрические параметры которой (площадь поперечного сечения, координаты начала и конца) требуется определить из решения обратной задачи.

Постановка прямой задачи состоит в определении перемещений упругого стержня. Её решение найдено авторами и имеет вид:

$$u(x,\tau) = u_{1}(x,\tau) H(x_{1}-x) + u_{2}(x,\tau) H(x-x_{1}) H(x_{2}-x) + u_{3}(x,\tau) H(x-x_{2}),$$

$$u_{1} = \frac{-4}{s} F_{13} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^{n} F_{\alpha} \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} P(\tau - y_{j}) H(\tau - y_{j}),$$

$$u_{2} = \frac{-2}{s} F_{321} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^{n} F_{\alpha} \sum_{m=1}^{4} a_{m} P(\tau - y_{m}) H(\tau - y_{m}),$$

$$u_{3} = \frac{1}{F_{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathbf{z}_{\alpha,n} (-1)^{n} F_{\alpha} \sum_{k=1}^{8} b_{k} P(\tau - y_{k}) H(\tau - y_{k}),$$
(1)

здесь

$$\begin{split} F_{\alpha} &= F_{123}^{\alpha_2 + \alpha_3} F_{213}^{\alpha_4 + \alpha_5} F_{312}^{\alpha_6 + \alpha_7}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{7} \alpha_i, \quad \mathbf{z}_{\alpha,n} = \frac{n!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \, \alpha_3! \, \alpha_4! \, \alpha_5! \, \alpha_6! \, \alpha_7!}, \\ \varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 \left(1 - x_1\right) + \alpha_4 x_2 + \alpha_5 \left(1 - x_2\right) + \alpha_6 \left(x_1 - x_2 + 1\right) + \alpha_7 \left(x_2 - x_1\right), \\ y_1 &= 1 + 2\varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) - x, \quad y_2 = 1 + 2\varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) + x, \\ y_3 &= 1 + 2\varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) - x - 2x_1, \quad y_4 = 1 + 2\varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) + x - 2x_1, \\ y_5 &= 1 + 2\varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) + x + 2x_2, \quad y_6 = 1 + 2\varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) - x - 2x_2, \\ y_7 &= 1 + 2\varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) + x - 2x_1 + 2x_2, \quad y_8 = 1 + 2\varphi\left(\alpha, x_1, x_2\right) - x + 2x_1 - 2x_2, \\ a_1 &= -a_4 = 1, \quad a_2 = -a_3 = F_{12}, \quad b_2 = -b_1 = 1, \\ b_3 &= -b_4 = F_{123}, \quad b_5 = -b_6 = F_{213}, \quad b_7 = -b_8 = F_{312}, \\ F_{12} &= \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}, \quad F_{13} = \frac{F_1}{F_1 F_2 + F_1 F_3 + F_3 F_2 + F_2^2}, \\ F_{123} &= \frac{F_1 F_2 + F_1 F_3 - F_2 F_3 - F_2^2}{F_1 F_2 + F_1 F_3 + F_2 F_3 + F_2^2}, \quad F_{321} = \frac{F_1 + F_2}{F_1 F_2 + F_1 F_3 + F_3 F_2 + F_2^2}, \quad F_{312} = \frac{F_1 F_2 - F_1 F_3 + F_2 F_3 - F_2^2}{F_1 F_2 + F_1 F_3 + F_3 F_2 + F_2^2}, \\ F_{321} &= \frac{F_1 + F_2}{F_1 F_2 + F_1 F_3 + F_3 F_2 + F_2^2}, \quad F_{312} = \frac{F_1 F_2 - F_1 F_3 + F_2 F_3 - F_2^2}{F_1 F_2 + F_1 F_3 + F_3 F_2 + F_2^2}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{z}_{\alpha,n}$  — мультиномиальный коэффициент,  $\varphi(\alpha, x_1, x_2) > 0$ .

Обратная нестационарная геометрическая задача состоит в определении одного, нескольких или всех неизвестных параметров дефекта при заданных остальных параметрах с учетом нулевых начальных условий и граничных условий закрепления на одном конце. На противоположный конец стержня воздействует заданная осевая сила, зависящая от времени. Полагается, что зависимость перемещения торца стержня, на который воздействует эта сила, известна из показания датчика перемещений, что и составляет дополнительное условие, необходимое для решения обратной задачи (рисунок 1).



Для решения обратной нестационарной задачи по идентификации дефекта стержень разбивается на три участка (рисунок 1) таким образом, что первый и третий участок имеют одинаковую площадь поперечного сечения, а второй (средний) участок отличается от двух других. Здесь  $F_1$  — площадь поперечного сечения стержня на участке без дефекта,  $F_2$  — площадь стержня на участке с дефектом,  $x_1$  и  $x_2$  — координаты локализации дефекта. Как указано выше, средний участок будет описывать дефект при его наличии. При этом перемещения конца третьего участка должны совпадать с перемещениями регистрируемыми датчиком. Искомые параметры явным образом входят в найденное решение задачи (1).

Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$u(l,\tau) = u(l,\tau; x_1, x_2, F_2) = U_d(\tau),$$
(2)

где  $U_d(\tau)$  — значения перемещений, регистрируемые датчиком.

Уравнение (2) в момент времени  $\tau$ , представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение с тремя неизвестными в качестве которых, выступают параметры дефекта. Таким образом, для получения замкнутой системы трех уравнений относительно трех неизвестных достаточно зафиксировать три момента времени  $\tau_k$ , k = 1, 2, 3 и получить соответственно три уравнения, из которых могут быть определены искомые неизвестные параметры:

$$U_k(x_1, x_2, F_2) = 0, \ k = 1, 2, 3,$$

где  $U_k(x_1, x_2, F_2) = u(l, \tau_k, x_1, x_2, F_2) - U_{dk}, \ U_{dk} = U_d(\tau_k).$ 

Следовательно, геометрическая обратная задача сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров дефекта стержня. Для решения системы нелинейных уравнений используется метод Ньютона.

Для определения дефекта в упругом стержне нужно определить  $F_2$ ,  $x_1$  и  $x_2$  при заданных трех моментах времени  $\tau_1 = 1$ ,  $\tau_2 = 2$  и  $\tau_3 = 3$ , площадь  $F_1$  — известна. На искомые параметры, исходя из геометрического смысла задачи, накладываются дополнительные ограничения:  $0 < F_2 < 0.1$ ,  $0 < x_1 < x_2 < 1$ . При этом  $x_1 = x_2 = F_2 = 0$  — начальные значения искомых параметров соответствующие нулевой итерации метода Ньютона.

Подставим известные величины в формулу (1) и решим систему нелинейных уравнений относительно  $F_2$ ,  $x_1$  и  $x_2$ . Получим  $F_2 = 0.01$ ,  $x_1 = 0.49$  и  $x_2 = 0.51$ , что соответствует заданным параметрам для данного стержня. Решим эту же задачу с учетом шума. Получим  $F_2 = 0.01001$ ,  $x_1 = 0.4899$  и  $x_2 = 0.5099$ .

С помощью решения прямой задачи (1), нестационарная обратная задача по идентификации дефекта в упругом стержне решается корректно без использования методов регуляризации. Это связано с тем, что разрешающие уравнения обратной задачи непосредственно следуют из решения прямой задачи, которое явным образом содержит искомые величины в качестве параметров. Нестационарный характер задачи позволил зафиксировать три момента времени и составить систему нелинейных уравнений относительно искомых параметров дефекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-08-00438 А).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hadamard J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivers particle lineaires hyperbolique. Paris: Hermann, 1932. 542 p.
- [2] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 285 с.
- [3] Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
- [4] Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.
- [5] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 223 с.
- [6] Vachterova Ya. A., Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40. № 4. P. 439–447.
- [7] Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Обратная нестационарная задача о идентификации дефектов в упругом стержне // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Вятичи. 2019. № 2. С. 35–36.
- [8] Бочарова О. В., Ватульян В. О. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2008. Т. 145. № 3. С. 333–337.
- [9] Костарева С. А., Мусеев А. А. Идентификация геометрических характеристик стержня на основе решения обратных задач // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 1. С. 24–27.

Vahterova Ya. A., Fedotenkov G. V. Inverse non-stationary problem of defect identification in an elastic rod of finite length. This work presents an analytical solution of a direct non-stationary problem for a three-step elastic rod. There has been developed and implemented a numerical and analytical method of solving an inverse non-stationary problem of identification of defects in an elastic rod.

# ПОЛЗУЧЕСТЬ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПРОЦЕССЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛОСКОГО ТЯЖЕЛОГО СЛОЯ

### Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Рассматривается неизотеримеская краевая задача о сползании тяжелого слоя с наклонной плоскости при его нагреве. Решение задачи строится в рамках теории больших упругопластических деформаций, обобщенной на неизотермический случай и учитывающей реологические свойства материала как на стадии, предшествующей пластическому течению, так и при пластическом течении. Эффект сползания обусловлен ползучестью материала слоя, а также развитием вязкопластического течения за счет зависимости предела текучести материала от температуры. Указывается закономерность продвижения упругопластической границы, вычисляются напряжения, деформации и скорости деформаций как в области вязкоупругого деформирования, так и в области течения.

1. Основные модельные соотношения.Для решения краевой задачи воспользуемся моделью больших деформаций, предложенной в [1] и обобщенной на случай неизотермического деформирования в [2, 3]. В прямоугольной декартовой системе координат Эйлера  $x_i$  кинематика среды задается соотношениями

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j} \right) = m_{ij} + p_{ij} - \frac{m_{ik} m_{kj}}{2} - m_{ik} p_{kj} - p_{ik} m_{kj} + m_{ik} p_{ks} m_{sj},$$

$$\frac{Dm_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \left( (\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) m_{kj} + m_{ik} (\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj}) \right),$$

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik} \gamma_{kj} - \gamma_{ik} p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( v_{i,j} + v_{j,i} \right), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$$m_{ij} = e_{ij} + \alpha \left( T - T_0 \right) \delta_{ij}, \quad r_{ij} = \frac{1}{2} \left( v_{i,j} - v_{j,i} \right) + z_{ij} \left( \varepsilon_{sk}, m_{sk} \right).$$

В соотношениях (1)  $d_{ij}$  — компоненты тензора деформаций Альманси,  $c_{ij} = m_{ij} - \frac{1}{2}m_{ik}m_{kj}$ ,  $p_{ij}$  — их обратимые и необратимые составляющие;  $u_i$ ,  $v_i$  — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды;  $\frac{D}{Dt}$  — оператор используемой объективной производной по времени, которая приведена для произвольного тензора  $n_{ij}$ ;  $\gamma_{ij}$ ,  $r_{ij}$  — компоненты тензоров скоростей необратимых деформаций и вращений;  $z_{ij}$  — нелинейная составляющая тензора вращений. Согласно (1) тепловое расширение считаем обратимым, так что  $e_{ij}$  — линейная часть тензора упругих деформаций;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения; T — текущая температура;  $T_0$  — комнатная температура тела в свободном состоянии.

Принимая условие, что выделенный объем среды может изменяться только за счет теплового расширения (сжатия), а не за счет механического воздействия,

получаем [2, 3] аналог формулы Мурнагана

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{1+3\beta\theta} \frac{\partial W}{\partial m_{ik}} (\delta_{kj} - m_{kj}), \quad \beta = \alpha T_0, \quad \theta = (T - T_0) T_0^{-1}.$$
(2)

В зависимостях (2)  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши, p — добавочное гидростатическое давление. При выводе соотношений (2) в качестве термодинамического потенциала использовалась свободная энергия, для плотности распределения которой  $\Psi$ , принимая ее независимость от необратимых деформаций, имеем  $W = \rho_0 \Psi$  ( $\rho_0$  — плотность материала в свободном состоянии). Тогда упругий потенциал W для изотропной среды может быть выбран в виде разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \nu \theta J_1 + \nu_1 \theta^2 - \kappa_1 J_1 \theta^2 - \kappa_2 J_1^2 \theta - \kappa_3 J_2 \theta - \nu_2 \theta^3 + \dots,$$
(3)  
$$J_k = \begin{cases} L_k & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik} d_{ki}, \quad I_1 = c_{kk}, \quad I_2 = c_{ik} c_{ki}. \end{cases}$$

Здесь  $\mu, b, \chi, \nu, \nu_1, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \nu_2$  — постоянные материала ( $\mu$  — модуль сдвига).

Уравнение теплопроводности с точностью до слагаемых второго порядка малости записывается в виде

$$(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 c_{kk}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 \left(\varepsilon_{ij} - \gamma_{ij}\right) c_{ji} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{2\nu_1} \sigma_{ij} \gamma_{ij}, \tag{4}$$

где q — коэффициент температуропроводности.

Диссипативный механизм необратимого деформирования связан с реологическими и пластическими свойствами материала. Будем считать далее, что необратимые деформации накапливаются с начала процесса деформирования и первоначально связаны с процессом ползучести материала.

В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести, соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим в форме степенного закона ползучести Нортона [4], в котором полагаем скорости необратимых деформаций  $\gamma_{ij}$  равными скоростям деформаций ползучести  $\varepsilon_{ij}^{v}$ 

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}.$$
 (5)

В зависимостях (5)  $V(\sigma_{ij})$  — термодинамический потенциал;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные значения тензора напряжений; B, n — параметры ползучести материала, зависящие от температуры.

С течением времени напряженное состояние достигает поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования меняется и в материале начинается пластическое течение. В этом случае в области пластического течения полагаем  $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$ . Без разделения необратимых деформаций на составляющие будем считать, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые

68

деформации ползучести (5) являются начальными значениями для накапливающихся далее в области течения пластических деформаций. Также требуется совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования с вязкого на пластический.

Согласно принципу максимума Мизеса связь скоростей пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\xi_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \xi_{ij}) = k, \quad \lambda > 0, \quad \xi_{ij} = \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{v_0},$$

где  $\varepsilon_{ij}^{v_0}$  — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения, k — предел текучести.

Поверхность нагружения будем задавать условием пластичности Треска, обобщенным на случай вязкопластического течения [5, 6]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\xi_n|.$$
(6)

В зависимости (6)  $\xi_n$  — главные значения тензора  $\xi_{ij}$ ,  $\eta$  — коэффициент вязкости.



Рисунок 1 – Тяжелый слой на наклонной плоскости

**2.** Деформирование до вязкопластического течения. Рассмотрим тяжелый слой высоты h несжимаемого материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами, помещенный на наклонную плоскость (рисунок 1). Полагаем, что в промежуток времени  $0 \le t \le t_0$ , пока пластическое течение отсутствует, краевые условия задачи имеют вид

$$u|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = 0, \quad \theta|_{x_2=h} = G(t), \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = 0.$$
 (7)

Здесь  $u = u_1(x_2)$  — единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений, G(t) — задаваемая функция. Из (1) следует, что кинематика среды в данном случае описывается соотношениями

$$d_{11} = m_{11} + p_{11} - 0.5m_{12}^2 - 2m_{12}p_{12} = 0, \quad d_{12} = m_{12} + p_{12} = 0.5u_{1,2}, d_{22} = m_{22} + p_{22} - 0.5m_{12}^2 - 2m_{12}p_{12} = -0.5u_{1,2}^2.$$

Для компонент напряжений из (2) и (3), с точностью до слагаемых второго порядка малости по  $m_{12}$ , найдем

$$\sigma_{33} = -(p+2\mu) - 2(b+\mu)m_{12}^2 + (\nu+6\mu\beta)\theta - (\kappa_1 + 3\beta\nu + 18\mu\beta^2)\theta^2 = -s,$$
  

$$\sigma_{11} = -s + 4\mu m_{12}^2, \quad \sigma_{12} = 2(\mu - l\theta)m_{12}, \quad \sigma_{22} = -s + 4l\theta m_{12}^2,$$
  

$$l = \nu + \kappa_3 + 3\mu\beta.$$

Будем рассматривать квазистатический подход. Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho g_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho g_2 = 0, \quad g_1 = g \sin \varphi, \quad g_2 = -g \cos \varphi,$$

где  $\rho$  — плотность материала, g — ускорение свободного падения,  $\varphi$  — угол наклона плоскости, и используя условия (7), получим распределение напряжений в слое

$$\sigma_{12} = \rho g_1(h - x_2), \quad \sigma_{22} = \rho g_2(h - x_2).$$

Из соотношений (5) получим

$$\varepsilon_{12}^{v} = 2Bn\sigma_{12}\left(\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^{2} + 4\sigma_{12}\sigma_{21}\right)^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{11}^{v} = -\varepsilon_{22}^{v} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\varepsilon_{12}^{v}.$$

Уравнение теплопроводности (4) принимает вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3}{2} \frac{\rho^2 g_1^2 l(h - x_2)^2}{(\mu - l\theta)^3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\nu_1} 2^{n-1} B n \rho^n g_1^n (h - x_2)^n.$$
(8)

Уравнение (8) с использованием краевых условий (7) и начального условия  $\theta|_{t=0} = 0$  решается численно. Для расчетов использовался пакет Mathematica, функция G(t) полагалась линейной.

Согласно соотношению (6) условие пластичности в рассматриваемом случае впервые выполнится на плоскости  $x_2 = 0$  в форме

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = k(t_0). \tag{9}$$

Зависимость предела текучести  $k(x_2, t)$  от температуры примем в виде

$$k = k_0 \left( 1 - \theta^2 \theta_m^{-2} \right), \tag{10}$$

где  $k_0$  — предел текучести при комнатной температуре,  $\theta_m$  — безразмерная температура плавления. Условия (9) и (10) с известной температурой  $\theta(x_2, t)$  позволяют определить момент начала пластического течения  $t_0$  из уравнения

$$\rho g_1 h = k_0 \left( 1 - \theta^2(0, t_0) \theta_m^{-2} \right).$$

Перемещение в слое по известной безразмерной температуре  $\theta(x_2, t)$  определяется интегрированием уравнения

$$u_{1,2} = \frac{\rho g_1(h-x_2)}{\mu - l\theta} + \int_0^t 2^n B n \rho^{n-1} g_1^{n-1} (h-x_2)^{n-1} dt$$

с использованием граничного условия (7).

Рассмотрено также вязкопластическое течение при дальнейшем нагреве плоского тяжелого слоя. Установлена закономерность продвижения упругопластической границы по слою. Вычислены все параметры напряженно-деформированного состояния.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (18-01-00038).

### ЛИТЕРАТУРА

- Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Доклады РАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
- [2] Ковтанюк Л. В. Моделирование больших деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5. № 1. С. 107–117.
- [3] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Моделирование больших упруговязкопластических деформаций с учетом теплофизических эффектов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 4. С. 107–120.
- [4] Norton F. H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Gpaw Hill, 1929. 110 p.
- [5] Знаменский В.А., Ивлев Д.Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.
- [6] Быковцев Г. И., Семыкина Т. Д. О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 68–76.

Galimzyanova K. N., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Creep and viscoplastic flow during nonisothermal deformation of a plane heavy layer. The nonisothermal boundary value problem of sliding a heavy layer from an inclined plane when it is heated is considered. The solution of the problem is constructed in the framework of the theory of large elastoplastic deformations, generalized to the nonisothermal case and taking into account the rheological properties of the material both at the stage preceding the plastic flow and during plastic flow. The slide effect is due to the creep of the layer material, as well as the development of a viscoplastic flow due to the temperature dependence of the yield strength of the material. The pattern of advancement of the elastoplastic boundary is indicated, stresses, strains, and strain rates are calculated both in the viscoelastic strain region and in the flow region.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФУЗИОННО-ВИХРЕВЫХ НЬЮТОНОВСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

## Георгиевский Д.В.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Исследуются нестационарные сдвиговые течения, реализуемые в полуплоскости с вязкой несжимаемой жидкостью, при задании закона движения осциллирующей вдоль самой себя границы. Могут быть заданы либо продольная скорость границы, либо касательное напряжение на ней. Приводится постановка линеаризованной задачи относительно малых начальных возмущений, наложенных на кинематику во всей полуплоскости. Для плоской картины возмущений она состоит из одного бипараболического уравнения с переменными коэффициентами относительно комплекснозначной функции тока, обобщающего на нестационарный случай уравнение Орра–Зоммерфельда, и четырёх однородных граничных условий. С помощью метода интегральных соотношений выводятся экспоненциальные оценки затухания возмущений. Результат сравнивается с трёхмерной картиной вариаций.

Пусть полуплоскость, задаваемая в декартовых координатах  $(Ox_1x_2)$  неравенствами  $\Omega = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\}$ , занята однородной несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью  $\rho$  и динамической вязкостью  $\mu$ . Граница  $\partial\Omega = \Sigma = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 = 0\}$  при  $-\infty < t < \infty$  осциллирует как твёрдое целое вдоль самой себя по гармоническому закону с амплитудой l и частотой  $\omega$ . Далее будем вести изложение в безразмерном виде, включив в размерный базис тройку величин  $\{\omega, \rho, \mu\}$ . Из параметров задачи можно составить одну независимую безразмерную комбинацию, например,  $\lambda = l\sqrt{\omega\rho/\mu}$ . Число Рейнольдса, построенное по характерному линейному размеру l, характерной скорости  $\omega l$  и кинематической вязкости  $\mu/\rho$ , связано с  $\lambda$  соотношением  $\Re = \lambda^2$ . Во избежание новых обозначений будем помечать безразмерные координаты и время их уже ранее введёнными обозначениями  $x_i$  и t. Возможно наличие массовой силы  $\mathbf{F}$  с компонентами  $F_1 \equiv 0$ ,  $F_2 = F(x_2, t)$ .

Одномерный по ко<br/>ординатам нестационарный по времени сдвиг в  $\Omega$  пр<br/>и $-\infty < t < \infty$ моделируется краевой задачей

$$\mathbf{x} \in \Omega: \quad \sigma_{,2}^{\circ} = v_{,t}^{\circ}, \quad \sigma^{\circ} = v_{,2}^{\circ} \tag{1}$$

$$\mathbf{x} \in \Sigma : \quad v^{\circ} = \lambda \cos t; \qquad x_2 \to \infty : \quad v^{\circ} \to 0$$
 (2)

относительно функций  $v^{\circ}(x_2, t)$  и  $\sigma^{\circ}(x_2, t)$ , являющихся комонентами  $v_1^{\circ}$  и  $\sigma_{12}^{\circ}$  вектора скорости и тензора напряжений соответственно. Остальные их ненулевые компоненты таковы:

$$\sigma_{11}^{\circ} = \sigma_{22}^{\circ} = \sigma_{33}^{\circ} = -p^{\circ} = -\int F(x_2, t) \, dx_2 \tag{3}$$
Давление  $p^{\circ}(x_2, t)$  отделяется от краевой задачи (1), (2) и не оказывает влияния на кинематику одномерного нестационарного сдвига в  $\Omega$ . Запятая в индексе означает частное дифференцирование по координате с указанным номером либо по времени.

Точное аналитическое решение задачи (1), (2), которое можно несложно получить, например, методом разделения переменных, записывается следующим образом

$$v^{\circ}(x_2, t) = \lambda e^{-x_2/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - t\right)$$
 (4)

$$\sigma^{\circ}(x_2, t) = -\lambda e^{-x_2/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - t - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \lambda e^{-x_2/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - t + \frac{3\pi}{4}\right)$$
(5)

Функции  $v^{\circ}(4)$  и  $\sigma_{12}^{\circ}(5)$  периодичны по времени с периодом  $2\pi$ , что сразу следует и из физического смысла задачи. При этом они относительно друг друга имеют сдвиг по фазе  $3\pi/4$ . Кроме того, отметим быстрое экспоненциальное затухание обеих функций по мере удаления от границы  $\Sigma$  вглубь полуплоскости.

Наряду с описанным одномерным сдвигом, параметры которого помечаются верхним индексом  $\circ$ , будем рассматривать в  $\Omega$  возмущённое движение такое, что в момент t = 0 возмущения  $\delta v_i(x_1, x_2, 0)$ ,  $\delta p(x_1, x_2, 0)$ ,  $\delta \sigma_{ij}(x_1, x_2, 0)$  (i, j = 1, 2) малы по некоторой мере. Исследуем эволюцию этих возмущений при t > 0 в рамках плоской картины. Предполагая, что при определённых условиях они остаются малыми на всём полубесконечном интервале t > 0 (в дальнейшем надо определить именно эти условия), приведём линеаризованную постановку задачи в терминах возмущений.

Замкнутая система уравнений в области  $\Omega$  относительно функций  $\delta v_i(x_1, x_2, t)$ ,  $\delta p(x_1, x_2, t)$  (i = 1, 2) следующая:

$$-\delta p_{,1} + \Delta \,\delta v_1 = \delta v_{1,t} + v^{\circ} \,\delta v_{1,1} + v^{\circ}_{,2} \,\delta v_2 -\delta p_{,2} + \Delta \,\delta v_2 = \delta v_{2,t} + v^{\circ} \,\delta v_{2,1}, \quad \delta v_{1,1} + \delta v_{2,2} = 0$$
(6)

Путём введения функции тока ( $\delta v_1 = \psi_{,2}, \, \delta v_2 = -\psi_{,1}$ ) система (6) стандартным образом редуцируется к одному бипараболическому уравнению

$$\Delta\Delta\psi = (\Delta\psi)_{,t} + v^{\circ}(\Delta\psi)_{,1} - v^{\circ}_{,22}\psi_{,1} \tag{7}$$

Выберем отдельную гармонику возмущения с волновым числом s > 0 вдоль оси  $x_1$ :

$$\psi(x_1, x_2, t) = \varphi(x_2, t) e^{isx_1} \tag{8}$$

и придём к уравнению относительно комплекснозначной функции  $\varphi$ :

$$\varphi_{,2222} - 2s^2\varphi_{,22} + s^4\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + isv^\circ\right)(\varphi_{,22} - s^2\varphi) - isv^\circ_{,22}\varphi \tag{9}$$

обобщающему классическое уравнение Орра–Зоммерфельда на случай, когда невозмущённое течение нестационарно. Отличие от уравнения Орра–Зоммерфельда, рассматриваемого на отрезке конечной длины, ещё и в том, что в левой части (9) отсутствует множитель 1/Re. Роль единственного безразмерного параметра выполняет содержащаяся согласно (4) в  $v^{\circ}$  постоянная величина  $\lambda$ . Уравнение (9) для различных невозмущённых профилей  $v^{\circ}(x_2, t)$  в слое конечной толщины рассматривалось в целом ряде работ, посвящённых устойчивости плоскопараллельного вязкого сдвига [1-4].

Положим, что осциллирующее движение границы  $\Sigma$  в возмущённом течении не меняется по сравнению с основным. Тогда

$$x_2 = 0, \ t > 0: \ \varphi = 0, \ \varphi_{,2} = 0; \ x_2 \to \infty, \ t > 0: \ \varphi \to 0, \ \varphi_{,2} \to 0$$
 (10)

Для анализа задачи (9), (10) воспользуемся общей схемой метода интегральных соотношений, позволяющего выводить достаточные интегральные оценки затухания начальных возмущений и получившего широкое применение в линеаризованной теории гидродинамической устойчивости.

Воспользуемся результатами работ [5, 6], относящимися к анализу задачи (9), (10) в случае, когда основное течение представляет собой диффузию вихря в полуплоскости. В [5] показано, что если  $\varphi(x_2, t)$  удовлетворяет уравнению (9) с условиями (10), то имеет место экспоненциальная интегральная оценка развития возмущений

$$I_1^2(t) + s^2 I_0^2(t) \leqslant \left(I_1^2(0) + s^2 I_0^2(0)\right) \exp\left(\int_0^t q(\tau) \, d\tau - 2s^2 t\right) \tag{11}$$

$$I_n^2[\varphi;t] = \int_0^\infty \left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_2^n} \right|^2 (x_2,t) \, dx_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
(12)

$$q(t) = \sup_{x_2 > 0} \left| v_{,2}^{\circ} \right| = \sup_{x_2 > 0} \left| \sigma^{\circ} \right|$$
(13)

Для рассматриваемых граничных условий (2), характеризующих осцилляцию границы  $\Sigma$ , вывод неравенства (11) не меняется по сравнению с [5]. Экспоненциальная оценка эволюции возмущений (11) по-прежнему справедлива. Исследуем показатель экспоненты, играющий ключевую роль в оценке, и, в частности, его поведение при  $t \to \infty$ . Для этого вычислим функцию q(t) (13), которая согласно (5) равна

$$q(t) = \lambda \sup_{x_2 > 0} \left[ e^{-x_2/\sqrt{2}} \left| \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - t - \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]$$
(14)

Функция q(t) периодична с периодом  $\pi$ . Следовательно, она полностью определяется своими значениями на любом отрезке длины  $\pi$ , например,  $0 \leq t \leq \pi$ . Как показывает анализ выражения (14) на экстремумы по  $x_2$ , на этом отрезке

$$q(t) = \max\left\{\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{2}}; \left|\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right\} = \begin{cases} \lambda \,\mathrm{e}^{-t}/\sqrt{2}, & 0 \leqslant t \leqslant t_{\min}\\ -\lambda \cos(t + \pi/4), & t_{\min} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$$
(15)

$$t_{\min} \approx 1.038, \quad q_{\min} \approx 0.250 \,\lambda; \quad t_{\max} = \frac{3\pi}{4}, \quad q_{\max} = \lambda$$

$$q_{\min} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} q(t) \, dt \approx 0.679 \,\lambda$$
(16)

В силу периодичности q(t) показатель экспоненты в (11) можно приближённо заменить на линейную функцию  $(q_{\text{mid}} - 2s^2)t$ , где  $q_{\text{mid}}$  — среднее по периоду значение (16).

Таким образом, достаточным условием экспоненциального убывания начальных возмущений по интегральной мере (11), (12) является неравенство  $q_{\rm mid} < 2s^2$ , или

$$\lambda \leqslant 2.945 \, s^2 \tag{17}$$

Единого безразмерного параметра  $\lambda$ , обеспечивающего затухание гармоник со всеми волновыми числами s > 0, представить не удаётся. Длинноволновые возмущения (малые s) затухают при меньших значениях  $\lambda$ , чем коротковолновые, т.е. менее устойчивы.

Обратимся вновь к плоской задаче и рассмотрим в качестве основного течение в полуплоскости  $\Omega$  с заданным касательным напряжением  $\sigma_{12}$  на осциллирующей вдоль самой себя (под действием этого напряжения) плоской границе  $\Sigma$ . Заданы амплитудное значение S напряжения и частота  $\omega$  гармонических колебаний на  $\Sigma$  (величины S и  $\omega$  размерные). Оставляя в размерном базисе тройку величин  $\{\omega, \rho, \mu\}$ , образуем новую безразмерную комбинацию  $\Lambda = S/(\mu\omega)$ .

Система уравнений (1) в  $\Omega$  остаётся в силе, а вместо (2) потребуем выполнение граничных условий

$$\mathbf{x} \in \Sigma: \quad \sigma^{\circ} = \Lambda \cos t; \qquad x_2 \to \infty: \quad v^{\circ} \to 0$$
(18)

Аналитическое решение краевой задачи (1), (18)

$$v^{\circ}(x_2, t) = -\Lambda e^{-x_2/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - t + \frac{\pi}{4}\right)$$
 (19)

$$\sigma^{\circ}(x_2, t) = \Lambda \,\mathrm{e}^{-x_2/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - t\right) \tag{20}$$

с точностью до переобозначения  $\Lambda \longleftrightarrow \lambda$  совпадает с решением (4), (5) со сдвигом по времени на  $3\pi/4$ .

Если в возмущённом движении граница  $\Sigma$  полуплоскости остаётся прямолинейной  $(\delta v_2|_{x_2=0} = 0)$  и касательное напряжение на ней такое же, как в основном движении, т. е.  $\delta \sigma_{12}|_{x_2=0} = 0$ , то граничные условия в возмущениях при  $x_2 = 0$ выглядят так:  $\varphi = 0$ ,  $\varphi_{,22} + s^2 \varphi = 0$ . Вместо (10) имеем

$$x_2 = 0, t > 0: \varphi = 0, \varphi_{22} = 0; x_2 \to \infty, t > 0: \varphi \to 0, \varphi_{22} \to 0$$
 (21)

Задача (9), (21) может быть, как и ранее, исследована на основе метода интегральных соотношений. Его применение приводит в точности к оценке (11), в которой

$$q(t) = \sup_{x_2 > 0} |\sigma^{\circ}| = \Lambda \sup_{x_2 > 0} \left[ e^{-x_2/\sqrt{2}} \left| \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - t\right) \right| \right]$$
(22)

Среднее по периоду у функций (14) и (22), отнесённых к  $\lambda$  и  $\Lambda$  соответственно, одно и то же и согласно (16) приближённо равно 0.679. Следовательно, достаточным

условием экспоненциального убывания начальных возмущений по интегральной мере (11) является неравенство

$$\Lambda \leqslant 2.945 \, s^2 \tag{23}$$

аналогичное (17). Выводы, сделанные ранее, переносятся и на случай задания на границе полуплоскости касательного напряжения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №18-29-10085мк, №19-01-00016а.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Yih C.-S. Instability of unsteady flows or configurations. Pt. 1. Instability of a horizontal liquid layer on an oscillating plane // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. № 4. P. 737–751.
- [2] Davis S. H. The stability of time-periodic flows // Ann. Rev. of Fluid Mech. 1976. V. 8. № 1. P. 57–74.
- [3] von Kerczek C. Stability characteristics of some oscillatory Flows-Poiseuille, Ekman and Films // In: Dwoyer D.L. et al. (eds.) Stability of Time Dependent and Spatially Varying Flows. N.-Y.: Springer-Verlag, 1987. P. 225–243.
- [4] Or A. C. Finite-wavelength instability in a horizontal liquid layer on an oscillating plane // J. Fluid Mech. 1997. V. 335. № 1. P. 213–232.
- [5] Георгиевский Д. В. Малые возмущения диффузионно-вихревых течений ньютоновской жидкости в полуплоскости // ПММ. 2020. Т. 84. № 2. С. 151–157.
- [6] Georgievskii D. V., Putkaradze V. G. Evolution of perturbations imposed on 1D nonsteady shear in viscous half-plane with oscillating boundary // Russ. J. Math. Phys. 2020. V. 27. In press.

Georgievskii D.V. Stability of diffusion-vortex Newtonian flows inside a half-plane. Non-stationary shear flows realized in a half-plane with a viscous incompressible fluid are investigated when the law of motion of an oscillating boundary along itself is given. Either the longitudinal velocity of the boundary or the tangent stress on it can be given. A linearized problem is formulated with respect to small initial perturbations imposed on the kinematics inside the half-plane. For a plane picture of perturbations, it consists of one parabolic equation with variable coefficients relative to the complex-valued stream function, generalizing the Orr – Sommerfeld equation to the non-stationary case, and four homogeneous boundary conditions. Using the integral relations method, exponential estimates of perturbation decay are derived. The result is compared with a three-dimensional picture of variations.

# СРАВНЕНИЕ КОНТАКТНОЙ И БЕСКОНТАКТНОЙ МОДЕЛЕЙ ДУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЭЛЕКТРОСТРИКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

### Годес А.Ю.

Днепропетровск

Задача определения напряженно-деформированного состояния электрострикционной матрицы с круговым включением из другого материала и дуговой трещиной на границе раздела сред под действием нагрузок, приложенных на бесконечности, рассмотрена в рамках бесконтактной и контактной модели трещины. В рамках бесконтактной модели получено полностью аналитическое решение задачи, в рамках контактной модели задача сведена к приближенному решению сингулярного интегрального уравнения. Проведено сравнение результатов, полученных в рамках разных моделей трещины.

Введение. Стремительное развитие производства электрострикционных материалов приводит к необходимости изучения особенностей их деформирования и разрушения, в частности, исследования межфазных трещин. В [1] были получены коэффициенты интенсивности напряжений для дуговой трещины на границе двух электрострикционных материалов в рамках бесконтактной модели трещины. Однако в этой статье не анализировалось раскрытие трещины, что не позволяло сделать вывод о корректности полученных результатов. В связи с этим возникает необходимость изучения контактной модели межфазной дуговой трещины, сравнения результатов расчетов, проведенных в рамках разных моделей, и определения границ применимости бесконтактной модели.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоскость r > R, которая содержит круговое включение  $0 \leq r \leq R$ , скрепленное с плоскостью по всей границе, кроме дуги r = R,  $|\theta| < \beta$ , где возникла трещина. Материалы матрицы и включения являются линейно упругими изотропными электрострикционными, их свойства определяются модулями сдвига  $\mu_i$ , коэффициентами Пуассона  $\nu_i$ , диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_i$  и электростриционными постоянными  $a_1^{(i)}$ ,  $a_2^{(i)}$ . Берега трещины являются гладкими и могут контактировать друг с другом; в рамках бесконтактной модели предполагается, что зона взаимодействия берегов трещины отсутствует. Диэлектрическая проницаемость наполнителя трещины равна  $\epsilon_C$ . Механические нагрузки определяются главными напряженими на бесконечности  $N_1$ ,  $N_2$  и углом  $\alpha_N$ , электрические — напряженностью электрического поля  $E_0$  и углом  $\alpha$  (см. рис. 1).

Уравнения несвязанной задачи электроупругости для электрострикционного материала имеют вид

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \rho \vec{F} = 0, \quad \hat{\mathfrak{E}} = \frac{1}{2} ((\vec{\nabla} \vec{u})^T + \vec{\nabla} \vec{u}), \tag{1}$$

$$\hat{\sigma} = 2\mu(\hat{\mathfrak{E}} + \hat{g}\frac{\nu}{1-2\nu}Sp\hat{\mathfrak{E}}) - \frac{1}{2}(a_1\vec{E}\vec{E} + a_2\hat{g}(\vec{E}\cdot\vec{E})),\tag{2}$$

$$\rho \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}^M, \quad \hat{\sigma}^M = \epsilon (\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}\hat{g}(\vec{E} \cdot \vec{E})), \tag{3}$$



Рисунок 1 – Постановка задачи

где  $\vec{\nabla}$  — набла-оператор Гамильтона,  $\hat{\sigma}$  — тензор напряжений Коши,  $\hat{\mathfrak{E}}$  — линейный тензор деформации,  $\vec{u}$  — вектор перемещений,  $\hat{g}$  — единичный тензор,  $\vec{E}$  — вектор напряженности электрического поля,  $\hat{\sigma}^M$  — тензор фиктивных электрических напряжений.

Граничные условия поставленной задачи формулируются следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)}, \quad u_r^{(1)} + iu_{\theta}^{(1)} = u_r^{(2)} + iu_{\theta}^{(2)} \quad \text{при } r = R, \quad \beta < |\theta| \leqslant \pi; \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(C)} + i\sigma_{r\theta}^{(C)} \quad \text{прм} \quad r = R, \quad |\theta| < \beta, \quad \theta \notin \Omega;$$
(5)

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0 \quad \text{при } r = R, \quad |\theta| < \beta, \quad \theta \in \Omega;$$

$$(6)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2}e^{2i(\alpha_N - \theta)} \quad \text{при} \ r \to \infty,$$
(7)

где  $\Omega$  — зона контакта берегов трещины,  $\hat{\tilde{\sigma}} = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^M$ .

Для электрострикционных материалов сформулированы уравнения плоской задачи, аналогичные соотношениям Колосова—Мусхелишвили. Это позволяет свести поставленную задачу к поиску четырех комплексных потенциалов при условии, что электрическое поле предварительно определено.

2. Решение граничной задачи электроупругости. Электрическое поле включения, матрицы и трещины определяется из соответствующей граничной задачи электростатики [2–4]. С учетом условий (4) — (6) задача электроупругости сводится в поиску двух неизвестных функций комплексного переменного, аналитических в заданных областях.

Для бесконтактной модели трещины задача поиска двух комплексных потенциалов сводится к решению задачи линейного сопряжения

$$F'^{+}(z) + \lambda F'^{-}(z) = f(z), \ r = R, \ |\theta| < \beta,$$
 (8)

где f(z) — комплексная функция, которая полностью определяется электрическим полем,  $\lambda$  — константа, определяемая механическими свойствами материалов матрицы и включения.

Функция F(z), полученная в результате решения задачи (8), позволяет построить аналитические выражения, которые полностью определяют раскрытие трещины, напряжения на границе раздела сред и коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины в рамках бесконтактной модели [2]. Для контактной модели трещины поставленная задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения

$$C_{1}\tau(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\tau(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi + \int_{-1}^{1} K_{1}(\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_{-1}^{1} \overline{K_{2}(\xi)\tau(\xi)}d\xi + C_{2}\tilde{p}(\zeta) = f_{0}(\zeta), \quad (9)$$

где постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и функции  $K_1(\zeta)$ ,  $K_2(\zeta)$ ,  $f_0(\zeta)$  полностью определяются свойствами материалов и внешними нагрузками,  $\tilde{p}(\zeta)$  — функция фиктивных напряжений на трещине, которая подлежит определению внутри контактной зоны. Уравнение (9) дополняется условием однозначности смещений и условием равенства нулю раскрытия трещины в зоне контакта.

Для решения уравнения (9) вместе с дополнительными условиями неизвестная функция  $\tau(\zeta)$  раскладывается в ряды по полиномам Якоби на каждом отрезке непрерывной дифференцируемости функции фиктивных напряжений  $\tilde{p}(\zeta)$ . Сингулярное интегральное уравнение с дополнительными условиями сводится к замкнутой системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения функции  $\tau(\zeta)$  и неизвестных контактных напряжений в точках коллокации в пределах контактной зоны. Заранее неизвестная зона контакта определяется из условия ограниченности контактных напряжений во внутренних точках трещины с помощью итерационного процесса. Найденное решение позволяет получить приближенные выражения для раскрытия трещины, напряжений на границе раздела сред и коэффициентов интенсивности напряжений [3, 4].

3. Результаты численного моделирования. На рис. 2—5 представлено сравнение раскрытия трещины и коэффициентов интенсивности напряжений, полученных в рамках контактной и бесконтактной моделей трещины. Все приведенные результаты получены для плоского напряженного состояния, коэффициентов Пуассона материалов матрицы и включения  $\nu_1 = \nu_2 = 0,26$  и диэлектрической проницаемости наполнителя трещины  $\epsilon_C/\epsilon_1 = 10^{-4}$  при одноосном растяжении на бесконечности ( $N_2 = 0, N_1 > 0$ ). Сплошная линия представляет результаты, полученные в рамках контактной модели трещины, пунктирная линия — в рамках бесконтактной модели.

На рис. 2 представлено раскрытие трещины при  $\beta = 90^{\circ}$ ,  $\mu_2/\mu_1 = 0, 1$ ,  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0, 5$ ,  $a_1^{(1)}/\epsilon_1 = 400$ ,  $a_2^{(1)}/\epsilon_1 = -75$ ,  $a_1^{(2)}/\epsilon_1 = 200$ ,  $a_2^{(2)}/\epsilon_1 = -45$ ,  $\epsilon_1 E_0^2/N_1 = 10^{-4}$ ,  $\alpha = -30^{\circ}$ ,  $\alpha_N = 60^{\circ}$ . Очевидно, что в данном случае бесконтактная модель не позволяет определить расположение контактной зоны, поскольку зона взаимопересечения берегов примыкает к одной из вершин трещины, а контактная зона не примыкает ни к одной из вершин.

На рис. З представлено раскрытие трещины при  $\beta = 60^{\circ}, \ \mu_2/\mu_1 = 0, 5, \ \epsilon_2/\epsilon_1 = 0, 5, \ a_1^{(1)}/\epsilon_1 = a_1^{(2)}/\epsilon_1 = 400, \ a_2^{(1)}/\epsilon_1 = a_2^{(2)}/\epsilon_1 = -75, \ \epsilon_1 E_0^2/N_1 = 2 \cdot 10^{-4}, \ \alpha = -45^{\circ}, \ \alpha_N = 45^{\circ}.$  В этом случае бесконтактная модель дает верное приближение расположения контактной зоны, хотя длины зоны взаимопересечения берегов и зоны контакта существенно различаются.

На рис. 4—5 представлена зависимость коэффициентов интенсивности нормальных и касательных напряжений в «верхней» вершине трещины от угла приложения электрической нагрузки  $\alpha$  при  $\beta = 90^{\circ}$ ,  $\mu_2/\mu_1 = 0, 2, \epsilon_2/\epsilon_1 = 1$ ,

Годес А.Ю.



 $a_1^{(1)}/\epsilon_1 = a_1^{(2)}/\epsilon_1 = 400, \ a_2^{(1)}/\epsilon_1 = a_2^{(2)}/\epsilon_1 = -75, \ \epsilon_1 E_0^2/N_1 = 10^{-4}, \ \alpha_N = 45^{\circ}.$  В данном случае коэффициенты интенсивности напряжений, вычисленные в рамках бесконтактной модели трещины, невозможно использовать в качестве параметров разрушения, поскольку они существенно отличаются от результатов, полученных в рамках контактной модели.



В других случаях коэффициенты интенсивности напряжений, полученные в рамках разных моделей, могут быть достаточно близки. В табл. 1 представлена зависимость КИН от угла приложения механической нагрузки  $\alpha_N$  при плоском напряженном состоянии,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.26$ ,  $N_2 = 0$ ,  $N_1 > 0$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\mu_2/\mu_1 = 0.5$ ,  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0.5$ ,  $\epsilon_C/\epsilon_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_1^{(1)}/\epsilon_1 = 400$ ,  $a_2^{(1)}/\epsilon_1 = -75$ ,  $a_1^{(2)}/\epsilon_1 = 200$ ,  $a_2^{(2)}/\epsilon_1 = -45$ ,  $\epsilon_1 E_0^2/N_1 = 0.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha = 0$ . Для данного случая результаты, полученные в рамках разных моделей, различаются не более чем на 5 процентов.

Заключение. Как следует из приведенных результатов расчетов, в некоторых случаях, когда контактная зоны достаточно удалена от вершины трещины, бесконтактная модель трещины позволяет верно оценить напряженно-деформированное состояние электрострикционной плоскости с включением. Однако в других случаях использование решения бесконтактной задачи является неоправданным, поскольку коэффициенты интенсивности напряжений, полученные в рамках разных моделей трещины, существенно различаются. Полученные выводы могут быть

$\alpha_N$	Ī	$\frac{K_1^+}{V_1\sqrt{R}}$	$\frac{K_2^+}{N_1\sqrt{R}}$		
	Контактная	Бесконтактная	Контактная	Бесконтактная	
30	1,642	1,639	-0,1746	-0,1693	
40	1,630	1,631	0,1486	0,1558	
50	1,509	1,513	0,4154	0,4333	
60	1,295	1,299	0,6027	0,6298	
70	1,016	1,014	0,6918	0,7216	
80	0,7035	0,6943	0,6716	$0,\!6975$	
90	0,3971	0,3771	0,5375	0,5606	

Таблица 1

применены не только к хрупким материалам, поскольку, как показано в [5], решения контактной задачи, полученные в рамках теории упругости и теории малых упругопластических деформаций, различаются незначительно.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Dai M., Gao C.-F., Schiavone P. Arc-shaped permeable interface crack in an electrostrictive fibrous composite under uniform remote electric loadings // International Journal of Mechanical Sciences. 2016. V. 115. P. 616–623.
- [2] Hodes A. Y., Loboda V. V. A contact zone approach for an arc crack at the interface between two electrostrictive materials // International Journal of Solids and Structures. 2017. V. 128. P. 262–271.
- [3] Hodes A. Y., Loboda V. V. An arc crack at the interface between two electrostrictive materials // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2017. № 1. С. 81–94.
- [4] Годес А. Ю., Лобода В. В. Влияние электрического поля на раскрытие дуговой трещины в электрострикционном композите // Вісник Дніпропетровського університету: Серія Механіка. 2017. Т. 25. № 5. С. 36–43.
- [5] Адлуцький В. Я., Годес А. Ю., Лобода В. В. Скінченноелементний аналіз пружнопластичного стану тріщини на межі розділу площини з круговим включенням // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка: Серія Фізико-математичні науки. 2019. № 1. С. 19–22.

**Hodes A.Y.** Comparison of the contact and non-contact models for the arc crack on electrostrictive materials interface. A problem of determining of stress-strain state for an electrostrictive plane with a circular inclusion made of another material with an arc interface crack under the action of loadings applied at infinity is considered within non-contact and contact crack models. For the non-contact model a fully analytical solution of the problem is obtained, for the contact model the problem is reduced to the approximate resolving of the singular integral equation. The solutions obtained within the framework of different crack models are compared.

## УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО ШАРА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

#### Головешкина Е.В., Зубов Л.М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Даны постановка и решение задачи устойчивости трёхмерного упругого тела с учётом микроструктуры. Изучено выпучивание полого нелинейно упругого шара из полулинейного (гармонического) материала с краевыми дислокациями. Исследование выполнено в рамках континуальной теории дислокаций с применением метода линеаризации (первый метод Ляпунова). Путём решения однородной линейной краевой задачи найдено минимальное давление, при котором шар впервые теряет устойчивость. Проанализировано влияние дислокаций на выпучивание тонкой и толстой оболочек.

1. Введение. Дислокации, представляющие собой дефекты структуры твёрдого тела, значительно влияют на прочностные свойства материала. С помощью дислокационных моделей возможно описание и других дефектов кристаллических тел, а также таких явлений, как неупругость, рост кристалла, текучесть и т. п. [1, 2]. В данной работе в рамках континуальной теории дислокаций рассматривается задача устойчивости нелинейно упругого шара с дислокациями. Наиболее распространены исследования по устойчивости стержней, пластин и оболочек [3– 6]. Однако явление потери устойчивости целесообразно изучать также и для трёхмерных тел [7].

**2. Исходные соотношения.** При наличии дислокаций не существует векторное поле перемещений  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r} = x_s \mathbf{i}_s$ ,  $\mathbf{R} = X_k \mathbf{i}_k$ ;  $\mathbf{i}_s$  и  $\mathbf{i}_k$  (s, k = 1, 2, 3) — постоянные координатные векторы, а  $x_s$  и  $X_k$  — декартовы координаты частиц тела в отсчётном и конечном состояниях. В таком случае геометрические соотношения

$$\mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R}$$

для тензора дисторсии С заменяются тензорным уравнением несовместности

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha} \,. \tag{1}$$

Здесь *а* — тензор плотности дислокаций, который должен удовлетворять условию соленоидальности

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\alpha} = 0. \tag{2}$$

Уравнения равновесия без учёта массовых сил в терминах несимметричного тензора напряжений Пиолы **D** записываются в форме

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \tag{3}$$

В данной работе операторы градиента, ротора и дивергенции записываются в отсчётной конфигурации. Рассмотрим полулинейный (гармонический) материал [8] с определяющими соотношениями

$$\mathbf{D} = \frac{2\mu}{1 - 2\nu} \left(\nu \operatorname{tr} \mathbf{U} - 1 - \nu\right) \mathbf{A} + 2\mu \mathbf{C},\tag{4}$$

которые замыкают систему уравнений (1)–(4). Здесь **U** — симметричный положительно определённый тензор растяжения, **A** — собственно ортогональный тензор поворотов,  $\mu$  и  $\nu$  — постоянные.

**3. Сферически симметричное состояние.** Сферические координаты  $r, \varphi$ ,  $\theta$  определяются формулами

$$x_1 = r \cos \varphi \cos \theta$$
,  $x_2 = r \sin \varphi \cos \theta$ ,  $x_3 = r \sin \theta$ .

Единичные векторы, касательные к координатным линиям, обозначим  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_{\varphi}$ ,  $\mathbf{e}_{\theta}$ . Рассмотрим сферически симметричное распределение краевых дислокаций

$$\boldsymbol{\alpha} = \beta(r) \left( \mathbf{e}_{\varphi} \otimes \mathbf{e}_{\theta} - \mathbf{e}_{\theta} \otimes \mathbf{e}_{\varphi} \right) \,. \tag{5}$$

Функция  $\beta(r)$  считается заданной. Для изотропного материала с учётом (5) уравнение несовместности (1) имеет решение [9]

$$\mathbf{C}_0 = C_1(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + C_2(r) \left(\mathbf{e}_{\varphi} \otimes \mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\theta} \otimes \mathbf{e}_{\theta}\right), \tag{6}$$

а тензор напряжений Пиолы согласно (6) принимает вид

$$\mathbf{D}_0 = D_1(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + D_2(r) \left(\mathbf{e}_{\varphi} \otimes \mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\theta} \otimes \mathbf{e}_{\theta}\right) \,. \tag{7}$$

Граничные условия

$$D_1(r_0) = -p_0 C_2^2(r_0), \quad D_1(r_1) = 0$$
(8)

описывают нагружение внешней поверхности шара  $r = r_0$  давлением  $p_0$ .

Таким образом, решение сферически симметричной задачи находится из краевой задачи (1), (3), (4), (5), (8).

**4. Наложение малых деформаций.** Для рассмотренной выше задачи о равновесии при плотности дислокаций

$$\beta(r) = \beta_0 r^{\kappa}, \quad \beta_0, \kappa = \text{const},$$

решение было найдено в [10], где получены компоненты тензоров напряжений и дисторсии (7), (6). Назовём это напряжённое состояние невозмущённым.

Уравнения возмущённого равновесия выведем путём линаризации уравнений равновесия (3), определяющих соотношений (4) и уравнений несовместности (1).

Для выполнения процедуры линеаризации положим

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{0} + \eta \dot{\mathbf{D}} + O\left(\eta^{2}\right), \quad \dot{\mathbf{D}} = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \mathbf{D} \left(\mathbf{C}_{0} + \eta \operatorname{grad} \mathbf{w}\right) \right|_{\eta=0},$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{0} + \eta \dot{\mathbf{C}} + O\left(\eta^{2}\right).$$

Здесь нижним индексом «0» отмечены величины, относящиеся к невозмущённому состоянию. Оставляя в этих соотношениях только слагаемые первого порядка по  $\eta$ , получаем линеаризованные уравнения

div 
$$\mathbf{D} = 0$$
,  
rot  $\dot{\mathbf{C}} = 0$ .

Общее решение последнего уравнения можно представить в форме

$$\mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{w},\tag{9}$$

где  $\mathbf{w}$  — дифференцируемое векторное поле.

Для осесимметричных решений линеаризованной задачи будем искать квазиперемещение **w** как сумму перемещений в меридианальной плоскости, задаваемой координатами r и  $\theta$ :

$$\mathbf{w} = u(r,\theta)\mathbf{e}_r + v(r,\theta)\mathbf{e}_\theta.$$
(10)

В данном случае левый тензор растяжения U будет иметь представление

$$\mathbf{U} = U_{\varphi\varphi}\mathbf{e}_{\varphi}\otimes\mathbf{e}_{\varphi} + U_{\theta\theta}\mathbf{e}_{\theta}\otimes\mathbf{e}_{\theta} + U_{r\theta}\mathbf{e}_{r}\otimes\mathbf{e}_{\theta} + U_{\theta r}\mathbf{e}_{\theta}\otimes\mathbf{e}_{r} + U_{rr}\mathbf{e}_{r}\otimes\mathbf{e}_{r}.$$

Для полулинейного материала линеаризованные определяющие соотношения получим в форме

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left(\nu \operatorname{tr} \mathbf{C}_0 - 1 - \nu\right) \frac{\dot{C}_{\theta r} - \dot{C}_{r\theta}}{C_{\theta \theta} + C_{rr}} \left(\mathbf{e}_{\theta} \otimes \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{\theta}\right) + \frac{2\mu}{1-2\nu} \left(\nu \operatorname{tr} \dot{\mathbf{C}}\right) \mathbf{E} + 2\mu \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{E}$$

Здесь  $C_0$  вычисляется согласно (6), а компоненты линеаризованного тензора дисторсии и сам тензор определяются выражениями

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{u(r,\theta) - v(r,\theta) \tan \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi \\ + \left(\frac{\partial v(r,\theta)}{r\partial \theta} + \frac{u(r,\theta)}{r}\right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{\partial u(r,\theta)}{r\partial \theta} - \frac{v(r,\theta)}{r}\right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r,$$

полученными с помощью (9), (10).

Будем искать решение краевой задачи для вектора квазиперемещений **w** в форме [11]

$$u(r,\theta) = a_n(r)P_n(\sin\theta),$$
  
$$v(r,\theta) = b_n(r)P_n'(\sin\theta)\cos\theta,$$

где  $P_n(\sin \theta)$  — полином Лежандра степени n, угол  $\theta$  меняется в пределах  $[-\pi/2, \pi/2]$ , а " означает производную по аргументу  $\sin \theta$ . Производные высших порядков вычисляются с помощью рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра.

Для линеаризации граничных условий запишем их в терминах площадей поверхности шара в начальной и конечной конфигурациях —  $\sigma$  и  $\Sigma$ , соответственно:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \,. \tag{11}$$

Тензор  $\mathbf{T}$  — симметричный тензор напряжений Коши,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности в начальном состоянии, а  $\mathbf{N}$  — в конечном состоянии. С учётом соотношения

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -pJ\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}$$

получаем линеаризованные граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{D}} = -p \left( J \mathbf{C}^{-1} \right)^{\cdot} \cdot \mathbf{n}, \tag{12}$$

где  $J=\det {\bf C}-$ третий инвариант тензора дисторсии. Производная в правой части равенства находится по формуле

$$\left(J\mathbf{C}^{-1}\right)^{\cdot} = \dot{J}\mathbf{C}_0^{-1} - J_0\mathbf{C}_0^{-1} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}_0^{-1}$$

Здесь

$$\dot{J} = C_1 C_2^2 \left[ \frac{\partial u}{C_1 \partial r} + \frac{u - v \tan \theta}{C_2 r} + \frac{1}{C_2} \left( \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \right].$$
(13)

Таким образом, линеаризованная задача для шара с дислокациями состоит из однородной системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций  $a_n(r)$ ,  $b_n(r)$ , полученных из линеаризованного уравнения равновесия div  $\dot{\mathbf{D}} = 0$ , и граничных условий (12). Данная задача решалась численно. Отметим, что при потере устойчивости шара реализуется форма выпучивания с таким номером n, которому соответствует минимум критического давления p(n).

5. Заключение. Решена задача об устойчивости полого шара с краевыми дислокациями. Найдено минимальное значение внешнего гидростатически распределённого давления, при котором шар впервые теряет устойчивость. Для тонкой и толстой оболочек определены формы потери устойчивости, соответствующие найденным критическим давлениям. Проанализировано влияние дислокаций на выпучивание сферической оболочки. Установлено, что краевые дислокации оказывают нелинейное влияние на перемещения. Также изучена потеря устойчивости при отсутствии внешней нагрузки — из-за наличия собственных напряжений, обусловленных дислокациями.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90045.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Clayton J. D. Nonlinear Mechanics of Crystals. Dordrecht: Springer, 2011. 700 p.
- [2] Maugin G. A. Defects, dislocations and the general theory of material inhomogeneity // Generalized continua and dislocation theory. CISM courses and lectures / Ed. by C. Sansour, S. Skatulla. Vienna: Springer, 2012. V. 537. P. 1–83.
- [3] Singer J., Arbocz J., Weller T. Buckling experiments: Experimental methods in buckling of thin-walled structures: Shells, built-up structures, composites and additional topics. // New York: John Wiley & Sons, Inc, 2002. V. 2. 1120 p.
- [4] Eggwertz S., Samuelson L. A. Shell stability handbook. London: Elsevier Applied Science, 1992. 303 p.
- [5] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 541 с.
- [6] Tvergaard V. Buckling behaviour of plate and shell structures // Proc. 14th IUTAM Congress. North-Holland, 1976. V. 72. P. 233–247.
- [7] Guz A. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies // Advanced Structured Materials. Berlin : Springer-Verlag, 1999. XVI. 557 p.
- [8] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [9] Зубов Л. М. Сферически симметричные решения нелинейной теории дислокаций // ДАН. 2014. Т. 458. № 2. С. 161–164.
- [10] Zhbanova E. V., Zubov L. M The influence of distributed dislocations on large deformations of an elastic sphere // Advanced Structured Materials. Singapore: Springer. 2016. V. 60. P. 61–76.
- [11] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

Goloveshkina E. V., Zubov L. M. Stability of nonlinearly elastic sphere with distributed dislocations. The formulation and solution of the stability problem for a three-dimensional elastic body is given, taking into account the microstructure. The buckling of a hollow nonlinear elastic sphere from a semi-linear (harmonic) material with edge dislocations is investigated. The study was carried out in the framework of the continuum theory of continuously distributed dislocations using the linearization method (the first Lyapunov method). By solving a homogeneous linear boundary value problem, the minimum pressure value at which the ball loses stability for the first time is found. The effect of dislocations on the buckling of thin and thick shells is analyzed.

## АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕРЖАВЕЮЩИХ СТАЛЕЙ В УСЛОВИЯХ НЕЙТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ

## Горохов В. А., Капустин С. А., Чурилов Ю. А.

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижсегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Используя известную аналитическую аппроксимацию, описывающую скорость термической ползучести нержавеющих сталей в условиях термомеханического нагружения и нейтронного облучения, авторы получили соотношения для определения значений материальных функций модели термической ползучести, реализованной в рамках программного средства UMB BK УПАКС. Для аустенитной стали 1Х18Н10Т получены значения материальных функций модели ползучести при различных значениях температуры. Выполнено численное моделирование ползучести стали 1Х18Н10Т в условиях длительного термомеханического нагружения и нейтронного облучения. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с аналитическими зависимостями, описывающими ползучесть данного материала в условиях одноосного НДС.

Введение. Согласно экспериментальным данным, деформационные и прочностные свойства конструкционных материалов существенно зависят от уровня и интенсивности нейтронного облучения [1, 2]. В работах [3, 4] разработаны и программно реализованы математические модели упруговязкопластического деформирования нержавеющих при квазистатических терморадиационных и термомеханических нагружениях. Предложенные в [3, 4] модели, описывают основные закономерности поведения нержавеющих сталей в условиях термомеханических и радиационных воздействий с учетом зависимости их механических характеристик от уровней действующих температур и нейтронного облучения, эффектов радиационного распухания и терморадиационной ползучести. Развитые модели и разработанные на их основе программные средства позволили решить ряд актуальных задач исследования НДС элементов конструкций ядерных энергетических установок из нержавеющих сталей, эксплуатирующихся в условиях термомеханических и радиационных воздействий [3, 4].

В настоящей работе на основе имеющейся в [5, 6] информации о скорости термической ползучести при терморадиационных воздействиях аустенитной стали 1X18H10T получены значения материальных функций модели [3, 4]. С помощью программных средств UMB BK УПАКС [3, 7], реализованной в них модели ползучести и полученных материальных функций, выполнено численное моделирование деформирования стали 1X18H10T в условиях длительного термомеханического нагружения и нейтронного облучения.

1. Получение материальных функций модели ползучести нержавеющих сталей при терморадиационных воздействиях. В работах [3, 4] разработана и апробирована на тестовых и прикладных задачах модель термоползучести нержавеющих сталей в условиях нейтронного облучения. Для описания скорости деформации термической ползучести  $\dot{e}_{ij}^c$  используется модель упрочнения, применяемая для описания ползучести материалов при термомеханических нагружениях [3], дополненная учетом влияния на процесс ползучести флакса быстрых нейтронов  $\Phi = \frac{dF}{dt}$  (F — флюенс быстрых нейтронов):

$$\dot{e}_{ij}^c = L_0(T,\theta)H(T,k_c)(1+F_c(T)\Phi).$$
(1)

Здесь  $L_0(T, \theta)$  — функция, характеризующая начальную скорость деформации термической ползучести материала, отнесенную к единичному напряжению, при уровне напряжений, определяемых параметром  $\theta$ :

$$\theta = \frac{\sqrt{1.5\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} - C_0}{C_0},\tag{2}$$

где  $C_0 = C_0(T)$  — радиус поверхности ползучести;  $H(T, k_c)$  — функция упрочнения, характеризующая изменение начальной скорости деформации ползучести от параметра упрочнения  $k_c$ ;  $F_c(T)$  — функция, учитывающая влияние флакса  $\Phi$  на скорость деформации термической ползучести  $\dot{e}_{ij}^c$  при заданном уровне температуры T.

В работе [5] приведено уравнение, описывающее скорость ползучести нержавеющих сталей в условиях нейтронного облучения:

$$\dot{e}^c = a_c (\sigma_{eq})^{n_c} (k_c)^{m_c} \left[ 1 + \frac{\Phi}{\Phi_{\xi}} \exp\left(\frac{Q_{\Phi}}{R_g T_a}\right) \right], \tag{3}$$

где  $\dot{e}^c$  — скорость ползучести;  $\sigma_{eq}$  — интенсивность напряжений;  $k_c$  — длина траектории ползучести;  $R_g = 8.314 \text{ Дж}/(K \cdot \text{моль})$  — универсальная газовая постоянная;  $T_a$  — абсолютная температура;  $\Phi$  — флакс нейтронов;  $a_c$ ,  $n_c$ ,  $m_c$ ,  $\Phi_{\xi}$ ,  $Q_{\Phi}$  параметры материала. В работе [6] для стали 1X18H10T приведены значения параметров  $a_c$ ,  $n_c$  и  $m_c$  для температур T = 550, 600, 650 и 700 °C и оценки значения параметров  $\Phi_{\xi}$  и  $Q_{\Phi}$  по результатам обработки экспериментальных данных.

Значение радиуса поверхности ползучести  $C_0(T)$  для фиксированного значения температуры T определялось из условия, что деформация ползучести за 40 лет и накопленном за это время флюенсе нейтронов  $F = 10^{23}$  н/см<sup>2</sup> не превысит величины 0.2%. Получить данную оценку можно, проинтегрировав соотношение (3) по времени. В результате интегрирования получим следующее соотношение для деформации ползучести  $e^c$ :

$$e^{c} = \left[ (1 - m_{c})a_{c}(\sigma_{eq})^{n_{c}} \left( 1 + \frac{\Phi}{\Phi_{\xi}} \exp\left(\frac{Q_{\Phi}}{R_{g}T_{a}}\right) \right) t \right]^{\frac{1}{1 - m_{c}}}.$$
(4)

В связи с тем, что в начальный момент ползучести  $(t = 0, k_c = 0)$  согласно соотношению (3) начальная скорость ползучести  $\dot{e}_0^c$  обратилась бы в бесконечность, при вычислении материальных функций модели  $L_0(T, \theta)$  и  $H(T, k_c)$  принималось, что в диапазоне значений длины траектории ползучести  $0 \leq k_c \leq k_c^0$  скорость ползучести постоянна и вычисляется по формуле:

$$\dot{e}_0^c = a_c (\sigma_{eq})^{n_c} \left(k_c^0\right)^{m_c} \left[1 + \frac{\Phi}{\Phi_\xi} \exp\left(\frac{Q_\Phi}{R_g T_a}\right)\right],\tag{5}$$

Значение  $k_c^0$  было принято равным 0.01 для температуры  $T = 550^{\circ}$  C; 0.005 для температуры  $T = 600^{\circ}$  C; 0.001 для температур  $T = 650^{\circ}$  C и  $T = 700^{\circ}$  C.

С учетом сделанных допущений о скорости ползучести на начальной стадии были получены значения функции  $L_0(T, \theta)$ , характеризующей начальную скорость деформации термической ползучести материала.

Значения функции упрочнения  $H(T, k_c)$  для фиксированного значения температуры T можно получить из соотношений (1), (3) и (5):

$$H(T,k_c) = \frac{\dot{e}^c}{\dot{e}^c_0} = \left(\frac{k_c}{k_c^0}\right)^{m_c}.$$
(6)

Значение функции  $F_c(T)$ , учитывающей влияние флакса  $\Phi$  на скорость деформации термической ползучести  $\dot{e}_{ij}^c$  при заданном уровне температуры T можно получить из соотношений (1) и (3):

$$F_c(T) = \frac{\exp\left(\frac{Q_{\Phi}}{R_g T_a}\right)}{\Phi_{\xi}}.$$
(7)

Таким образом, на основе данных [5, 6] о скорости ползучести о скорости ползучести аустенитной стали 1X18H10T определены значения всех материальных функций модели термоползучести [3, 4] в условиях облучения.

2. Верификация материальных функций модели ползучести при терморадиационных воздействиях для стали 1X18H10T. Для верификации полученных материальных функций модели ползучести осуществляется исследование кинетики НДС призматического стержня, находящегося под действием равномерно распределенных по объему температурных и нейтронных полей. На один из торцов стержня накладываются кинематические граничные условия, исключающие перемещения стержня в осевом направлении, а другой торец находится под действием равномерно распределенных растягивающих нагрузок интенсивностью q.

Процесс нагружения стержня моделировался двумя этапами нагружения. На первом этапе осуществлялся нагрев стержня до температуры T и растяжение поверхностной нагрузкой интенсивностью q. На втором этапе осуществлялось облучение стержня потоками нейтронов до значения флюенса  $F = 2.425 \cdot 10^{22}$  н/см<sup>2</sup> за время t = 100000 часов. Было рассмотрено 4 варианта нагружения: 1)  $T = 550^{\circ}$  C, q = 150 МПа; 2)  $T = 600^{\circ}$  C, q = 87.5 МПа; 3)  $T = 650^{\circ}$  C, q = 54 МПа; 4)  $T = 700^{\circ}$  C, q = 36 МПа. Для каждого из рассмотренных вариантов нагрузок также была решена задача о ползучести стержня без облучения, т. е. принималось что F = 0 н/см<sup>2</sup>.

Результаты численного моделирования с помощью разработанных в [3, 4] методики и программных средств [3, 7] в виде зависимости деформации ползучести в стержне от времени выдержки приведены на рисунке 1. На приведенном рисунке: точки — результаты численного моделирования по методике [3, 4] с использованием полученных в настоящей работе материальных функций модели ползучести ( $F = 2.425 \cdot 10^{22}$  н/см<sup>2</sup>); сплошная линия — результаты аналитического решения (4); треугольники — результаты численного моделирования по методике [3, 4] с использованием полученных в настоящей работе материальных функций модели ползучести при отсутствии облучения (F = 0 н/см<sup>2</sup>); пунктирная линия результаты аналитического решения (4) при отсутствии облучения.



Рисунок 1 – Кривые ползучести стали 1X18H10T для различных вариантов нагружения: a)  $T = 550^{\circ}$  C, q = 150 МПа; b)  $T = 600^{\circ}$  C, q = 87.5 МПа; c)  $T = 650^{\circ}$  C, q = 54 МПа; d)  $T = 700^{\circ}$  C, q = 36 МПа

Заключение. На основе аналитической аппроксимации, описывающей скорость термической ползучести сталей в условиях нейтронного облучения, получены соотношения для определения значений материальных функций модели термической ползучести, реализованной в рамках программного средства UMB BK УПАКС. Для аустенитной стали 1X18H10T получены значения материальных функций модели ползучести для температур T = 550, 600, 650 и 700 °C. С помощью программного средства UMB BK УПАКС выполнено численное моделирование ползучести стали 1X18H10T в условиях длительного термомеханического нагружения и нейтронного облучения. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с аналитическими зависимостями, описывающими ползучесть данного материала в условиях одноосного НДС. Также продемонстрировано хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных по ползучести при отсутствии нейтронного облучения.

Разработка алгоритма получения материальных функций модели ползучести выполнена при финансовой поддержке гранта правительства Российской Федерации (Договор № 14.Ү26.31.0031), получение и верификация материальных функций модели ползучести для стали 1Х18Н10Т выполнены при финансировании гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований молодых российских ученых — докторов наук (грант МД-2528.2019.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

- Adamson R. B., Coleman C. E., Griffiths M. Irradiation creep and growth of zirconium alloys: A critical review // Journal of Nuclear Materials. 2019. V. 521. P. 161–244.
- [2] Margolin B. Z., Murashova A. I., Neustroev V. S. Analysis of the influence of type of stress state on radiation swelling and radiation creep of austenitic steels // Strength of Materials. 2012. V. 44(3). P. 227–240.
- [3] Капустин С. А., Чурилов Ю. А., Горохов В. А. Моделирование нелинейного деформирования и разрушения конструкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2015. 347 с.
- [4] Капустин С. А., Горохов В. А., Чурилов Ю. А., Виленский О. Ю., Кайдалов В. Б., Зверев Д. Л., Гуленко А. Г., Сорокин А. А. Верификация методических и программных средств численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций из стали типа X16H11M3 при квазистатических терморадиационных нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. 2010. № 72. С. 36–45.
- [5] Margolin B. Z., Gulenko A. G., Kursevich I. P., Buchatskii A. A. Modeling for fracture in materials under long-term static creep loading and neutron irradiation. Part 1. A physico-mechanical model // Strength of Materials. 2006. V. 38(3). P. 221–233.
- [6] Margolin B. Z., Gulenko A. G., Kursevich I. P., Buchatskii A. A. Modeling for fracture in materials under long-term static creep loading and neutron irradiation. Part 2. Prediction of creep rupture strength for austenitic materials // Strength of Materials. 2006. V. 38(5). P. 449–457.
- [7] Программа UMB BK УПАКС. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 268 от 18.02.2010 по учету НТЦ ЯРБ Ростехнадзора.

Gorokhov V. A., Kapustin S. A., Churilov Yu. A. Algorithm for obtaining material functions of the creep model of stainless steels under neutron irradiation. Using the well-known analytical approximation describing the thermal creep rate of stainless steels under thermomechanical loading and neutron irradiation, we obtained relations for determining the material functions of the thermal creep model implemented in the framework of the UMB VK UPAKS software. For austenitic steel 1X18H10T, the values of the material functions of the creep model at various temperatures are obtained. A numerical simulation of the creep of 1X18H10T steel under long-term thermomechanical loading and neutron irradiation was performed. The results of numerical modeling are in good agreement with the analytical dependences that describe the creep of a given material under uniaxial SSS.

# ОЦЕНКА ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ, СОПРЯЖЕННОЙ С ПЛАСТИНОЙ

# Дзебисашвили Г. Т.

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматриваются колебания цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением, у которой один край закреплен, а другой сопряжен с пластиной. Методом конечных элементов исследуется связь частот колебаний оболочки данного типа с частотами оболочки без пластины. Анализируется влияние толщины пластины на частоты колебаний. Ранее было получено решение задачи для цилиндрической оболочки квадратного и прямоугольного поперечного сечения при граничных условиях, равносильных сопряжению с пластиной, толщина которой значительно отличается от толщины оболочки. В случае квадратного сечения можно получить приближенное аналитическое решение. В общем случае можно получить решение в виде приближенных вариационных формул. Также для обоих вариантов сечения в случае шарнирно опертых краев имеется точное решение. Для оболочки, сопряженной с пластиной той же толщины, что и оболочка, целесообразным является нахождение частот колебаний методом конечных элементов. По результатам численных экспериментов получены геометрические критерии нахождения частоты оболочки, сопряженной с пластиной равной толщины, в диапазоне частот, соответствующих граничным условиям без сопряжения с пластиной. Выявлена связь частот колебаний оболочки с пластиной различной толщины с частотами оболочки без пластины. Установлена возможность вычисления частот для оболочки, сопряженной с пластиной, по приближенным вариационным формулам.

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку с прямоугольным поперечным сечением, у которой нижний край заделан, а верхний сопряжен с пластиной толщиной  $t_c$ . Размеры сечения равны a и b, длина оболочки равна c.

Первую частоту колебаний такой оболочки можно найти методом конечных элементов. При граничных условиях без сопряжения с пластиной в [1–4] ранее было рассмотрено получение приближенного аналитического решения, а также в виде приближенных вариационных формул и с помощью асимптотических разложений. Введем параметр  $f = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$ , где  $\omega$  — собственная частота оболочки,  $\rho$  плотность, t — толщина,  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  — изгибная жесткость.

Пусть пластина имеет ту же толщину, что и оболочка. Будем предпологать, что при фиксированных размерах оболочки имеет место частотное неравенство

$$f_{simple} < f_{cover} < f_{fixed},\tag{1}$$

где  $f_{simple}$  — частота оболочки в случае «заделка-шарнир»,  $f_{cover}$  — частота оболочки с пластиной,  $f_{fixed}$  — частота оболочки в случае «заделка-заделка». Однако существуют такие размеры оболочки, что  $f_{simple} > f_{cover}$ , например a = 4, b = 3, c = 2.

Выяснение условий смены знака частотного неравенства будем проводить с помощью численного эксперимента при разных граничных условиях и размерах оболочки. Все возможные сочетания размеров оболочки можно классифицировать по комбинации следующих признаков:

- 1. Сечение является либо квадратным, либо прямоугольным.
- 2. Либо имеется одна пара квадратных, лежащих друг напротив друга стенок, либо все стенки прямоугольные.
- 3. Либо ab < M, либо ab = M, либо ab > M.

Здесь и далее M — максимум из площадей стенок ac и bc. Возможные размерные конфигурации  $S_i$  приведены в таблице 1.

Наличие пары  $S_i$ Знак между ab и MСечение противолежащих квадратных стенок  $S_1$ Прямоугольное Нет < $S_2$ Прямоугольное Нет >Прямоугольное Да  $S_3$  $S_4$ Прямоугольное Дa < $S_5$ Квадратное Нет < $S_6$ Квадратное Нет > $S_7$ Квадратное Да

Таблица 1 – Возможные размерные конфигурации оболочки.

Проанализируем поведение основной частоты при переходах от  $S_i$  к  $S_j$  при различных сочетаниях *i* и *j*, обозначим их как  $S_{i,j}$ . Будем изменять поочередно по одному из размеров оболочки, выбирая достаточно малый шаг изменения и обеспечивая переход от одной конфигурации к другой без пересечения остальных. Этому условию удовлетворяют 9 переходов, которые мы будем называть простыми:  $S_{1,3}$ ,  $S_{1,4}$ ,  $S_{2,3}$ ,  $S_{2,6}$ ,  $S_{3,4}$ ,  $S_{3,7}$ ,  $S_{4,5}$ ,  $S_{5,7}$ ,  $S_{6,7}$ . Связь между конфигурациями удобно представить в виде графа (рис. 1). Для рассмотрения всех простых переходов будем обходить граф по эйлеровой цепи 7—6—2—3—1—4—3—7—5—4—7, начиная с  $S_7$ .



Рисунок 1 – Граф размерных конфигураций.

При расчетах было выявлено, что существенную роль играет близость формы сечения к квадратной, а также наличие двух противолежащих стенок оболочки, форма которых близка к квадратной. В качестве пробных размеров, отвечающих различным размерным конфигурациям, были выбраны размеры из таблицы 2, шаг изменения стороны был взят равным 0,2. При увеличении сторон с сохранением конфигурации порядковые отношения в частотном неравенстве (1) не изменялись.

$S_i$	Размеры
$S_1$	a = 4, b = 2, c = 3
$S_2$	a = 4, b = 3, c = 2
$S_3$	a = 3, b = 2, c = 2 (S <sub>3,7</sub> ), $a = 4, b = 3, c = 3$ (S <sub>3,1</sub> )
$S_4$	a = 3, b = 2, c = 3
$S_5$	a = 2, b = 2, c = 3
$S_6$	a = 3, b = 3, c = 2
$S_7$	a = 3, b = 3, c = 3 (S <sub>7,6</sub> ), $a = 2, b = 2, c = 2$ (S <sub>3,7</sub> )

Таблица 2 – Пробные размеры для различных размерных конфигураций.

На рис. 2 представлены частоты при последовательном выполнении простых переходов. Распределения частот при продолжении графиков вправо аналогичны представленным, т. к. граф обходится по циклу.



Рисунок 2 – Частоты при последовательном выполнении простых переходов  $S_{i,j}$ . По горизонтальной оси отложены номера размерных конфигураций. По вертикальной оси отложены частоты оболочки. Каждой точке соответствует частота на текущем шаге изменения размеров при переходе между размерными конфигурациями. График 1 соответствует частотам при граничных условиях «заделка-заделка», 2 – «заделка-шарнир», 3 – «заделка-пластина», 4 – «шарнир-пластина», 5 – «шарнир-шарнир»

При переходе  $S_{7,6}$  неравенство (1) выполняется при  $\frac{ab}{M} \sim 1$  и нарушается при выраженности прямоугольной формы стенок. Для  $S_{1,3}$  неравенство перестает выполняться при вырождении пары противолежащих прямоугольных стенок в квадратные. В окрестности  $S_3$  неравенство нарушается как при значительном отклонении формы сечения от квадратной (при  $S_{3,7}$ ), так и при  $\frac{ab}{M} \sim 1$  (при  $S_{3,4}$ ).

Таким образом, частотное неравенство локально не выполняется при следующих размерных конфигурациях:

- 1. Оболочка имеет прямоугольное сечение и одну пару противолежащих квадратных стенок, ab = M ( $S_2$ ).
- 2. Оболочка имеет прямоугольное сечение, все стенки прямоугольные и ab > M  $(S_3)$ .
- 3. Оболочка имеет квадратное сечение, все стенки прямоугольные и ab > M  $(S_6)$ .

Анализируя качественную картину поведения частот, можно заметить, что переходы  $S_{6,7}$ ,  $S_{2,3}$ ,  $S_{5,7}$ ,  $S_{3,4}$ , затрагивающие только длину оболочки c, сообщают более быстрое изменение основной частоте при граничных условиях «заделказаделка» и «заделка-шарнир». Наименее интенсивный рост основная частота имеет при  $S_{3,1}$  для всех вариантов граничных условий, кроме «заделка-пластина». Частоты при граничных условиях «шарнир-шарнир» и «шарнир-пластина» обладают минимальной разностью, при этом их порядковое отношение не зависит от размерной конфигурации оболочки.

Проведем анализ частот при изменении толщины пластины.

Пример расчета для размеров a = 2, b = 3, c = 3 представлен в таблице 3.

Таблица 3 – Частоты для оболочки, сопряженной с пластиной толщиной  $t_c$ .

$t_c$	5t	2t	t	0,5t	0,3t	0,2t		
$f_1$	0,542	$0,\!531$	$0,\!492$	$0,\!444$	0,315	0,213		
$f_2$	0,572	0,565	0,536	0,500	0,460	0,330		
$f_3$	0,789	0,784	0,766	0,526	$0,\!491$	$0,\!456$		
$f_c$	5,548	2,219	1,110	0,555	0,333	0,222		
$f_{fixed}$	0,543							
$f_{simple}$	0,455							

Здесь  $f_1, f_2, f_3$  — первые частоты колебаний оболочки, сопряженной с пластиной,  $f_{fixed}$  — частота оболочки с заделанными краями,  $f_{simple}$  — частота оболочки с заделанным и шарнирным краями,  $f_c$  — частота пластины с заделанными краями по методу Рэлея, вычисляемая по формуле (2), учитывающей разницу толщин стенок оболочки и пластины:

$$f_c = f \frac{t_c}{t} = \frac{2\pi}{3a^2b^2} \frac{t_c}{t} \sqrt{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2}.$$
 (2)

При  $t_c = 5t$  (толстая пластина) частота  $f_1$  близка к частоте  $f_{fixed} = 0,543$  колебаний оболочки с заделанным верхним краем. При  $t_c = 0,2t$  частота  $f_1$  мало

отличается от частоты  $f_c = 0,222$ . Отметим также близость частот  $f_2$  при  $t_c = 0,3t$ и  $f_3$  при  $t_c = 0,2t$  к частоте  $f_{simple} = 0,455$  колебаний оболочки с заделанным и шарнирным краями.

Аналогичные особенности поведения частот имеются и при других размерах оболочки. Это позволяет для случая сопряжения оболочки с толстой или тонкой пластиной находить приближенное значение первой частоты  $f_1$  по приближенным вариационным формулам, полученным в [3], а для случая тонкой пластины вычислять  $f_c$  по приближенной вариационной формуле (2).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L. Free vibrations of square elastic tubes with a free end // Mechanics Research Communications. 2000. V. 27. № 4. P. 457–464.
- [2] Дзебисашвили Г. Т. Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2017-2018 г. Издательство СПбГУ, 2019. С. 13–29.
- [3] Дзебисашвили Г. Т. Колебания цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 2019. Изд. Научно-исследовательские публикации, Воронеж. С. 1352–1361.
- [4] Амосов А. С. Колебания тонкой цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением // Вестник СПбГУ, Сер. 1. 2004. № 1. С. 67–72.

**Dzebisashvili G. T.** Estimate of the frequencies of the cylindrical shell with rectangular cross-section joined with the plate. The vibrations of cylindrical shells with rectangular crosssection, which have one edge clamped and other one joined with the plate, are studied in the work. Using finite element method, the relationship between the frequencies for the shell joined with the plate and the frequencies of the shell without the plate. Influence of various plate thicknesses on the shell's frequencies is examined. Previously, there was found a solution of the vibration problem for the shell with square and rectangular cross-sections with the boundary conditions, which are equal to presence of joined plate, thickness of which differs significantly from the shell's. In case of square cross-section approximate analytical solution can be obtained. In particular, exact solution is known in case of simple support. More generally, one can get solution in the form of approximate variational formulae. For the shell joined with the plate of the same thickness, it is appropriate to use finite element method. According to the results based on numerical experiments, geometric criteria for the frequency to be in the range of plateless boundary conditions are achieved. Relationship between frequencies of the shell joined with the plate of different thicknesses and frequencies of the shell without the plate is revealed. Ability to evaluate frequencies by means of variational formulae for the shell joined with the plate is stated.

# РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННОЙ ДИФФУЗИИ И ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЧЕНИЯ С СОПРОВОЖДАЮЩИМИ ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ И ЭВОЛЮЦИЕЙ МИКРОСТРУКТУРЫ

## Дудин Д. С.<sup>1</sup>, Келлер И. Э.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет <sup>2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Формулируется квазистатическая модель трёхкомпонентной упруго-вязкой среды, в которой компоненты являются диффундирующими и могут химически реагировать, а изменение микроструктуры описывается скалярной внутренней переменной. Ставится одномерная модельная задача, в окрестности однородного стационарного решения которой производится возмущение полевых величин, что приводит к проблеме собственных значений. Её решение позволяет получить зависимости времён релаксации от длины волны возмущений. Исследованы асимптоты времён релаксации, соответствующие самым простым связанным процессам.

1. Введение. Связанные физико-механические модели сплошной среды являются актуальными инструментами исследования сложных мультифизичных процессов, реализующихся в современных технологических операциях. Например, в результате интенсивных пластических деформаций перенасыщенный твёрдый раствор Zn в Al распадается со скоростью на порядки большей, чем скорость протекания обычной термической диффузии [1]. Классические модели, отражающие неоднозначность описания диффузии представлены в [2]. В данной работе обобщается модель [3], учитывающая диффузию и вязкое течение в двухкомпонентной системе, на случай тринарной вязкоупругой среды с химическими реакциями и эволюцией микроструктуры, описываемой скалярной внутренней переменной.

**2.** Потенциал свободной энергии. Свободная энергия Гельмгольца полагается функцией, которая зависит от концентраций частиц  $C_k$ ,  $k \in \Psi = \{A, B, AB\}$ и микроструктурной переменной H, приходящиеся на единицу объёма в отчётной конфигурации, и тензора упругих деформаций  $\varepsilon^e$ 

$$\psi = \psi \left( C_i, H, \varepsilon^e \right) = \sum_{k \in \Psi} F_k^{mix}(\xi_A, \xi_B) C_k + \psi_H(C_i, H) + \psi_e(C_i, H, \varepsilon^e), \tag{1}$$

где  $F_k^{mix}$  определяет энергию смешения,  $\psi_H$  — энергия микроструктуры,  $\psi_e$  — упругая энергия,  $\xi_A = C_A/(C_A + C_B + C_{AB})$ ,  $\xi_B = C_B/(C_A + C_B + C_{AB})$  — переменные состава. Записывается материальная производная от (1)

$$\dot{\psi} = \sum_{k \in \Psi} F_k \dot{C}_k + F_H \dot{H} + \mathbf{F}_e : \dot{\varepsilon}^e, \qquad (2)$$

где парциальная энергия смешения  $F_k, k \in \Psi$ , парциальная энергия микроструктуры  $F_H$  и парциальная упругая энергия  $\mathbf{F}_e$ 

$$F_k = \frac{\partial \psi}{\partial C_k} = F_k^{mix} + \frac{\partial (\psi_e + \psi_H)}{\partial C_k}, \ k \in \Psi,$$

Дудин Д. С., Келлер И. Э.

$$F_H = \frac{\partial \psi}{\partial H} = \frac{\partial (\psi_e + \psi_H)}{\partial H}, \ \mathbf{F}_e = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \varepsilon^e}.$$
(3)

Потенциалы свободной энергии принимаются в виде

$$\psi_e = G\mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e + \frac{1}{2}K\varepsilon_m^{e2}, \ \psi_H = \frac{f_H H^2}{2} - \sum_{k\in\Psi} f_k C_k H,$$
(4)

где модуль сдвига G, объёмный модуль упругости K и  $f_A$ ,  $f_B$ ,  $f_{AB}$ ,  $f_H > 0$  далее принимаются постоянными величинами. Предположение об идеальном смешении частиц приводит к

$$F_k^{mix} = kT \left( \frac{\xi_n (V_n - V_k) + \xi_j (V_j - V_k)}{V_m} + \ln \frac{\xi_k V_k^0}{V_m} \right),$$
(5)

где индексы принимают значения k = A, j = AB, n = B или k = AB, j = B, n = A, либо k = B, j = AB, n = A, k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура,  $V_k = V_k(\xi_A, \xi_B)$ ,  $k \in \Psi$  — парциальные объёмы,  $V_m = V_A \xi_A + V_B \xi_B + V_A B \xi_{AB}$  — средний парциальный объём,  $V_A^0 = V_A(1,0)$ ,  $V_B^0 = V_B(0,1)$ ,  $V_{AB}^0 = V_{AB}(0,0)$ . Выражение (5) для двухкомпонентной среды получено в [4].

**3. Второй закон термодинамики.** В системе происходит обратимая химическая реакция согласно уравнению  $\nu_A A + \nu_B B \rightleftharpoons \nu_{AB} A B$ , где  $\nu_k, \ k \in \Psi = A, B, A B -$  стехиометрические коэффициенты, A, B, AB - химические символы компонент.

Неравенство Клаузиуса-Дюгема записывается в интегральной формулировке согласно [3] и далее используется в локальной форме. Локальная форма термодинамического неравенства, записанного в терминах актуальной конфигурации, имеет вид

$$\sum_{k\in\Psi} \left( \left( \frac{\mu_k - F_k}{V_k} + \sigma_m \right) i_k - \mathbf{j}_k \cdot \hat{\nabla} \mu_k \right) + \mathbf{s} : \dot{e}^v - A\dot{\xi} - F_H (\dot{h} + h\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{s} : \dot{\mathbf{e}}^e + \sigma_m \dot{\varepsilon}_m^e - \frac{\mathbf{F}^e : \dot{\varepsilon}^e}{\Omega} \ge 0.$$
(6)

где  $C_k = \Omega c_k$ ,  $H = \Omega h$ ,  $\mathbf{j}_k$ ,  $k \in \Psi$  — диффузионные потоки,  $i_k = V_k \dot{c}_k + c_k V_k \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ ,  $k \in \Psi$  — скорости объёмного внедрения,  $\mu_k$ ,  $k \in \Psi$  — химические потенциалы компонент,  $A = \sum \nu_k \mu_k$  — химическое сродство,  $\dot{\xi}$  — скорость протекания химической реакции,  $\mathbf{v}$  — скорость конвективного переноса,  $\Omega = 1 + \varepsilon_m$  — коэффициент объёмного расширения,  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v = \varepsilon_m \mathbf{I}/3 + \mathbf{e}$  — тензор полных линейных деформаций, представленный в виде суммы упругой и вязкой составляющих,  $\sigma = \sigma_m \mathbf{I} + \mathbf{s}$  тензор напряжений Коши.

4. Физические соотношения. В ходе установления термодинамического равновесия возникают консервативные и диссипативные процессы, которые определяются материальными уравнениями, не нарушающими условие (6). В дальнейшем перекрестные эффекты, возникающие между скалярными термодинамическими потоками, не учитываются. Уравнения представляются в квазилинейном виде. Химические потенциалы выражаются следующим образом

$$\mu_k = F_k + \beta_k V_k i_k - \sigma_m V_k, \ k \in \Psi, \tag{7}$$

98

где  $\beta_k > 0, \ k \in \Psi$  — объёмные вязкости. Уравнения кинетики диффузии и химических реакций

$$\mathbf{j}_k = -c_k M_k \hat{\nabla} \mu_k, \ k \in \Psi, \ A = -\beta_{\xi} \dot{\xi}$$
(8)

где  $M_k > 0, \ k \in \Psi$  — коэффициенты мобильности компонент,  $\beta_\xi \geqslant 0$  — химическая постоянная. Записывается эволюционное соотношения для микроструктурной переменной

$$\dot{h} + h\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = -\frac{F_H}{\beta_H},\tag{9}$$

где  $\beta_H > 0$  — параметр, определяющий производство микроструктуры. Девиатор тензора напряжений описывается реологической моделью Максвелла, среднее значение напряжений определяется шаровой частью тензора упругих деформаций

$$\mathbf{s} = 2\eta \dot{\mathbf{e}} = 2G\mathbf{e}^e, \ \sigma_m = K\varepsilon_m^e, \tag{10}$$

где  $\eta$  — коэффициент сдвиговой вязкости, G — модуль сдвига, K — объёмный модуль упругости.

5. Модельная задача. Ставится одномерная модельная задача, в которой принимаются следующие гипотезы:

• Изменение состава и микроструктуры могут происходить только вдоль пространственной координаты x

$$h = h(x, t), \ c_k = c_k(x, t), \ k \in \Psi.$$
 (11)

• Все компоненты тензора напряжений и тензора полных деформаций равны нулю за исключением

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma(x, t) \neq 0, \ \varepsilon_{xx} = \varepsilon(x, t) \neq 0.$$
(12)

Гипотеза (12) позволяет выполнить уравнения равновесия тождественно. Выбранная одномерная модельная задача является наиболее простой, допускающей протекание диффузионных процессов и позволяющей исследовать релаксацию пространственных возмущений связанных процессов диффузии, химических реакций, вязкого течения и эволюции микроструктуры.

6. Система разрешающих соотношений модельной задачи. Применение гипотез (11), (12) к полевым уравнениям модели позволяют записать связанную одномерную систему дифференциальных уравнений гиперболического типа. Определено, что химические реакции никак не влияют на процессы быстрой диффузии, поэтому в дальнейшем для простоты демонстрации результатов рассматривается двухкомпонентная среда без химии. Ниже, в силу малости деформаций, геометрические нелинейности исключаются. Закон баланса масс в актуальной конфигурации

$$\frac{dc_k}{dt} + c_k \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( c_k M_k \frac{\partial \mu_k}{\partial x} \right), \ k \in \Psi_1 = \{A, B\},$$
(13)

где v — скорость материала в направлении оси x. Эволюция микроструктурной переменной

$$\frac{dh}{dt} + h\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\beta_H} \left( f_A c_A + f_B c_B - f_H h \right). \tag{14}$$

99

Уравнение Максвелла

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{3}{4G} \frac{d\sigma_m}{dt} - \frac{4\sigma_m}{4\eta},\tag{15}$$

следующее из (10) с учётом (12). Система дополняется уравнениями (7), первым уравнением в (3) с учётом (5), а также геометрическим ограничением  $c_A V_A + c_B V_B = 1$ .

Нелинейная модельная задача допускает существование однородного стационарного решения

$$c_k(x,t) \equiv c_k^0, \ k \in \Psi_1, \ h(x,t) \equiv h_0, \ \sigma_m(x,t) \equiv 0,$$
 (16)

что определяет равновестное значение микроструктурной переменной после подстановки в систему  $h_0 = (f_A c_A^0 + f_B c_B^0) / f_H.$ 

**7. Спектр времён релаксации и его асимптоты.** Система уравнений пункта 6 линеаризуется в окрестности (16) и накладываются возмущения

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{u}_0 + \hat{\mathbf{u}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$
(17)

где  $\tau$  — время релаксации,  $\lambda$  — длина волны возмущений,  $\mathbf{u} = \{c_A, c_B, h, \sigma_m\}$ ,  $\hat{h}, \hat{c}_A, \hat{c}_B, \hat{\sigma}_m \in R, |\hat{h}|, |\hat{c}_A|, |\hat{c}_B|, |\hat{\sigma}_m| \ll 1$ . Объёмные вязкости слабо влияют на релаксационные процессы, поэтому принимается  $\beta_k = 0, k \in \Psi_1$ . Выражения (17) являются решением линеаризованной системы пункта 6 в том случае, если характеристическое уравнение  $P_3(\tau) = 0$  удовлетворяется. Отсюда следуют зависимости  $\tau = \tau_k(\lambda), k = 1, 2, 3$ , изображённые на рис. 1 в билогорифмических координатах.



Рисунок 1 – Ветви времён релаксации

Ветви времён релаксации имеют асимптоты при  $\lambda \to 0$ ,  $\lambda \to \infty$ , характеризующие предельные случаи поведения системы, на которых не исключаются связанные процессы релаксации микроструктуры, напряжений и концентраций. Наклонные асимптоты описываются уравнениями Фика  $\hat{\mathbf{u}}_{i,t} = D_i \hat{\mathbf{u}}_{i,xx}$ , i = 1, 2, 3, где  $D_i$  — коэффициент взаимной диффузии. Связанность процессов релаксации приводит к комплексной зависимости  $D_i$  от физических параметров системы, а сам процесс, несмотря на выполнение уравнения Фика, перестаёт быть диффузионным.

100

Третья ветвь при  $\lambda \to 0, GV_m \gg kT$  и  $h_0 f_k \gg GV_m, k \in \Psi_1$  определяется коэффициентом быстрой диффузии

$$D_3^0 = h_0 \left( f_A M_A c_A^0 V_A + f_B M_B c_B^0 V_B \right)$$
(18)

который на порядки отличается от термического коэффициента взаимной диффузии  $D_3^0 \gg D_{therm}$ . Несмотря на отсутствие в (18) механических параметров, наряду с гомогенизацией микроструктуры и состава происходит процесс релаксации напряжений, оказывающий воздействие на диффузионные потоки.

8. Заключение. Рассмотренный подход возмущения однородного стационарного решения нелинейной одномерной задачи показал свою эффективность при исследовании влияния физическо-механических полей на скорость протекания диффузии. Связанность эволюции микроструктуры с изменением состава через потенциал свободной энергии и учёт упругих свойств среды приводят к быстрому, либо медленному коэффициенту диффузии в зависимости от соотношения характерных энергий. В этих случаях, процессы быстрой и медленной диффузии определяются диффузионными потоками, контролируемыми градиентами среднего значения напряжений и микроструктурной переменной.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А16-116121410009-8 при поддержке гранта РФФИ № 17-08-01085.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Straumal B.B., Baretzky B., Mazilkin A.A., Phillippa F., Kogtenkova O.A., Volkov M.N., Valiev R.Z. Formation of nanograined structure and decomposition of supersaturated solid solution during high pressure torsion of Al-Zn and Al-Mg alloys // Acta Materialia. 2004. V. 52. № 15. P. 4469–4478.
- [2] Mehrer H. Diffusion in Solids. Springer, 2007. 637 p.
- [3] Brassart L., Liu Q., Suo Z. Mixing by Shear, Dilation, Swap and Diffusion // Journal of the Mech. and Phys. of Solids. 2018. V. 112. P. 253–272.
- [4] Brassart L., Liu Q., Suo Z. Shear, Dilation and Swap: Mixing in the Limit of Fast Diffusion // Journal of the Mech. and Phys. of Solids. 2016. V. 96. P. 48–64.

**Dudin D.S., Keller I.E.** Relaxation processes in the system of bound diffusion and viscoelastic flow with accompanying chemical reactions and miscrostructure evolution. The quasi-static model of a three-component viscoelastic medium is formed. Components are diffusible and can chemically react. The change of microstructure is described by a scalar internal variable. The one dimensional model problem is posed in the vicinity of a homogeneous stationary solution of which a perturbation of field values is produced that leads to the eigenvalue problem. Its solution allows to obtain the dependence of the relaxation time on the wavelength of perturbations. The relaxation time asymptotes corresponding to the simplest coupled processes are studied.

# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УПРУГОДИФФУЗИОННЫЕ ВОЛНЫ В ОРТОТРОПНОМ СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ

## Зверев Н. А.<sup>1</sup>, Земсков А. В.<sup>1,2</sup>

 Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
 <sup>2</sup> НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова

Рассмотрена связанная одномерная нестационарная полярно-симметричная задача, состоящая в определении напряженно-деформированного состояния ортотропного сплошного многокомпонентного бесконечного цилиндра, находящегося под влиянием упругодиффузионных возмущений. Для решения задачи использован метод функций Грина, для нахождения которых применялись интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение искомых функций в ряды Бесселя по радиальной координате. Обращение преобразования Лапласа осуществлялось аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Путем перехода к бесконечным скоростям распространения диффузионных потоков было исследовано влияние релаксации на диффузионное поле и поле механических перемещений внутри сплошного цилиндра.

1. Постановка задачи. С середины 30-х годов 20-го века как в России, так и за рубежом активно изучаются механодиффузионные процессы и явления в различных твердых телах. Первые исследования в этой области носили сугубо экспериментальный характер. Математическая теория механодиффузии была сформирована позднее — в середине 60-х годов прошлого века. Анализ современных публикаций показывает, что эта проблема, в связи с исследованием напряженнодеформированного состояния конструкций и их элементов, работающих в условиях нестационарных нагрузок различной физической природы, остается актуальной и сегодня [1–4].

В работе исследуются нестационарные волновые процессы в ортотропном сплошном многокомпонентном однородном бесконечном цилиндре, находящемся под влиянием нестационарных упругодиффузионных возмущений. Задача рассматривается в полярно-симметричной постановке. Математическая модель, описывающая связанные механодиффузионные явления в *N*-компонентной среде, имеет следующий вид [5–7] (точка означает производную по времени):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u - \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} = \ddot{u},$$

$$-\Lambda_q \left( \frac{\partial^3 u}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r^3} \right) + D_q \left( \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right) = \dot{\eta}^{(q)} + \tau_q \ddot{\eta}^{(q)}.$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_q \eta^{(q)} \right) \bigg|_{r=c_{12}} = f_1(\tau), \ \eta^{(q)} \bigg|_{r=c_{12}} = f_{q+1}(t).$$

$$(1)$$

Здесь все величины являются безразмерными. Они связаны со своими размерными аналогами с помощью следующих соотношений

$$r = \frac{r^*}{L}, \ u = \frac{u^*}{L}, \ \tau = \frac{Ct}{L}, \ c_{ij} = \frac{c_{ij}^*}{c_{11}^*}, \ C^2 = \frac{c_{11}^*}{\rho},$$
$$\alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{c_{11}^*}, \ D_q = \frac{D_{11}^{(q)}}{CL}, \ \Lambda_q = \frac{m^{(q)}\alpha_{11}^{(q)}D_{11}^{(q)}n_0^{(q)}}{\rho RT_0 CL}, \ \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{L}$$

где t — время;  $u^*$  — радиальная компонента вектора механических перемещений;  $r^*$  — радиальная координата;  $\eta^{(q)}$  — приращение концентрации q-го вещества в составе N-компонентной сплошной среды;  $n_0^{(q)}$  — начальная концентрация q-го вещества в составе N-компонентной сплошной среды;  $m^{(q)}$  — молярная масса q-го вещества в составе N-компонентной сплошной среды;  $c_{ij}^*$  — упругие постоянные;  $\rho$  — плотность сплошной среды;  $\alpha_{ij}^{(q)}$  — упругодиффузионные коэффициенты, характеризующие деформации, возникающие вследствие диффузии;  $D_{ij}^{(q)}$  — компоненты тензора самодиффузии; R — универсальная газовая постоянная;  $T_0$  — температура среды;  $\tau^{(q)}$  — время релаксации диффузионных потоков; характерный размер L выбирается таким образом, чтобы безразмерный радиус цилиндра равнялся  $c_{12}$ .

**2. Метод решения.** Решение задачи (1), (2) с нулевыми начальными условиями ищется в интегральной форме

$$u = \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau G_{1m}(r,t) f_m(\tau-t) dt, \ \eta_q = \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau G_{q+1,m}(r,t) f_m(\tau-t) dt.$$
(3)

Здесь  $G_{km}(r,\tau)$   $(k,m=\overline{0,N+1})$  — поверхностные функции влияния рассматриваемой задачи.

Для нахождения функций Грина применяем интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение искомых функций в ряды Фурье по функциям Бесселя. В результате приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений.

$$k_{1}(\lambda_{n},s) G_{1m}^{LH}(\lambda_{n},s) - c_{12}\lambda_{n} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j} G_{j+1,m}^{LH}(\lambda_{n},s) = \frac{2}{J_{1}(\lambda_{n})} \delta_{1m},$$
  

$$-\Lambda_{q}\lambda_{n}^{3} G_{1m}^{LH}(\lambda_{n},s) + c_{12}k_{q+1}(\lambda_{n},s) G_{q+1,m}^{LH}(\lambda_{n},s) =$$
  

$$= -\frac{2\lambda_{n}\Lambda_{q}}{J_{1}(\lambda_{n})} \left(\delta_{1m} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j}\delta_{j+1,m}\right),$$
(4)

где  $J_0(z)$ ,  $J_1(z)$  — функции Бесселя 0-го и 1-го порядков;  $\lambda_n$  — корни уравнения  $J_0(\lambda_n) = 0$ , а остальные величины определяются следующим образом

$$k_{1} (\lambda_{n}, s) = \lambda_{n}^{2} + s^{2}, \quad k_{q+1} (\lambda_{n}, s) = D_{q} \lambda_{n}^{2} + s + \tau_{q} s^{2},$$

$$G_{q+1,m}^{L} (r, s) = \sum_{k=1}^{\infty} G_{q+1,m}^{LH} (\lambda_{k}, s) J_{0} \left(\lambda_{k} \frac{r}{c_{12}}\right),$$

$$G_{q+1,m}^{LH} (\lambda_{n}, s) = \frac{2}{c_{12}^{2} J_{2}^{2} (\lambda_{n})} \int_{0}^{c_{12}} r G_{q+1,m}^{L} (r, s) J_{0} \left(\lambda_{n} \frac{r}{c_{12}}\right) dr,$$

$$G_{1m}^{L}(r,s) = \sum_{k=1}^{\infty} G_{1m}^{LH}(\lambda_{k},s) J_{1}\left(\lambda_{k}\frac{r}{c_{12}}\right),$$
$$G_{1m}^{LH}(\lambda_{n},s) = \frac{2}{c_{12}^{2}J_{1}^{2}(\lambda_{n})} \int_{0}^{c_{12}} r G_{1m}^{L}(r,s) J_{1}\left(\lambda_{n}\frac{r}{c_{12}}\right) dr.$$

Решение системы (4) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} G_{11}^{HL}(\lambda_{n},s) \\ G_{1,q+1}^{HL}(\lambda_{n},s) \end{cases} = \frac{2}{J_{1}(\lambda_{n}) P(\lambda_{n},s)} \begin{cases} P_{11}(\lambda_{n},s) \\ P_{1,q+1}(\lambda_{n},s) \end{cases}, \\ G_{q+1,1}^{HL}(\lambda_{n},s) = -\frac{2}{J_{1}(\lambda_{n})} \left[ \frac{\lambda_{n}\Lambda_{q}}{c_{12}k_{q+1}(\lambda_{n},s)} - \frac{P_{q+1,1}(\lambda_{n},s)}{Q_{q}(\lambda_{n},s)} \right], \\ G_{q+1,p+1}^{HL}(\lambda_{n},s) = -\frac{2}{J_{1}(\lambda_{n})} \left[ \frac{\lambda_{n}\Lambda_{q}\alpha_{p}}{c_{12}k_{q+1}(\lambda_{n},s)} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_{n},s)}{Q_{q}(\lambda_{n},s)} \right]. \end{cases}$$
(5)

В формулах (5) приняты следующие обозначения:

$$P(\lambda_{n},s) = k_{1}(\lambda_{n},s) \Pi(\lambda_{n},s) - c_{12}\lambda_{n}^{4} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j}\Lambda_{j}\Pi_{j}(\lambda_{n},s),$$

$$Q_{q}(\lambda_{n},s) = c_{12}k_{q+1}(\lambda_{n},s) P(\lambda_{n},s),$$

$$\Pi(\lambda_{n},s) = \prod_{j=1}^{N} k_{j+1}(\lambda_{n},s), \quad \Pi_{j}(\lambda_{n},s) = \prod_{k=1,k\neq j}^{N} k_{k+1}(\lambda_{n},s),$$

$$P_{11}(\lambda_{n},s) = \Pi(\lambda_{n},s) - c_{12}\lambda_{n}^{2}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{j}\Lambda_{j}\Pi_{j}(\lambda_{n},s),$$

$$P_{1,q+1}(\lambda_{n},s) = -c_{12}\lambda_{n}^{2}\alpha_{q}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{j}\Lambda_{j}\Pi_{j}(\lambda_{n},s),$$

$$P_{q+1,1}(\lambda_{n},s) = \Lambda_{q}\lambda_{n}^{3} \left[ \Pi(\lambda_{n},s) - c_{12}\lambda_{n}^{2}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{j}\Lambda_{j}\Pi_{j}(\lambda_{n},s) \right],$$
(6)

$$P_{q+1,p+1}\left(\lambda_{n},s\right) = c_{12}\Lambda_{q}\alpha_{p}\lambda_{n}^{5}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{j}\Lambda_{j}\Pi_{j}\left(\lambda_{n},s\right).$$

Оригиналы функций влияния находятся аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [6, 7].

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Любов Б.Я.* Диффузионные процессы в неоднородных твёрдых средах. М.: Наука, 1981. 296 с.

- [2] Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // Physica B: Condensed Matter. 2016. V. 496. P. 57–68.
- [3] Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // International Journal of Solids and Structures. 2007. V. 44. P. 5711–5722.
- [4] Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // International Journal of Engineering and Technical Research. 2014. V. 2. № 5. P. 151–159.
- [5] Зверев Н. А. Земсков А. В. Тарлаковский Д. В. Полярно-симметричная стационарная задача механодиффузии для изотропного полого цилиндра // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. - М.: ООО «ТР-принт», 2017. С. 128–132.
- [6] Земсков А. В. Тарлаковский Д. В. Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды // Проблемы прочности и пластичности. 2018. № 80. Р. 5–14.
- [7] Zemskov A. V. Tarlakovskii D. V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. V. 158. № 1. 012101.

**Zverev N.A., Zemskov A.V.** Unsteady elastic-diffusion waves in an orthotropic continuous cylinder. In this paper, we considered a related one-dimensional unsteady problem consisting in determining the stress-strain state of an orthotropic continuous multicomponent cylinder under the influence of elastic diffusion perturbations. The problem was considered in a polar-symmetric formulation. To solve the problem, the Green function method was used, to find which the Laplace integral transformation in time and the expansion of the desired functions in Bessel series in radial coordinate were used. The Laplace transform was inverted analytically using deductions and operational calculus tables. By moving to infinite propagation velocities of diffusion flows, we studied the effect of relaxation on the diffusion field and the field of displacements inside the cylinder.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ИЗГИБ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ — ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ

Земсков А.В.<sup>1,2</sup>, Тарлаковский Д.В.<sup>2,1</sup>, Файкин Г.М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) <sup>2</sup> НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Рассматривается нестационарная задача о прямом упругодиффузионном изгибе консольно-закрепленной однородной изотропной балки Бернулли — Эйлера. Математическая постановка представляет собой замкнутую систему уравнений поперечных нестационарных колебаний балки с учетом диффузии, которая получена из модели упругой диффузии с помощью вариационного принципа Даламбера. Решение задачи ищется с помощью метода эквивалентных граничных условий, который позволяет выразить решение задачи с произвольными граничными условиями через известное решение какой-либо задачи того же вида и с той же геометрией области.

1. Постановка задачи. Эффекты взаимодействия полей различной физической природы, проявляющиеся в виде механодиффузии, термомеханодиффузии, электродиффузии, магнитодиффузии и т. д. достаточно хорошо изучены экспериментально и широко используются в технике. Различные постановки и методы решения задач механодиффузии (с возможным учетом других физических полей) в последние десятилетия рассматривались в работах как отечественных, так и зарубежных авторов, что говорит об актуальности исследований в данной области [1–4].

С другой стороны, надо отметить, что подавляющее большинство публикаций связано с моделированием как стационарных, так и нестационарных процессов в телах канонической формы: слой или полупространство. В то же время, реальные тела имеют конечный размер. Поэтому наибольший практический интерес вызывают задачи механодиффузии для балок, пластин и оболочек, которые являются основными элементами конструкций, используемых в технике.

В данной работе рассматривается нестационарная задача о плоском упругодиффузионном изгибе консольно-закрепленной однородной изотропной балки Бернулли — Эйлера (рис. 1). Математическая постановка представляет собой замкнутую систему уравнений поперечных колебаний балки с учетом диффузии, которая получена из модели упругой диффузии с помощью вариационного принципа Даламбера [5]:

$$\ddot{v}'' - a\ddot{v} = v^{IV} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j H_j'', \ \dot{H}_q = D_q H_q'' + \Lambda_q v^{IV}, \ \frac{F}{J_3} = a.$$
(1)

Здесь точки обозначают производную по времени, штрихи — производную по координате  $x_1$ . Все величины в (5) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения

$$x_{i} = \frac{x_{i}^{*}}{l}, v = \frac{v^{*}}{l}, \tau = \frac{Ct}{l}, C^{2} = \frac{\lambda^{*} + 2\mu^{*}}{\rho}, \alpha_{q} = \frac{\alpha^{(q)}}{\lambda^{*} + 2\mu^{*}}, D_{q} = \frac{D^{(q)}}{Cl},$$
$$\Lambda_{q} = \frac{m^{(q)}D^{(q)}\alpha^{(q)}n_{0}^{(q)}}{\rho RT_{0}Cl}, \lambda = \frac{\lambda^{*}}{\lambda^{*} + 2\mu^{*}}, \mu = \frac{\mu^{*}}{\lambda^{*} + 2\mu^{*}}, F = \frac{F^{*}}{l^{2}}, J_{3} = \frac{J_{3}^{*}}{l^{2}},$$

где t — время;  $x_i^*$  — прямоугольные декартовы координаты;  $v^*$  — поперечный прогиб балки; l — длина балки;  $H_q$  — приращение концентрации q-ой компоненты вещества в составе N — компонентной среды;  $n_0^{(q)}$  — начальная концентрация q-го вещества;  $\lambda^*$  и  $\mu^*$  — упругие постоянные Ламе;  $\rho$  — плотность;  $\alpha^{(q)}$  — коэффициент, характеризующий объёмное изменение среды за счёт диффузии;  $D^{(q)}$  — коэффициенты самодиффузии; R — универсальная газовая постоянная;  $T_0$  — температура среды;  $m^{(q)}$  — молярная масса q-го вещества,  $F^*$  — площадь сечения,  $J_3^*$  — момент инерции сечения балки относительно оси  $Ox_3$ .



Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

Начальные условия полагаем нулевыми. Граничные условия в соответствии с моделью консольного изгиба балки имеют вид  $(x = x_1)$ :

$$\begin{aligned} v'|_{x=0} &= 0_1, \ v|_{x=0} = 0, \ H_q|_{x=0} = 0, \ \left( D_q H'_q + \Lambda_q v''' \right) \Big|_{x=1} = 0, \\ \left( v'' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j \right) \Big|_{x=1} &= 0, \ \left( v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H'_j - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=1} = f_{22} \left( \tau \right). \end{aligned}$$

$$(2)$$

2. Метод решения. Основная проблема в решении поставленной задачи заключается в невозможности построения решения в виде тригонометрических рядов Фурье. Это существенно осложняет обращение преобразования Лапласа, которое также используется при решении этой задачи. Для преодоления указанной проблемы используется метод эквивалентных граничных условий [6, 7], который заключается в выполнении следующего ряда шагов:

1. Вместо исходной задачи рассматривается вспомогательная задача со следу-

ющими граничными условиями.

$$\begin{aligned} v'|_{x=0} &= 0, \ v'|_{x=1} = f_{12}^{*}(\tau), \\ \left( D_{q}H'_{q} + \Lambda_{q}v''' \right)|_{x=0} &= f_{q+2,1}^{*}(\tau), \ \left( D_{q}H'_{q} + \Lambda_{q}v''' \right)|_{x=1} = 0, \\ \left( v''' + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j}H'_{j} - \ddot{v}' \right)|_{x=0} &= f_{21}^{*}(\tau), \ \left( v''' + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j}H'_{j} - \ddot{v}' \right)|_{x=1} = f_{22}(\tau), \end{aligned}$$
(3)

где функции  $f_{12}^{*}(\tau), f_{1,q+2}^{*}(\tau), f_{21}^{*}(\tau)$  подлежат определению. Её решение имеет вид

$$v(x,\tau) = \int_{0}^{\tau} \left[G_{12}(x,\tau-t) f_{21}^{*}(t) - G_{12}(1-x,\tau-t) f_{22}(t)\right] dt + \\ + \sum_{p=1}^{N} \int_{0}^{\tau} G_{1,p+2}(x,\tau-t) f_{p+2,1}^{*}(t) dt - \int_{0}^{\tau} G_{11}(1-x,\tau-t) f_{12}^{*}(t) dt, \\ \eta_{q}(x,\tau) = \int_{0}^{\tau} \left[G_{q+2,2}(x,\tau-t) f_{21}^{*}(t) - G_{q+2,2}(1-x,\tau-t) f_{22}(t)\right] dt + \\ + \sum_{p=1}^{N} \int_{0}^{\tau} G_{q+2,p+2}(x,\tau-t) f_{p+2,1}^{*}(t) dt - \int_{0}^{\tau} G_{q+2,1}(1-x,\tau-t) f_{12}^{*}(t) dt,$$
(4)

где  $G_{mk}$  — поверхностные функции Грина задачи (1), (3), которые являются решениями следующих задач

$$\ddot{G}_{1k}'' - a\ddot{G}_{1k} = G_{1k}^{IV} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j G_{j+1,k}'', \ \dot{G}_{q+1,k} = D_q G_{q+1,k}'' + \Lambda_q G_{1k}^{IV}, \tag{5}$$

$$\left( G_{1k}^{\prime\prime\prime} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j} G_{j+1,k}^{\prime} - \ddot{G}_{1k}^{\prime} \right) \Big|_{x_{1}=0} = \delta_{2k} \delta\left(\tau\right), \quad G_{1k}^{\prime}|_{x_{1}=0} = \delta_{1k} \delta\left(\tau\right), \\
\left( G_{1k}^{\prime\prime\prime} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j} G_{j+1,k}^{\prime} - \ddot{G}_{1k}^{\prime} \right) \Big|_{x_{1}=1} = 0, \quad G_{1k}^{\prime}|_{x_{1}=1} = 0, \\
\left( D_{q} G_{q+1,k}^{\prime} + \Lambda_{q} G_{1k}^{\prime\prime\prime} \right) \Big|_{x_{1}=0} = \delta_{q+2,k} \delta\left(\tau\right), \quad \left( D_{q} G_{q+1,k}^{\prime} + \Lambda_{q} G_{1k}^{\prime\prime\prime} \right) \Big|_{x_{1}=1} = 0.$$
(6)

Для нахождения функций  $G_{mk}$  используется преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье.

2. Далее строятся соотношения, связывающие правые части граничных условий обоих задач. Эти соотношения записываются в виде интегральных уравнений Вольтера 1-го рода, которые имеют вид [6, 7]

$$\sum_{j=1}^{4} \int_{0}^{\tau} a_{ij} \left(\tau - t\right) y_{j} \left(\tau\right) = \varphi_{i} \left(\tau\right).$$

$$\tag{7}$$

где

$$a_{11}(\tau) = G_{12}(0,\tau), \ a_{12}(\tau) = -G_{11}(1,\tau), \ a_{1,p+2}(\tau) = G_{1,p+2}(0,\tau),$$
$$a_{21}(\tau) = G_{12}''(1,\tau) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j G_{j+2,2}(1,\tau), \ a_{22}(\tau) = -G_{11}''(0,\tau) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j G_{j+2,1}(0,\tau),$$
Нестационарный изгиб консольно-закрепленной балки

$$\begin{aligned} a_{2,q+2}\left(\tau\right) &= \sum_{p=1}^{N} \left[ G_{1,p+2}''\left(1,\tau\right) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j} G_{j+2,p+2}\left(1,\tau\right) \right], \\ a_{q+2,1}\left(\tau\right) &= G_{q+2,2}\left(0,\tau\right), \ a_{q+2,2}\left(\tau\right) = -G_{q+2,1}\left(1,\tau\right), \ a_{q+2,p+2}\left(\tau\right) = G_{q+2,p+2}\left(0,\tau\right), \\ y_{1}\left(\tau\right) &= f_{21}^{*}\left(\tau\right), \ y_{2}\left(\tau\right) = f_{12}^{*}\left(\tau\right), \ y_{p+2}\left(\tau\right) = f_{p+2,1}^{*}\left(\tau\right), \\ \varphi_{1}\left(\tau\right) &= \int_{0}^{\tau} G_{12}\left(1,\tau-t\right) f_{22}\left(t\right) dt, \\ \varphi_{2}\left(\tau\right) &= \int_{0}^{\tau} \left[ G_{12}''\left(0,\tau-t\right) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{j} G_{j+2,2}\left(0,\tau-t\right) \right] f_{22}\left(t\right) dt, \\ \varphi_{q+2}\left(\tau\right) &= \int_{0}^{\tau} G_{q+2,2}\left(1,\tau-t\right) f_{22}\left(t\right) dt. \end{aligned}$$

3. Полученная система уравнений решается численно с помощью квадратурных формул. Для этого разбиваем область [0, T] изменения времени  $\tau$  на  $N_{\tau}$  отрезков точками  $\tau_m = mh \ (m = \overline{0, N_{\tau}})$  с равномерным шагом  $h = T/N_{\tau}$  и вводим сеточные функции  $y_j^m = y_j \ (\tau_m), \ a_m^{ij} = a_{ij} \ (0, \tau_m).$ 

Каждый из интегралов в (7) при  $\tau = \tau_m$  приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников:

$$\int_{0}^{\tau_{m}} a_{ij} \left(0, \tau_{m} - t\right) y_{j} \left(t\right) dt \approx h S_{m-1/2}^{ij} + h a_{1/2}^{ij} y_{m-1/2}^{j},$$

$$S_{m-1/2}^{ij} = \sum_{l=1}^{m-1} K_{m-l+1/2}^{ij} \left(k, l = \overline{1, 4}\right),$$

$$\tau_{m-1/2} = \frac{\tau_{m-1} + \tau_{m}}{2} = h \left(m - \frac{1}{2}\right),$$

$$\tau_{m-l+1/2} = \tau_{m} - \tau_{l-1/2} = h \left(m - l + \frac{1}{2}\right) \left(m = \overline{1, N_{\tau}}\right).$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений ( $i \ge 1$ ):

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_{i-1/2} = \mathbf{b}_{i-1/2} \,,$$

где

$$\mathbf{A} = \left(a_{1/2}^{ij}\right)_{4\times 4}, \ \mathbf{b}_{m-1/2} = \left(b_{m-1/2}^{i}\right)_{4\times 1}, \quad b_{m-1/2}^{i} = \frac{\varphi_{i}\left(\tau_{m}\right)}{h} - \sum_{j=1}^{4} S_{m-1/2}^{ij}.$$

Её решение решение находится по формулам Крамера.

4. Решение исходной задачи получается путем численного вычисления сверток функций Грина вспомогательной задачи с функциями, полученными в результате численного решения системы уравнений (7).

109

Таким образом, разработанный алгоритм позволяет выразить решение задачи с произвольными граничными условиями через известное решение какой-либо задачи того же вида и с той же геометрией области.

### ЛИТЕРАТУРА

- Князева А.Г. Поболь И.Л. Романова В.А. Поле напряжений в диффузионной зоне соединения, получаемого электронно-лучевой пайкой // Физическая мезомеханика. 2001. Т. 4, № 5. С. 41–53.
- [2] Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci. 2006. V. 2006. P. 1–15.
- [3] Kumar R., Kansal T. Dynamic problem of generalized thermoelastic diffusive medium // Journal of Mechanical Science and Technology. 2010. V. 24. P. 337–342.
- [4] Sherief H.H., Saleh H. A Half Space Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42. P. 4484–4493.
- [5] Файкин Г. М., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Постановка задачи о консольном изгибе балки Эйлера–Бернулли с учетом диффузии // Материалы XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. М.: ООО «ТРП», 2019. С. 136–139.
- [6] Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // Materials Physics and Mechanics. 2015. V. 23. № 1. P. 36–41.
- [7] Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Решение двумерных задач механодиффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 1. С. 49–56.

Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V., Faykin G. M. Unsteady bending of a cantilevered Bernoulli-Euler beam with diffusion. The unsteady problem of the direct elastic-diffusion bending of a cantilevered homogeneous isotropic Euler-Bernoulli beam is considered. The mathematical formulation is a closed system of equations of transverse unsteady vibrations of a beam with allowance for diffusion. It is obtained from the model of elastic diffusion using the d'Alembert variational principle. The solution to the problem is sought using the method of equivalent boundary conditions. This method allows us to express a solution to a problem with arbitrary boundary conditions in terms of a well-known solution to a problem of the same type and with the same geometry of the region.

# МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ДЕЙСТВИЯ «ВАКУУМ СИНДРОМА» ПРИ ТРАВМАТИЧЕСКОЙ И ПОСЛЕОПЕРАЦИОННОЙ ОТСЛОЙКЕ СОСУДИСТОЙ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА

Зимин Б. А.<sup>1</sup>, Качанов А. Б.<sup>2</sup>, Ялыч Е. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург <sup>2</sup>МНТК «Микрохирургия глаза» им. С. Н. Фёдорова, Санкт-Петербург

Цилихориоидальная отслойка (ЦХО) является частым и серьёзным осложнением при травмвх и хирургических операциях, способным привести к развитию тяжёлых последствий. В настоящее время известны методы снижения риска возникновения и тактика лечения возникающего осложнения. Тем не менее остаются нерешёнными многие вопросы, касающиеся причин возникновения ЦХО. В работе рассматривается появление ЦХО на основе теории В.В. Волкова. На основе элементарной молекулярно-кинетической теории даётся оценка времени развития ЦХО.

Известно, что отслойка сосудистой оболочки (цилиохориоидальная отслойка) достаточно распространённое осложнение, возникающее после хирургического вмешательства, связано с разгерметизацией глазного яблока или при травмах глазного яблока (контузиях). Сосудистая оболочка или хориоидея представляет собой структуру, локализованную между склерой и пигментных слоем сетчатки. Супрахориоидальное пространство является переходной зоной между сосудистой оболочкой и склерой. Оно состоит из волокнистой соединительной ткани. В норме, т. е. в обезвоженном состоянии его толщина составляет порядка 30 мм. Супрахориоидальное пространство является одним из звеньев увеосклерального пути оттока внутриглазной жидкости.

Существуют различные представления о происхождении отслойки сосудистой оболочки [1, 2]. Ряд офтальмологов полагает, что отслойка возникает вследствие нарушения внутриглазной гемодинамики. Другие считают, что это происходит изза нарушения концентрации белка во влаге передней камеры глаза. Мы полагаем, что при оперативных вмешательствах и тупых травмах глазного яблока биохимические факторы отслойки имеют меньшее значение по сравнению с процессом механической деформации роговично-склеральной капсулы глаза и термодинамики процессов испарения и конденсации влаги в супрахориоидальном пространстве.

Такое объяснение цилиохориоидальной отслойки (ЦХО, ablatio choro–ideae) предложил В.В. Волков [3]. В.В. Волков объясняет появление ЦХО теорией «вакуум–синдрома» за счёт быстрого восстановления деформированной склеральной капсулы (самопроизвольное распространение, т. к. капсула более жёсткая, по сравнению со склерой). При этом происходит быстрое испарение внутритканевой жидкости в образовавшуюся вакуумную полость. Пока вакуум в образовавшейся полости сохраняется, внутритканевая жидкость будет интенсивно испаряться. Но одновременно с процессом испарения некоторое количество молекул пара возвращается на поверхность полости и конденсируется.

В дальнейшем будем полагать, что твёрдая фаза занимает полупространство x < 0 и газ (пары воды) x > 0. Движение газа описывается кинетическим уравнением Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla)f = St(f) \tag{1}$$

где f — функция распределения частиц,  $St(f) = \frac{f_0 - f}{\tau}$  — интеграл столкновений,  $\tau$  — время свободного пробега молекул газа,  $f_0$  — равновесная функция распределения.

В работе [4] на основе приближённого решения (1) при испарении в вакуум было показано для полупространства, что примерно через 20 «времён свободных побегов» происходит стабилизация обратного потока молекул и расход испарения снижается примерно на 20 %. Таким образом, в стационарном режиме испарения с максимальным расходом примерно 0,2 из числа испаряющихся молекул газа вновь возвращаются на поверхность и конденсируются. Для грубого подсчёта времени натекания в вакуумную полость газа считаем, что в 1 см<sup>3</sup> газообразного воздуха содержится  $n_{\rm B}$  молекул.

$$n_{\rm B} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22, 4\pi} = 2,7 \cdot 10^{19}.$$
 (2)

 $n_{\rm ж} \sim 10^{22} \frac{1}{{}_{\rm CM}^3}$  — число молекул водяного пара. С площадки 1 см<sup>2</sup> в 1 с испаряется количество молекул, равное N:

$$N = \frac{n \cdot \lambda \cdot \langle V \rangle}{8} \tag{3}$$

где  $\lambda$  – длина свободного пробега,  $\langle V \rangle$  – средняя квадратичная (тепловая) скорость молекул.

Длина свободного пробега молекул для разных давлениц, но при одной и той же температуре газа имеет вид:

$$\lambda_0 \cdot p_0 = \lambda_1 \cdot p_1 \tag{4}$$

где  $\lambda_i, p_i$  — свободный пробег молекулы и давление газа соответственно. При  $p_1 \sim 10^{-7}$  атм,  $\lambda_1 = 1$  м, при  $p_0 \sim 1$  атм,  $\lambda_0 = 10^{-5}$  см, для  $p_2 = 0, 1$  атм,  $\lambda_2 = 10^{-4}$  см.

Объём отслойки можно оценить как  $U = (1 \div 0, 3)$ см<sup>3</sup>.

Тогда время, необходимое для заполнения вакуумной полости t можно подсчитать, используя (3), (4), (2):

$$t = \frac{8 \cdot n_{\mathsf{m}} \cdot U}{\lambda \cdot n \cdot \langle V \rangle} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ c} \approx 27 \text{ суток}$$
(5)

 $\lambda \sim 10^{-5}$  cm,  $n \sim 10^{-19}$ ,  $n_{\rm m} \sim 10^{22}$ .

С учётом [4] это время уменьшится и станет равным:

$$t_{3a\pi} \cong 5$$
суток (6)

Для полостей  $U \sim 0.3$ см<sup>3</sup> время  $t_3$  будет равно:

$$t_{3\mathrm{aff}} \cong 1 \div 2\mathrm{суток}$$
 (7)

Вышеприведённая оценка времени по порядкам совпадает с клиническими наблюдениями [5].

### Выводы.

В работе рассмотрена ЦХО с помощью теории «вакуум-синдрома» В.В. Волкова. Используя молекулярно-кинетические представления для газов, проведена оценка времени необратимого заполнения супрахориоидального пространства парами жидкости (воды).

Знание механизмов развития ЦХО позволяет применить профилактичские меры, а в ряде случаев устранить отслойку в результате медикаментозной терапии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18-01-00832а.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Петров С. Ю., Подгорная Н. Н., Асламазова А. Э. Цилиохориоидальная отслойка // Национальный журнал глаукома. 2015. № 1. С. 94–102.
- [2] Манаенкова Г. Е., Фабрикантов О. Л. Отслойка сосудистой оболочки. Этиология, патогенез, клиника и лечение // Сибирский научный медицинский журнал. 2019. № 5. С. 141–148.
- [3] Волков В. В. Глазной вакуум-синдром // Вестн. офтальмологии. 1978. № 5. С. 45–48.
- [4] Anisimov S. I, Rakhmatulina A. Kh. The dynamics of expansion of a vapor when evaporated into a vacuum // Sov. Phys. JETP. 1973. № 3. P. 441–444.
- [5] Матюхина Е. Н., Бабушкин А. Э. Профилактика и лечение цилиохориоидальной отслойки после антиглаукоматозных операций (обзор литературы) // Сборник научных трудов научно-практической конференции по офтальмохирургии с международным участием. 2013. С. 194–197.

Zimin B. A., Kachanov A. B., Yalych E. S. Molecular-kinetic model for estimating of the action time of the "vacuum syndrome" in traumatic and postoperative shell eyes detachment. Ciliochoroidal detachment (CCD) is a frequent and serious complication in injuries and surgical operations that can lead to the development of severe consequences. Currently, there are known methods of reducing the risk of occurrence and tactics of treatment of the resulting complication. However, there remain unresolved many questions concerning the reasons for the emergence of the CCD. The paper deals with the appearance of the CCO based on the theory of V. V. Volkov. On the basis of the elementary molecular kinetic theory, an estimate of the time of development of CCD is given.

## МОДЕЛЬ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕТАЛЛОВ

# Зимин Б. А.<sup>1</sup>, Судьенков Ю. В.<sup>2</sup>, Ялыч Е. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург <sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

Появление размерного структурного параметра при упруго-пластическом деформировании анализируется в рамках термодинамического проявления ангармонического эффекта.

До настоящего времени нет достаточно строгой количественной теории, описывающей наблюдаемые закономерности процесса пластического течения, в частности, переходные процессы от упругого отклика металлов к развитому пластическому течению. Общепринятые представления о процессе пластической деформации, как правило, основываются на данных о его стадийности [1, 2]. Выяснение границ и тем более природы каждой из стадий, в особенности для поликристаллов, оказывается сложной задачей, так как зачастую отсутствуют очевидные признаки смены механизмов деформации и разделение на стадии трактуют по характеру изменения коэффициента упрочненичя [1–3].

Как известно, деформирование и разрушение металлов сопровождается преобразованием механической работы в другие виды энергии — тепловую, электромагнитную, акустическую [1–4]. В этой связи вполне логично предположить корреляцию изменений характера этих преобразований со сменой стадий пластического течения и происходящих при этом перестройках структуры материалов. При этом отметим, что современное оборудование позволяет с достаточной чувствительностью и точностью регистрировать такие процессы [4, 5].

Известно, что тепловыделение при деформировании является следствием термомеханического эффекта, обусловленного ангармонизмом межатомного потенциала. Анализ такого рода задач в твердых телах опирается на уравнения состояния, одним из параметров которого является параметр Грюнайзена  $\gamma$ .

В механике деформируемого твердого тела одной из важнейших характеристик является коэффициент Пуассона  $\nu$  — коэффициент поперечных деформаций, обусловленный действием внутренних сил, так как определяется деформациями, происходящими одновременно во взаимно перпендикулярных направлениях, не совпадающих с направлением действия внешней силы. Это обстоятельство выражает его потенциальную чувствительность к структурным перестройкам при деформировании материалов [6–9].

Таким образом, изучение поведения коэффициента поперечной деформации и процессов тепловыделения при упругопластическом деформировании металлов, представляет весьма актуальную задачу механики и физики твердого тела. В работе [5] были представлены результаты экспериментальных исследований процесса тепловыделения и изменения коэффициента поперечной деформации при односном растяжении образцов из меди М1, магниевого сплава AZ31B, титана BT6, стали 12X18H1OT и Ст.3, а также алюминиевого сплава Д16AM. Результаты экспериментов показывают, что нагрев образца существенно зависит от скорости нагружения, а поведение диаграммы нагружения  $\sigma - \epsilon$  мало зависит от скорости нагружения при малых изменениях диапазонов скоростей.

Можно отметить корреляцию процесса тепловыделения с процессами структурных преобразований при пластическом деформировании. Структура упругопластической среды обычно описывается некоторым дополнительным параметром. Такой параметр является термодинамическим проявлением ангармонического эффекта влияния механичесой нагрузки на частоту колебаний атомов.

Для оценки теплоёмкости в упругой и пластической областях деформирования используем модель ангармонического осциллятора. Потенциальная энергия N такого осциллятора равна сумме гармонической и ангармонической добавок [10]:

$$U(x) = cx^2 - c_1 x^3 - c_2 x^4, (1)$$

где *с*, *c*<sub>1</sub>, *c*<sub>2</sub> — неотрицательные постоянные, полученные из потенциалов, например, Леннарда-Джонса, и удовлетворяющих [10]:

$$c_1 \leqslant \sqrt{\frac{8c^3}{kT}}, \quad c_2 \ll \frac{4c^2}{kT}, \tag{2}$$

где *k* — постоянная Больцмана, *T* — температура.

Вклад в теплоёмкость на один осциллятор определяется [10]:

$$\frac{\partial E}{\partial T} = C_V \tag{3}$$

где внутренняя энергия Е выражается формулой [10]:

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}.$$
(4)

Здесь Z— потенциальная часть статистической суммы, которую можно представить в виде:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{U(x)}{kT}\right) dx.$$
 (5)

Вычисляя (3) с учётом (1), (4), (5) получим:

$$C_V \cong \frac{k}{2} + \frac{3}{2}k^2 \left(\frac{5}{4}\frac{c_l^2}{c^3} + \frac{c_3}{c^2}\right)T.$$
 (6)

Коэффициент температуропроводности  $\chi$  определяется как  $\chi = \frac{\lambda}{\rho C_V}$ , где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала,  $\rho$  – плотность,  $C_V$  – теплоёмкость.

При упругопластическом деформировании теплопроводность  $\lambda$  материала обычно не меняется при нормальных условиях. С учётом того, что плотность материала  $\rho$  при пластическом деформировании постоянна, то  $(\rho C_V)_e$  — в упругой области отличается от  $(\rho C_V)_p$  в пластической области.

Таким образом, коэффициент температуропроводности  $\chi$  зависит от того, нагревается ли тело в данной точке(пластическая деформация  $\frac{\partial T}{\partial t} > 0, \chi_p$ ) или охлаждается (упругая деформация  $\frac{\partial T}{\partial t} < 0, \chi_e$ ). В этой связи неободимо рассмотреть задачу о мгновенном отборе тепла из элементарного объёма области упругопластического деформирования с учётом того, что  $\chi_e \neq \chi_p$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi_p \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{при } \frac{\partial T}{\partial t} \ge 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi_e \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{при } \frac{\partial T}{\partial t} \le 0.$$
(7)

Решения уравнений (7) не существует для вышеуказанных условий для  $\chi$ , то есть при следующих начальных и граничных условиях [11]:

$$T(x,0) = 0, \ x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} T(x,0) \, dx = Q, \ T(\pm\infty,t) = 0, \tag{8}$$

где Q — выделяющееся тепло.

В [11] предложено искать автомодельное предельное решение в форме:

$$T = \left(\frac{A}{(\chi t)^{\frac{l+\alpha}{2}}}\right) \Phi(\xi, \varepsilon), \quad A = \eta \lim(Ql^{\alpha}), \quad x_0 = \xi \sqrt{\chi t}, \tag{9}$$

где  $\eta$  — безразмерная постоянная, зависящая от нормировки  $\Phi(\xi, \varepsilon), \xi = \frac{x}{\sqrt{\chi t}}, \varepsilon = \frac{\chi_e}{\chi_p}, x_0(t)$  — точка разрыва температуропроводности.

В решении (9) появляется размерный параметр l, определяемый по условию Коши задачи (8).

Автомодельная асимптотика решения задачи (9) определяется с точностью до постоянной  $A = \eta Q L^{\alpha}$ , где появляется размерный (структурный) параметр l.

Анализ автомодельного решения (9) в [11] показал, что при  $\varepsilon > 1$  величина  $\alpha > 0$ , а при  $\varepsilon < 1$  величина  $\alpha < 0$ . Это означает, что количество тепла Q, произведённого на начальной стадии упругопластического деформирования зависит от масштабного параметра l, причём Q возрастает при  $\varepsilon > 1$  и убывает при  $\varepsilon < 1$ , а произведение  $Ql^{\alpha}$  остаётся постоянным.

Таким образом, в условиях квазистатического упругопластического деформирования выявляется, что характер процесса теплообразования зависит от размерного фактора — параметра структуры материала (скопление дислокаций или вакансий, образование кристаллов и т. д.). То есть, производство тепла зависит от размера структуры материала и параметра  $\varepsilon$  — отношения температуропроводностей в упругой и пластической средах.

Это обосновывает необходимость введения в свободную энергию дополнительного параметра (типа размера зерна, тензора плотности дислокаций и т. д.) для построения термодинамики упругопластического деформирования.

### Выводы.

Используя термомеханику деформаций в ангармоническом твёрдом теле [3] и уравнения распространения тепла, показано, что размерный параметр в термодинамике деформирования появляется естественным путём.

116

Модель тепловыделения при квазистатическом деформировании металлов 117

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Трефилов В. И., Моисеев В. Ф., Печковский Э. П.* Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических металлов. Киев: Наукова думка, 1987. 236 с.
- [2] Конева Н. А., Козлов Э. В. Физическая природа стадийности пластической деформации // В сб.: Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Под ред. акад. В.Е. Панина, Новосибирск: Наука, 1990. С. 123–186.
- [3] Лейбфрид Г., Людвиг В. Теория ангармонических эффектов в кристаллах. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 229 с.
- [4] Plekhov O., Uvarov S., Naimark O./ Theoretical and Experimental Investigation of Dissipated and Stored Energy Ratio in Iron under Quasi-Static and Cyclic Loading // Strength of materials. 2008. V. 391. № 1. P. 101–105.
- [5] Зимин Б. А., Свентицкая В. Е., Смирнов И. В., Судьенков Ю. В. Влияние скорости деформации на тепловыделение при квазистатическом растяжении металлов. Эксперимент // ФТТ. 2018. № 60(4). С. 754–759.
- [6] Черкасов И. И. О связи коэффициента Пуассона с пластическими свойствами материала // ЖТФ. 1952. № 11. С. 1834–1837.
- [7] *Кузъменко В. А.* Новые схемы деформирования твёрдых тел. К.: Наукова думка, 1973. 200 с.
- [8] Зимин Б. А., Смирнов И. В., Судъенков Ю. В. Поведение коэффициентв поперечной деформации в процессе упругопластического деформирования металлов // Доклады РАН. 2017. № 4. С. 1–4.
- [9] Большанина М. А., Панин В. А.Скрытая энергия деформации // В кн. Исследования по физике твёрдого тела. 1957. С. 193–233.
- [10] Цзянь С. Физическая механика. М.: Мир, 1967. 452 с.
- [11] Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 255 с.

Zimin B. A., Sud'enkov Y. V., Yalych E. S. Model of heat release during quasistatic deformations of the metals. The structural parametr in the elasto-plastic effect is analysed in the framework of the mechanically deformed of anharmonic oscillators.

### ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ КРУПНОГАБАРИТНЫХ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

# Зимин В. Н., Крылов А. В., Павлов Н. Г., Чурилин С. А., Шахвердов А. О.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

В настоящее время внимание ученых, инженеров и конструкторов привлекают задачи, связанные с проектированием и созданием крупногабаритных космических конструкций (ККК). Особый класс ККК образуют трансформируемые системы, схемы которых допускают автоматическое изменение конфигурации. Поэтому разработка математической модели трансформируемой конструкции, адекватно описывающей ее раскрытие из транспортного положения в рабочее состояние, имеет важное значение при ее создании. Для математического моделирования динамики раскрытия многоэлементного силового каркаса кольцевой антенны используется программный комплекс MSC.ADAMS. Для анализа напряженно-деформированного состояния элементов силового каркаса при раскрытии кольцевой антенны используется конечно-элементный комплекс MSC.Patran\Nastran. В результате численного моделирования динамики раскрытия моделей силового каркаса были выявлены особенности их развертывания.

Рассматривается наиболее простой класс трансформируемых космических конструкций — кольцевые антенны [1]. Силовой каркас кольцевой антенны представляет собой многоэлементную (многозвенную) конструкцию с упругими шарнирными узлами, содержащими цилиндрические пружины кручения, обеспечивающие раскрытие системы из плотноупакованного транспортного положения, образование и поддержание на орбите плоского многоугольника с диаметром описанной окружности 20 м. Каждый элемент силового каркаса представляет собой профилированную прямоугольную панель 590×230 мм толщиной 0,8 мм из материала AMr-6. В шарнирных узлах предусмотрены упоры, ограничивающие углы разворота смежных панелей таким образом, что после их установки на упоры они образовали плоский правильный многоугольник. В этом положении пружины создают на упорах остаточные моменты, фиксирующие панели в рабочем состоянии.

Контур укладывается в контейнер в виде двух пакетов, соединенных замыкающей панелью. Контейнер состоит из трех отсеков; в двух крайних отсеках, скошенных под углом 160<sup>0</sup> друг к другу, помещается по 51 панели контура, замыкающая панель укладывается в средний отсек [2].

После сброса крышки под действием пружин в шарнирах силового каркаса происходит взаимный разворот панелей и вследствие этого — раскрытие каркаса, сопровождающееся увеличением его периметра. Такой способ раскрытия называется свободным (отсутствуют дополнительные связи, определяющие процесс раскрытия — привода, тросики, демпферы и т. п.). Окончательная форма, принятая каркасом, должна представляеть собой плоский правильный многоугольник с диаметром описанной окружности 20 м. Для кольцевых антенн, функционирующих в космическом пространстве, важными факторами становятся невесомость и отсутствие атмосферы. Чтобы воссоздать эти условия в наземных экспериментах, требуется создание дорогостоящих стендов обезвешивания и уникальных по размерам вакуумных камер. Очевидно, что проведение полномасштабных физических экспериментов по отработке раскрытия силового каркаса кольцевых антенн и приведению его в рабочее состояние в этих условиях представляется чрезвычайно дорогостоящим делом. Поэтому численный эксперимент, использующий разрабатываемые математические модели и результаты наземных испытаний макета многозвенного силового каркаса с малым диаметром описанной окружности 4 м и меньшим количеством элементов, является альтернативной возможностью проверки и обоснования функциональной пригодности штатного силового каркаса с диаметром описанной окружности 20 м.

Наиболее простой, но в тоже время достаточно хорошо учитывающей особенности конструкции расчетной схемой, является система абсолютно твердых тел, связанных между собой шарнирными узлами, влияние трения в которых пренебрежимо мало. Массы и моменты инерции твердых тел принимаются равными массам и моментам инерции реальных элементов конструкции. Под шарнирным узлом здесь понимается не только шарнирное соединение, допускающее относительное вращение смежных звеньев, но и пружины кручения, накапливающие в процессе укладки изделия в транспортное положение необходимую для последующего его развертывания энергию, которые являются составной частью каждого шарнирного узла. При определенном относительном положении смежных звеньев во время раскрытия на них накладываются связи, ограничивающие их взаимное угловое смещение. Реальные физические процессы, протекающие во время установки элементов на упоры, достаточно сложны. Простейшая модель установки на упор может быть представлена в виде упругого и демпфирующего элементов с соответствующими характеристиками.

Уравнения, описывающие динамику раскрытия силового каркаса, представим в наиболее общем виде, как в программном комплексе MSC.ADAMS, в основу которого для описания уравнений движения системы тел заложены уравнения Эйлера — Лагранжа в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)^T \lambda = F \tag{1}$$

совместно с уравнениями связей, записанными в форме алгебраических соотношений

$$\Phi(q,t) = 0\,,$$

где T — суммарная кинетическая энергия; F — вектор обобщенных приложенных сил;  $\lambda$  — вектор множителей Лагранжа (силы реакции в связах); t — независимая переменная времени; q — вектор обобщенных координат.

Уравнения (1) можно разрешить относительно вторых производных  $\ddot{q}$ , т. е. получить систему уравнений второго порядка:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t) \,. \tag{2}$$

Введя обозначение  $\dot{q} = u$ , систему уравнений (2) можно привести к системе нелинейных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(q, u, t) \,, \\ \dot{q} &= u \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Численное интегрирование уравнений (3) позволяет описать динамику раскрытия трансформируемого силового многоэлементного каркаса.

В программном комплексе MSC.ADAMC построены модели и проведен численный анализ динамики раскрытия многоэлементных силовых каркасов кольцевых антенн с диаметрами описанной окружности 4 м и 20 м.

Пружины кручения, расположенные в шарнирных узлах, моделируются безмассовым упругим элементом. Силовая характеристика каждого упругого элемента определяется следующим соотношением:

$$M_i(\varphi_i) = c_{\pi p_i}(\varphi_{3a \kappa p_i} - \varphi_i),$$

где  $c_{\mathrm{np}_i}$  — коэффициент жесткости *i*-го упругого элемента;  $\varphi_i$  — текущий угол раскрытия смежных звеньев;  $\varphi_{\mathrm{закp}_i}$  — предварительный угол закрутки *i*-го упругого элемента.

При определенном относительном положении смежных панелей во время раскрытия, когда угол раскрытия  $\varphi_i$  достигает определенного значения  $\varphi_{\text{упор}_i}$ , соответствующего их рабочему положению, на панели накладываются связи, ограничивающие их взаимное угловое перемещение. Технически связи выполняются в виде различного рода упоров, которые моделируются безмассовыми упругими и демпфирующими элементами с нелинейной зависимостью момента от угла раскрытия и описываются как

$$M_{\mathrm{ynop}_i}(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = \begin{cases} 0, & \mathrm{ecлu} \quad \varphi_i < \varphi_{\mathrm{ynop}_i}, \\ -c_{\mathrm{ynop}_i}(\varphi_i - \varphi_{\mathrm{ynop}_i}) - \mu_{\mathrm{ynop}_i} \dot{\varphi}_i, & \mathrm{ecлu} \quad \varphi_i \geqslant \varphi_{\mathrm{ynop}_i}, \end{cases}$$

где  $c_{\text{упор}_i}$  — коэффициент жесткости *i*-го упругого элемента;  $\mu_i$  — коэффициент вязкого сопротивления *i* –го демпфирующего элемента;  $\varphi_{\text{упор}_i}$  — значение угла раскрытия смежных панелей, при котором происходит постановка на упор;  $\dot{\varphi}_i$  — относительная угловая скорость смежных панелей.

В процессе движения смежные панели могут совершать вращение навстречу друг другу и соприкасаться. В модели предусмотрены упоры, препятствующие контакту панелей. Они представлены безмассовыми упругими элементами с нелинейной зависимостью момента от угла раскрытия

$$M_{\mathrm{конт}_{i}}(\varphi_{i}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_{i} < \varphi_{\mathrm{конт}_{i}}, \\ -c_{\mathrm{конт}_{i}}(\varphi_{i} - \varphi_{\mathrm{конт}_{i}}), & \text{если } \varphi_{i} \geqslant \varphi_{\mathrm{конт}_{i}}, \end{cases}$$

где  $c_{\text{конт}_i}$  — коэффициент жесткости *i*-го упругого элемента;  $\varphi_{\text{конт}_i}$  — значение *i*-го угла раскрытия, при котором происходит контактное взаимодействие между смежными панелями.

В результате предварительных расчетов было определено, что при раскрытии происходит контакт левой и правой ветвей каркаса. Поэтому в модели было

принято, что левая и правая ветви силового каркаса раскрываются симметрично. Контактное взаимодействие ветвей контура моделировалось упругим элементом с нелинейной силовой характеристикой

$$F_{\mathrm{конт}_i}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x_i > 0, \\ k_{\mathrm{конт}_i} x_i, & \text{при} \quad x_i \leqslant 0, \end{cases}$$

где  $k_{\text{конт}_i}$  — коэффициент жесткости *i*-го упругого элемента;  $x_i$  — расстояние *i*-го узла раскрытия до плоскости симметрии контура.

В результате проведенных расчетов с учетом контактного взаимодействия ветвей силового каркаса кольцевой антенны получены следующие характеристики: время принятия рабочего положения силовым каркасом; формы промежуточных положений каркаса во время раскрытия; зависимость углов раскрытия и угловых скоростей элементов каркаса от времени. Данные параметры необходимы для анализа напряженно-деформированного состояния элементов силового каркаса.

Макет силового каркаса кольцевой космической антенны представляет собой многоэлементную конструкцию с шарнирными узлами, содержащими пружины, обеспечивающие ее раскрытие, и упоры, поддерживающие форму плоского многоугольника с диаметром описанной окружности 4 м в рабочем развернутом состоянии. Макет трансформируемого силового каркаса также состоит из двух пакетов штатных профилированных прямоугольных панелей (по 9 панелей в пакете), шарнирно связанных одним концом с жестким основанием, а другим — с короткой замыкающей панелью. Для проверки способности макета раскрываться и принимать необходимую форму были проведены испытания. Ряд экспериментов по раскрытию макета был проведен на гладкой металлической поверхности, при этом для уменьшения воздействия силы трения на процесс развертывания шарнирные узлы конструкции дополнительно снабжались фторопластовыми роликами. Другие эксперименты по раскрытию были проведены в водной среде, при этом обезвешивание конструкции обеспечивалось использованием пенопластовых пластин, соединенных с ее элементами — панелями. Для обеспечения плавного раскрытия в водной среде в экспериментах дополнительно был использован электропривод, регулирующий динамику движения короткой замыкающей панели.

Проведенные предварительные испытания выявили сложности, возникающие при моделировании в наземных испытаниях процесса раскрытия и принятия рабочей формы даже уменьшенного макета кольцевой антенны без создания соответствующих стендов.

Математический эксперимент, использующий разработанную модель, позволил уточнить параметры макета трансформируемой конструкции, провести расчет его раскрытия и принятия рабочей формы в космических условиях, в которых должна функционировать полноразмерная конструкция.

Расчеты раскрытия полноразмерного несущего силового каркаса с диаметром описанной окружности 20 м показали, что панели силового каркаса встают на упоры в разные моменты времени в процессе раскрытия. В каждый такой момент времени встают на упоры группы панелей в разных местах каркаса. Были выбраны несколько моментов времени, когда относительные скорости смежных панелей для разных групп панелей максимальны. Расчет напряженно-деформированного состояния велся для этих моментов времени. С этой целью в программном комплексе MSC.NASTRAN была построена конечно–элементная модель несущего силового каркаса

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [B]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = P(t),$$

где [M], [B], [K] — матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно; P(t) — время внешних нагрузок;  $u(t), \dot{u}(t)$  и  $\ddot{u}(t)$  — вектора узловых перемещений, скоростей и ускорений; в рассматриваемом случае P(t) = 0.

Вычисленные значения скоростей в процессе раскрытия для выбранных моментов времени принимались в качестве начальных условий для расчета, то есть при t = 0: u(t) = 0,  $\dot{u}(t) = \dot{u}_0(t)$ , где  $\dot{u}_0(t)$  — вектор начальных узловых скоростей.

Численный анализ напряженно-деформированного состояния проводился с использованием Direct Transient Response анализа (SOL 109, исследование переходного процесса) без учета и с учетом демпфирования.

Конструкционное демпфирование в Direct Transient Response анализе возможно учесть в виде эквивалентного вязкого демпфирования. Поэтому расчет напряженно-деформированного состояния несущего силового каркаса был проведен для выбранных моментов времени как без учета демпфирования, так и с его учетом.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Н. В. Баничук, И. И. Карпов, Д. М. Климов и др.* Механика больших космических конструкций. М.: Изд-во Факториал, 1997. 302 с.
- [2] *Крылов А. В.* Исследование процесса раскрытия антенного контура // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 12. С. 45–50.

Zimin V.N., Krylov A.V., Pavlov N.G., Churilin S.A., Shakhverdov A.O. Specific features of the mathematical simulation of large transformable space structures dynamics. Now the task of development and creation of large space structures is the subject of attention of scientists, engineers and designers. A special class of large space structures is represented by transformable systems, layouts of which ensure automatic transformation. Therefore, the development of the mathematical model of the transformable structure describing properly its deployment from transport position to the operating state has a great importance for its creation. The MSC.ADAMS software package is used for the mathematical simulation of the deployment dynamics for a multi-element load-bearing framework of the ring antenna. The finite element software package MSC.Patran/Nastran is used to analyze the stress-strain state of elements of the load-bearing framework during the ring antenna opening. On the base of numerical simulation results of the deployment dynamics for the models of the load-bearing framework, the specific features of their deployment were shown.

# СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

### Зубов Л.М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Дана постановка и решение нелинейной пространственной задачи для упругой микрополярной жидкости. Задача описывает сферически симметричное состояние равновесия жидкой среды, обладающей моментными напряжениями. При помощи теории сферически симметричных тензорных полей исходная пространственная задача сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевые условия состоят в задании на границах полого шара распределённой крутящей моментной нагрузки. При отсутствии поверхностной моментной нагрузки найдено точное решение, пригодное для любых определяющих соотношений жидкой микрополярной среды.

1. Упругая микрополярная жидкость [1–3] — частный случай континуума Коссера. т.е. среды с моментными напряжениями и вращательными степенями свободы частиц. Микрополярная жидкость нечувствительна к любым изменениям отсчётной конфигурации, сохраняющим плотность среды. Каждая частица этой среды может быть представлена как абсолютно твёрдое тело. Её положение в пространстве задаётся радиусом-вектором R, а ориентация определяется тройкой ортонормированных векторов  $N_k$  (k = 1, 2, 3), называемых директорами. В состоянии равновесия упругая микрополярная жидкость обладает ориентационной упругостью и способна выдерживать как моментные напряжения, так и силовые касательные напряжения. Модель упругой микрополярной жидкости близка модели нематического жидкого кристалла [4, 5], но отличается от неё тем, что ориентация частицы микрополярной жидкости задаётся ортонормированной тройкой векторов, в то время как в континуальной теории нематиков ориентация характеризуется одним единичным вектором — директором **N**. Модель упругой микрополярной жидкости пригодна для описания двухосных нематиков, некоторых смектиков и других тел с жидкокристаллической структурой [3].

**2.** Уравнения равновесия микрополярной среды в эйлеровых (пространственных) координатах имеют вид [1–3]

$$\operatorname{Div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{M} + \mathbf{T}_{\times} + \rho \mathbf{l} = 0.$$
(1)

Здесь и ниже через Grad, Rot и Div обозначены операторы градиента, ротора и дивергенции в пространственных координатах,  $\mathbf{T}$  — тензор силовых напряжений,  $\mathbf{M}$  — тензор моментных напряжений,  $\rho$  — плотность среды,  $\mathbf{b}$  — массовая сила,  $\mathbf{l}$  — массовый момент,  $\mathbf{T}_{\times}$  — векторный инвариант тензора  $\mathbf{T}$ . Если среда является упругой микрополярной жидкостью, то определяющие соотношения записываются так [1–3]:

$$\mathbf{M} = \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{E} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \quad p = \rho^{2} \frac{\partial W}{\partial \rho},$$

$$W = W(\rho, \mathbf{B}), \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \left( \operatorname{Grad} \mathbf{N}_{k} \right) \times \mathbf{N}_{k}, \quad \mathbf{N}_{k} \cdot \mathbf{N}_{s} = \delta_{ks}.$$
(2)

Зубов Л.М.

Здесь p — давление в жидкости, W — массовая плотность свободной энергии,  $\mathbf{B}$  — тензор кривизны структуры,  $\mathbf{N}_k$  (k = 1, 2, 3) — директоры,  $\mathbf{E}$  — единичный тензор,  $\delta_{ks}$  — символ Кронекера. Плотность энергии W — изотропная функция тензорного аргумента  $\mathbf{B}$ , т. е. удовлетворяет ограничению

$$W\left(\rho, \eta \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}\right) = W\left(\rho, \mathbf{B}\right), \quad \eta = \det \mathbf{Q}.$$
(3)

Равенство (3) выполняется для всех ортогональных тензоров  $\mathbf{Q}$ . Тензор моментных напряжений также является изотропной тензорной функцией от  $\mathbf{B}$ . Поэтому его зависимость от тензора кривизны подчиняется условию

$$\mathbf{M}\left(\rho,\eta\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}\right) = \eta\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M}\left(\rho,\mathbf{B}\right)\cdot\mathbf{Q}, \quad \forall\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{-T}}.$$
(4)

В (3), (4) учтено, что величины В и М — псевдотензоры второго ранга.

В случае несжимаемой однородной жидкости плотность  $\rho$  — заданная постоянная, а давление p — неизвестная функция координаты. В дальнейшем будем пренебрегать действием массовых сил и моментов, т.е. положим  $\mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{l} = 0$ . Тогда второе уравнение равновесия (1) в силу (2) принимает вид

$$\operatorname{Div} \mathbf{M} - \left( \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \right)_{\times} = 0.$$
(5)

В задаче о равновесии жидкости за основные неизвестные функции удобно принять не директоры  $\mathbf{N}_k$  (k = 1, 2, 3), а тензорное поле кривизны **B**. В этом случае к уравнениям равновесия моментов (5) следует присоединить уравнение совместности, которое выведено в [2] и представляет собой нелинейное тензорное дифференциальное уравнение

$$\left(\operatorname{Rot} \mathbf{B}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{2} - \left(\operatorname{tr} \mathbf{B}\right) \mathbf{B} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}^{2} \mathbf{B} - \operatorname{tr} \mathbf{B}^{2}\right) \,. \tag{6}$$

С учётом определяющих соотношений равенства (5) и (6) образуют систему уравнений для определения компонент тензора кривизны **B**. После нахождения тензорного поля **B** функция давления p для несжимаемой жидкости определяется из закона сохранения, полученного в [1]:

$$\operatorname{Grad}\left(W+\rho^{-1}p\right)=0.$$
(7)

Простейшим примером определяющих соотношений упругой несжимаемой микрополярной жидкости служит линейная зависимость моментных напряжений от кривизны структуры [2, 3]

$$\mathbf{M} = \lambda \mathbf{E} \operatorname{tr} \mathbf{B} + \mu \mathbf{B} + \nu \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\tag{8}$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — материальные постоянные. Соответствующая (8) удельная свободная энергия является квадратичной формой тензора **B**:

$$\rho W = \frac{1}{2} \left[ \lambda \operatorname{tr}^2 \mathbf{B} + \mu \operatorname{tr} \left( \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \right) + \nu \operatorname{tr} \mathbf{B}^2 \right] \,. \tag{9}$$

**3.** Предположим, что область, занимаемая жидкостью, представляет собой полый шар с внешним радиусом  $R_0$  и внутренним радиусом  $R_1$ . Введём сферические координаты R,  $\Phi$  (долгота),  $\Theta$  (широта) по формулам  $X_1 = R \cos \Phi \cos \Theta$ ,  $X_2 = R \sin \Phi \cos \Theta$ ,  $X_3 = R \sin \Theta$ , где  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  — декартовы координаты точек пространства. Единичные векторы, касательные к кординатным линиям, обозначим  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_{\Phi}$ ,  $\mathbf{e}_{\Theta}$ . Следуя [6], тензорное поле **S** второго ранга будем называть сферически симметричным, если оно имеет вид

$$\mathbf{S} = S_1(R)\mathbf{G} + S_2(R)\mathbf{D} + S_3(R)\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R,\tag{10}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}_{\Phi} \otimes \mathbf{e}_{\Phi} + \mathbf{e}_{\Theta} \otimes \mathbf{e}_{\Theta}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e}_{\Phi} \otimes \mathbf{e}_{\Theta} - \mathbf{e}_{\Theta} \otimes \mathbf{e}_{\Phi}.$$
(11)

Решение системы уравнений (5), (6) будем разыскивать в виде сферически симметричного тензорного поля

$$\mathbf{B} = B_1(R)\mathbf{G} + B_2(R)\mathbf{D} + B_3(R)\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R.$$
 (12)

Положим в соотношении (4)  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 = 2\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{E}$ , det  $\mathbf{Q}_1 = 1$ . Так как в силу (12) верно равенство  $\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{B}$ , то из (3) вытекает, что  $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}_1$ . Отсюда следует такое разложение тензора **M** по базису сферических координат:

$$\mathbf{M} = M_{RR}\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + M_{\Phi\Phi}\mathbf{e}_{\Phi} \otimes \mathbf{e}_{\Phi} + M_{\Phi\Theta}\mathbf{e}_{\Phi} \otimes \mathbf{e}_{\Theta} + M_{\Theta\Phi}\mathbf{e}_{\Theta} \otimes \mathbf{e}_{\Phi} + M_{\Theta\Theta}\mathbf{e}_{\Theta} \otimes \mathbf{e}_{\Theta} .$$
(13)

Положим теперь в условии (4)  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 = \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{D}$ , det  $\mathbf{Q}_2 = 1$ . Так как  $\mathbf{Q}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_2 = \mathbf{B}$ , из (4) имеем  $\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}_2$ , откуда вытекает, что  $M_{\Phi\Phi} = M_{\Theta\Theta}, M_{\Phi\Theta} = -M_{\Theta\Phi}$ . Следовательно, тензор моментных напряжений имеет вид  $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{G} + M_2 \mathbf{D} + M_3 \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R$ . Поскольку плотность энергии W — изотропная функция тензора  $\mathbf{B}$ , она является функцией некоторого числа полиномиальных инвариантов этого тензора. Так как указанные инварианты полностью выражаются через компоненты  $\mathbf{B}$  в ортономированном базисе  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_{\Phi}$ ,  $\mathbf{e}_{\Theta}$ , они будут функциями только координаты R в случае сферически симметричного поля  $\mathbf{B}$ . Отсюда в силу (2) вытекает, что компоненты тензора  $\mathbf{M}$  не зависят от координат  $\Phi$  и  $\Theta$ . Таким образом, для любой однородной микрополярной жидкости представление (12) влечёт свойство сферической симметричности тензорного поля моментных напряжений

$$\mathbf{M} = M_1(R)\mathbf{G} + M_2(R)\mathbf{D} + M_3(R)\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R.$$
(14)

С учётом (10)–(12), (14) векторное уравнение равновесия (5) приводится к одному скалярному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}\,M_3}{\mathrm{d}\,R} + \frac{2}{R}\left(M_3 - M_1\right) + 2\left(M_1B_2 - M_2B_1\right) = 0,\tag{15}$$

а тензорное уравнение совместности (6) — к трём скалярным уравнениям

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R}(RB_2) = B_1B_3,\tag{16}$$

$$\frac{B_3 - B_1}{R} - \frac{\mathrm{d}\,B_1}{\mathrm{d}\,R} = B_2 B_3,\tag{17}$$

$$2RB_2 = R^2 \left( B_1^2 + B_2^2 \right) \,. \tag{18}$$

Зубов Л.М.

Здесь предполагается, что компоненты моментных напряжений  $M_k$  (k = 1, 2, 3)выражены через компоненты тензора кривизны  $B_m$  (m = 1, 2, 3) при помощи определяющих соотношений. Например, для жидкости с удельной энергией (9) имеем

$$M_{1} = \lambda (2B_{1} + B_{3}) + (\mu + \nu)B_{1}, \quad M_{2} = (\mu - \nu)B_{2},$$
  

$$M_{3} = \lambda (2B_{1} + B_{3}) + (\mu + \nu)B_{3}.$$
(19)

4. Соотношения (15)–(18) образуют систему четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями  $B_1(R)$ ,  $B_2(R)$ ,  $B_3(R)$ . Несмотря на переопределённость, данная система уравнений непротиворечива. Докажем, что уравнение (18) не является независимым от уравнений (16) и (17). Умножив уравнение (17) на  $B_1$  и используя (16), имеем

$$B_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R} \left( RB_1 \right) = \left( \frac{1}{R} - B_2 \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R} \left( RB_2 \right) \,. \tag{20}$$

После простых преобразований вместо (20) получим уравнение

$$B_1^2 + B_2^2 + R\left(B_1\frac{\mathrm{d}\,B_1}{\mathrm{d}\,R} + B_2\frac{\mathrm{d}\,B_2}{\mathrm{d}\,R}\right) = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R}\left(RB_2\right)\,.$$
(21)

Имеет место непосредственно проверяемое тождество

$$B_{1}^{2} + B_{2}^{2} + R\left(B_{1}\frac{\mathrm{d}B_{1}}{\mathrm{d}R} + B_{2}\frac{\mathrm{d}B_{2}}{\mathrm{d}R}\right) = \frac{1}{2R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^{2}\left(B_{1}^{2} + B_{2}^{2}\right)\right],$$

на основании которого уравнение (21) записывается так:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R} \left[ 2RB_2 - R^2 \left( B_1^2 + B_2^2 \right) \right] = 0 \,. \tag{22}$$

Используя (22), получим первый интеграл системы (16), (17)

$$2RB_2 - R^2 \left( B_1^2 + B_2^2 \right) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Таким образом, уравнение (18) вытекает из уравнений (16) и (17) с точностью до аддитивной постоянной.

Общее решение системы дифференциальных уравнений (15)–(17) содержит три произвольные постоянные. Для их определения имеем два граничных условия:  $M_3(R_1) = m_1, M_3(R_0) = m_0$ , где  $m_1$  и  $m_0$  — интенсивности приложенных к внутренней и внешней поверхностям шара крутящих моментных нагрузок. Третье граничное условие вытекает из (18):  $2R_0B_2(R_0) = R_0^2 [B_1^2(R_0) + B_2^2(R_0)]$ . После нахождения тензорного поля **B**(R) определяется функция удельной энергии  $\rho W(R)$ , при помощи которой давление в жидкости вычисляется согласно (7):

$$p(R) = p_0 + \rho W(R_0) - \rho W(R), \qquad (23)$$

где  $p_0$  — заданная величина давления на поверхности шара  $R = R_0$ .

5. Предположим, что внешняя нагрузка на шар отсутствует:  $m_1 = m_0 = 0$ . Тогда задача о равновесии жидкости имеет тривиальное решение  $B_1 = B_2 = B_3 =$  0, т.е.  $\mathbf{B} \equiv 0$ ,  $\mathbf{M} \equiv 0$ . Это вытекает непосредственно из уравнений (15)–(18) и свойства нечётности тензорной функции  $\mathbf{M}(\mathbf{B})$  [2].

Оказывается, наряду с этим решением существует другое, нетривиальное решение. В самом деле, система уравнений совместности (16)–(18) имеет очевидное решение  $B_1 = 0$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_2 = 2R^{-1}$ , которому соответствует тензор кривизны  $\mathbf{B} = 2R^{-1}\mathbf{D}$ . Положив в условии изотропности (4)  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_3 = \mathbf{E} - 2\mathbf{e}_{\Phi} \otimes \mathbf{e}_{\Phi}$ , det  $\mathbf{Q}_3 = -1$ , доказываем, что  $M_{\Phi\Phi} = 0$ , а полагая  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_4 = \mathbf{E} - 2\mathbf{e}_{\Theta} \otimes \mathbf{e}_{\Theta}$ , получим, что  $M_{\Theta\Theta} = 0$ . Аналогичным способом доказывается, что псевдоскалярная величина tr  $\mathbf{M}$  равна нулю. Следовательно,  $M_{RR} = 0$ . Таким образом, установлено, что для любой микрополярной жидкости при  $\mathbf{B} = B_2\mathbf{D}$  тензор моментных напряжений имеет представление  $\mathbf{M} = M_2(R)\mathbf{D}$ , т. е.  $M_1 = M_3 = 0$ . Значит, уравнение равновесия (15) и однородные граничные условия удовлетворяются для полого шара с произвольными значениями внешнего и внутреннего радиусов.

Тензор силовых напряжений в силу (2) в данном решении оказывается симметричным и имеет вид

$$\mathbf{T} = T_{RR} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + T_{\Phi\Phi} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + T_{\Theta\Theta} \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta, \tag{24}$$

$$T_{RR} = -p(R), \quad T_{\Phi\Phi} = T_{\Theta\Theta} = -p(R) - 2R^{-1}M_2(R).$$
 (25)

### ЛИТЕРАТУРА

- Зубов Л. М., Еремеев В. А. Уравнения вязкоупругой микрополярной жидкости // Доклады РАН. 1996. Т. 351, № 4. С. 472—475.
- [2] Еремеев В. А., Зубов Л. М. Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей // ПММ. 1999. Т. 63. № 5. С. 801—815.
- [3] *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* Основы механики вязкоупругой микрополярной жидкости. Ростов-на-Дону : Изд-во Южного научного центра РАН, 2009. 128 с.
- [4] Жен де П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- [6] Зубов Л. М. Сферически симметричные решения нелинейной теории дислокаций // Доклады РАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 161—164.

**Zubov L. M.** Spherically symmetric state of elastic micropolar fluid. The formulation and solution of a nonlinear spatial problem for an elastic micropolar fluid are given. The problem describes a spherically symmetric equilibrium state of a liquid medium with moment stresses. Using the theory of spherically symmetric tensor fields, the original spatial problem is reduced to a system of nonlinear ordinary differential equations. The boundary conditions mean setting a distributed torque moment load on the boundaries of a hollow sphere. In the absence of a surface moment load, an exact solution suitable for any constitutive relations of a liquid micropolar medium is found.

## ДЕЛЬТА ДОНА — СТАБИЛИЗАТОР СОЛЕНОСТИ ТАГАНРОГСКОГО ЗАЛИВА?

# Ильичев В. Г. $^1$ , Ильичева О. А. $^2$

<sup>1</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону <sup>2</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

На основании теоретико–вероятностных аналогий предложена количественная оценка разнообразия структуры речной дельты. Показано, что увеличение разнообразия донской дельты снижает амплитуду ежегодных колебаний солености Таганрогского залива.

1. Введение. Многие крупные реки России (например, Дон и Волга) имеют весьма разветвленную дельту. Это связано с замедлением речного стока при его приближении к замыкающему водоему (Азовское и Каспийское моря, соответственно), поэтому интенсивно происходят процессы осадконакопления. В результате образуются новые геоформы — острова и рукава. Разумеется, сгонно — нагонные явления также вносят свой вклад в увеличение или уменьшение «разнообразия» речной дельты. С другой стороны, традиционный антропогенный фактор — сокращение объема речного стока (например, вызванный сооружением водохранилищ) может привести к сильному обмелению рукавов. В этом случае можно говорить об уменьшении разнообразия дельты.

Важно строго определить, что здесь следует понимать под «разнообразием». С наивной точки зрения это просто количество рукавов. Однако одни рукава являются мелководными, а другие — глубоководными, и поэтому совсем не равноценны. Ниже приведем более тонкое определение разнообразия речной дельты, учитывающих особенности структуры рукавов.

Здесь интерес «основной» вопрос о том какие гидрологические, гидрохимические и экологические последствия в Таганрогском заливе (ТЗ) вызывает деформация разнообразия донской дельты (ДД). На примере солености будет обсуждаться один из аспектов данной проблемы. Так, будет показано, что увеличение разнообразия ДД стабилизирует (=уменьшает амплитуду колебаний) годовой динамики солености ТЗ.

2. Математическая модель. Выберем и зафиксируем (как «начальную») точку реки, расположенную выше дельты. Считаем, что в ней производятся наблюдения за величиной стока реки. Обозначим через v(t) — соответствующий объем стока в момент времени t. При отсутствии рукавов количество w(t) речной воды, поступающей в T3, рассчитывается по простой формуле

$$w(t) = v(t - \tau), \qquad (1)$$

где au – время добегания от «начальной» точки до ТЗ.

Пусть теперь имеется n рукавов, ответвляющихся от основного русла. Каждый *i*-ый рукав характеризуется своими параметрами:  $\tau_i - время$  добегания воды до T3;  $\lambda_i$  — доля речного стока, поступающая в данный рукав (по-сути  $\lambda_i$  — его пропускная способность). В этом случае выражение (1) для распределенного (по пространству) стока несколько усложняется:

$$w(t) = \lambda_1 v(t - \tau_1) + \dots + \lambda_n v(t - \tau_n), \qquad (2)$$

где все  $\lambda_i \ge 0$ ,  $\tau_i \ge 0$  и  $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ . Когда дельта реки состоит из отдельных рукавов, то справедливость формулы (2) не вызывает сомнений. Тем не менее, она остается верной и в случае пересечения рукавов. Обсудим соотношение (2) с разных точек зрения.

1. В финансовой математике есть понятие скользящего среднего.

Напомним его суть. Пусть имеется временной ряд наблюдений A = a(t) для  $1 \leq t \leq n$  (например, отрезок [1, n] — это год). Тогда из A можно построить другой временной ряд B = b(t), в котором элементы являются выпуклой комбинацией элементов из A. В частности, можно для всех t положить

$$b(t) = \mu_1 a(t-1) + \mu_2 a(t) + \mu_3 a(t+1), \qquad (3)$$

где фиксированные веса  $\mu_i$  — неотрицательны и выполняется условие баланса  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ . Чтобы формула (3) «работала» при пограничных t (1 или n), следует задать значения a(0) и a(n + 1). Исходя из соображений о возможной периодичности элементов ряда A (n — величина периода), полагаем a(0) = a(n) a(n + 1) = a(1).

В чем отличие графиков рядов A и B? Грубо говоря, кривая B получается из кривой A двусторонним вертикальным сжатием около среднего значения. Поэтому экстремумы (минимумы и максимумы) кривой B не столь острые, как у кривой A. По сути, график B — сглаживание графика A. Согласно условию баланса значения сумм всех элементов A и B совпадают. Значит, годовой объем донского стока согласно формулам (1) и (2) одинаковый, хотя и будет разным по сезонам. Фактически, сток (2) можно трактовать как скользящее среднее стока (1).

Во многих ранних работах [1] на основе статистических моделей исследовалась зависимость солености Азовского моря лишь от объема годового речного стока. В этой связи, возникает вопрос о сравнении реакции солености ТЗ на «нормальный» сток (1) и «распределенный» сток (2).

Было бы удобно найти подходящую характеристику разнообразия дельты в зависимости от параметров  $\lambda_i$  и  $\tau_i$ . Ниже на основе естественных теоретико вероятностных соображений построим такую оценку.

2. Обсудим теперь известную проблему устойчивости в усеченной биосистеме «водоросли (F) — фосфор (P)». Считаем, что данный фитоценоз замкнут по фосфору: минеральный P потребляется фитопланктоном; водоросли частично отмирают и, значит, органический P (детрит) возвращается в водную среду; далее, под действием биохимических процессов детрит распадается до минеральных форм P. Так, возникает круговорот P. Здесь по мнению американского эколога Саундерса «самое темное место» — это распад детрита. Отчасти ситуацию проясняет концепция Скопинцева о неоднородной структуре с разной биохимией разложения. Так, на основе лабораторных наблюдений обнаружено, что эти процессы вполне удовлетворительно описываются некоторой системой линейных дифференциальных

уравнений. Вид этой системы зависит от состава детрита конкретного водоема. В результате анализа кинетики установлено соотношение [2]:

$$\Delta P(t) = \lambda_1 Or(t - \tau_1) + \dots + \lambda_n Or(t - \tau_n), \qquad (4)$$

где  $\Delta P(t)$  — величина образовавшегося минерального фосфора и Or(t) — количество органического фосфора в момент t; параметры  $\tau_i$  неотрицательны, веса  $\lambda_i$ также неотрицательны и выполняется условие  $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ . Формула (4) утверждает: детрит состоит из n фракций ( $\lambda_i$  — доля *i*-той фракции), а время распада *i*-той фракции равно  $\tau_i$ . С кибернетической точки зрения детрит представляет собой пучок обратных связей с запаздыванием в общей схеме круговорота веществ.

В рамках теоретико-вероятностных представлений можно трактовать время распада как дискретную случайную величину T, которая принимает значение  $\tau_i$  с вероятностью  $\lambda_i$ . Разумеется, в качестве T можно рассматривать и непрерывные распределения. При такой интерпретации представляется целесообразным использовать следующие основные характеристики Т:

1) математическое ожидание  $N = \lambda_1 \tau_1 + \ldots + \lambda_n \tau_n$ ; 2) дисперсию  $\sigma^2 = \lambda_1 (\tau_1 - N)^2 + \ldots + \lambda_n (\tau_n - N)^2$ . Естественно, дисперсию можно трактовать как меру разнообразия путей разложения детрита. В частности, при  $\tau_1 = ... = \tau_n$  (разнообразия нет) получаем  $\sigma = 0$ . Отметим, что n = 2 формула для дисперсии сводится простому выражению  $\sigma^2 = \lambda_1 \lambda_2 (\tau_2 - \tau_1)^2$ .

Оказалось, что в упомянутой выше проблеме устойчивости ключевую роль играет дисперсия. Наиболее простая формулировка признака стабилизации возникает для непрерывных распределений. Грубо говоря, непрерывность соответствует довольно плотному пучку обратных связей. Здесь установлен признак отсутствия колебаний динамики водорослей:

если дисперсия достаточно велика, то фитоценоз устойчив.

В какой-то мере этот вывод перекликается с известным тезисом Клода Шеннона: избыточность порождает надежность.

Ввиду формального сходства формул (2) и (4) можно таким же образом определить дисперсию пучка рукавов ДД. Поэтому возникает гипотеза, что рост такой дисперсии оказывает стабилизирующее действие на динамику солености ТЗ. Ниже на ряде численных примеров продемонстрируем справедливость данной гипотезы.

Рассмотрим простейшую версию такой модели, она оказалась вполне адекватной для описания поведения солености в ТЗ. Так, пусть заданы элементы водного баланса ТЗ: донской сток  $(Don_t)$ , осадки  $(Os_t)$  и испарение  $(Isp_t)$ , где t — момент времени. В течение каждого года t изменяется с шагом в пять суток. Обозначим через  $\delta$  и  $\beta$  концентрации соли в донском стоке и в собственно Азовском море (CM), соответственно. Тогда динамика солености  $(S_t)$  T3 существенно зависит от разницы пресной составляющей  $DOs_t = DOn_t + Os_t$  и величины  $Isp_t$ .

Так, при  $DOs_t > Isp_t$  имеет место преимущественное вытекание воды из T3 в СМ, поэтому модель задается в форме:

$$S_{t+1} = S_t \left[ 1 - \left( DOs_t - Isp_t \right) / W \right] + \delta DOs_t / W + \kappa \left( \beta - S_t \right),$$

где W — объем ТЗ. Последнее слагаемое отвечает за двусторонний массообмен ТЗ СМ, вызванный ветром;  $\kappa$  — некоторая константа, найденная в результате идентификации.

При  $DOs_t < Isp_t$  в основном имеет место приток воды из СМ в TЗ, следовательно, модель описывается соотношением:

$$S_{t+1} = S_t + \delta DOs_t / W + \beta \left( Isp_t - DOs_t \right) / W + \kappa \left( \beta - S_t \right),$$

Результаты. Обсудим некоторые эксперименты с моделью. В качестве входной информации были использованы среднемноголетние данные об элементах водного баланса, взятые из литературных источников. Показано, что с увеличением разнообразия донской дельты, действительно, происходит сильная стабилизация годового поведения солености ТЗ залива. Такая ситуация благоприятна для гидробионтов залива, поскольку требует от них меньших энергетических затрат на адаптацию к солености. Вероятно, данная стабилизация порождает увеличение продуктивности Таганрогского залива.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бронфман А. М., Дубинина В. Г., Макарова Г. Д. Гидробиологические и гидрохимические основы продуктивности Азовского моря. М.: Пищ. Пром. 1979. 288 с.
- [2] Ильичев В. Г. Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах. М.: Наука, 2009. 192 с.

Il'ichev V. G., Il'icheva O. A. Is the Don Delta stabilizer of the salinity of the Taganrog Bay? Based on theoretical-probabilistic analogy, quantitative estimation of diversity of river delta structure is proposed. It has been shown that the increase in the diversity of the Don Delta reduces the amplitude of the annual fluctuations in the salinity of the Gulf of Taganrog.

# ПАССИВНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ГИДРОУПРУГИХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОМОЩЬЮ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТА, СОЕДИНЁННОГО С ВНЕШНЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПЬЮ

### Каменских А. О.<sup>1</sup>, Лекомцев С. В.<sup>2</sup>, Юрлов М. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет <sup>2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Работа посвящена проблеме подавления резонансных колебаний тонкой прямоугольной пластины, взаимодействующей сверху со слоем жидкости, с помощью соединённого с внешней пассивной электрической цепью пьезоэлектрического элемента. Проведённая серия экспериментальных исследований продемонстрировала, что эффективность демпфирования колебаний существенно снижается с увеличением высоты слоя жидкости. Оценена работоспособность разных видов пьезоэлементов и проанализированы способы их прикрепления к конструкции. Установлено, что наличие тонкой прослойки вязкого клея нивелирует практически весь положительный эффект от демпфирования колебаний внешней *RL*-цепью даже при отсутствии жидкости.

### 1. Введение.

Тонкие пластины находят своё применение в современных инженерных конструкциях, взаимодействующих с жидкостью или полностью погруженных в неё. Часто они являются важными компонентами и функционируют в условиях высоких эксплуатационных нагрузок, вибраций или сейсмических воздействий. Риск возникновения резонансных явлений приводит не только к необходимости мониторинга текущего состояния объекта, но и к наличию возможности контроля протекающих динамических процессов. Это позволит предотвратить аварийные ситуации, вызывающие мгновенное или усталостное разрушение конструкции. Одним из способов снижения амплитуды резонансных колебаний тонкостенных тел с помощью пьезоэлектрических элементов является присоединение к ним электрического импеданса в виде внешних пассивных электрических цепей, получившего название шунтирования [1, 2]. Преимуществом такого подхода является возможность непрерывного управления динамическим поведением конструкций, находящихся под водой [3], в труднодоступных местах или ограниченном пространстве. В литературе присутствует достаточное количество теоретических и экспериментальных исследований, где шунтированные пьезоэлементы используются для подавления колебаний тонких пластин и оболочек в воздушной среде. Эффект присоединённой массы жидкости и дополнительный диссипативный механизм, возникающие при гидроупругом взаимодействии, способны существенно повлиять на происходящие динамические процессы и эффективность пассивного демпфирования резонансных колебаний описанным способом. Влияние упомянутых выше факторов оценивается в данной работе экспериментально на примере прямоугольной пластины, взаимодействующей сверху со слоем жидкости.

### 2. Описание установки и методики исследования.

Экспериментальная конструкция представляет собой набор толстых плит с прямоугольным отверстием, которые вместе с тонкой пластиной стянуты болтами в единое целое (рисунок 1a). Детали изготовлены из алюминия Д16АТ методом электроэрозии с допуском  $\pm 0.02$  мм, что обеспечивает высокую повторяемость изделий. Средняя толщина пластины h по десяти измерениям в разных точках составляет 0.934 мм, а длина a и ширина b её свободной от закрепления части равны 150 мм и 115 мм соответственно. Собранная конструкция устанавливается на металлическую раму, прикручивается к ней и заполняется жидкостью до нужного уровня. Выравнивание относительно горизонтальной плоскости осуществляется с помощью регулировочных ножек и цифрового нивелира.



Рисунок 1 – Экспериментальная сборка (a) и разные типы пьезоэлементов (b)

Колебания возбуждаются электромагнитным полем. С этой целью на нижнюю поверхность пластины приклеивается неодимовый магнит, рядом с которым позиционируется катушка. На неё с генератора сигналов через усилитель мощности подаётся переменный ток заданной частоты или прямоугольный импульс. Возникающая электромагнитная сила действует на магнит и приводит пластину в движение. Демпфирование резонансных колебаний осуществляется с помощью пьезоэлемента, приклеенного с противоположной (находящейся под водой) стороны пластины и соединённого с внешней пассивной электрической *RL*-цепью. При использовании такого способа возникает проблема определения оптимального месторасположения пьезоэлемента. К настоящему времени количество работ, посвященных её исследованию, исчисляется сотнями [4]. В данном исследовании в качестве величины, позволяющей оценить эффективность использования пьезоэлемента для демпфирования одной заданной моды колебаний конструкции, принят предложенный в [1] коэффициент электромеханической связи *K*, определяемый по формуле:

$$K = \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{o/c}}^2 - \omega_{\mathrm{s/c}}^2}{\omega_{\mathrm{s/c}}^2}},$$

где  $\omega_{o/c}$  и  $\omega_{s/c}$  собственные частоты колебаний системы с разомкнутыми и замкнутыми электродами, соответствующие заданной форме колебаний.

Исследование проводится в несколько этапов:

- Сначала определяются координаты расположения пьезоэлемента на поверхности пластины, доставляющие наибольшее значение параметру K. Они находятся из решения задачи по поиску максимума целевой функции, в которой собственные частоты колебаний  $\omega_{o/c}$  и  $\omega_{s/c}$  вычисляются с использованием метода конечных элементов [5].
- Пьезоэлемент приклеивается в оптимальное место.
- Из Фурье-образа сигнала, полученного после возмущения пластины кратковременным прямоугольным импульсом длительностью 0.5 мс (имитация удара), определяются её собственные частоты колебаний для режимов работы пьезоэлемента с разомкнутыми (o/c) и замкнутыми электродами (s/c).
- На основании этих данных с помощью численного моделирования [6] или аналитических расчётов [1] подбираются значения параметров сопротивления R и индуктивности L внешней электрической цепи, обеспечивающие наиболее эффективное подавление гармонических колебаний на заданной форме (частоте) с точки зрения скорости их затухания.
- Электромагнитным полем возбуждаются вынужденные гармонические колебания в условиях резонанса. Одновременно с этим измеряется скорость в контрольной точке на поверхности пластины при разомкнутой и замкнутой внешней *RL*-цепи, подключенной к пьезоэлементу.

Измерения проводятся цифровым лазерным виброметром с частотой дискретизации 48 кГц в диапазоне амплитуды скорости ±500 мм/с в заранее определённой точке. Записанный сигнал фильтруется в окрестности исследуемой собственной частоты колебаний с помощью Фурье-фильтра. Это позволяет снизить влияние шумов, имеющихся в экспериментальных данных и искажающих общую картину.

На практике достаточно сложно обеспечить изменение индуктивности в широких пределах, поэтому физическая катушка в шунтирующей цепи заменяется компактной схемой замещения — гиратором. Его основная суть состоит в том, чтобы с помощью конденсатора и операционных усилителей заставить напряжение и ток на входе схемы вести себя подобно напряжению и току в катушке индуктивности.

### 3. Результаты.

Серия предварительных испытаний, проведённых при отсутствии жидкости, позволила оценить эффективность пассивного подавления резонансных колебаний пластины с помощью разных пьезоэлементов: пьезокерамика ЦТС-19, преобразователи DuraAct P-876.A12 и MFC M8528-P1 (рисунок 16). Два последних являются гибкими и могут быть размещены на криволинейной поверхности. Установлено, что большое значение имеет способ прикрепления пьезоэлемента к конструкции. Наиболее эффективно здесь показал себя клей на основе цианоакрилата (Loctite 480), однако он не позволяет произвести демонтаж пьезоэлемента без его разрушения. Этого недостатка лишены термоклей и двусторонний скотч, но они образуют вязкую прослойку, которая нивелирует практически весь положительный эффект от демпфирования колебаний внешней *RL*-цепью. При прочих равных условиях все рассмотренные пьезоэлементы позволили снизить амплитуду резонансных колебаний в 6–7 раз.



Рисунок 2 – Амплитудно-частотные характеристики при разных параметрах шунтирующей *RL*-цепи



Рисунок 3 — Влияние жидкости на эффективность подавления резонансных колебаний на низшей частоте  $\omega_1$ 

Использование пьезокерамики ЦТС-19 под водой требует гидроизоляции не только мест подключения проводов электрической цепи, но и всей поверхности. По этой причине в последующих исследованиях применялся преобразователь DuraAct P-876.A12. На рисунке 2 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), которые демонстрируют подавление резонансных колебаний на низшей частоте. Полость конструкции заполнена жидкостью целиком ( $z = H_f/H = 1$ , где  $H_f$  — уровень жидкости, а H = 50 мм). Сплошной линией и длинным пунктиром изображены кривые, которые соответствуют шунтирующим цепям с оптимальными для демпфирования первой формы колебаний ( $R_{opt} = 3693$  Ом,  $L_{opt} = 14.96$  Гн) и произвольными параметрами. В последнем случае резонансная частота RL-цепи не совпадает с собственной частотой колебаний конструкции, поэтому на АЧХ присутствует второй пик в окрестности 160 Гц.

Установлено, что эффективность демпфирования резонансных колебаний пластины с помощью пьезоэлемента, соединённого с внешней пассивной RL-цепью, падает в несколько раз при увеличении объёма жидкости. Это продемонстрировано на рисунке 3, где в качестве критерия используется отношение амплитуд резонансных колебаний  $\delta$  на низшей частоте  $\omega_1$  до и после включения электрической цепи. Поскольку с ростом уровня жидкости частота плавно убывает, то для каждого рассмотренного случая оптимальные значения сопротивления  $R_{opt}$  и индуктивности  $L_{opt}$  определяются заново.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10054).

### ЛИТЕРАТУРА

- Hagood N. W., von Flotow A. H. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // Journal of Sound and Vibration. 1991.
   V. 146. № 2. P. 243–268.
- [2] Fleming J.A., Moheimani S. O. Reza. Piezoelectric transducers for vibration control and damping, 1st ed. London: Springer, 2006. XVI, 271 p.
- [3] Presas A., Luo Y., Wang Z., Valentin D., Egusquiza M. A review of PZT patches applications in submerged systems // Sensors. 2018. V. 18. № 7. 2251.
- [4] Bachmann F., Bergamini A., Ermanni P. Optimal piezoelectric positioning a strainenergy based finite element approach // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2012. V. 23. № 14. P. 1575–1591.
- [5] Oshmarin D. A., Lekomtsev S. V., Sevodina N. V. Optimal placement of piezoelectric element on a plate interacting with a fluid layer // International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology. 2019. V. 10. № 2. P. 659–668.
- [6] Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations // International Journal of Smart and Nano Materials. 2018. V. 9. P. 135–149.

Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V., Iurlov M. A. Passive suppression of hydroelastic resonance vibrations of a thin plate with a piezoelectric element connected to an external electric circuit. The work deal with the suppression of resonant vibrations of a thin rectangular plate interacting from above with a fluid using piezoelectric element connected to an external passive electric circuit. The experimental studies have shown that the efficiency of vibrations damping significantly decreases as the height of the fluid layer increases. The performance of various types of piezoelectric elements and different variants of their attachment to the structure surface are analyzed. It has been found that the presence of a thin layer of viscous glue eliminates most of the positive effect of vibrations damping by an external *RL*-circuit, even if the fluid is absent.

## ДАТЧИКИ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ НА ОСНОВЕ ТОНКИХ ПЛЕНОК И МАССИВОВ НАНОСТЕРЖНЕЙ ОКСИДА ЦИНКА

# Карапетьян Г. Я., Кайдашев Е. М., Днепровский В. Г., Минасян Т. А., Кутепов М. Е.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В данном докладе представлен обзор работ проведенных в лаборатории наноматериалов за последние годы: создан и исследован фотоприемник УФ диапазона на поверхностных акустических волнах нового типа с повышенной фоточувствительностью за счёт многократных переотражений ПАВ; приведены исследования пассивного беспроводного датчика УФИ на ПАВ, работающего в диапазоне частот 436–440 МГц, когда расстояния между антеннами датчика и считывателя равно 2 м. В качестве чувствительного элемента используется ВШС, расположенная на подложке ниобата лития, на которую нанесена пленка оксида цинка толщиной 200 нм. Датчик может измерять интенсивности УФИ от 10 до 40000 мкВт/см<sup>2</sup> с максимальной чувствительностью 6000 ppm (мкВт/см<sup>2</sup>). Методом импульсного лазерного напыления нами синтезированы и использованы в качестве чувствительных элементов ПАВ фотоприемников глубокого УФ диапазона проводящие оксидные пленки Zn(Mg,Al)O. Край полосы оптического поглощения пленок Zn(Mg,Al)O смещен до ~5 эВ (265 нм) при допировании магнием. Исследованы резистивные и ПАВ сенсоры для измерения концентрации моноокиси углерода, в котором в качестве чувствительного элемента использовался массив наностержней оксида цинка.

Пленки оксида цинка в последнее время находят все более широкое применение для датчиков на ПАВ физических величин (давление, перемещения, величины магнитной индукции), для обнаружения различных химических веществ [1–2] и измерения интенсивности ультрафиолетового излучения [3–5]. В настоящее время чаще всего исследуются конструкции ПАВ сенсоров УФ излучения, в которых пленка оксида цинка находится между встречно-штыревыми преобразователями (ВШП). Также в приведенных работах рассматриваются только частотные отклики, которые не позволяют наглядно получить информацию о ПАВ, отраженных от ВШП в процессе облучения пленки УФИ. В нашей работе [6] предложено использование Фурье-преобразования частотных откликов, что позволяет получить импульсный отклик датчика, где видно временное положение отраженных от ВШП импульсов ПАВ. Это позволяет увеличить чувствительность датчиков УФИ, так как отраженные ПАВ могут проходить под пленкой не один раз, а два, три и т. д.раз. Но в работах [1–6] пленка оксида цинка или массивы наностержней располагаются непосредственно в акустическом канале на пути распространения ПАВ. Это приводит к увеличению затухания ПАВ, особенно на высоких частотах. Уже на частотах в районе 500 МГц вносимое затухание становится более 30 дБ [3]. Если ПАВ проходит через массив наностержней, то она испытывает еще большее затухание [7]. Увеличения затухания ПАВ приводит к понижению чувствительности и снижению помехозащищенности датчиков УФИ, особенно если их выполнять в беспроводном пассивном варианте. Поэтому создание датчика, в котором пленка, чувствительная к измеряемой величине находится вне акустического канала, является актуальной задачей.

В качестве подожки выбран  $YX/128^{\circ}$ срез ниобата лития. 20 секций выбрано потому, что для данного среза ниобата лития это число близко к числу секций, обеспечивающих однонаправленный режим [9]. Прореживание увеличивает длину ВШП, а следовательно приводит у сужению полосы пропускания ВШП. В нашем случае в приемо-передающем ВШП расстояние между секциями было выбрано равным 17 длинам ПАВ на центральной частоте датчика ( $f_{01}$ ). Расстояние между секциями отражательного ВШП было выбрано равным 13 длинам ПАВ на частоте  $f_{01}$ .

Чувствительный элемент в виде встречно-штыревой системы (ВШС) с нанесенной на нее пленкой оксида цинка и содержит 17 пар электродов. ВШС с пленкой оксида цинка, располагалась на подложке YX/128°– срезе ниобата лития. Период ВШС так же, как и в работе [7] был выбран таким образом, что при использовании данной ВШС в качестве ВШП он излучал (принимал) бы ПАВ, на частотах, которые находятся вдали от рабочих частот ВШП. Пленки оксида цинка была нанесена на ВШС, расположенную на YX/128° срезе ниобата лития с помощью импульсного лазера при давлении кислорода  $2-5 \cdot 10^{-2}$  мБар и температуре 5000 °С, как то было сделано в работах [10, 11], а также в работе [8]. Лазерная напыление проводилась путем фокусировки лазерного луча KrF (248 Hм) на вращающейся керамической мишени ZnO с интенсивностью 2 Дж/см<sup>2</sup>. Расстояние от мишени до подложки устанавливали равным 5 см, и 4000 лазерных импульсов наносили пленку толщиной ~250 нм.

В качестве считывателя используется анализатор импедансов «Обзор-304», который подключается к первой приемо-передающей антенне. Измерительный канал датчика устанавливается во вторую приемо-передающую антенну. УФИ подавалось на чувствительный элемент от He-Cd лазера Kimmon 1K3501RG ( $\lambda = 325$  нм). Максимальная интенсивность излучения УФИ равнялась 38 мBт/см<sup>2</sup>. Изменение интенсивности излучения производилось с помощью механического ослабителя представляющего собой вращающийся со скоростью 20 оборотов/с диск с отверстиями. При этом использовались диски с разным числом и размером отверстий, чтобы получить интенсивности УФИ от 38000 мкBт/см<sup>2</sup> до 380 мкBт/см<sup>2</sup>. Для дальнейшего уменьшения интенсивности излучения было использовано кварцевая пластина, которая имеет коэффициент отражения 4%, т.е. ослабляет интенсивность УФИ дополнительно в 25 раз. Используя далее механический ослабитель удалось довести минимальную интенсивность УФИ до 15.2 мкBт/см<sup>2</sup>.

Нами предложен новый подход к повышению чувствительности существующих плёночных ZnO/LiNbO<sub>3</sub> фотодетекторов УФ/видимого диапазона на основе ПАВ. В отличие от предыдущих подходов, применяемых для детектирования света при помощи ПАВ, мы использовали второе, третье и отражения волн более высоких порядков для увеличения чувствительности детектора. Мы также установили, что плёнки ZnO полученные методом ИЛН в разных условиях могут полностью изменять главные характеристики фотодетектора. В предложенном нами подходе становится возможным изготовить УФ фотодетектор на ПАВ, в котором могут быть одновременно достигнуты высокая чувствительность и быстродействие. Плёнки ZnO напылялись на центральную часть подложки 128° YX LiNbO<sub>3</sub> методом импульсного лазерного напыления при давлении кислорода  $2-5 \cdot 10^{-2}$  и температуре

138

500 °C (Образец 1) и 550 °C (Образец 2) используя методику описанную ранее [6]. Лазерная абляция производилась при фокусировке излучения KrF (248 нм) лазера на вращающуюся керамическую мишень ZnO. Плотность мощности в пятне испарения составляла 2 Дж/см<sup>2</sup>. Расстояние мишень-подложка устанавливалась равным 5 см и плёнка толщиной ~250 нм напылялась за 4000 лазерных импульсов. Чтобы избежать затухания ПАВ на границе напыления маска при напылении плёнки ZnO не использовалась. Площадь однородной по толщине области плёнки ZnO составляет  $\sim 1 \times 1$  см и определяется геометрией плазменного факела. Наш подход для возбуждения и детектирования ПАВ отличается от подходов предложенных в предыдущих исследованиях, где ВШП напыляются на УФ чувствительный слой. Мы используем две подложки 128° YX LiNbO<sub>3</sub> с однонаправленными ВШП на краю каждой подложки, чтобы заводить ПАВ в образец и детектировавть сигнал, соответсвенно. Акустические каналы образца, подложек передатчика и приёмника позиционируются в одной плоскости чтобы ПАВ могла свободно переходить из одной подложки в другую. ПАВ генерируемая ВШП на первой подложке переходит в образец ZnO/LiNbO<sub>3</sub>, а затем в третью подложку с приёмным ВШП. Полированные поверхности LiNbO<sub>3</sub> прижимаются друг к другу с помощью металлической пластины изолированной от образца резиновой прокладкой, которая гарантирует однородное нажатие и препятствует механическому разрушению подложки при прижатии. ВШП имеет центральную частоту 120.7 МГц. Края подложки LiNbO<sub>3</sub> скруглены и покрыты поглотителем акустических волн. Поглотители не должны касаться исследуемого образца чтобы не препятствовать прохождению волны в образец. Мы намеренно разделили образец ZnO/ LiNbO<sub>3</sub> и ВШП. Этот подход позволяет не наносить ВШП на исследуемую плёнку, таким образом предоставляя больше гибкости для технологических этапов, таких как нагрев и последующий рост наноструктур на полупроводниковую плёнку, без риска испортить металлическую структуру ВШП. Заметим, что плёнки ZnO с высоким структурным совершенством необходимые для создания высококачественных фотодетекторов обычно синтезируются при повышенных температурах в диапазоне 450–650 °С. При предлагаемом подходе также исключаются возможные загрязнения и деградация поверхности ZnO химическими веществами при литографии.

Методом импульсного лазерного напыления нами синтезированы и использованы в качестве чувствительных элементов ПАВ фотоприемников глубокого УФ диапазона проводящие оксидные пленки Zn(Mg,Al)O. Край полосы оптического поглощения пленок Zn(Mg,Al)O смещен до ~5 эВ (265 нм) при допировании магнием. При этом умеренное допирование алюминием повышает проводимость пленок и улучшает акустоэлектронное взаимодействие. Найден температурный диапазон синтеза пленок с быстрым фотоэлектрическим откликом при облучении импульсным лазерным излучением с длиной волны 248 нм [11]. Как и в предыдущей работе мы отделили подложку с фоточувствительной пленкой от ВШП. Этот подход более предпочтителен для оптимизации технологических подходов к получению фоточувствительных пленок оксида цинка, теплового отжига подложки LiNbO<sub>3</sub> в кислороде и будущего роста полупроводниковых наноструктур, без риска разрушения металлических ВШП и возможности восстановления пьезоэлектрических свойств подложки LiNbO<sub>3</sub> при отжиге в кислороде. Изменяя темпе

ратуру роста пленок Zn(Mg, Al)O, можно изменять поверхностную проводимость пленок в достаточно широком диапазоне и, следовательно, настраивать «рабочую точку» вблизи крутого наклона зависимости затухания ПАВ от поверхностной проводимости пленки  $\Gamma(\sigma_{sh})$  для получения наилучшей чувствительности УФ ПАВ фотоприемника. Интересно, что недопированные пленки оксида цинка, как показали наши предыдущие исследования [6], полученные при различных температурах синтеза, всегда показывали повышение затухания и сохранение знака  $\Gamma(\sigma_{UV}) - \Gamma(\sigma_{dark})$  при увеличении интенсивности ультрафиолетового излучения.

Нами были исследованы резистивные и ПАВ сенсоры для измерения концентрации моноокиси углерода, в котором в качестве чувствительного элемента использовался массив наностержней оксида цинка [12–14]. Чувствительный элемент изготавливался нами методами импульсного лазерного напыления [15], карботермического [15, 16] и химического синтеза [17]. Для создания верхнего электрода 9 к решетке наностержней оксида цинка осуществляли напыление золота под углом в 45° в высоком вакууме через маску с круглым отверстием. Благодаря плотному расположению наностержни экранируют друг друга, что препятствуют запылению основания структуры. Таким образом, золотой контакт создается в верхней части наностержней и объединяет их между собой.

### ЛИТЕРАТУРА

- Marcu A, Viespe C 2015 HLaser-grown ZnO nanowires for room-temperature SAWsensor applications Sensors and Actuators B:Chem. 208 1–6
- [2] Tsai W, Kao H, Liao K, Liu Y, Lin T, and Jeng E. S 2015 Room temperature fabrication of ZnO/ST-cut quartz SAW UV photodetector with small temperature coefficient Optics Express 23 2187
- [3] Kumar S, Kim G, K Sreenivas, Tandon R.P. 2009 ZnO based surface acoustic wave ultraviolet photo sensor, J. Electroceram 22, 198–202
- [4] Rotter M, Wixforth A, Ruile W, Bernklau D, and. Riechert H 1998 Giant acoustoelectric effect in GaAs/LiNbO<sub>3</sub>GaAs/LiNbO<sub>3</sub> hybrids, Appl. Phys. Lett. 73 2128
- [5] D.S. Ballantine Jr., R.M. White, S.J. Martin A. J. Ricco, G.C. Frye, E.T. Zellers, and H. Wohltjen 1997 Acoustic Wave Sensors: Theory, Design, and Physico-Chemical Applications (Academic Press)
- [6] Guo Y J., Zhao C, Zhou X S, Li Y, Zu X T, Gibson D and Fu Y Q 2015 Ultraviolet sensing based on nanostructured ZnO/Si surface acoustic wave devices Smart Materials and Structures 24 125015 (8pp).
- [7] G. Ya. Karapetyan, V.E. Kaydashev, D.A.Zhilin, M.E. Kutepov, T.A. Minasyan, E.M. Kaidashev. A surface acoustic wave impedance-loaded high sensitivity sensor with wide dynamic range for ultraviolet light detection Sensors and Actuators A: Physical 296 (2019) 70-78.
- [8] A. A. Mohanan, R. Parthiban, N. Ramakrisshnan Shadow mask assisted direct growth of ZnO nanowires as a sensing medium for surface acoustic wave device using a thermal evaporation method Journal Micromechics and Microengineering 26 (2016) 025017.
- [9] G. Ya. Karapetyan, V. E. Kaydashev, D. A. Zhilin, T. A. Minasyan, K. G. Abdulvakhidov, E. M. Kaidashev, Use of multiple acoustic reflections to enhance SAW UV photo-detector sensitivity Smart Materials and Structures 26 (2017) 035029 (6pp).

Датчики на поверхностных акустических волнах на основе тонких пленок 141

- [10] E. M. Kaidashev, M. Lorenz, H., von Wenckstern, A. Rahm, H. C. Semmelback, K. H. Han, G. Bendorf, C.Bundesmann, H. Hochmuth and M. Grundmann High electron mobility of epitaxial ZnO thin flms on c-planeSapphire grown by multistep pulsed-laser deposition Appl. Phys. Lett. 82 (2003) 3901.
- [11] Kutepov M. E., Kaydashev V. E., Karapetyan G. Y., Minasyan T. A., Chernyshev A. V., Abdulvakhidov K. G., Shevtsova S. I., Glazunova E. V., Irkha V. A., Kaidashev E. M. Deep UV light sensitive Zn<sub>1-x-y</sub>Mg<sub>x</sub>Al<sub>y</sub>O films with fast photoelectric response for SAW photodetectors // Smart Mater. Struct. 2019. V. 28. P. 065024 (7pp).
- [12] Карапетьян Г. Я., Кайдашев Е. М., Николаев А. Л., Несветаев Д. Г., Лянгузов Н. В. Патент РФ № 2550697 / Датчик на поверхностных акустических волнах для измерения концентрации моноокиси углерода. Опубл.10.05.2015. Бюл. № 13.
- [13] Карапетьян Г. Я., Кайдашев Е. М., Николаев А. Л., Несветаев Д. Г., Жилин Д.А. Патент РФ № 2581570 /Пассивный беспроводный датчик на поверхностных акустических волнах для измерения концентрации моноокиси углерода. Опубл. 20.04.2016. Бюл. № 11.
- [14] A. L. Nikolaev, G. Ya. Karapetyan, D. G. Nesvetaev, N. V. Lyanguzov, V. G. Dneprovski, E. M. Kaidashev Preparation and Investigation of ZnO Nanorods Array Based Resistive and SAW CO Gas Sensors//Advanced Materials Springer Proceedings in Physics. V.152. 2014. P. 27–36.
- [15] N. V. Lyanguzov, D. A. Zhilin, E. M. Kaidashev Carbothermal Synthesis and Characterization of ZnO Nanorod Arrays//Advanced Materials Springer Proceedings in Physics. 2014. V.152. P. 37–44.
- [16] Nikolaev, A.L., Kaidashev, E.M., Kamencev, A.S. Morphology and photoluminescence of zinc oxide nanorods obtained by carbothermal synthesis at different temperatures//Springer Proceedings in PhysicsVolume 224, 2019, Pages 103-113.
- [17] A. L. Nikolaev, M. A. Kazmina, T. A. Minasyan, V. E. Kaydashev, D. A. Zhilin, N. V. Lyanguzov, K. G. Abdulvakhidov and E. M. Kaidashev, Chapter 68. The Design of Construction Elements for Piezoelectric Rezonators and Chemosensors Based on Zinc Oxide Nanorods // Proceedings of the 2016 International Conference on «Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications». 2017. P. 495–502.

Karapet'jan G. Ja., Kajdashev E. M., Dneprovskij V. G., Minasjan T. A., Kutepov M. E. Sensors on surface acoustic waves based on thin films and arrays of zinc oxide nanoshafts. This report provides an overview of the work carried out in the laboratory of nanomaterials in recent years: a new type of UV photodetector on surface acoustic waves with increased photosensitivity due to multiple re-reflections of surfactants has been created and studied; studies of a passive wireless UV sensor on surfactants operating in the frequency range 436–440 MHz, when the distance between the sensor and reader antennas is 2 m. As a sensitive element, the HSC is used, located on a lithium niobate substrate, on which a 200 nm thick zinc oxide film is applied. The sensor can measure UV intensities from 10 to 40,000  $\mu$ w/cm<sup>2</sup> with a maximum sensitivity of 6000 ppm ( $\mu$ w/cm<sup>2</sup>). We synthesized and used conductive oxide films Zn(Mg,Al)O as sensitive elements of surfactant photodetectors in the deep UV range. The edge of the optical absorption band of Zn(Mg,Al)O films is shifted to ~5 eV (265 nm) when doped with magnesium. Resistive and surfactant sensors were investigated for measuring the concentration of carbon monoxide, in which an array of zinc oxide nanorods was used as a sensing element.

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИНЫ И КАПСУЛЫ ПРИ САМОЗАЛЕЧИВАНИИ МАТЕРИАЛОВ

### Каспарова Е.А., Перельмутер М.Н.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

В постановке плоской задачи теории упругости исследовано влияние положения трещины на напряженно-деформированное состояние вблизи цилиндрической капсулы с залечивающим веществом. Рассмотрены случаи идеального и неидеального (когезионная модель) соединения между поверхностями капсулы и матрицы. Выполнено моделирование формирования и развития трещины-отслоения на границе между капсулой и матрицей, а также развития трещины в окрестности капсулы.

1. Введение. В последние десятилетия ведутся работы по созданию и изучению материалов, обладающих свойством самозалечивания (автономно восстанавливающих начальные свойства при возникновении в них дефектов и трещин). Механизмы процессов самозалечивания зависят от типа материала [1]. В данной работе рассматриваются композиционные материалы, залечивающий механизм которых основан на внедрении в материал на этапе производства специальных капсул, содержащих «залечивающее вещество» [2]. Форма и материал капсул должны быть такими, чтобы при развитии трещины происходило проникновение вершины трещины в капсулу (деструкция капсулы), сопровождающееся высвобождением залечивающего агента в пространство между поверхностями трещины, приводящее к залечиванию трещины (заполнению пространства внутри трещины и формированию связей между ее поверхностями). Существенное влияние на процесс деструкции капсул и эффективность процесса залечивания трещин оказывает адгезионная прочность соединения материала капсулы и основного материала.

В работе методом конечных элементов (МКЭ) выполнено численное моделирование влияние положения трещины на напряженно-деформированное состояние вблизи цилиндрической капсулы с залечивающим веществом. Расчеты выполнены в постановке плоской задачи теории упругости при одноосном растяжении изотропной пластины с капсулой. Рассмотрено два типа граничных условий на поверхности раздела капсулы и основного материала (матрицы), соответствующих идеальному и неидеальному соединению между поверхностями капсулы и матрицы. В последнем случае для описания взаимодействия капсулы и матрицы использовалась когезионная модель с билинейной кривой деформирования.

Распределения напряжений вблизи капсулы получены для идеального и неидеального соединения между поверхностями капсулы и матрицы. Моделирование развития трещины в окрестности капсулы выполнено в рамках когезионной модели (неидеальное соединение капсулы и матрицы). При расчете МКЭ на каждой итерации (приращении длины трещины) выполнялось перестроение сетки конечных элементов. Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) определялись методом, основанным на вычислении J-интеграла. Направление роста трещины как трещины нормального отрыва определялось на каждой итерации по найденным КИН с использованием критерия максимальных окружных напряжений. Получены траектории трещины при различном взаимном расположении капсулы и первоначального дефекта.

2. Когезионная модель взаимодействия капсулы и матрицы. Рассмотрим квадратную пластину размером  $2L \times 2L$ , L = 50 мм, в центре которой находится полая цилиндрическая капсула кругового сечения, с внешним радиусом  $R_c = 1.2$  мм и внутренним радиусом  $R_h = 1$  мм (рис. 1). Пластина подвержена действию растягивающего напряжения  $\sigma_0 = 3$  МПа.

Взаимодействие между капсулой и матрицей в случае наличия когезионного слоя между ними будем описывать с помощью билинейной модели [3], для которой связь между напряжениями в когезионном слое  $\sigma$  и удлинением слоя  $\delta$  имеет вид (рис.2):

$$\sigma = \begin{cases}
K^*\delta, & \text{если } 0 \leq \delta \leq \hat{\delta}; \\
\sigma^* \left(\frac{\delta^* - \delta}{\delta^* - \hat{\delta}}\right), & \text{если } \hat{\delta} \leq \delta \leq \delta^*; \\
0, & \text{если } \delta \geq \delta^*.
\end{cases} (1)$$



где  $\sigma^*$  — прочность когезионной связи,  $\hat{\delta}$  — расстояние между поверхностями, соответствующее усилиям  $\sigma^*$ ,  $K^*$  — матрица жесткости когезионного слоя между двумя различными материалами. В двумерном случае матрица жесткости  $\mathbf{K}^*$  имеет вид

$$\mathbf{K}^* = \begin{pmatrix} K_{nn} & K_{ns} \\ K_{sn} & K_{ss} \end{pmatrix} \tag{2}$$

(4)

где  $K_{nn}$ ,  $K_{ss}$  — жесткости когезионного слоя в нормальном и тангенциальном направлении соответственно. Обозначая расстояния между поверхностями в нормальном и тангенциальном направлении  $\delta_n$  и  $\delta_s$ , получим следующие выражения для деформаций когезионного слоя

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\delta_n}{\Delta l}, \quad \varepsilon_{ss} = \frac{\delta_s}{\Delta l},$$
 (3)

где  $\Delta l = 0.001$  мм - толщина когезионного слоя между капсулой и матрицей. Таким образом, при  $0 \leq \delta \leq \hat{\delta}$ , закон деформирования когезионного слоя имеет вид

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_n \\ t_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{ns} \\ E_{ns} & E_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s \end{pmatrix} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$$



Рисунок 2 – Билинейная зависимость для модели когезионного слоя.

где Е — матрица эффективных упругих модулей когезионного слоя.

Расчет напряженно-деформированного состояния вблизи капсулы выполнен с учетом симметрии задачи (рис. 1). На рис.3,4 представлены графики зависимостей величин  $\sigma_{22}/\sigma_0$ ,  $\sigma_{11}/\sigma_0$  от координаты x вдоль прямой AB, полученные для относительно мягкого материала капсулы, т.е.  $E/E_c \ge 1$ , где E модуль Юнга материала матрицы,  $E_c$  модуль Юнга материала капсулы. Здесь  $E = 4 \cdot 10^{10}$  Па, коэффициенты Пуассона материалов  $\nu = \nu_c = 0.2$ , на границе между капсулой и матрицей заданы условия полного сцепления. В связи с наложением условий полного контакта на границе соединения материалов (капсула-матрица), в точке с коор-



Рисунок 3 — Распределение напряжений  $\sigma_{11}/\sigma_0$  для случая полного сцепления между капсулой и матрицей.

динатой x = 1.2 мм функция  $\sigma_{11}(x)$  имеет точку излома (рис. 3), а функция  $\sigma_{22}(x)$  испытывает скачок (рис. 4).

На рис.5 представлены изолинии максимальных главных напряжений вблизи полой цилиндрической капсулы для случая, когда наблюдается отслоение капсулы от матрицы. При моделировании когезионного слоя были использованы значения упругих модулей  $E_{nn} = E_{ss} = 0.5E$ ,  $E_{ns} = 0$ ,  $E/E_c = 1/3$ ,  $\hat{\delta}_n = \hat{\delta}_s = 1.5 \cdot 10^{-8}$  мм, толщина капсулы 1.5 мм.

### 3. Моделирование роста трещины.

Выполнено моделирование роста трещины в окрестности капсулы для случая неидеального сцепления капсулы и матрицы. Полагается, что прямолинейная трещина начинает расти от небольшого дефекта, размеры которого намного меньше размера капсулы.

Поля напряжений вблизи вершины трещины могут быть записаны в виде разложения Вильямса [4]

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}} n f_{ij}(n,\theta) r^{\frac{n}{2}-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi}} m g_{ij}(m,\theta) r^{\frac{m}{2}-1},$$
$$i, j \in \{x, y\} \quad (5)$$



Рисунок 4 — Распределение напряжений  $\sigma_{22}/\sigma_0$  для случая полного сцепления между капсулой и матрицей.

где  $(r, \theta)$  полярная система координат с центром в вершине трещины,  $f_{ij}(n, \theta)$ ,  $g_{ij}(m, \theta)$  - известные функции,  $K_I$ ,  $K_{II}$  — коэффициенты интенсивности напряже-
ний (КИН).

Численная процедура, позволяющая моделировать рост трещины, состоит в следующем [5]. Методом конечных элементов вычисляется напряженное состояние в теле с капсулой и трещиной, причем в окрестности вершины трещины используются сингулярные конечные элементы. Для вычисления величин  $K_I$ ,  $K_{II}$  используется метод, основанный на применении J — интеграла. Направление роста трещины  $\theta_0$  определяется по критерию максимальных окружных напряжений:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=\theta_0} < 0 \tag{6}$$

Окончательное выражение для угла  $\theta_0$ , следующее из (5),(6), имеет вид

$$\theta_0 = 2 \arctan\left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} - sgn(K_{II})\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8}\right)\right]$$
(7)

Согласно выбранному критерию, имеем следующее условие страгивания трещины в направлении  $\theta_0$ :

$$K_{Ic} \leqslant \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] \cos \frac{\theta_0}{2} \qquad (8)$$

где  $K_{Ic}$  — трещиностойкость материала. При выполнении условия (8) трещина получает малое приращение длины  $\Delta l_0$  в направлении  $\theta_0$ , в противном случае происходит догружение пластины.

На Рис.6 представлена траектория роста трещины от первоначального дефекта в окрестностях цилиндрической капсулы в пластине при растяжении, для случая, когда наблюдается проникновение трещины в капсулу. Для расчетов были использованы следующие параметры: внутренний радиус капсулы  $R_h = 0.4$  мм, толщина капсулы  $t_c = 0.02$  мм, толщина когезионного слоя  $\Delta l = 0.001$  мм, приращение длины трещины  $\Delta l_0 = 0.1$  мм, расстояние (по вертикали) между центром капсулы и линией первоначального разреза 0.46 мм, размеры пластины 50 × 50 мм; упругие свойства матрицы  $E = 297.2 \ \Gamma \Pi a, \nu = 0.23;$  упругие свойства материала капсулы  $E_c = 0.5E, \nu_c = \nu;$  параметры когезионного слоя  $E_{nn} = E_{ss} = 20$  ГПа,  $E_{ns} = 0$ .



Рисунок 5 – Отслоение капсулы от матрицы.



Рисунок 6 – Проникновение трещины в капсулу.

**4.** Заключение. Выполнено численное исследование полей упругих напряжений вблизи цилиндрической капсулы кругового сечения, внедренной в плоскую изотропную пластину, подверженную одноосному растяжению. Рассмотрены два типа граничных условий на поверхности раздела капсулы и матрицы: идеальное и неидеальное сцепление. В последнем случае взаимодействие между капсулой и матрицей моделировалось с помощью билинейной модели тонкого когезионного слоя.

Выполнено моделирование роста трещины в окрестности тонкостенной капсулы. Рассмотрены случаи как отклонения трещины от своего первоначального направления роста в результате взаимодействия с капсулой, так и слияния трещины с капсулой.

Разработанная методика расчета может быть использована для сравнительной оценки эффективности различных вариантов капсульного самозалечивания трещин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-19-00616).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ситников Н. Н., Хабибуллина И. А., Мащенко В. И., Ризаханов Р. Н. Оценка перспектив применения самовосстанавливающихся материалов и технологий на их основе // Перспективные материалы. 2018. № 2. С. 5–16.
- [2] White S. R., Sottos N. R., Geubelle P. H., Moore J. S., Kessler M. R., Sriram S. R., Brown E. N., Viswanathan S. Autonomic healing of polymer composites // Nature. 2001. V. 409. P. 794–797.
- [3] Alfano G., Crisfield M. A. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2001. V. 50. P. 1701–1736.
- [4] Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // J. Appl. Mech. (ASME). 1957. V. 24. P. 109–114.
- [5] Каспарова Е. А., Шушпанников П. С. Численные и аналитические методы моделирования роста и взаимодействия трещин // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 1. С. 79–91.

Kasparova E.A., Perelmuter M.N. Modelling of capsule-crack interactions in selfhealing materials. The effect of a crack position on the stress-strain state near the cylindrical capsule containing a healing agent was studied in the framework of planar theory of elasticity. Cases of perfect and imperfect bonding (cohesive model) between the matrix and the capsule were investigated. The formation and propagation of interfacial cracks at the matrix-capsule interface and the propagation of matrix cracks in the capsule vicinity were simulated.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОМПОНЕНТОВ ШЛИЦЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ

### Колесников В. И.<sup>1</sup>, Иваночкин П. Г.<sup>1</sup>, Данильченко С. А.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Ростовский государственный университет путей сообщения <sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В настоящей работе в рамках линейной теории упругости рассмотренно фрикционное контактное взаимодействие между наконечником и валом хвостовой трансмиссии вертолета МИ-26. Геометрические размеры соединительных элементов взяты из проектной документации. Чтобы задать профиль сечения зуба, были получены необходимые параметрические уравнения. Для решения поставленных задач использовались метод конечных элементов и программный комплекс ANSYS. На контактирующей поверхности кончика зуба моделировалось тонкое покрытие . Напряженно-деформированное состояние узла рассчитано для различных геометрических и механических параметров покрытия.

#### 1. Введение.

В каждом механизме имеется ряд деталей, эксплуатационный ресурс которых значительно меньше по сравнению с остальными. К элементам с ограниченным ресурсом, в первую очередь относятся наиболее нагруженные соединения. К ним можно отнести следующие технологические узлы: системы торможения, где по причине большой величины работы сил трения, наличия высоких скоростей скольжения контактных поверхностей и значительного их прогрева происходит интенсивное изнашивание тормозных колодок; хвостовая трансмиссия вертолета, в соединениях валов которой применяются эвольвентные зубчатые зацепления, выходящие из строя в основном из-за смятия и износа рабочих поверхностей зубьев. Процессы взаимодействия в зоне фрикционного контакта шлицевого соединения хвостовой трансмиссии вертолета характеризуются малыми по амплитуде относительными колебаниями и значительными по величине динамическими нагрузками, действующими на сопряжение в эксплуатационных условиях.

В настоящее время применяются различные методы, позволяющие снизить износ трущихся деталей [1]. Например, использование смазок и антифрикционных материалов, которые позволяют снизить трение [2]. Так же одним из эффективных способов повышения долговечности рабочих узлов является модификация поверхностей трибоконтакта в т. ч. путем их упрочнения и нанесения покрытий [3]. Основную сложность при таком подходе представляет получение оптимальных параметров модификации поверхности для каждого конкретного узла. Одним из способов решения данной проблемы может являться оценка влияния различных параметров модификации на напряженно-деформированное состояние соединения. В теоретическом плане проблема расчета напряженно-деформированного состояния тяжелонагруженного узла трибосопряжения сводится к решению контактной задачи механики деформируемого твердого тела.

### 2. Постановка модельных задач контактного взаимодействия в шлицевом трансмиссионном соединении.

В рамках линейной теории упругости рассматривается фрикционное контактное взаимодействие наконечника и стакана вала хвостовой трансмиссии вертолета MИ-26. Геометрические размеры элементов соединения взяты из конструкторской документации. Для задания профиля сечения зуба были выведены необходимые параметрические уравнения. При получении итоговых формул использовались следующие параметры эвольвенты: m = 3 мм — модуль зацепления, z = 27 число зубьев колеса,  $\alpha = 20^{\circ}$  — угол профиля исходного контура,  $h_a^* = 1$  — высота головки зуба исходного контура,  $x^* = 1$  — смещение исходного контура (червячной фрезы) при нарезании зуба,  $c^* = 0, 25$  — радиальный зазор в зубчатой паре,  $r_i^*$  — радиус галтели зуба исходного контура. Звёздочка указывает на отнесение данной линейной величины к модулю зацепления. На основании этих данных были рассчитан ряд вспомогательных величин, с помощью которых в дальнейшем получены параметрические уравнения для эвольвентного участка зуба и участка галтели зуба.

Предполагается, что стакан и наконечник находятся в идеальном соосном положении. Торцевая грань стакана в более широкой части закреплена по всем направлениям, а к торцевой грани наконечника в более широкой части приложена нагрузка в виде момента M, которая приводит его во вращение вокруг своей оси. Между контактирующими поверхностями зубьев наконечника и стакана задано кулоновское трение с коэффициентом k.

### 3. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия в шлицевом трансмиссионном соединении.

Для решения поставленной задачи был применен метод конечных элементов и программный комплекс ANSYS. Для построения конечно-элементной сетки использовался десятиузловой четырехгранный упругий элемент SOLID187. Для лучшей сходимости и повышения точности расчетов в соответствии с методологией решения контактных задач на поверхностях зубьев стакана и наконечника, непосредственно контактирующие между собой, обеспечивалось сгущение конечно-элементного разбиения. Для моделирования контактного взаимодействия поверхности зубьев наконечника и стакана были покрыты элементами CONTA174 и TARGE170 соответственно.

#### 4. Результаты расчетов.

Основное внимание при расчетах уделялось исследованию контактного давления q и эффективных (эквивалентных) напряжений  $\sigma_e$  на поверхностях зубьев наконечника, непосредственно контактирующих с зубьями стакана. Рассмотрены результаты для одной из контактирующих поверхностей, поскольку при идеальной соосности на всех зубьях наконечника в силу однородности их геометрии и приложенной нагрузки результаты совпадают.

В реальном узле в виду объемности конструкции хвостовой трансмиссии и сложной схемы соединения отдельных ее составляющих в процессе эксплуатации не удается достичь идеальной соосности элементов сопряжения. В отдельных валах трансмиссии происходит отклонения осей наконечника и стакана на угол в пределах 7 минут (0,01°). Для оценки влияния несоосного расположения элементов

148

шлицевого соединения на напряженно-деформированное состояние были произведены расчеты для случаев, когда ось стакана имеет отклонение по горизонтали или вертикали относительно оси наконечника. Расчеты показали, что отклонение оси стакана в горизонтальной плоскости приводит к смещению пятна контакта в соответствующем направлении, при этом значения контактного давления изменяются не более чем на 4%, эффективных напряжений не более чем на 9% по сравнению с таковыми значениями при соосном положении. При отклонении оси стакана в вертикальной плоскости появляются ярко выраженные концентраторы напряжений. Значения контактного давления и эффективных напряжений в этих пятнах возрастают на 42 и 25% соответственно. Далее в соответствии с одним из предполагаемых способов повышения эксплуатационного ресурса исследуемого узла на контактирующей поверхности зуба наконечника было смоделировано тонкое покрытие с механическими характеристиками отличными от исходного материала зубьев. Предполагается, что покрытие и поверхность зуба жестко соединены. При задании механических характеристик покрытия выполнялось следующее условие: модуль упругости покрытия должен быть выше, чем у материала зубьев наконечника, но не превышать соответствующее значение для зубьев стакана. Чтобы оценить влияние модуля упругости и коэффициента Пуассона для покрытия толщиной 40 мкм были произведены расчеты контактного давления и эффективных напряжений при различных значениях данных характеристик. Установлено, что увеличения модуля упругости и коэффициента Пуассона приводит к росту величин контактного давления и эффективных напряжений на поверхности покрытия, при этом эффективные напряжения на границе между покрытием и гранью зуба практически не изменяются. Следует отметить, что изменение модуля упругости оказывает большее влияние на значения рассчитываемых напряжений, чем коэффициент Пуассона.

Для исследования влияния толщины покрытия на напряженно-деформированное состояние было проведено сравнение распределений контактного давления и эффективных напряжений на поверхности покрытия, а также эффективных напряжений на границе между покрытием и гранью зуба, на которое оно нанесено. Используя полученные данные, были построены зависимости максимальных значений контактного давления и эффективного напряжения на поверхности покрытия, а также эффективного напряжения на границе между покрытием и гранью зуба, на которое оно нанесено, от толщины покрытия.

#### 5. Выводы.

Из анализа полученных результатов следует, что при идеальной соосности стакана и наконечника и большой нагрузке, а также с учетом формы зубьев контакт возникает посередине поверхности зуба наконечника. При этом максимальные значения контактного давления и эффективных напряжений достигаются в точке пересечения эвольвенты с галтелью, поскольку эта точка является нерегулярной. Проведя оценку влияния несоосного расположения элементов шлицевого соединения на напряженно-деформированное состояние, было установлено, что отклонение от соосного положения в вертикальной плоскости оказывает большее влияние на величины контактного давления и эффективных напряжений на поверхности зуба наконечника, чем отклонение в горизонтальной плоскости.

Исследование влияния покрытия на напряженно-деформированное состояние показало, что при увеличении упругих характеристик материала покрытия наблюдается рост значений контактного давления и эффективных напряжений на поверхности покрытия. Это связано с уменьшением площади контакта. Эффективные напряжения на границе между покрытием и гранью зуба наконечника, на которую оно нанесено, практически не изменяются.

Проведя оценку влияния толщины покрытия, установлено, что с увеличением данного параметра происходит более равномерное распределение напряжений в самом покрытии. В свою очередь это приводит к снижению эффективных напряжений как на поверхности покрытия, так и на границе между покрытием и гранью зуба, однако контактное давление при этом возрастает. Это может быть связано со снижением влияния материала зуба наконечника, для которого значение модуля упругости задавалось ниже, чем у покрытия.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» при финансовой поддержке государства в лице Министерства науки и высшего образования России (идентификатор проекта RFMEFI60718X0203).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Dwivedi D. K.* Surface Engineering: Enhancing Life of Tribological Components. New Delhi: Springer Publications, 2018. 224 p.
- [2] *Persson B. N. J.* Sliding friction. Physical principles and applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Publications, 2000. 513 p.
- [3] Балдаев Л. Х. Реновация и упрочнение деталей машин методами газотермического напыления. М.: КХТ, 2004. 134 с.

Kolesnikov V.I., Ivanochkin P.G., Danilchenko S.A. Modeling of the contact problem for the components of the spline joint. In the present work, frictional contact interaction between the tip and the shaft of the tail transmission of the MI-26 helicopter is considered in the framework of the linear theory of elasticity. The geometrical dimensions of the joint elements are taken from the design documentation. To set the profile of the tooth section, the necessary parametric equations were derived. To solve the tasks set, the finite element method and the ANSYS software were used. A thin coating was designed placed on the contacting surface of the tip tooth. The stress-strain state of the node has been calculated for various geometrical and mechanical parameters of the coating.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ СЕТЧАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ КИРХГОФА-ЛЯВА

# Крылова Е. Ю.<sup>1</sup>, Папкова И. В.<sup>2</sup>, Синичкина А. О.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

<sup>2</sup> Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

В данной работе построена математическая модель поведения геометрически нелинейной микрополярной тонкой пологой цилиндрической сетчатой панели. С целью учета масштабных эффектов, материал панели рассматривается как континуум Коссера со стесненным вращением частиц. При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. Сетчатая структура цилиндрической панели учитывается в математической модели согласно теории Пшеничнова Г. И. Уравнения движения элемента панели, граничные и начальные условия получены из принципа Остроградского — Гамильтона на основании кинематических гипотез Кирхгофа — Лява. Геометрическая нелинейность учтена по модели Теодора фон Кармана. Методом установления проводится исследование влияния микрополярной структуры и геометрии сетки на поведение жестко защемленной по торцам прямоугольной в плане цилиндрической панели, состоящей из 2 семейств взаимно перпендикулярных ребер.

Рассмотрим сетчатую цилиндрическая панель, которая в пространстве  $\mathbb{R}^3$  занимает область  $\Omega = \{0 \leq x \leq c; 0 \leq y \leq b; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}; \}$  (рис.1). Развитие микро-



Рисунок 1 – Схема цилиндрической панели

системных технологий приводит к необходимости разработки надежных математических моделей для исследования статических и динамических режимов работы подобных панелей, как элементов МЭМС и НЭМС. Применение методов классической механики в данном случае приведет к высокой погрешности результатов. В данной работе масштабные эффекты учитываются на основании активно развивающейся микрополярной теории [1–3]. Материал панели рассматривается как континуум Коссера со стесненным вращением частиц. При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми, в таком случае определяющие соотношения для материала панели имеют вид:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ e_{xx} + \nu e_{yy} \right], \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} e_{xy}, \quad \sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{zx}, \quad x \leftrightarrows y,$$

$$m_{ij} = \frac{El^2}{1+\nu} \chi_{ij}, \quad i, j = x, y, z,$$
(1)

где компоненты тензора деформаций  $e_{ij}$  и компоненты тензора изгиба–кручения  $\chi_{ij}$  с учетом гипотез Кирхгофа—Лява и геометрической нелинейности по Т. фон Карману имеют вид

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$
$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$
$$\chi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \chi_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad \chi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right),$$

 $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $m_{ij}$  — компоненты тензора моментных напряжений, E — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона, l — дополнительный независимый материальный параметр длины. Предполагается, что цилиндрическая панель состоит из двух семейств густо расположенных ребер одного материала. Тогда, согласно теории Пшеничнова Г. И. [4], исходная сетчатая панель заменяется сплошным слоем с соответствующими жесткостями. Выражения для классических напряжений и напряжений высших порядков с учетом сетки примут вид:

$$\sigma_{xx}^{s} = A_{40}\sigma_{xx} + A_{22}\sigma_{yy} + A_{31}\sigma_{xy}, \quad \sigma_{yy}^{s} = A_{22}\sigma_{xx} + A_{04}\sigma_{yy} + A_{13}\sigma_{xy}, \sigma_{xy}^{s} = A_{31}\sigma_{xx} + A_{13}\sigma_{yy} + A_{22}\sigma_{xy}, \quad m_{xx}^{s} = A_{40}m_{xx} + A_{22}m_{yy} + A_{31}m_{xy}, m_{yy}^{s} = A_{22}m_{xx} + A_{04}m_{yy} + A_{13}m_{xy}, \quad m_{xy}^{s} = A_{31}m_{xx} + A_{13}m_{yy} + A_{22}m_{xy}, \quad (3) m_{zx}^{s} = A_{20}m_{zx} + A_{11}m_{zy} + A_{10}m_{zz}, \quad m_{zy}^{s} = A_{11}m_{zx} + A_{02}m_{zy} + A_{01}m_{zz}, m_{zx}^{s} = A_{10}m_{zx} + A_{01}m_{zy} + A_{00}m_{zz},$$

где  $A_{sk} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\delta_j \cos^s \varphi_j \sin^k \varphi_j}{a_j}$ ,  $s, k = 0, 4, \delta_j$  — ширина ребра *j*-ого семейства,  $a_j$  — расстояние между ребрами *j*-ого семейства,  $\varphi_j$  — угол наклона ребер *j*-ого семейства относительно положительного направления оси Ox.

Уравнения движения, граничные и начальные условия для микрополярной сетчатой цилиндричекой панели получим из вариационного принципа Остроградского — Гамильтона.

В дальнейшем будем рассматривать цилиндрическую панель с двумя семействами взаимно перпендикулярных ребер  $\varphi_1 = 45^o$ ,  $\varphi_2 = 135^o$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ,  $a_1 = a_2 = a$ . С учетом безразмерных параметров

$$u = \frac{h^2}{c}\bar{u}, \quad v = \frac{h^2}{b}\bar{v}, \quad x = c\bar{x}, \quad y = b\bar{y}, \quad w = h\bar{w}, \quad \delta = h\bar{\delta}, \quad a = h\bar{a}, \quad l = h\bar{l},$$

$$k_y = \frac{h}{b^2}\bar{k_y}, \quad q = \frac{Eh^4}{c^2b^2}\bar{q}, \quad t = \frac{cb}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\bar{t}, \quad \epsilon = \frac{h}{cb}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\bar{\epsilon},$$
(4)

где  $\epsilon$  — коэффициент диссипации среды,  $\rho$  — плотность материала панели,  $q = q_0 \sin(\omega_p t)$  — внешняя нормальная нагрузка,  $q_0$  и  $\omega_p$  — ее интенсивность и частота, t — время. Уравнения движения элемента рассматриваемой микрополярной сетчатой цилиндрической панели примут вид (черта над безразмерными переменными опущена):

$$\begin{split} l^{2}(\nu-1)\left[-\frac{\hbar^{2}}{b^{2}}\frac{\partial^{4}u}{\partial y^{4}}+\frac{\hbar^{2}}{b^{2}}\frac{\partial^{4}v}{\partial x\partial y^{3}}-\frac{\hbar^{2}}{c^{2}}\frac{\partial^{4}u}{\partial x^{2}\partial y^{2}}+\frac{\hbar^{2}}{c^{2}}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{3}\partial y}\right]+2(\nu-1)\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}-\\ -2(3+\nu)\frac{\partial^{2}v}{\partial x\partial y}-4(1+\nu)\frac{b^{2}}{c^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}-4k_{y}(1+\nu)\frac{h}{h}\frac{\partial w}{\partial x}+2(\nu-1)\frac{\partial w}{\partial y^{2}}\frac{\partial w}{\partial x}-\\ -2(\nu+3)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}-4(1+\nu)\frac{b^{2}}{c^{2}}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}=\frac{8a(\nu^{2}-1)}{k^{2}}\frac{h^{2}}{c^{2}}\frac{\partial t^{2}}{\partial t^{2}},\\ l^{2}(\nu-1)\left[\frac{\hbar^{2}}{b^{2}}\frac{\partial^{4}u}{\partial x\partial y^{3}}-\frac{\hbar^{2}}{b^{2}}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{2}\partial y^{2}}+\frac{\hbar^{2}}{c^{2}}\frac{\partial^{4}u}{\partial x^{3}}-\frac{\hbar^{2}}{c^{2}}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}}\right]+4k_{y}(1+\nu)\frac{c^{2}}{b^{2}}\frac{\partial w}{\partial y}-\\ -4(1+\nu)\frac{c^{2}}{b^{2}}\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}}-2(3+\nu)\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y}-2(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}-4(1+\nu)\frac{c^{2}}{b^{2}}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}-\\ -2(\nu+3)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}+2(\nu-1)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}=\frac{8a(\nu^{2}-1)}{\delta}\frac{\hbar^{2}}{c^{2}}\frac{\partial^{2}v}{\partial t^{2}},\\ \left[(1+\nu)+6l^{2}(1+\nu)]\frac{c^{2}}{bh}\frac{\partial^{4}w}{\partial y^{4}}+4\left[1+3l^{2}(\nu-1)\right]\frac{c^{2}}{b^{2}}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{2}}+\left[(1+\nu)+6l^{2}(1-\nu)\right]\frac{b^{2}}{c^{2}}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}}+\\ +12k_{y}^{2}(1+\nu)\frac{c^{2}}{b^{2}}\frac{\partial w}{\partial y^{2}}+12k_{y}(1+\nu)\frac{c^{2}}{b^{2}}\frac{\partial w}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}-12(1+\nu)\frac{c^{2}}{b^{2}}\frac{\partial w}{\partial y^{2}}-\\ -18(1+\nu)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{2}\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}-12(1+\nu)\frac{\partial^{2}w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}}+6k_{y}(1+\nu)\frac{h}{h}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{2}+\\ -12\frac{\partial^{2}w}}{\partial y^{2}}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{2}-6(3+\nu)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^{2}w}{\partial x}}-6(3+\nu)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}}+6k_{y}(1+\nu)\frac{h}{h}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{2}+\\ +12(\nu-1)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}-48\frac{\partial w}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x\partial y}}-12(1+\nu)\frac{b^{2}}{c^{2}}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}+\\ +6(\nu-1)\frac{h}{c}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}+12k_{y}(1+\nu)\frac{h}{h}w\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}-12(1+\nu)\frac{b^{2}}{c^{2}}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}+\\ -12\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{2}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}-12(1+\nu)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}-18(1+\nu)\frac{b^{2}}{c^{2}}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{2}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}=\\ =\frac{24a(\nu^{2}-1)}{\delta}\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}+\epsilon\frac{\partial w}{\partial t}-q\right) \end{split}$$

К уравнениям присоединим нулевые начальные условия и граничные условия жесткого закрепления.

В данной работе исследование поведения панели, находящейся под действием статической распределенной нормальной нагрузки будет представлено с помощью метода установления, впервые примененного для оболочек В. И. Феодосьевым. Система уравнений в частных производных сводилась по пространственным координатам методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка точности к задаче Коши, которая решалась методом Ньюмарка.

Параметры эксперимента:

$$c = 1, \quad b = 1, \quad h = 0.02, \quad \epsilon = 10, \quad a = 0.02, \quad \delta = 0.02,$$
  
 $k_u = \{0; 12; 18; 24\}, \quad l = \{0; 0.5\}, \quad q_0 = [0; 250].$ 

На рис. 2–3 приведены диаграммы нагрузка–прогиб в зависимости от значения параметра кривизны панели (рис. 2 — классическая теория, рис. 3 — с учетом микрополярной теории). Можно видеть, что в случае классической теории при  $k_y = 24$  наблюдается «хлопок», меньшие значения параметра кривизны панели дают точку перегиба, то есть жесткой потери устойчивости не происходит. Учет микрополярной теории (l = 0.5) (рис. 3) приводит к увеличению изгибной жесткости панели и к отсутствию «хлопка» на графике нагрузка–прогиб для всех рассмотренных значений параметра кривизны.





Рисунок 2 – Диаграмма нагрузка–прогиб для цилиндрической панели, классическая теория

Рисунок 3 – Диаграмма нагрузка–прогиб для цилиндрической панели, с учетом микрополярной теории l = 0.5

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00351 А).

154

- Sarkisjanr S. O. The general theory of micropolar elastic thin shells // Physical mesomechanics. Fizicheskaya mezomekhanika. 2011. V. 14. № 1. P. 55–66.
- [2] Sargsyan S. H., Zhamakochyan K. A. Applied theory of micropolar elastic thin plates with constrained rotation and the finite element method // Materials Physics and Mechanics. 2018. № 35(1). P. 145–154.
- [3] Altenbach H., Altenbach J., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography // Arch. Appl. Mech. Special Issue. 2009. V. 80. P. 73–92.
- [4] *Пшеничнов Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982. 352 с.

**Krylova E. Y., Papkova I. V., Sinichkina A. O.** The mathematical model of nonlinear dynamics of a flexible dimensional-dependent cylindrical Timoshenko's shell of the network structure. In this paper, a mathematical model of the behavior of a geometrically nonlinear micropolar thin shallow cylindrical mesh panel is constructed. In order to take into account scale effects, the panel material is considered as the Cosserat continuum with constrained particle rotation, and it is assumed that the displacement and rotation fields are not independent. The mesh structure of the cylindrical panel is taken into account in the mathematical model according to the theory of Pshenichnov G. I. The equations of motion of the panel element, the boundary and initial conditions are obtained from the energy principle of Ostrogradsky–Hamilton based on the kinematic hypotheses of Kirchhoff–Love. Geometric nonlinearity is taken into account according to the model of Theodor von Karman. The establishment method is used to study the influence of the micropolar structure and the ends of a rectangular plan and consists of 2 families of mutually perpendicular ribs.

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

## Липатов И.И.<sup>1,2</sup>, Фам В.К.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского, Москва <sup>2</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исследованы нелинейное взаимодействие между гармониками возмущений, распространяющимися вверх по потоку, и эффекты потери энергии гармоник при их распространении вверх по течению. Показано проявление новых гармоник, которые возникают благодаря нелинейному взаимодействию между гармониками.

1. Введение. Развитие возмущений является частью проблемы гидродинамической устойчивости. Анализ распространения возмущений в пограничном слое соответствует исследованию устойчивости к длинноволновым возмущениям и необходим для корректной постановки для системы уравнений нестационарного пограничного слоя и построения вычислительных моделей. В данной статье рассмотрены нелинейное взаимодействие между гармониками возмущений при их распространении в нестационарном двумерном пограничном слое.

1. Постановка задачи. Рассмотрено нестационарное обтекание плоской поверхности (в том числе пластины и клина) гиперзвуковым потоком вязкого газа, расположенной под нулевым углом атаки к набегающему потоку. Предполагается, что число Маха набегающего потока велико и имеет место режим сильного вязко-невязкого взаимодействия

$$M_{\infty} \gg 1, \ M_{\infty} \tau \gg 1$$
 (1)

где  $M_{\infty}$  — число Маха набегающего потока,  $\tau$  — безразмерная толщина ламинарного пограничного слоя.

Декартова система координат связана с пластиной, ось OX направлена вдоль поверхности пластины, ось OY — по нормали к поверхности. Вводятся следующие обозначения для координат, отсчитываемых вдоль поверхности пластины и по нормали к ней, времени, компонентов вектора скорости, плотности, давления, полной энтальпии, коэффициента вязкости: lx, ly,  $lt/u_{\infty}$ ,  $u_{\infty}u$ ,  $u_{\infty}v$ ,  $u_{\infty}w$ ,  $\rho_0\rho$ ,  $\rho_{\infty}u_{\infty}^2p$ ,  $H_{\infty}g$ ,  $\mu_0\mu$  соответственно. Параметр l — некоторая характерная длина обтекаемого тела,  $\tau = O(\rho_0 u_{\infty} l/\mu_0)^{-1/2}$ , где индекс «∞» относится к величинам в набегающем потоке,  $\mu_0$  — величина динамического коэффициента вязкости при температуре торможения. С помощью асимптотических методов, замены Дородницына — Лиза и предельного перехода [1, 2] была получена система уравнений [3]

$$\begin{cases} X\frac{\partial U}{\partial T} + X\left(U\frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y}\right) - \frac{F}{4}\frac{\partial U}{\partial Y} + \beta\frac{\gamma - 1}{4\gamma}Q = \frac{P}{C_0}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ X\frac{\partial G}{\partial T} + X\left(U\frac{\partial G}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial G}{\partial Y}\right) - \frac{F}{4}\frac{\partial G}{\partial Y} = X\frac{\gamma - 1}{\gamma P}Q\frac{\partial P}{\partial T} + \frac{P}{C_0}\frac{\partial^2 G}{\partial Y^2} \end{cases}$$
(2)

$$\Delta = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)C_0}{2\gamma P^2}} \int_0^\infty Q dY, \quad P = \frac{(\gamma + 1)}{2} \left(\frac{3\Delta}{4} + X\frac{\partial\Delta}{\partial X} + X\frac{\partial\Delta}{\partial T}\right)^2$$

с граничными условиями

$$U = F = 0, \quad G = g_w, \quad Y = 0$$
$$U = G = 1, \quad Y = \infty$$
$$P(X = 1, T) = P(T)$$

где введены  $\gamma = 1.4, \ C_0 = P_{X=0}, \ U = \frac{\partial F}{\partial Y}, \ Q = G - U^2, \ \beta = -1 + \frac{2X}{P} \frac{\partial P}{\partial X}.$ Здесь F — функция тока, U — продольная скорость, G — энтальпия,  $P_{X=0}$  —

Здесь F — функция тока, U — продольная скорость, G — энтальпия,  $P_{X=0}$  — давление при X = 0,  $\Delta$  — толщина вытеснения пограничного слоя, P — поле давления течения,  $g_w$  — температурный фактор.

**2. Численный метод.** Для решения задачи использован метод конечных разностей второго порядка точности по X [4], метод шестого порядка точности по Y [5, 6], схема Кранка — Николсона при интегрировании задачи по времени.

Из-за вязко-невязкого взаимодействия распределение давления заранее неизвестно, оно определяется в процессе решения задачи. Предлагается модификационный релаксационный метод для определения распределения давления [4, 7, 8].

**3.** Численные результаты. В данной статье рассмотрены нелинейное взаимодействие гармоник возмущений в гиперзвуковом пограничном слое и эффект потери энергии гармоник при их распространении вверх по потоку. Рассмотрено донное давление, меняющееся по закону

$$P_{X=1} = P_{X=0} + 0.1\sin(1.2\pi T) + 0.07\sin(3.2\pi T) + 0.07\sin(4\pi T)$$

На рисунке 1 представлены нормализованные спектры возмущения давления при X = 0.95, 0.90. При распространении возмущений вверх по течению, кроме ос-



Рисунок 1 – Нормализованные спектры возмущения давления при a - X = 0.95, b - X = 0.90, все индексы соответствуют гармоникам с частотами, показанными в таб. 1.

157

Обозначение	Частота	Линейная			
частоты		комбинация			
гармоник		частот главных			
		гармоник			
$f_1$	0.6	$f_1$	$f_{111}$	1.8	$f_1 + f_1 + f_1$
$f_2$	1.6	$f_2$	$f_{21}$	2.2	$f_2 + f_1$
$f_3$	2.0	$f_3$	$f_{31}$	2.6	$f_3 + f_1$
$f_0$	0	$f_i - f_i$	$f_{112}$	2.8	$f_1 + f_1 + f_2$
$f_{23}$	0.4	$f_3 - f_2$	$f_{123}$	3.0	$f_3 + f_2 - f_1$
$f_{113}$	0.8	$f_3 - 2f_1$	$f_{22}$	3.2	$f_2 + f_2$
$f_{12}$	1	$f_2 - f_1$	$f_{32}$	3.6	$f_3 + f_2$
$f_{11}$	1.2	$f_1 + f_1$	$f_{33}$	4.0	$f_3 + f_3$
$f_{13}$	1.4	$f_3 - f_1$			

Таблица 1 – Гармоники колебания давления и их частоты при распространении возмущений вверх по потоку

новных гармоник, обнаружены еще другие гармоники, частоты которых являются линейными комбинациями частот основных гармоник (см. таб. 1.).

Появление новых гармоник обусловлено взаимодействием главных гармоник между собой за счет нелинейности процесса передачи возмущений. Показано, что гармоники с высокой частотой быстрее теряют энергию, чем гармоники с более низкой частотой при их распространении вверх по течению.

Заключение. В статье показано, что при распространении возмущений вверх по течению, кроме основных гармоник, обнаружены еще другие гармоники, частоты которых являются линейными комбинациями частот основных гармоник. При этом обнаружен эффект потери энергии гармоник при их распространении вверх по потоку.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нейланд В. Я., Боголепов В. В., Дудин Г. Н., Липатов И. И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 456 с.
- [2] Липатов И. И. О распространении возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 457–464.
- [3] Фам В. К. Нестационарные процессы в гиперзвуковом пограничном слое // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 4(44). С. 109–116.
- [4] Башкин В. А., Дудин Г. Н. Пространственные гиперзвуковые течения вязкого газа.
   М.: Физмалит, 2000. 289 с.

- [5] Chu P. C., Fan C. A Three-Point Combined Compact Difference Scheme // Journal of Computational Physics-1998. V. 140. P. 370-399.
- [6] Li Jichun, Chen Yi-Tung Computational Partial Differential Equations Using MATLAB, CRC Press, 2008. 384 p. ISBN-10: 1420089048
- [7] Дудин Г. Н., Ледовский А. В. Течение в окрестности точки излома передней кромки тонкого крыла на режиме сильного взаимодействия // Учен. зап. ЦАГИ. 2011. Т. 42.
   № 2. С. 11–25.
- [8] Дудин Г. Н., Лыжин Д. О. Об одном методе расчета режима сильного вязкого взаимодействия на треугольном крыле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 119–124.

Lipatov I. I., Fam V. K. Nonlinear Effects in the Propagation of Perturbations under Conditions of Strong Hypersonic Interaction. The nonlinear interaction between the harmonics of perturbations propagation upstream and the effect of energy loss of harmonics during their propagation upstream are investigated. The appearance of new harmonics that arise due to the nonlinear interaction between harmonics is shown.

# ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ СО СВЯЗАННЫМИ ПОЛЯМИ

### Марков И.П., Ипатов А.А., Литвинчук С.Ю.

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Представлены результаты гранично-элементного моделирования нестационарного отклика однородного и составного анизотропного упругого призматического тела, подверженного действию внезапно приложенной нагрузки. Численная схема базируется на совместном применении преобразования Лапласа и регуляризованных граничных интегральных уравнений для перемещений. Метод квадратур сверток численного обращения преобразования Лапласа используется для получения решений во временной области. Проведено исследование сеточной сходимости гранично-элементных решений. Выполнен сравнительный анализ с результатами конечно-элементного моделирования.

#### 1. Введение.

Аналитические решения трехмерных динамических задач анизотропной теории упругости со связанными полями строго ограничены малым числом простых геометрических конфигураций и граничных условий. Более сложные задачи, когда, например, рассматриваются области с неоднородным распределением материальных свойств, могут быть решены только с использованием подходящих численных методов. Метод граничных элементов (МГЭ) является высокоточным численным методом. В последние десятилетия применению МГЭ для распространения упругих волн в изотропных упругих телах и средах уделяется значительное внимание. При разработке МГЭ для анизотропных линейно упругих тел возникают сложности связанные с эффективной численной реализацией соответствующих динамических фундаментальных решений. В данной работе рассмотрено применение гранично-элементного подхода для решения трехмерных нестационарных задач теории анизотропной упругости для однородных тел и тел с кусочнонепрерывным распределением материальных свойств. Для задач анизотропной линейной пороупругости используются дренированная и недренированная модели пороупругого материала.

#### 2. Гранично-элементный подход.

Используется гранично-элементная схема в пространстве преобразований Лапласа [1]. Начальные условия принимаются нулевыми. Для решения поставленной задачи анизотропной линейной теории упругости со связанными полями используются регуляризованные граничные интегральные уравнения для перемещений. Анизотропные динамические фундаментальные решения представляются в виду сумм сингулярных (статических) и регулярных частей. Статические части записываются в виде интеграла по единичной окружности, регулярные части представляются в виде интеграла по единичной полусфере. Граничная поверхность

### ГЭ-моделирвоание динамики анизотропных упругих тел

аппроксимируется совокупностью четырехугольных элементов. Геометрия границы на элементе интерполируется квадратичными функциями, перемещения линейными функциями, а поверхностные усилия — постоянными. Для получения разрешающей комплекснозначной системы линейных алгебраических уравнений используется метод коллокаций. Для составных тел процесс гранично-элементной дискретизации проводится для каждой однородной подобласти. Дополнительные уравнения выбираются из условий непрерывности перемещений и равновесия усилий на поверхностях жесткого контакта. Для получения решений во временной области применяется метод квадратур сверток для численного обращения преобразования Лапласа.

#### 3. Численный пример.

Рассматривается трехмерное однородное или составное призматическое тело размерами  $1 \le 1 \le 3 \le 3$  м, как показано на рисунке 1. На одном конце тела задана ударная нагрузка в виде поверхностных усилий  $t_3 = PH(t)$ , где  $P = -1 \cdot 10^6 \, \text{Па}$ , H(t) - функция Хевисайда. На противоположном конце тело жестко закреплено. Остальная поверхность тела свободна от поверхностных усилий.



Рисунок 1 – Призматическое тело под действием ударной нагрузки

Исследование сеточной сходимости проведено для случая с однородным распределением материальных свойств. Рассмотрены четыре различные сетки с 56 (сетка 1), 224 (сетка 2), 504 (сетка 3) и 896 (сетка 4) граничными элементами. Использованные параметры материала соответствуют анизотропным упругим дренированной ( $\mathbf{C}_{\mathrm{I}} = \mathbf{C}_{\mathrm{II}} = \mathbf{C}^{dr}$ ) и недренированной ( $\mathbf{C}_{\mathrm{I}} = \mathbf{C}_{\mathrm{II}} = \mathbf{C}^{undr}$ ) моделям для анизотропного пороупругого материала, приведенного в работе Aoki и др. [2]. Плотности материалов  $\rho_{\mathrm{I}} = \rho_{\mathrm{II}} = \rho = 2400 \,\mathrm{kr/m^3}$ , тензоры модулей упруготи задаются следующим образом:

$$\mathbf{C}^{dr} = \begin{bmatrix} 24.1 & 6.8 & 7.62 & 0 & 0 & 0 \\ 24.1 & 7.62 & 0 & 0 & 0 \\ & 21 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 7.23 & 0 & 0 \\ & & & & & 8.66 \end{bmatrix} \Gamma \Pi \mathbf{a},$$

$$\mathbf{C}^{undr} = \begin{bmatrix} 32.59 & 15.3 & 16.3 & 0 & 0 & 0 \\ & 32.59 & 16.3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 29.9 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 7.23 & 0 & 0 \\ & & & & & 8.66 \end{bmatrix} \Gamma \Pi \mathbf{a}.$$

Полученные на различных сетках гранично-элементные решения для перемещений  $u_3(t)$  в точке (0, 0, 3) м по дренированной модели приведены на рисунке 2, по недренированной модели на рисунке 3. Сравнение с результатами конечноэлементного моделирования показывает хорошее совпадение уже при небольшом числе граничных элементов. Сравнение между собой перемещений  $u_3(t)$  в точке (0, 0, 3) м по дренированной и недренированной моделям приведено на рисунке 4. Как показано в работах Schanz [3] и Cheng [4], пороупругий отклик приближается к упругим решениям по недренированной и дренированной моделям на малом и большом времени, соответственно.



Рисунок 2 – Перемещения  $u_3(t)$  по дренированной модели

Для случая составного тела параметры материала нагруженной половины тела соответствуют рассмотренным выше параметрам дренированной модели анизотропного пороупругого тела [2]:  $\mathbf{C}_{\mathrm{I}} = \mathbf{C}^{dr}$ ,  $\rho_{\mathrm{I}} = \rho$ . Для жестко закрепленной части рассмотрен материал [5] с плотностью  $\rho_{\mathrm{II}} = 2423 \,\mathrm{kr/m^3}$  и следующим тензором модулей упругости

$$\mathbf{C}_{\Pi} = \begin{bmatrix} 65.53 & 9.77 & 12.19 & 0.18 & -0.81 & 2.94 \\ 50.77 & 11.61 & -0.09 & -0.5 & -0.19 \\ & 60.11 & -1.61 & 1.78 & 0.84 \\ & & 23.51 & 1.49 & -1.17 \\ & & & 24.57 & 0.3 \\ & & & & & 20.21 \end{bmatrix} \Gamma \Pi \mathbf{a}.$$

162



Рисунок 3 – Перемещения  $u_3(t)$  по недренированной модели



Рисунок 4 – Сравнение перемещений  $u_3(t)$  по дренированной и недренированной моделям

Для расчетов использовалась сетка с 288 граничными элементами на каждой однородной подобласти. На рисунке 5 приведены полученные решения для перемещений  $u_3(t)$  в точках A(0, 0, 3) м и B(0, 0, 1.5) м. Сравнение с результатами конечно-элементного анализа показывает высокую точность полученных гранично-элементных решений.

Разработанный гранично-элементный подход позволяет получать устойчивые и высокоточные численные решения задач анизотропной линейной теории упругости с однородным и кусочно-непрерывным распределением материальных свойств.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-08-00895 а).



Рисунок 5 – Перемещения  $u_3(t)$  в точках A и B составного тела

#### ЛИТЕРАТУРА

- Igumnov L. A., Markov I. P., Litvinchuk S. Y. Boundary element modelling of dynamic behavior of piecewise homogeneous anisotropic elastic solids // J. Phys. Conf. Ser. 2018. № 991(1). art. no. 012035.
- [2] Aoki T., Tan C. P., Bamford W. E. Effects of deformation and strength anisotropy on borehole failures in saturated shales // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 1993. № 30(7). P. 1031–1034.
- [3] Schanz M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. 170 p.
- [4] Cheng A. H.-D. Poroelasticity. Springer International Publishing, 2016. 877 p.
- [5] Rasolofosaon P. N. J., Zinszner B. E. Comparison between permeability anisotropy and elasticity anisotropy of reservoir rocks // Geophysics 2002. № 67(1). P. 230–240.

Markov I. P., Ipatov A. A., Litvinchuk S. Yu. Boundary element analysis of dynamic responses of anisotropic elastic solids with coupled fields. Results of boundary element modeling of transient response of homogeneous and multi-domain anisotropic elastic prismatic solid subjected to suddenly applied loading are presented. Numerical scheme is based on the regularized boundary integral equations for displacements and application of the Laplace transform. The convolution quadrature method for the numerical inversion of the Laplace transform is employed to obtain time-domain solutions. A study of convergence of boundary element solutions with mesh refinement is carried out. Obtained boundary element solutions are compared with the results of finite element modeling.

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ОТСЛОЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОКРЫТИЯ

### Морозов К. Л.

#### Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены задачи об отслоении покрытия от подложки, использованы различные модели основания. Разработана схема определения критического сжимающего нагружения в зависимости от характеристик основания. Для нахождения критического значения использованы как аналитические построения, основанные на балочной модели, так и численные, основанные на методе Ритца. Построено закритическое поведение покрытия в области отслоения.

#### Постановка задачи

В плоской постановке изучается равновесие и устойчивость упругого покрытия, лежащего на упругом основании. Покрытие предварительно сжато продольной нагрузкой и имеет ослабление связей с основанием в конечной области. Ранее подобные задачи для однородного покрытия были рассмотрены в работах [1–4]. В настоящей работе изучается подобная задача для неоднородного покрытия. Влияние упругого неоднородного основания описывается двумя коэффициентами постели, аналогично модели Пастернака [5]. Покрытие моделируется балочной структурой переменной жёсткости, в общем случае неоднородной, вследствие чего предварительное ослабление происходит в общем случае несимметрично на участке [-b, a].

Безразмерные координаты и параметры вводятся следующим образом: [3, 4]

$$x_1 = a\xi, \ w = \frac{w_0}{a}, \ [-b,a] \to [-\xi_0,1], \ \eta^2 = \frac{B_1 a^4}{EJ}, \ \eta_0^2 = \frac{B_2 a^2}{EJ}, \ k^2 = \frac{\sigma^2 a^2}{EJ}$$

Здесь параметр k характеризует критическую силу, параметры  $\eta, \eta_0$  характеризуют коэффициенты постели

Неквадратичный и соответствующий ему квадратичный функционал потенциальной энергии в безразмерном виде имеет следующую структуру, соответственно [6–8]:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (d_0(\xi) w''^2 (1 + w'^2) + d_1(\xi) (w'^2 + \frac{1}{4} w'^4) + d_2(\xi) w^2) d\xi$$
(1)

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (d_0(\xi) w''^2 + d_1(\xi) w'^2 + d_2(\xi) w^2) d\xi$$
(2)

где  $d_0(\xi) = f(\xi), \ d_1(\xi) = \eta_0^2 g_2(\xi) - k^2 q(xi), \ d_2(\xi) = \eta^2 g_1(\xi)$ , а функция  $f(\xi)$  определяет неоднородность покрытия.

В работе исследуется один из видов неоднородности – кусочно-постоянный, причём точка разрыва находится в области отслоения.  $f(\xi)$  определяется следующим образом – покрытие состоит из двух различных материалов с разными изгибными жёсткостями EJ, т.е. функция  $f(\xi)$ , определяющая физико-геометрические характеристики покрытия, задаётся в виде  $f_1 = 1$ , если  $\xi \ge 0$ ,  $f_1 = \chi$ , если  $\xi < 0$ , где  $\chi = \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1}$ .

Также будем считать, что на участке  $[-\xi_0, 1]$  происходит ослабление коэффициентов постели, причём величина ослабления определяется параметром  $\varepsilon : 0 \leq \varepsilon < 1$  (при  $\varepsilon = 0 -$ 

наблюдается отрыв покрытия от основания), в остальной области коэффициенты постели постоянны. Предварительная продольная нагрузка также всюду постоянна.

#### Задача о потере устойчивости

Для поиска критического значения k будем использовать метод Ритца и отыскивать решение в виде линейной комбинации координатных функций  $\phi_k$ , которые выберем убывающими на бесконечности:

$$W = \sum_{k=1}^{N} C_k \phi_k \tag{3}$$

где N— некоторое число, определяющее количество координатных функций,  $\phi_k=\xi^{k-1}e^{-\alpha\xi^2},\,\alpha>0$ — пока произвольный параметр.

Минимизируем (2), подставив (3) в (2), и продифференцируем по  $C_k$ , получим систему линейных уравнений. Из равенства определителя матрицы нулю получим уравнение относительно k, наименьшее решение которого даст искомое критическое значение. Увеличивая количество координатных функций, будем уточнять значение критической нагрузки. Отметим, что метод Ритца даёт оценку собственных значений сверху.

Приведём некоторые результаты вычислений для разных  $\eta$ ,  $\eta_0$ , которые отражены в таблицах 1-2 для  $\alpha = \xi_0 = \chi = 1, \epsilon = 0$ . Здесь  $k_1, k_2$  – первое и второе критические значения параметра силы для случая  $\eta = 10, \eta_0 = 0.1$ , а  $k_1, k_2$  – для случая  $\eta = 0.1, \eta_0 = 10$ .

Таблица 1 – Значение параметра критической силы для  $\eta = 10, \eta_0 = 0.1$ 

N	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_1$	2.2237	2.2237	2.1491	2.1491	2.1443	2.1443	2.1443	2.1443
$k_2$	3.7038	3.0247	3.0247	3.0066	3.0066	3.0016	3.0016	3.0016

Таблица 2 – Значение параметра критической силы для  $\eta = 0.1, \eta_0 = 10$ 

$\overline{N}$	3	6	9	12	15	18	21	24
$k_1$	3.5104	3.0219	2.9568	2.9389	2.8925	2.8865	2.8853	2.8819
$k_2$	5.5809	4.2192	4.1435	3.9539	3.9424	3.8668	3.8037	3.7635

Как видно из таблиц 1–2, для  $\eta = 10, \eta_0 = 0.1$  можно ограничиться значением N = 7, при котором обеспечивается погрешность определения первого критического значения не более, чем 1%.

Что касается случая  $\eta = 0.1, \eta_0 = 10$ , то для значения N = 15 погрешность определения первого критического значения не более, чем 5%.

Для дальнейшего исследования значения критической силы выберем  $\eta = 10, \eta_0 = 0.1$ . Далее исследуем влияние  $\chi, \xi_0, \varepsilon$  для случая, когда параметры  $\eta = 10$  и  $\eta_0 = 0.1$ . Расчёты будем проводить для значений  $\alpha = 1, N = 5, \varepsilon = 0$ 

Построим зависимость значения критической силы от  $\chi$ ,  $\xi_0$ . Рассмотрим несколько возможных случаев, первый из них — зафиксируем  $\chi$  и будем изменять  $\xi_0$  с некоторым шагом от 1.5 до 2.0. Результаты представлены на рис. 1 для  $\chi = 0.5$ .

Второй случай — зафиксировав  $\xi_0$ , будем изменять  $\chi$  с некоторым шагом от 1.5 до 2.0. Результаты представлены на рис. 2 для  $\xi_0 = 0.5$ 



Рисунок 1 – Зависимость критической силы от  $\xi_0$ 



Рисунок 2 – Зависимость критической силы от  $\chi$ 

Из рис. 1–2 можно отметить, что при увеличении  $\chi$  увеличивается величина k, а при увеличении  $\xi_0 - k$  уменьшается. Это соотносится с предположением о том, что чем выше значение  $\chi$ , тем меньше должно быть значение  $\xi_0$ .

#### Закритическое поведение

Для изучения вопроса о закритическом поведении покрытия необходимо исходить из нелинейной модели покрытия, для чего воспользуемся неквадратичным функционалом (1).

Для исследования минимального значения функционала (1) будем использовать метод Ритца. На основе соображений из предыдущего пункта для (2) представим W в виде линейной комбинации (3).

Введем  $k_1 = \delta k$  [9], где k определяется из функционала (2) методом Ритца.

Находя минимальное значение функционала для различного числа координатных функций, получим нелинейную систему N уравнений относительно неизвестных параметров, которая решается численно методом Ньютона. В качестве начального приближения для системы N уравнений будем выбирать решение системы N-1 уравнений, дополнив его нулевым значением.

Приведем некоторые результаты расчетов. Рассмотрим случай, когда имеется симметричное отслоение, т.е.  $\chi = \xi_0 = 1$  для следующего набора значений  $\eta = 10$ ,  $\eta_0 = \frac{\eta}{100}$ ,  $\delta = 1.01$  В таблице 3 представлено изменение значений постоянных  $C_k$  и функционала  $\Lambda$  с увеличением числа координатных функций.

Как видно из таблицы 3, уже при  $N \ge 5$  вклад новых постоянных мал, соответствующие формы отслоения представлены на рис. 3.

N	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$\Lambda$
3	2.224	0.475	0	-	-	-	-	0.337
4	2.224	0.472	-0.128	0	-	-	-	0.114
5	2.149	0.443	0.093	-0.141	0	-	-	0.1
6	2.149	0.443	0.194	-0.287	0.041	0	-	0.082
7	2.144	0.441	0.336	-0.389	0.082	-0.0048	0	0.080

Таблица 3 – Изменение <br/>  $C_k,\,\Lambda$ с ростом N



Рисунок 3 – Изменение формы прогиба с ростом N

#### Заключение

Был произведён анализ отслоения неоднородного покрытия на примере простой неоднородности в виде кусочно-однородного покрытия. Были определены первые два критические значения на основе метода Ритца. Исследовано закритическое поведение покрытия для случая симметричного отслоения.

Автор выражает благодарность за внимание к работе научному руководителю проф. Ватульяну А. О.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект №18-11-00069.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кургузов В. Д.* Моделирование отслоения тонких плёнок при сжатии // Вычислительная механика сплошных сред 2014. № 1. С. 91–99.
- [2] Ustinov K. B. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // European Journal of Mechanics / A Solids 2019. № 75. C. 56–69.
- [3] Ватульян А. О., Морозов К. Л.. Об отслоении покрытия, лежащего на упругом основании. // ПМТФ 2020. № 1. С. 133–143.
- [4] Ватульян А. О., Морозов К. Л.. Об исследовании отслоения от упругого основания на основе модели с двумя коэффициентами постели // Известия РАН МТТ 2020. № 2. С. 64–76.
- [5] Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госиздательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. 56 с.
- [6] Ватульян А. О., Плотников Д. К., Коссович Е. Ю. О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур // Известия РАН МТТ 2017. № 4. С. 94–100.
- [7] Астапов Н. С., Корнев В. М., Демешкин А. Г. Выпучивание стержня, лежащего на упругом основании // ПМТФ. 1994. № 5. С. 106–112.
- [8] *Астапов Н. С., Корнев В. М.* ОЗакритическое поведение идеального стержня на упругом основании. // ПМТФ 1994. № 2. С. 130–142.
- [9] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

**Morozov K. L.** On modeling the detachment of a nonuniform coating. The problems of peeling the coating from the substrate are considered, various base models are used. A scheme has been developed for determining critical compressive loading depending on the characteristics of the base. To determine critical values, analytical constructions are used. Built supercritical behavior of the coating.

# О ВЛИЯНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ НА ТЕРМОАКУСТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ В ТОКОПРОВОДЯЩИХ МАТЕРИАЛАХ

## Морозов Н. Ф.<sup>1,2</sup>,Вавилов Д. С.<sup>2</sup>, Индейцев Д. А.<sup>2</sup>, Муратиков К. Л.<sup>3</sup>, Семенов Б. Н.<sup>1,2</sup>

Санкт-Петербургский государственный университет,
 <sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург,
 <sup>3</sup>Физико-технический интитут им. А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург

Для описания и объяснения динамических термоупругих эффектов в проводниках при импульсном лазерном воздействии предложена двухкомпонентная модель, в соответствии с которой сплошная среда состоит из двух «взаимопроникающих континуумов», в данном случае, кристаллической решетки и электронного газа.

#### 1. Введение

В ранних работах [1], касающихся изучения генерации упругих деформаций и волн в твердых телах по термоупругому механизму, рассмотрена связанная задача термоупругости и в линейном приближении получены решения, описывающие временное и пространственное развитие деформаций в твердотельных объектах при импульсном лазерном воздействии. Разработанный в них подход основывается на макроскопическом рассмотрении тепловых, термоупругих и упругих процессов в материалах. Считается, что он одинаково применим как к диэлектрическим, так и к проводящим материалам. Однако экспериментальные исследования [2] показывают, что поведение акустического отклика от реальных металлов на импульсное лазерное воздействие наносекундной длительности носит более сложный характер, чем теоретически предсказываемый в [1].

Целью данной работы является выяснение возможной причины наблюдаемого расхождения экспериментальных и теоретических результатов для металлов. В качестве фактора, влияющего на акустический отклик металлических образцов при импульсном лазерном воздействии, в данной работе предлагается учесть присутствие в них дефектов различной природы. Известно, что в дефектных проводящих материалах наряду со свободными электронами могут присутствовать и локализованные электроны вблизи дефектов (андерсоновская локализация) [3].

В реальных металлах переход локализованных электронов из связанного состояния в свободное может происходить по нескольким механизмам: например, активационным образом при повышении температуры дефекта в результате поглощения энергии лазерного импульса, в результате разрыва связей между атомами решетки вблизи концентраторов напряжений, концов трещин, границ доменов и т. п. Появление дополнительных свободных электронов приводит к повышению давления в электронной подсистеме. Поскольку структура металлов состоит из решеточной и электронной подсистем, предлагается учитывать изменение давления в электронной подсистеме при расчете отклика решетки в процессах генерации и распространения акустических сигналов. Для описания и объяснения новых динамических термоупругих эффектов в проводниках предлагается двухкомпонентная модель, в соответствии с которой сплошная среда состоит из двух «взаимопроникающих континуумов», в данном случае решетка и электронный газ, основные уравнения которой имеют вид [4]:

$$-\nabla P_e = \rho_e \dot{\mathbf{v}}_s + \mathbf{Q}_{si}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho_i \dot{\mathbf{v}}_i + \mathbf{Q}_{is} \tag{1}$$

Здесь  $P_e$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  — давление электронного газа и тензор напряжения Коши решетки,  $\mathbf{Q}_{si} = -\mathbf{Q}_{is}$  — внутренние силы воздействия электронного газа и решетки,  $\rho_e$ ,  $\rho_i$ ,  $\mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{v}_i$  — соответственно плотность и скорость электронного газа и материала решетки.

В соответствии с традиционной термомеханикой связь напряжений и деформаций решетки определяется законом Дюгамеля — Неймана, обобщающим закон Гука на случай термоупругости.

Классическая термоупругость учитывает отличие динамического отклика разных материалов лишь через значения физических параметров. Однако в ряде экспериментальных работах (см., например, [2]) отмечается, что акустический отклик реальных металлов на импульсное лазерное воздействие наносекундной длительности имеет более сложный характер, чем теоретически предсказываемый в [1], что связано с динамикой внутренних степеней свободы (электронного газа), неучёт которых может привести к существенным отличиям в поведении материала от теоретических предсказаний.

Для более детального исследования этого вопроса несколько преобразуем систему уравнений (1), сложив первое и второе уравнения. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_e \mathbf{v}_s + \rho_i \mathbf{v}_i) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m - \frac{m_e}{e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \qquad (2)$$

где  $\sigma_m = \sigma - P_e \mathbf{E}$  — общий тензор напряжений складывается из тензора напряжений решётки  $\sigma$ , определяемого законом Дюгамеля — Неймана, и давления электронного газа  $P_e$ ,  $\mathbf{j} = n e \mathbf{v}_r$ , e и  $m_e$  — заряд и масса электрона,  $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$  скорость движения электронов относительно решетки, n — концентрация электронов, способных участвовать в движении относительно решетки.

Ограничимся рассмотрением ситуации лазерного воздействия на металл, приводящего к относительно небольшому повышению температуры, при котором полагаем  $\vartheta_e = \vartheta_i = \vartheta$  и выполняется равенство деформаций решётки и электронного газа. Учитывая различия плотностей решетки и электронов, в левой части уравнения движения (2) можно пренебречь слагаемым с электронной плотностью и представить его в виде

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3}$$

В соответствии с уравнением (3) для определения деформаций решетки необходимо знать распределение температуры и давления электронного газа в металле. В приближении свободных электронов для последнего справедливо следующее представление [4]

$$P_e = \frac{2}{5}n_e\varepsilon_F + \frac{\pi^2}{6}n_e\varepsilon_F \left(\frac{k\vartheta_e}{\varepsilon_F}\right)^2,\tag{4}$$

где  $n_e$  — полная концентрация электронов,  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми, k — постоянная Больцмана,  $\vartheta_e$  — температура электронного газа.

В рамках линейной модели изменение давления может быть представлено в виде

$$\widetilde{P}_e = a\widetilde{n}_e + b\widetilde{\vartheta}_e,\tag{5}$$

где  $\tilde{\vartheta}_e = \vartheta_e - \vartheta_0$  и  $\tilde{n}_e$  — отклонения соответствующих величин от состояния равновесия,

$$a = \frac{2}{5} \varepsilon_F \left( 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{k\vartheta_0}{\varepsilon_F} \right)^2 \right), \qquad b = \frac{\pi^2}{3} \frac{n_0 \varepsilon_F}{\vartheta_0} \left( \frac{k\vartheta_0}{\varepsilon_F} \right).$$

Тогда общее реологическое уравнение для среды с учётом равенства температур электронного газа и решётки запишется в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \,\boldsymbol{\varepsilon} + \left( (\lambda + an_0) I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_\vartheta + b) \widetilde{\vartheta}_i \right) \mathbf{E},\tag{6}$$

где  $\varepsilon$  — тензор деформации,  $I_1(\varepsilon)$  — его первый инвариант ,  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $\alpha_{\vartheta}$  — коэффициент температурного линейного расширения,  $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_i - \vartheta_0$  — изменение температуры кристаллической решётки относительно исходного равновесного состояния, **E** — единичный тензор.

В идеальном кристалле закон Дюгамеля — Неймана сохраняет свою форму с незначительными поправками на упругий модуль и коэффициент теплового линейного расширения. В неидеальном кристалле наличие дефектов различной природы приводит к тому, что электроны могут находиться не только в свободном, но и связанном (локализованном) состоянии [5]. Переход из одного состояние в другое, осуществляемый в результате действия температурных и деформационных полей может стать причиной изменения давления в электронном газе.

Система уравнений, описывающая баланс числа свободных и локализованных электронов, имеет вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = -\alpha (I_1(\varepsilon), \vartheta) n_e + \beta (I_1(\varepsilon), \vartheta) n_{es} 
\frac{\partial n_{es}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{es} \mathbf{v}_i) = \alpha (I_1(\varepsilon), \vartheta) n_e - \beta (I_1(\varepsilon), \vartheta) n_{es}$$
(7)

Коэффициенты  $\alpha(I_1(\varepsilon), \vartheta)$  и  $\beta(I_1(\varepsilon), \vartheta)$  в (7) характеризуют взаимные переходы из одного состояния в другое.

Систему (7) можно представить в виде одного уравнения относительно  $n_e$ 

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) + (\alpha(I_1(\varepsilon), \vartheta) + \beta(I_1(\varepsilon), \vartheta))n_e = \beta(I_1(\varepsilon), \vartheta)N \tag{8}$$

где  $N = n_e + n_{es}$  — общая концентрация электронов, в линейном приближении удовлетворяющая уравнению

$$N = -N_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_e \tag{9}$$

N<sub>0</sub> — концентрация электронов в равновесном состоянии.

172

Наличие зон с локализованными электронами оказывает значительное влияние на форму акустического сигнала.

Покажем это на примере одномерной динамической задачи термоупругости о нагреве упругого полупространства лазерным импульсом длительностью  $t_{imp}$  и амплитудой  $J_0$ .

Поток тепла на границе задаётся в виде

$$\chi \frac{\partial \vartheta}{\partial x}|_{x=0} = J_0 \left( H(t) - H(t - t_{imp}) \right), \tag{10}$$

где  $\chi$  — коэффициент теплопроводности, H(t) — функция Хевисайда.

С учётом сделанных предположений динамическое уравнение двухкомпонентной системы решётка - электронный газ при решении задачи о нагреве границы упругого полупространства имеет такой же вид, что и в классической проблеме термоупругости [1]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha_t \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{11}$$

и единственное отличие заключается в граничном условии на свободной поверхности

$$\sigma|_{x=0} = P_e,\tag{12}$$

которое в силу соотношений (4) и (6) записывается в виде

$$\varepsilon|_{x=0} = \alpha_t \vartheta + \frac{2\widetilde{n}e\varepsilon_F}{5E},\tag{13}$$

где  $\tilde{n}_e$  — изменение числа свободных электронов,  $c_0$  — скорость звука,  $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$  — модуль Юнга,  $\alpha_t = \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_{\vartheta}$ . Полагаем, что  $\alpha$  в уравнениях (8) является постоянной величиной, а  $\beta = \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + o(\varepsilon)$  представляет собой монотонно возрастающую функцию от деформации, что обусловлено предположением, что растягивающие деформации, смещая энергетические уровни локализованных электронов, способствуют процессу их освобождения.

В исходном равновесном состоянии при температуре  $\vartheta_0$  до момента приложения внешнего воздействия концентрации свободных и локализованных электронов соответственно равны

$$n_{e0} = \frac{\beta(\varepsilon_0)N_0}{\alpha + \beta(\varepsilon_0)}, \qquad n_{es0} = \frac{\alpha N_0}{\alpha + \beta(\varepsilon_0)}$$
(14)

 $\varepsilon_0$  — предварительная деформация образца, вызванная искажением периодической структуры кристаллической решётки у поверхности. Решение возмущённого относительно стационарного режима уравнения (8) в линейном приближении и с учетом неравенства  $\frac{n_{e0}\varepsilon_F}{E} \ll 1$  имеет вид

$$\overline{n}_e(\overline{t}) = B \int_0^{\overline{t}} \overline{\vartheta}(s) e^{-(1-\gamma)(\overline{t}-s)} ds$$
(15)

Морозов Н. Ф., Вавилов Д. С., Индейцев Д. А. и др.

$$\tau_s = \frac{1}{\alpha + \beta_0}, \ \bar{t} = \frac{t}{\tau_s}, \ \bar{n}_e = \frac{\tilde{n}_e}{n_{es0}}, \quad \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \ B = \tau \beta_1 \alpha_t \vartheta_0, \quad \gamma = \frac{2\beta_1 n_{es0} - \beta_0 N_0) \tau_s \varepsilon_F}{5E}$$

Представление для возмущения плотности числа электронов (15) определяет дополнительное давление электронного газа на решетку. В этом случае длинноволновая часть акустического импульса имеет вид

$$\varepsilon = B \int_0^{t-x/c_0} \vartheta(\xi) e^{-\frac{t-x/c_0-\xi}{\tau_s}} d\xi , \qquad (16)$$

что соответствует экспериментальным результатам по определению термоакустического импульса в образцах из проводящих материалов [2]. Так как в параметры и входит значение функции и её производной в точке, то полученный результат означает, что как амплитуда так и длительность акустического сигнала зависят от предварительной деформации. Иными словами проявляется эффект памяти динамический отклик материала «помнит» исходную конфигурацию [6].

Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ № 51092415.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Даниловская В. И. Об одной динамической задаче термоупругости // Прикл. мат. и мех. 1952. Т. 16. № 3. С. 342–344.
- [2] Вовненко Н. В., Зимин Б. А., Судъенков Ю. В. Экспериментальные исследования термоупругих напряжений в тепло-и нетеплопроводящих твердых телах при субмикросекундных длительностях лазерного нагрева // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 6. С. 56–62.
- [3] Эфрос А. Л. Локализация электронов в неупорядоченных системах (переход Андерсона) // Успехи физических наук. 1978. Т. 126. № 9. С. 41–65.
- [4] Морозов Н. Ф. и др. О новой модели влияния электронного газа на термоакустику проводников при лазерном воздействии // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 6. С. 17–22.
- [5] Lebanon E., Müller M. Memory effect in electron glasses: Theoretical analysis via a percolation approach // Physical Review B. 2005. V. 72. № 17. 174202.
- [6] Муратиков К. Л., Глазов А. Л. Теоретическое и экспериментальное исследование фотоакустического и электронно-акустического эффектов в твердых телах с внутренними напряжениями // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 8. С. 69–76.

Morozov N. F., Vavilov D. S., Indeytsev D. A., Muratikov K. L., Semenov B. N. About the influence of a preliminary stressed condition on the thermal-acoustic signal in conducting materials. To describe and explain the dynamic thermoelastic effects in conductors under pulsed laser irradiation, a two-component model is proposed, according to which a continuous medium consists of two «interpenetrating continua», in this case, a crystal lattice and an electron gas.

174

### ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Морозов Н.  $\Phi$ .<sup>1</sup>, Товстик П. Е.<sup>1</sup>, Товстик Т. П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет <sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Рассматриваются малые свободные изгибные колебания многослойной пластины с чередующимися мягкими и жесткими слоями. Обсуждаются приближенные способы определения податливости на поперечный сдвиг, необходимой при замене многослойной пластины эквивалентной однослойной пластиной Тимошенко–Рейсснера. Проводится сравнение с точным решением трехмерной задачи. Исследуется зависимость частоты колебаний от отношения модулей Юнга слоев и от расположения слоев.

1. Введение. Классическая модель Кирхгофа—Лява (КЛ), основанная на гипотезе прямой недеформируемой нормали, является основной двухмерной моделью теории тонких пластин. Область применимости этой модели ограничена однослойными пластинами из однородного изотропного материала. Для анизотропных пластин с малой жесткостью на поперечный сдвиг, для многослойных пластин с чередующимися мягкими и жесткими слоями модель КЛ приводит к большим погрешностям и возникает необходимость в использовании модели Тимошенко– Рейсснера (TP), учитывающей поперечный сдвиг. Для многослойных пластин вводится в рассмотрение [1–7] эквивалентная однослойная пластина TP из однородного материала, моделирующая многослойную пластину при исследовании ее прогибов, колебаний и устойчивости. Если эквивалентные изгибная жесткость и массовая плотность могут быть найдены по тем же формулам, что и в модели КЛ, то определение жесткости на поперечный сдвиг представляет определенные трудности и подробно обсуждается в докладе.

**2.** Свободные колебания многослойной пластины. Рассмотрим свободные изгибные колебания пластины с прогибом  $w(x, y, t) = w_0 \sin px \sin qy \sin \omega t$ . Такую форму могут иметь колебания бесконечной пластины, а также колебания прямоугольной пластины с шарнирно опертыми сторонами длиной  $L_x, L_y$  (тогда  $p = p_m = m\pi/L_x, q = q_n = n\pi/L_y, m, n = 1, 2, ...$ ).

По модели TP с учетом поперечного сдвига для трансверсально изотропной однородной пластины частота колебаний  $\omega$  определяется из соотношений

$$\lambda = \frac{\rho h^2 \omega^2}{E_0 \mu^2} = \frac{D\mu^2}{1+g}, \qquad E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \mu = rh, \quad r^2 = p^2 + q^2.$$
(1)

Здесь  $\rho$  — плотность материала, h —толщина пластины, E — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\mu$  — малый параметр, равный в силу (1) отношению толщины к характерной длине волны, D = 1/12 — безразмерный параметр изгибной жесткости,  $g = E_0 \mu^2 / (10G_{13})$  — параметр влияния поперечного сдвига,  $G_{13}$  — модуль упругости поперечного сдвига. При  $E/G_{13} \sim 1$  слагаемым g в (1) можно пренебречь, а при  $G_{13} \ll E$  поправка на сдвиг становится существенной. Для многослойной пластины модули упругости и плотность становятся кусочно постоянными функциями поперечной координаты  $z, 0 \leq z \leq h$ . В [3–5] путем асимптотического разложения решения трехмерных уравнений получено выражение для параметра частоты  $\lambda$  в виде, аналогичном (1):

$$\lambda = \frac{\rho_* h^2 \omega^2}{E_* \mu^2} = \frac{D_* \mu^2}{1 + g_* \mu^2 + O(\mu^4)}, \quad g_* = A_g + A_\nu + J + J_\nu, \quad a = \frac{1}{E_* h} \int_0^h E_0(z) z dz,$$

$$\{E_*, \rho_*\} = \frac{1}{h} \int_0^h \{E_0(z), \rho(z)\} dz, \quad D_* = \frac{1}{E_* h^3} \int_0^h E_0(z) (z - a)^2 dz,$$

$$A_g = \frac{1}{E_* D_* h^5} \int_0^h \left(\int_0^z E_0(z_1) (z_1 - a) dz_1\right)^2 \frac{dz}{G_{13}(z)}, \quad J = \frac{1}{\rho_* h^3} \int_0^h \rho(z) (z - a)^2 dz.$$
(2)

Здесь  $E_*, \rho_*$  — средние по толщине значения жесткости на растяжение и плотности,  $D_*$  — параметр жесткости на изгиб, a — координата нейтрального слоя. Члены второго порядка малости  $g_*\mu^2$  учитывают податливость на поперечный сдвиг  $(A_g)$ , пуассоновское растяжение нормального волокна  $(A_\nu)$ , инерцию его вращательного движения (J) и инерцию пуассоновского растяжения  $(J_\nu)$ . Если модули  $G_{13}$ некоторых слоев пластины уменьшаются, то коэффициент  $A_g$  растет в то время, как остальные коэффициенты второго порядка  $A_\nu, J, J_\nu$  остаются неизменными и существенно меньшими  $A_g$ .

Рассмотрим, например, трехслойную пластину с толщинами слоев  $h_1 = 0.3$ ,  $h_2 = 0.6$ ,  $h_3 = 0.1$ . Модули Юнга жестких и мягкого слоев, соответственно, равны  $E_1 = E_3 = 1$ ,  $E_2 = 1/\eta$ , Коэффициенты Пуассона  $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.35$ . Для ряда значений  $\eta$  коэффициенты второго порядка малости приведены в Таблице 1.

$\eta$	$A_g$	$A_{\nu}$	J	$J_{\nu}$	a	$D_*$
1	0.299	-0.0928	0.1150	0.0308	0.502	0.0824
10	1.461	-0.0875	0.1114	0.0081	0.384	0.1202
100	12.921	-0.0844	0.1149	0.0026	0.354	0.1253
1000	127.515	-0.0840	0.1154	0.0019	0.350	0.1259

Таблица 1. Члены второго порядка малости

Расчеты [2-5] показали, что при  $\eta \leq 1000, \mu = 0.1$  погрешность формулы (2) при  $g_* = A_g$  имеет порядок 1%. Ниже погрешность замены  $g_* = A_g$  обсуждается более подробно.

Точное значение параметра частоты  $\lambda$  может быть найдено из решения краевой задачи [3,4], асимптотическое интегрирование которой при  $\mu \to 0$  приводит к решению (2). Нас интересует значение  $g^e$  сдвигового параметра g при условии, что остальные эффекты второго порядка малости не учитываются. Его вычисление сводится к краевой задаче

$$\frac{du}{dz} = w + \frac{\mu^2 \sigma}{G_{13}}, \quad \frac{d\sigma}{dz} = E_0(z)u, \quad \sigma(0) = \sigma(h) = 0.$$
 (3)

После ее решения получаем

$$\lambda = -\int_0^h \sigma(z)dz, \qquad g^e = \frac{D_*}{\lambda} - 1. \tag{4}$$

**3. Другие способы вычисления сдвигового параметра** *g***.** В классической работе [1] для вычисления *g* была предложена формула

$$g = \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n}{G_n}.$$
(5)

где  $G_n$  — модули сдвига слоев, N — их число,  $\gamma_n$  — не зависящие от  $G_n$  коффициенты, формулы для которых не приводятся. Заметим, что формула (2) для  $A_g$  после вычисления интегралов приводится к виду (5).

В монографии [6] Григолюком Э.И. и Куликовым Г.М. был предложен алгоритм (ГК) учета эффекта поперечного сдвига для многослойных пластин и оболочек. К этому алгоритму целесообразно вернуться, ибо в недавней работе [7], а также в ряде других работ он был использован для решения частных задач. Этот алгоритм основан на гипотезе о распределении деформаций поперечного сдвига по толщине пластины. Согласно [6] формула для g может быть записана в виде:

$$g = \left( \left( \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{G_n} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{N} \beta_n G_n \right)^{-1}, \tag{6}$$

где  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  — не зависящие от  $G_n$  коэффициенты. Явный вид формулы для gприведен в работах [6,7]. Расчеты показали, что алгоритм ГК можно использовать лишь для пластин с небольшим отношением  $\eta$  модулей Юнга слоев (о чем написано и в [6]). С ростом  $\eta$  погрешность  $\Delta(\eta)$  быстро растет. Например, для пластины, рассмотренной в Таблице 1, погрешность  $\Delta(1) = 1.2\%$ ,  $\Delta(10) = 42\%$ , а при  $\eta = 100$  найденная по формуле (6) величина g в 10 раз превосходит точное значение. По-видимому, гипотезы, положенные в основу модели ГК и нарушающие непрерывность напряжений сдвига на границе слоев, нуждаются в корректировке.

4. Численные результаты. Трехслойная симметричная по толщине пластина. Сдвиговой параметр g и связанная с ним частота колебаний  $\omega$  зависят от многих параметров. Ниже рассмотрен ряд частных случаев.

Рассмотрим пластину с параметрами  $h_1 = h_3 = 0.3, h_2 = 0.4, E_1 = E_3 = 1, E_2 = 1/\eta, \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3, \rho_1 = \rho_3 = 1, \rho_2 = 1/\eta$ . Осталось два свободных параметра: параметр толщины  $\mu$  и отношение модулей Юнга  $\eta$ . Как следует из формул (2) и (3) учет поперечного сдвига связан с отношением  $\mu^2/G_{13}$ . Поэтому введем совмещенный параметр  $p = \mu^2 \eta$  и проведем расчеты при фиксированном значении параметра  $\mu = 0.1$ .

Таблица 2. Параметры сдвига и частоты в зависимости от p при  $\mu = 0.1$ .

1	2	3	4	5	6	7	8
p	$\eta$	$g^a$	$g^e$	$\lambda^e$	$\lambda^{ap}$	$\lambda^{TR}$	$\lambda^{KL}$
0.01	1	0.00286	0.00286	0.0913	0.0913	0.0913	0.0916
0.1	10	0.0174	0.0174	0.1321	0.1325	0.1325	0.1348
1	100	0.163	0.161	0.1222	0.1223	0.1224	0.1420
10	1000	1.62	1.47	0.0578	0.0578	0.0545	0.1432
100	10000	16.2	8.1	0.0157	0.0157	0.0083	0.1432

В Таблице 2 для ряда значений p приведены: приближенное значение параметры сдвига  $g^a = \mu^2 A_g$ , найденное по асимптотической формуле (2), и точное значение  $g^e$ , найденное по формуле (4); точное значение  $\lambda^e$  параметра частоты  $\lambda$ , полученное из трехмарной задачи [3]; приближенное значение  $\lambda^{ap}$ , найденное по формуле (4) после решения задачи (3), не учитывающей инерцию вращательного движения нормальных волокон и их растяжение; значение  $\lambda^{TR}$ , найденное по модели TP, в которой принято  $g = g^a$ ; наконец, значение  $\lambda^{KL}$ , найденное по модели КЛ, не учитывающей поперечный сдвиг.

Сравнение столбцов 3–4 и 5–8 позволяет судить об областях применимости приближенных моделей. Модель КЛ применима лишь при  $\eta \leq 10$  (или при  $p \leq 0.1$ ). Асимптотический подход второго порядка точности, приведший к значениям  $g^a$  и  $\lambda^{TR}$  безусловно применим при  $\eta \leq 100$  и дает заметную погрешность при  $\eta \leq 1000$ . При этом параметр  $g^a$  превышает точное значение  $g^e$ . Использование значения  $g^e$ дает достаточно точные результаты во всем рассмотренном диапазоне  $\eta \leq 1000$ , о чем говорит сравнение столбцов 5 и 6.

Были проведены расчеты также при  $\mu = 0.316$  и при  $\mu = 0.0316$ , однако численные результаты не приводятся, ибо они отличаются от приведенных в Таблице 2 менее, чем на 1% (за исключением параметра  $\eta$ , который в 10 раз меньше или или больше, соответственно).

5. Несимметричная по толщине трехслойная пластина. Рассмотрим трехслойную пластину с постоянной толщиной мягкого слоя  $h_2 = 0.4$  и с переменными толщинами жестких слоев  $0 < h_1 \leq 0.3$ ,  $h_3 = 0.6 - h_1$ . Остальные параметры те же, что и п.4.

$h_1$	$\eta = 1$	10	100	1000	10000
0.3	0.0913	0.1321	0.1222	0.0578	0.0157
0.2	0.0913	0.1231	0.1141	0.0583	0.0183
0.1	0.0913	0.0953	0.0876	0.0575	0.0263
0.05	0.0913	0.0740	0.0652	0.0524	0.0320

Таблица 3. Параметр частоты  $\lambda^e$  в зависимости от параметров  $\eta$  и  $h_1$  при  $\mu = 0.1$ .

Из результатов, содержащихся в Таблице 3 следует, что при  $\eta \leq 100$  частота убывает вместе с ростом асимметрии пластины (с уменьшением толщины  $h_1$ . При весьма большом отношении  $\eta$  модулей Юнга слоев с ростом асимметрии частота растет. При фиксированном соотношении слоев с ростом  $\eta$  частота в основном убывает.

6. Многослойная пластина. Рассмотрим многослойную пластину с нечетным числом n чередующихся жестких и мягких слоев одинаковых толщин  $h_1$  и  $h_2$  с параметрами  $\mu = 0.1$ ,  $\eta = 100$ . Обозначим через  $\xi$  отношение объемов, занятых мягкими и жесткими слоями. В Таблице 4 представлены значения параметра частоты  $\lambda^e$  в зависимости от параметров n и  $\xi$ . Из приведенных в ней результатов следует, что частота убывает с ростом числа слоев, приближаясь к пределу, соответствующему трансверсально изотропной однородной пластине. С ростом доли  $\xi$  мягкого материала частота в основном возрастает (при весьма большом числе слоев эта тенденция нарушается).

n	$\xi = 0.1$	0.3	0.5	0.7	0.9
3	0.0962	0.1115	0.1354	0.1712	0.2190
5	0.0946	0.1024	0.1153	0.1338	0.1567
11	0.0915	0.0941	0.0991	0.1070	0.1169
21	0.0904	0.0904	0.0926	0.0970	0.1032
101	0.0893	0.0871	0.0868	0.0884	0.0919

Таблица 4. Параметр  $\lambda^e$  в зависимости от *n* и  $\xi$  при  $\mu = 0.1, \eta = 100.$ 

**7. Заключение.** В задаче о длинноволновых изгибных колебаниях многослойной трансверсально изотропной пластины дана оценка погрешностей приближенных двухмерных моделей и рассмотрен ряд частных задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 18-01-00884а, 19-01-00208а, 20-51-52001 МНТ-а.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // Jour. Mech. Phys. Solids. 1965. № 13(4). P. 213–222.
- [2] Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Обобщенная модель Тимошенко– Рейсснера сильно неоднородной по толщине пластины // Доклады РАН. 2016. № 469(5). С. 562–566.
- [3] Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko-Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM. 2017. № 97(3). P. 296–308.
- [4] Tovstik P., Tovstik T. An elastic plate bending equation of second-order accuracy // Acta Mechanica. 2017. № 228(10). P. 3403–3419.
- [5] Товстик П. Е., Товстик Т. П. Уравнение изгиба тонкой пластины второго порядка точности // Доклады РАН. 2014. № 457(60). С. 660–663.
- [6] Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
- [7] Mikhasev G. I., Altenbach H. Thin-walled Laminated Structures. Buckling, Vibrations, and their Suppression. Springer, 2019. 275 p.

Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Bending vibrations of multilayered plates. Small free bending vibrations of a multilayered plate with alternating hard and soft layers are considered. The approximate ways of a transversal shear complaisance definitions, that needs to replace this plate by an equivalent one-layered Timoshenko–Reissner plate, are discussed. A comparison with the exact 3D solution is performed. A dependence of frequency on the ratio of Young modules of layers and of their position is investigated.

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ

### Моршнева И.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о возникновении вторичных автоколебательных режимов конвекции в горизонтальном слое жидкости с примесью. Границы слоя предполагаются свободными, изотермическими, и концентрация примеси на каждой из них считается заданной. Перекрестные эффекты термодиффузии и диффузионной теплопроводности не учитываются. Изучаются автоколебания, которые возникают при колебательной потере устойчивости основного режима относительно пространственных возмущений, периодических по однородным переменным. Уравнения возмущений имеют группу симметрии  $O(2) \times O(2)$ , и применима теория бифуркации рождения циклов в системах с такой симметрией. Из результатов теории следует, что в случае общего положения при переходе параметра через критическое значение от основного равновесия могут ответвиться циклы, которым отвечают автоколебания типа горизонтальных бегущих волн, косых бегущих волн и различных нелинейных смесей косых бегущих волн. Характер ветвления и устойчивость этих автоколебаний зависит от коэффициентов системы уравнений разветвления. В данной работе были получены аналитические выражения этих коэффициентов для рассматриваемой задачи. Найдены первые два члена ряда по степеням параметра надкритичности для возникающих автоколебательных режимов.

1. Постановка задачи. Исследуется возникновение конвекции в бесконечном горизонтальном слое бинарной смеси, состоящей из нереагирующих компонент. Расход жидкости через поперечное сечение предполагается равным нулю. Перекрестные эффекты — термодиффузия и диффузионная теплопроводность — не учитываются. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции смеси в приближении Обербека – Буссинеска [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathbf{p} + \Delta \mathbf{v} + (\mathrm{GrT} - \mathrm{Gr}_{\mathrm{s}}\mathrm{S})\mathbf{k}, 
\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathrm{T} = \mathrm{Pr}^{-1}\Delta \mathrm{T}, 
\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathrm{S} = \mathrm{Pr}_{\mathrm{d}}^{-1}\Delta \mathrm{S}, 
\mathrm{div}\mathbf{v} = 0.$$
(1)

где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  — поле скорости,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, y, z, t)$  — поле температуры,  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, y, z, t)$  — поле концентрации тяжелой компоненты смеси,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, y, z, t)$  — давление,  $\mathbf{k} = (0, 0, -1)^T$ .

Система (1) содержит четыре безразмерных параметра: Gr =  $\frac{g\beta h^4 Q}{\varkappa \nu^2}$  — число Грасгофа, Gr<sub>s</sub> =  $\frac{g\beta_s h^3 \bar{S}}{\nu^2}$  — концентрационное число Грасгофа, Pr =  $\frac{\nu}{\chi}$  — число Прандтля, Pr<sub>d</sub> =  $\frac{\nu}{D}$  — диффузионное число Прандтля (число Шмидта).
Здесь  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности смеси, D — коэффициент диффузии, g — величина ускорения силы тяжести,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения смеси,  $\beta_s$  — концентрационный коэффициент плотности,  $\varkappa$  — коэффициент теплопроводности смеси, Q — поток тепла,  $\bar{S}$  — средняя концентрация.

Предполагается, что границы слоя свободные, плоские и на них отсутствуют касательные напряжения. Значения температуры и концентрации примеси на границах считаются фиксированными. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{\substack{z=1\\z=0}} = \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big|_{\substack{z=1\\z=0}} = v_z\Big|_{\substack{z=1\\z=0}} = 0, 
T\Big|_{z=1} = \tau_1, \quad T\Big|_{z=0} = \tau_0, \ S\Big|_{z=1} = \sigma_1, \quad S\Big|_{z=0} = \sigma_0.$$
(2)

Задача (1) с граничными условиями (2) имеет следующее стационарное решение (основной режим), соответствующее покоящейся смеси, в предположении, что градиенты температуры и концентрации постоянны и вертикальны:

$$\mathbf{v}_{0} = 0, \ \mathbf{T}_{0}(z) = a_{1}z + a_{0}, \ \mathbf{S}_{0}(z) = b_{1}z + b_{0},$$
  
$$\mathbf{p}_{0}(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{Gr} a_{1} - \operatorname{Gr}_{s} b_{1})z^{2} + (\operatorname{Gr} a_{0} - \operatorname{Gr}_{s} b_{0})z + \operatorname{const},$$
(3)

где  $a_1 = \tau_1 - \tau_0$ ,  $a_0 = \tau_0$ ,  $b_1 = \sigma_1 - \sigma_0$ ,  $b_0 = \sigma_0$ .

Линейная устойчивость основного решения (3) была изучена Гершуни Г. З., Жуховицким Е. М. и др. [1]. Обнаружено, что возможна как монотонная, так и колебательная потеря устойчивости основного режима (3). Далее изучаются автоколебания, возникающие при колебательной потере устойчивости (3).

**2. Ветвление автоколебаний.** Будем искать решение задачи (1) с граничными условиями (2) в виде

$$\check{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \quad \check{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_0 - a_1 \mathbf{T}, \quad \check{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_0 - b_1 \mathbf{S}, \quad \check{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}.$$
 (4)

где  $\mathbf{v} = (v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), v_z(x, y, z, t)), T = T(x, y, z, t), S = S(x, y, z, t),$  $p = p(x, y, z, t). Предположим, что возмущения <math>\mathbf{v}$ , T, S,  $p - 2\pi/\alpha$ -периодичны по x,  $2\pi/\beta$ -периодичны по y, где  $\alpha, \beta$  — волновые числа.

Подставляя (4) в (1)–(2), получим систему для возмущений  $\mathbf{v}$ , T, S, p с однородными граничными условиями. Нелинейные уравнения для возмущений запишем в виде

$$\frac{dv}{dt} + Av = K(v, v), \tag{5}$$

где  $v = (v, T, S) \in H$ ; А — линейный оператор, К — квадратичный оператор, они задаются следующими выражениями

$$\mathbf{A} = \Pi \left( \begin{array}{ccccc} -\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta & -\mathbf{Gr} & \mathbf{Gr_s} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{\mathbf{Pr}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\mathbf{Pr_d}} \end{array} \right),$$

Моршнева И.В.

$$\mathbf{K}(u,v) = -\Pi((\mathbf{u},\nabla)v_x, (\mathbf{u},\nabla)v_y, (\mathbf{u},\nabla)v_z, \mathbf{u}\cdot\nabla T, \mathbf{u}\cdot\nabla S).$$

Здесь пространство H — замыкание множества достаточно гладких вектор-функций  $v = (\mathbf{v}, T, S)$ , определенных в области

$$\Omega = \{ (x, yz) : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi/\alpha, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi/\beta, 0 \leqslant z \leqslant 1 \},\$$

по норме, порожденной скалярным произведением

$$(v_1, v_2) = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* + \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2^* + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2^*) \, dx \, dy \, dz,$$

символ \* означает комплексное сопряжение,  $\Pi$  — оператор ортогонального проектирования из H в подпространство H<sub>0</sub> с соленоидальными **v**.

Заметим, что уравнение (5) инвариантно относительно преобразований инверсии

$$(L_{1}\mathbf{v})(x, y, z) = (-v_{x}, v_{y}, v_{z}, T, S)(-x, y, z),$$
  

$$(L_{2}\mathbf{v})(x, y, z) = (v_{x}, -v_{y}, v_{z}, T, S)(x, -y, z),$$
  

$$(L_{3}\mathbf{v})(x, y, z) = (-v_{x}, -v_{y}, v_{z}, T, S)(-x, -y, z),$$
  
(6)

а также относительно представлений  $R_{\xi}$  и  $S_{\eta}$  группы вращения окружности:

$$(R_{\xi}\mathbf{v})(x, y, z) = v(x + \xi/\alpha, y, z),$$
  
$$(S_{\eta}\mathbf{v})(x, y, z) = v(x, y + \eta/\beta, z),$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — угловые переменные на окружности.

Таким образом, задача (5) инвариантна относительно группы  $O(2) \times O(2)$ . Ветвление автоколебаний в системах с такой симметрией изучено в [2].

Для отыскания автоколебаний применим метод Ляпунова–Шмидта для систем с двойной круговой симметрией  $O(2) \times O(2)$  [2]. Представим число Грасгофа в виде  $Gr = Gr_* + \delta$ , где  $Gr_*$  - критическое значение колебательной потери устойчивости. Подставляя  $\tau = \omega t$  в (5), где  $\omega$  -неизвестная циклическая частота, которую ищем в виде  $\omega = \omega_0 + \mu$ , получаем

$$\omega_0 \frac{d}{d\tau} \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{v} + \mu \frac{d}{d\tau} \mathbf{M} \mathbf{v} = \delta \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{K}(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$
(7)

Заметим, что в силу симметрии задачи относительно трех инверсий (6) при критическом значении числа Грасгофа Gr<sub>\*</sub> каждому собственному значению  $-i\omega_0$  и  $i\omega_0$  ( $\omega_0 \neq 0$ ) отвечают четыре независимые комплексные нейтральные моды.

Ищем  $2\pi$ -периодическое по  $\tau$  решение (7) в виде

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{u}_0(\tau) + \mathbf{u}(\tau),$$
$$\mathbf{u}_0(\tau) = \sum_{k=0}^3 (\alpha_k \varphi_k e^{i\tau} + \alpha_k^* \varphi_k^* e^{-i\tau}).$$

182

где  $\alpha_k$  (k = 0, 1, 2, 3) – неизвестные амплитуды,  $\varphi_0, \varphi_k = L_k \varphi_0$  (k = 1, 2, 3) – собственные функции, отвечающие собственному значению  $-i\omega_0$ , следующей задачи

$$(\mathbf{A} + i\omega_0 \mathbf{M})\varphi_k = 0 \ (k = 0, 1, 2, 3).$$

Система уравнений разветвления, наследующая группу симметрии исходной задачи  $O(2) \times O(2)$ , имеет вид

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad g(\alpha_1, \alpha_0, \alpha_3, \alpha_2) = 0, g(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_0, \alpha_1) = 0, \quad g(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) = 0.$$
(8)

Функция g аналитична по  $\alpha_k$ ,  $\alpha_k^*$  (k = 0, 1, 2, 3),  $\delta$ ,  $\mu = \omega - \omega_0$  в окрестности нуля и имеет представление

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_0(-i\mu + a\delta + b|\alpha_0|^2 + c|\alpha_1|^2 + d|\alpha_2|^2 + e|\alpha_3|^2) + f\alpha_1\alpha_2\alpha_3^* + \dots,$$

где опущены члены четвертой степени и выше по  $\alpha_k$ ,  $\alpha_k^*$ ,  $\delta$ ,  $\mu$ . Коэффициенты уравнений разветвления выражаются через собственные функции  $\varphi_k$  (k = 0, 1, 2, 3) оператора A, решения серии неоднородных задач, правые части которых зависят от этих же собственных функций, и через собственный вектор  $\Phi_0$  сопряженного оператора  $A^*$  [2].

Исследование системы (8) на инвариантных подпространствах позволяет доказать, что в случае общего положения возможно возникновение пяти семейств (орбит) циклов [2]. Эти семейства (орбиты действия группы симметрии системы) порождаются следующими периодическими режимами:

- 1) бегущей вдоль оси x волной v(x ct, y, z);
- 2) бегущей вдоль оси y волной v(x, y ct, z);
- 3) косой бегущей волной  $v(\alpha x + \beta y ct, z);$
- 4) периодическим режимом  $v(\alpha x + \beta y, z, t)$ , представляющим собой нелинейную смесь пары косых бегущих волн, который в линейном приближении имеет вид  $\mathbf{f}(z)(e^{i(\alpha x + \beta y ct)} + e^{i(-\alpha x \beta y ct)}) + \kappa. с.;$
- 5) периодическим режимом v(x, y, z, t), симметричным относительно инверсий и являющимся нелинейной смесью косых бегущих волн, связанных инверсионной симметрией, который в линейном приближении имеет вид

$$\mathbf{f}(z)(e^{i(\alpha x+\beta y-ct)}+e^{i(-\alpha x+\beta y-ct)}+e^{i(\alpha x-\beta y-ct)}+e^{i(-\alpha x-\beta y-ct)})+\mathbf{K}.\mathbf{C}.$$

Характер ветвления и устойчивость описанных пяти периодических режимов определяется соотношениями между коэффициентами системы уравнений разветвления [2]. Для определения характера ветвления и устойчивости возникающих автоколебательных режимов в рассматриваемой задаче найдены аналитические выражения для коэффициентов уравнений разветвления. При различных критических значениях параметров, соответствующих колебательной потере устойчивости, проведен анализ знаков соотношений между этими коэффициентами. Исследования показали, что только длинноволновые режимы типа горизонтальных и косых бегущих волн могут быть устойчивыми, остальные же режимы рождаются неустойчивыми, меняется лишь характер их ветвления. Выяснено, что изменения характера ветвления автоколебаний связаны с обращением в нуль или бесконечность одного из коэффициентов уравнений разветвления. Найдены значения параметров, при которых это происходит. Для всех типов автоколебательных режимов найдены первые два члена ряда по степеням параметра надкритичности.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [2] Моршнева И.В. Бифуркация рождения цикла в динамических системах с симметрией и её приложения в гидродинамике. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. 140 с.

Morshneva I.V. The occurrence of 3D periodic convective flows in a horizontal layer of a binary mixture. The present work investigates the onset of convection in an infinite horizontal layer of a binary fluid mixture consisting of two non-reacting components. A constant temperature and concentration distribution is specified on the boundaries. In the model under consideration the effects of thermal diffusion and diffusive heat conductivity are neglected. This research is devoted to the study of branching and stability of timeperiodic flow regimes arising from oscillatory stability loss of the basic regime relatively spatial perturbations, periodic on the homogeneous horizontal variables. The perturbation equations are invariant under the group  $O(2) \times O(2)$ , and the Andronov-Hopf bifurcation theory in the systems with such symmetry is suitable. This theory has been developed by I. Morshneva. Investigation of the branching equations has reveal that five types of self-oscillating modes are arising: various types of traveling waves and the nonlinear mixtures of various types of waves. The type of branching and stability of these regimes depends on the relations between the coefficients of the branching equations. The coefficients were found analytically for the problem of binary mixture convection in the horizontal layer. Analysis for a wide range of parameters showed that different theoretically possible branching types of periodic modes are realized.

## РАСЧЁТ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА

## Мусатова Н.К., Сумбатян М.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В настоящей работе рассматривается дифракция от точечного источника звука на остром угле бесконечного клина. В рамках метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с ядром, выражающимся в двумерном случае через функцию Ханкеля. Для численного решения основного ГИУ предлагается итерационный метод.

В данной работе рассматривается задача расчёта звукового поля на бесконечном клине. Данная проблема является классической задачей теоретической и математической физики. Одной из первых теорий в этой области была теория дифракции Зоммерфельда [1], которая дает некоторые представления для волны, рассеянной на клине, в явном виде. Между тем, в действительности расчет рассеянного поля в рамках этой теории удается произвести лишь в точках, расположенных вдали от клина. Альтернативным является подход, основанный на разделении переменных в полярной системе координат [2]. Он приводит к представлению решения в виде бесконечных рядов по цилиндрическим функциям. Такое решение сложно назвать эффективным, так как вычисление цилиндрических функций одновременно с большими индексами и большими аргументами не является тривиальным.

Тем не менее, рассматриваемая проблема является актуальной и сегодня. Например, в работе [3] моделируется рассеяние акустических волн на погруженных в воду твердых телах, имеющих в своём строении клин. В [4] рассматривается дифракция сферической акустической волны от точечного источника на импедансном клине. Работа [5] представляет собой вывод трехмерной модели звукового поля для поля давления, излучаемого массивами громкоговорителей в акустических клиновых пространствах. В работе [6] дается обзор известных методов в задаче дифракции на бесконечном клине. Нам не известны публикации, в которых к рассматриваемой задаче применяется метод ГИУ. Соответственно, он не попал в обзорную работу [6], в то время как, на наш взгляд, этот метод представляется довольно эффективным в задачах подобного рода.

Целью данной работы является построение дифракционного поля для точечного источника звука, расположенного вблизи острого угла бесконечного клина.

В рамках метода ГИУ задача дифракции сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$p(y_0) - 2 \int_l \frac{\partial G(y, y_0)}{\partial n_y} p(y) dl_y = 2p^{inc}, \quad y_0 \in l,$$
(1)

где p(y) — распределение акустического давления на граничном контуре  $l, p^{inc}$  — давление падающей акустической волны, G — функция Грина,  $n_y$  — единичная

нормаль к l в точке  $y, dl_y$  — элементарная длина дуги граничной кривой в точке y. При этом граничный контур l состоит из верхней грани  $l_1$  и нижней грани  $l_2$ :  $l = l_1 \cup l_2$ .



Рисунок 1 – Дифракция акустической волны от источника x<sub>0</sub> на бесконечном клине

Моделируя точку  $x_0$  как источник звука в хвосте летательного аппарата, для простоты ограничимся случаем расположения точки  $x_0$  на горизонтальной оси симметрии, как показано на рис. 1. В этом случае, очевидно, давление на верхней грани клина  $l_1$  и на нижней грани  $l_2$  будут одинаковы:  $p_1(x) = p_2(\xi)$ ,  $(x = \xi)$ . Пусть ось x берёт своё начало в остром угле и идёт вдоль верхней грани клина, а ось  $\xi$ направлена так же, только по нижней грани клина. При этом, если «внутренняя» точка  $\xi$  и «внешняя» точка x в интегральном уравнении находятся одновременно на одной и той же стороне клина, то вклад соответствующей части интегрального оператора оказывается нулевым. Соответственно, нетривиальным остается лишь та часть интегрального оператора, когда эти точки находятся на разных сторонах клина. Это существенно упрощает исследование основного ГИУ (1), которое можно переписать в виде

$$p(x) - 2\int_{0}^{\infty} \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_{y}} p(\xi) d\xi = 2p^{inc}(x).$$
<sup>(2)</sup>

В декартовой системе координат эти точки, а также нормаль и расстояние между точками *A* и *B* равны (см. рис. 1)

$$A = y = (-\xi \cos \theta, -\xi \sin \theta), \quad B = y_0 = (-x \cos \theta, x \sin \theta), \tag{3}$$

$$n_y = (\sin \theta, -\cos \theta), \quad \vec{r} = \vec{BA} = ((x - \xi)\cos \theta, -(x + \xi)\sin \theta),$$
 (4)

$$r = \sqrt{(x^2 - 2x\xi + \xi^2)\cos^2\theta + (x^2 + 2x\xi + \xi^2)\sin^2\theta} = \sqrt{x^2 - 2x\xi\cos 2\theta + \xi^2}.$$
 (5)

Функция Грина в двумерном случае выражается через функцию Ханкеля первого рода .

$$G = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \tag{6}$$

где *k* — волновое число.

Производная функции Грина

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{\partial G}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n_y}, \ \frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr), \ \frac{\partial r}{\partial n_y} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{n_y})}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n_y}|} = \frac{x \sin 2\theta}{\sqrt{x^2 - 2x\xi \cos 2\theta + \xi^2}}.$$
 (7)

После подстановки уравнение (2) приобретает вид

$$p(x) = 2p^{inc}(x) - \frac{ikx\sin 2\theta}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2 - 2x\xi\cos 2\theta + \xi^2})\,p(\xi)}{\sqrt{x^2 - 2x\xi\cos 2\theta + \xi^2}}\,d\xi.$$
 (8)

Уравнение (8) можно записать в операторном виде

$$p = f - Ap. \tag{9}$$

При этом величина давления в падающем поле равна

$$p^{inc} = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{x_0^2 + 2x_0 x \cos \theta + x^2} \right).$$
(10)

Чтобы решить уравнение (8) численно, применяется дискретизация граничной кривой, то есть разбиение каждой грани на N равных отрезков. Выберем шаг  $\Delta l_j \equiv h$  с учетом, что каждая «бесконечная» грань имеет длину, достаточно большую по сравнению с длиной волны  $\lambda = 2\pi/k$ , а также с расстоянием  $x_0$ от источника до угла клина. После дискретизации интеграл заменится на сумму, и уравнение (8) примет вид:

$$p_m = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr_m^0) - \frac{ikx_m \sin 2\theta}{2} h \sum_{i=1}^N \frac{H_1^{(1)}(kr_{mj})}{r_{mj}} p_j, \quad m = 1, ..., N.$$
(11)

Здесь  $r_m^0 = \sqrt{x_0^2 + 2x_0 x_m \cos \theta + x_m^2}$  — расстояние от источника до точки  $y_0$ , а  $r_{mj} = \sqrt{x_m^2 - 2x_m \xi_j \cos 2\theta + \xi_j^2}$  — расстояние между  $y_0$  и y, h — шаг сетки (для простоты считается постоянным).

Тогда

$$f = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k r_m^0) \tag{12}$$

представляет собой вектор размера  $1 \times N$ , а оператор

$$Ap = \frac{ikx_m \sin 2\theta}{2} h \sum_{i=1}^N \frac{H_1^{(1)}(kr_{mj})p_j}{r_{mj}}, \quad m = 1, ..., N$$
(13)

матрицу размера  $N \times N$ .

Для реализации численного решения предлагается итерационный метод. Предполагается, что по сравнению с внеинтегральным членом вклад интегрального оператора (9) является малым. При этом первый шаг итерации совпадает с физической теорией дифракции Кирхгофа, которая утверждает, что в каждой точке

187

на поверхности в «зоне света» (то есть куда попадает прямой звук от источника) акустическое давление равно удвоенному падающему полю

$$p^{(1)}(x) = f = 2p^{inc}.$$
(14)

Тогда предлагаемый численный метод представляет собой итерационный процесс следующего вида:

$$p^{(n)}(x) = f - Ap^{(n-1)}.$$
(15)

Далее решение на основе предложенного итерационного метода сравнивается с прямым численным решением ГИУ, а также с теорией Кирхгофа. Построена диаграмма рассеяния в ближней и в дальней зоне.

Заметим также, что исходное интегральное уравнение (8) может быть записано в эквивалентном виде, содержащим симметричное ядро:

$$\frac{p(x)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} p^{inc}(x) - \frac{ik\sin 2\theta}{2} \int_{0}^{\infty} \sqrt{x\xi} \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2 - 2x\xi\cos 2\theta + \xi^2})}{\sqrt{x^2 - 2x\xi\cos 2\theta + \xi^2}} \frac{p(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi.$$
(16)

Очевидно, последнее уравнение представляет собой интегральное уравнение 2-го рода относительно функции  $p(x)/\sqrt{x}$ . При дискретизации интегральное уравнение с симетричным ядром порождает и симметричную матрицу соответствующей линейной алгебраической системы, что актуально для применения эффективных быстрых численных методов решения больших матричных систем.

На рисунках представлены некоторые результаты расчетов.



Рисунок 2 – Сравнение вещественной части акустического давления (сплошная линия) с теорией Кирхгофа (пунктирная линия) при различных волновых числах k. Длина клина L = 10 и количестве разбиений клина N = 1000 фиксированы



Рисунок 3 – Сравнение вещественной части акустического давления (сплошная линия) с теорией Кирхгофа (пунктирная линия) при различных длинах клина L. Волновое число k = 0.1 и количестве разбиений клина N = 1000 фиксированы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-29-06013\19).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабич В. М., Лялинов М. А., Грикуров В. Э. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции. СПб: ВВМ, 2004. 103 с.
- [2] Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение. 1989. 304 с.
- [3] Lu B., Darmon M., Fradkin L., Potel C. Numerical comparison of acoustic wedge models, with application to ultrasonic telemetry // Ultrasonics. 2016. V. 65. P. 5–9.
- [4] Lyalinov M. A., Polyanskaya S. V. Scattering of acoustic waves from a point source over an impedance wedge // Wave Motion. 2020. V. 93. Article 102472.
- [5] Hoffmann F.-M., Williams E., Fazi F., Fontana S. An analytical model for wedgeshaped acoustic arrays // Journal of Sound and Vibration. 2018. V. 439. P. 56–76.
- [6] Nethercote M. A., Assier R. C., Abrahams I. D. Analytical methods for perfect wedge diffraction: a review // Wave Motion. 2020. V. 93. Article 102479.

Musatova N.K., Sumbatyan M.A. Calculation of the sound field near an infinite wedge. The diffraction from a point source of sound at the acute angle of an infinite wedge is considered in this work. In the framework of the boundary elements method (BEM) the problem is reduced to the Fredholm integral equation of the second kind with a kernel, which in the two-dimensional case is expressed through the Hankel function. To numerically solve the main integral equation, an iterative method is proposed.

## ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПОР

## **Нассар М. Э.**<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону <sup>2</sup>Университет Минуфии, Эль-Минуфия

Данная статья посвящена исследованию проблем гомогенизации для пористых пьезокомпозитов с бесконечно тонкими металлизированными поверхностями пор при учете неоднородной поляризации пьезокерамики. Для определения эффективных свойств использовались метод эффективных модулей и конечно-элементные технологии, реализованные в APDL ANSYS. Предполагалось, что представительный объем представляет собой пористый пьезокерамический материал в форме куба с одной сферической порой в центре. Для определения векторного поля поляризации вокруг поры для конечноэлементной модели была решена задача электростатики. В результате была получена пористая пьезокерамическая матрица с учетом неоднородной поляризации. Проведенные численные эксперименты показали, что учет неоднородности поля поляризации в композитной системе с металлизированной поверхностью пор дает больший эффект, чем для обычной пористой системы. Отмечено также, что рассмотренный пористый пьезокерамический композит с металлизированными границами пор имеет большие по амплитуде поперечные сдвиговые пьезомодули и диэлектрические проницаемости, чем обычная пористая пьезокерамика.

1. Математические модели и методология определения эффективных мо**дулей.** Представительный объем (элементарная ячейка)  $\Omega$  представляет собой пьезокерамический куб PZT-4 с ребром длиной L и содержит сферическую пору в центре. Геометрическая модель представительного объема была построена в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Представительный объем  $\Omega$  занимает область  $|x_k| \leq L/2$ , где k = 1, 2, 3. Радиус сферической поры R связан с пористостью (POR) соотношением  $R = L\sqrt[3]{3 POR/4\pi}$ . Радиус поры R должен удовлетворять неравенству R < L/2, и поэтому в модели имеется достаточно сильное ограничение на максимальную величину пористости POR < 52 %. Предполагалось что  $\Omega = \Omega^m \cup \Omega^c$ , где  $\Omega^m$  — часть объема, содержащая пьезоэлектрический материал, а  $\Omega^c = \Omega^e \cup \Omega^p$  — составная пора. Объем  $\Omega^c$ представляет собой пору с металлизированной контактной границей с основным материалом;  $\Omega^e$  — моделирующий металлизованное покрытие сферический слой толщиной h с радиусами  $R^e = R - h$  и  $R; \Omega^p$  — объем, содержащий вакуум;  $\Gamma = \partial \Omega$  — внешняя граница представительного объема;  $\Gamma^c = \partial \Omega^c$  и  $\Gamma^p = \partial \Omega^p$  – границы объемов  $\Omega^c$  и  $\Omega^p$ , соответственно. Конечно-элементная модель создавалась в ANSYS алгоритмами формирования свободной сетки из десятиузловых тетраэдрических элементов SOLID227 с возможностями управления размерами элементов. Для обычной пористой системы (ОПС) сферический слой ( $\Omega^e$ ) не строился, поэтому  $\Omega^c = \Omega^p$ . Для определения эффективных модулей исследуемого композита решались следующие краевые задачи гомогенизации

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \tag{2}$$

Влияние неоднородности поля поляризации на эффективные свойства 191

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_0, \quad \phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$
(4)

где

$$\mathbf{L}^{*}(\nabla) = \begin{pmatrix} \partial_{1} & 0 & 0 & \partial_{3} & \partial_{2} \\ 0 & \partial_{2} & 0 & \partial_{3} & 0 & \partial_{1} \\ 0 & 0 & \partial_{3} & \partial_{2} & \partial_{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial_{1} \\ \partial_{2} \\ \partial_{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{split} \mathbf{T} &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\} - \text{массив компонент тензора механических напряжений } \\ \sigma_{ij}; \mathbf{S} &= \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\} - \text{массив компонент тензора деформаций } \\ \varepsilon_{ij}; \mathbf{D} - \text{вектор электрической индукции; } \mathbf{E} - \text{вектор напряженности электрического поля; } \\ \mathbf{c}^E - 6 \times 6 \text{ матрица модулей упругих жесткостей, вычисленных при постоянном электрическом поле; } \\ \mathbf{e} - 3 \times 6 \text{ матрица пьезомодулей (коэффициентов пьезоэлектрических напряжений); } \\ \mathbf{c}^S - 3 \times 3 \text{ матрица модулей диэлектрических проницаемостей, вычисленных при фиксированной механической деформации; } \\ \mathbf{u} - \text{вектор перемещений; } \\ \boldsymbol{\phi} - \text{электрический потенциал; } \\ \mathbf{S}_0 - \text{ шестимерный массив постоянных значений } \\ S_{0\beta}; \\ \mathbf{E}_0 - \text{ вектор постоянных значений } \\ E_{0i}; \\ \boldsymbol{\beta} = 1, 2, \cdots 6, i = 1, 2, 3. \end{split}$$

На границе пьезокерамической матрицы и поры рассматривались два случая внутренних граничных условий. Первый случай – обычная пористая система (ОПС), которая состоит из пьезокерамического материала и поры. В ОПС условия на границе раздела областей  $\Omega^m$  и  $\Omega^p$  задаются стандартным образом:

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^p.$$
(5)

Второй случай представляет собой систему с металлизированной поверхностью пор (СМПП). Случай СМПП отличается от случая ОПС только тем, что содержит бесконечно тонкий металлический слой ( $\Omega^e$ ) на поверхности поры. Внутренние граничные условия между областями  $\Omega^m$  и  $\Omega^c$  в СМПП могут быть представлены следующим образом:

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot [\mathbf{T}] = 0, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}] = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^c,$$
(6)

где [(...)] — скачок функции (...) через границу  $\Gamma^c$ . Тонкий металлический слой моделируется как пьезоэлектрический материал с очень высокими модулями диэлектрической проницаемости и незначительными упругими и пьезоэлектрическими модулями. В такой модели металл является эквипотенциальной поверхностью, когда  $\phi = \text{const.}$ 

Как следует из [5], при выборе одного ненулевого значения среди компонент  $S_{0\beta}$  и  $E_{0i}$ , из решений задач (1)–(5) для ОПС или из решений задач (1)–(6) для СМПП, можно определить полный эффективных набор модулей пьезокомпозита [1–3].

2. Учет неоднородной поляризации. Неоднородность поляризации ОПС подробно исследовалась в [2, 3]. Для случая СМПП можно ожидать большую неоднородность поля поляризации, вызванной металлизацией поверхности поры. Неоднородное поле поляризации может быть рассчитано в ANSYS путем решения следующей электростатической задачи для ОПС или для СМПП с использованием конечных элементов SOLID227 с выбором в качестве степеней свободы только электрического потенциала

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$
(7)

$$\phi = -E_c/L, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1^{\phi}, \quad \phi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2^{\phi}, \tag{8}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^q, \tag{9}$$



Рисунок 1 – Относительные пьезоэлектрические модули (a)  $r(e_{31})$ , (б)  $r(e_{33})$ , и (в)  $r(e_{15})$  в зависимости от пористости.

где  $\Gamma = \Gamma_1^{\phi} \cup \Gamma_2^{\phi} \cup \Gamma^q$ ;  $\Gamma_1^{\phi}$  и  $\Gamma_2^{\phi}$  — два электрода на поверхностях  $x_3 = -L/2$  и  $x_3 = L/2$ , соответственно;  $\Gamma^q$  – неэлектродированная часть внешней границы  $\Gamma$  представительного объема  $\Omega$ ;  $E_c$  — значение поля поляризации.

Из решения электростатической задачи (7)–(9) в объеме  $\Omega^m$  можно найти вектор электрической индукции  $\mathbf{D}^{ek}$  и вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}^{ek}$  в центральной точке каждого конечного элемента  $\Omega^{ek}$ , где k — номер конечного элемента. Тогда вектор поляризации  $\mathbf{P}^{ek}$  может быть получен по формуле

$$\mathbf{P}^{ek} = \mathbf{D}^{ek} - \varepsilon_0 \mathbf{E}^{ek},\tag{10}$$

где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума. Затем для каждого конечного элемента  $\Omega^{ek}$  определялась локальная система координат  $Ox_1^{ek}x_2^{ek}x_3^{ek}$ , в которой ось  $Ox_3^{ek}$ совпадала с направлением соответствующего вектора поляризации  $\mathbf{P}^{ek}$ , определяемого по (10).

Далее для пьезоэлектрического анализа элементы SOLID227 были модифицированы выбором опции пьезоэлектрического анализа, а свойства диэлектрических материалов были заменены на пьезоэлектрические. Предполагалось, что пора представляет собой пьезоэлектрический материал с незначительными пьезоэлектрическими и упругими модулями. Ранее созданные локальные системы координат  $Ox_1^{ek}x_2^{ek}x_3^{ek}$  использовалась для каждого конечного элемента  $\Omega^{ek}$  как элементные системы координат. Для определения эффективных модулей пьезокерамических композитов для ОПС и СМПП использовалась известная теория эффективных модулей [4, 5], согласно которой решались краевые задачи (1)–(5) и (1)–(4), (6), соответственно, с различными ненулевыми значениями  $S_{0\beta}$ или  $E_{0i}$  в граничных условиях (4). После решения этих задач в ANSYS вычислялись осредненные компоненты напряжений и компоненты вектора электрической индукции, по которым находились эффективные модули композита [4, 5].

**3.** Результаты расчетов. В численном примере рассмотрим пористую пьезокерамику PZT-4 с материальными модулями, приведенными в [1]. Будем анализировать зависимости от пористости относительных эффективных модулей, например  $r\left(c_{\alpha\beta}^{E}\right) = c_{\alpha\beta}^{E\,\text{eff}}/c_{\alpha\beta}^{E}$ , где  $c_{\alpha\beta}^{E}$  — модули плотной пьезокерамики. На следующих рисунках буквы «Г», и «Н» обозначают данные, полученные для однородного (гомогенного) и неоднородного поля поляризации, соответственно.

Как видно на рис. 1, все пьезомодули ОПС и СМПП уменьшаются с увеличением по-



Рисунок 2 – Относительные модули жесткости (а)  $r(c_{13}^E)$ , (б)  $r(c_{33}^E)$ , и (в) относительный модуль диэлектрической проницаемости  $r(\varepsilon_{11}^S)$  в зависимости от пористости.

ристости, кроме поперечного пьезоэлектрического модуля СМПП  $|e_{31}|$ . Например, пьезомодуль  $|e_{31}|$  СМПП увеличивается примерно на 1205% от аналогичного значения ОПС при POR = 0.5, учитывая однородную поляризацию. Учет неоднородности поляризации слабо влияет на пьезоэлектрические модули  $|e_{31}|$ ; но сильно влияет на пьезомодули  $e_{33}$ и  $e_{15}$ . Например, учет неоднородности поля поляризации в СМПП увеличивает пьезомодуль  $|e_{31}|$  на 2.3%, и уменьшает пьезомодули  $e_{33}$  и  $e_{15}$  на 27.8% и 8.16%, соответственно, от их соответствующих значений СМПП с однородным полем поляризации.

Учет неоднородности поля поляризации оказывает незначительное влияние на значения модулей упругой жесткости, как показано на рис. 2, (a) и (б). Однако, как видно из рис. 2, (c), учет неоднородности поля поляризации оказывает существенное влияние на модуль диэлектрической проницаемости ( $\varepsilon_{11}^{S}$ ).

Необычное поведение эффективной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{11}^S$  и пьезоэлектрического модуля в СМПП можно объяснить следующим образом. Металлизированная поверхность пор предотвращает распространение электрического поля в область пор  $\Omega^p$ . Таким образом, приложенное электрическое поле полностью сохраняется в области  $\Omega^m$ , и пьезоэлектрический эффект на механическое воздействие (обратный пьезоэффект) или на электрическое воздействие (прямой пьезоэффект) значительно отличается от соответствующего отклика в ОПС. В этом случае нерегулярность области приводит к увеличению интегральных значений электрической индукции больше, чем увеличение интегральной величины электрического поля, и поэтому диэлектрическая проницаемость увеличивается.

Заключение. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что учет неоднородности поля поляризации несущественно влияет на все модули ОПС. Однако, для СМПП неоднородность поля поляризации оказывает большое влияние на пьезоэлектрические модули и модули диэлектрической проницаемости. При этом, в отличие от ОПС, поперечный пьезоэлектрический модуль  $|e_{31}|$  и модули диэлектрической проницаемости в СМПП увеличиваются с ростом пористости.

Автор благодарит за помощь в работе заведующего кафедрой математического моделирования ЮФУ А. В. Наседкина.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

### ЛИТЕРАТУРА

- Nasedkin A.V., Nassar M.E. Numerical study of effective moduli of porous piezocomposites with metallized interfaces in unit cell with cubic or spherical pores // Numerical Algebra with Applications. Proc. Eighth China-Russia Conf., 24–27 June 2019, Rostov-on-Don, Russia. C. 60–64.
- [2] Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Rybyanets A.N. Numerical analysis of effective properties of heterogeneously polarized porous piezoceramic materials with local alloying pore surfaces // Materials Physics and Mechanics. 2018. № 40. C. 12–21.
- [3] Gerasimenko T.E., et al. Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package / Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials. Advanced Structured Materials. V. 109. Ed. M.A. Sumbatyan (Ed.) Springer, 2019. P. 113–131.
- [4] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
- [5] Nasedkin A.V., Shevtsova M.S. Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity / Ferroelectrics and superconductors: Properties and applications. Ed. I.A. Parinov. Nova Science Publ., N.-Y., 2011. Ch.7. P. 231–254.

**Nassar M.E.** Influence of polarization field inhomogeneity on the effective properties of porous piezoceramic material with metallized pore surfaces. This paper investigates the homogenization problems for porous piezocomposites with extremely thin metalized pore surfaces and considers the effects of polarization field heterogeneity on the effective material properties. To determine the effective properties, we applied the theory of effective moduli and the finite element method using special algorithms in the ANSYS APDL package. The representative volume was considered to be a cube of the piezoelectric material with one spherical pore at its center. We modeled metallization by introducing an additional layer of material with very large permittivity coefficients along the pore boundary. Next, we solved the electrostatic problem for the same finite element model to simulate the polarization field non-uniformity. From this problem, we obtained the polarization field vectors in the composite. Then, we modified the material properties of the finite elements from dielectric to piezoelectric. As a result, we obtained composite properties considering inhomogeneous polarization. We found from the solutions of these homogenization problems that the porous piezoceramics composite with metalized pore boundaries has high transverse and shear piezomoduli, and dielectric permittivities than the ordinary porous piezoceramics. The results confirmed that the effect of polarization field inhomogeneity is insignificant on ordinary porous piezocomposite, but it is more significant on porous piezocomposite with metalized pore surfaces.

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ТЕЛ

## Нестеров С.А.

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН, Владикавказ

Приведена постановка несвязанной задачи градиентной термоупругости для системы «покрытие-подложка» в предположении об одномерности задачи. Для нахождения температуры, деформаций, напряжений Коши и моментных напряжений применяется асимптотический подход, учитывающий наличие погранслойных решений в окрестности границы раздела слоев. Построены графики распределения температуры и напряжений по координате. Проведен анализ полученных результатов.

1. Введение. Для защиты деталей от высокотемпературного воздействия широко применяются тонкослойные теплозащитные покрытия. При этом малые толщины покрытия могут становиться соизмеримыми с характерными размерами микроструктуры материала. Кроме того, на границе сопряжения разнородных материалов могут возникать большие концентрации напряжений, которые сильно влияют на прочность изделия. В классической термомеханике в определяющие уравнения не входят какие-либо масштабные параметры, поэтому ее невозможно использовать при моделировании масштабных эффектов. В настоящее время для моделирования эффектов, наблюдаемых в сверхтонких структурах используются градиентные теории упругости, которые в определяющие уравнения включают параметры размерности длины.

Градиентная теория упругости является обобщением классической теории упругости. Она была сформулирована в 70-е годы прошлого века в работах [1, 2]. В дальнейшем развитием градиентной теории упругости занималось большое число исследователей. Особенно большой вклад в развитие градиентной механики внесли научные школы Айфантиса [3] и Лурье С. А. [4, 5].

В работе [6] на основе вариационного принципа Лагранжа получена постановка задачи градиентной термоупругости. В работах [4, 5] исследуется напряженнодеформированное состояние слоистых термоупругих структур на основе прикладной модели межфазного слоя, являющейся однопараметрическим вариантом градиентной термоупругости. В результате численного решения построены графики распределения напряжений и деформаций, учитывающие влияние, как термомеханических характеристик, так и градиентного параметра.

В данной работе приведена постановка задачи градиентной термоупругости на основе однопараметрической модели Айфантиса. На основе применения асимптотического подхода Вишика-Люстерника получены аналитические выражения для нахождения распределения температуры, напряжений Коши, моментных напряжений и полных напряжений по координате.

**2.** Постановка задачи. Система «покрытие–подложка» моделируется структурой, состоящей из двух неоднородных слоев толщиной H с местом сопряжения на поверхности  $y = H_0$ . На нижней поверхности y = 0, которая жестко защемлена, задана нулевая температура. Верхняя поверхность y = H, свободная от механических напряжений, поддерживается при заданной температуре  $T_0$ . Рассмотрим однородное поле температур в направлении координаты x, тогда T = T(y). Примем гипотезу об одномерности задачи, т.е. положим  $u = w = 0, v = v(y), \tau_{yy} = \tau(y), \tau_{xx} = \tau_{xy} = 0$  для каждого слоя.

В качестве модели градиентной упругости примем прикладную модель Айфантиса с градиентным параметром  $l_1$  [3]. Для упрощения расчетов примем градиентный параметр одинаковым для покрытия и подложки. Уравнения равновесия в градиентной теории имеют повышенный порядок дифференциальных уравнений по сравнению с классической теорией. Для получения единственного решения в работе поставлены дополнительные граничные условия для градиента перемещения v'(0) = 0 и моментного напряжения  $m_{yyy}(H) = 0$ .

Распределение тепла находится из уравнений градиентной теплопроводности с масштабным параметром  $l_2$  [5]. Для получения единственного решения в работе поставлены дополнительные граничные условия для скорости изменения полного теплового потока  $k_1 l_2^2 T''(0) = k_2 l_2^2 T''(H) = 0$ .

На границе раздела должны выполняться условия сопряжения по температуре, градиентам температуры, скорости изменения полного теплового потока, обобщенному тепловому потоку, перемещениям, градиентам перемещений, полным напряжениям и моментным напряжениям.

В дальнейшем в формулах обозначим индексами «1» и «2» функции и параметры, соответствующие подложке и покрытию соответственно. Цель исследования нахождение распределения температуры, напряжений Коши, моментных напряжений и деформаций в зависимости от координаты *у*. Для этого выразим полные напряжения, моментные напряжения и градиенты перемещений через напряжения Коши. Тогда постановка задачи термоупругости примет вид:

$$\tau_1' - l_1^2 \tau_1''' = 0, \quad \tau_2' - l_1^2 \tau_2''' = 0, \tag{1}$$

$$\tau_1(y) = (\lambda_1 + 2\mu_1)v_1' - \gamma_1 T_1(y), \quad \tau_2(y) = (\lambda_2 + 2\mu_2)v_2' - \gamma_2 T_2(y), \tag{2}$$

$$k_1\left(T_1'' - l_2^2 T_1^{IV}\right) = 0, \quad k_2\left(T_2'' - l_2^2 T_2^{IV}\right) = 0, \tag{3}$$

$$T_1(0) = 0, \quad T_1''(0) = 0, \quad T_2(H) = T_0, \quad T_2''(H) = 0,$$
 (4)

$$au_1(0) = 0, \quad au_2'(H) = 0, \quad au_2(H) - l^2 au_2''(H) = 0, au_2(5)$$

$$T_1(H_0) = T_2(H_0), \quad T_1'(H_0) = T_2'(H_0),$$
(6)

$$k_1 l_2^2 T_1''(H_0) = k_2 l_2^2 T_2''(H_0), (7)$$

$$k_1\left(T_1'(H_0) - l_2^2 T_1'''(H_0)\right) = k_2\left(T_2'(H_0) - l_2^2 T_2'''(H_0)\right),\tag{8}$$

$$\frac{\tau_1(H_0) + \gamma_1(H_0)T_1(H_0)}{\lambda_1(H_0) + 2\mu_1(H_0)} = \frac{\tau_2(H_0) + \gamma_2(H_0)T_2(H_0)}{\lambda_2(H_0) + 2\mu_2(H_0)}, \quad \tau_1'(H_0) = \tau_2'(H_0), \quad (9)$$

$$\tau_1(H_0) - l^2 \tau_1''(H_0) = \tau_2(H_0) - l^2 \tau_2''(H_0).$$
(10)

Обезразмерим задачу (1)–(10), введя следующие безразмерные параметры и функции:

$$\xi = \frac{y}{H}, \quad h_0 = \frac{H_0}{H}, \quad \beta = \frac{\gamma_1 T_0}{\mu_1}, \quad \alpha_i = \frac{l_i}{H}, \quad \bar{s}_i = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\mu_1}, \\ \bar{k}_i = \frac{k_i}{k_1}, \quad \bar{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_1}, \quad W_i = \frac{T_i}{T_0}, \quad \Omega_i = \frac{\tau_i}{\mu_1}, \quad i = 1, 2.$$
(11)

**3.** Решение задачи. Сначала находится распределение температуры путем решения краевой задачи теплопроводности (3), (4), (6)–(8). После нахождения распределения температуры, далее для нахождения напряжений Коши необходимо решать краевую задачу (1), (5), (9), (10). В работе были получены точные аналитические решения. Эти решения имеют громоздкий вид, здесь не приводятся, а далее используются для оценки точности решения приближенного аналитического решения.

Обезразмеренная задача (1)–(10) содержит дифференциальные уравнения с малыми параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при старшей производной и является сингулярно возмущенной. В результате применения асимптотического подхода Вишика-Люстерника [7], учитывающего наличие погранслойных решений в окрестности границы раздела слоев, получены формула для нахождения распределения безразмерных функций температуры и напряжений Коши:

$$W_1(\xi) = A_1 \xi + K_1 (1 - e^{\frac{2(h_0 - 1)}{\alpha_2}}) e^{\frac{\xi - h_0}{\alpha_2}},$$
(12)

$$W_2(\xi) = A_2\xi + B_2 + K_1 \left( e^{\frac{h_0 - \xi}{\alpha_2}} - e^{\frac{h_0 - 1}{\alpha_2}} e^{\frac{\xi - 1}{\alpha_2}} \right),$$
(13)

$$\Omega_1(\xi) = \mathcal{K}_2\left(e^{\frac{2(h_0-1)}{\alpha_1}} - 1\right)e^{\frac{\xi-h_0}{\alpha_1}},\tag{14}$$

$$\Omega_2(\xi) = \mathcal{K}_2\left(e^{\frac{h_0-\xi}{\alpha_1}} + e^{\frac{h_0-1}{\alpha_1}}e^{\frac{\xi-1}{\alpha_1}}\right).$$
(15)

Здесь

$$A_{1} = \frac{k_{2}}{\bar{k}_{1} + h_{0}(\bar{k}_{2} - \bar{k}_{1})}, \quad A_{2} = \frac{k_{1}}{\bar{k}_{2}}A_{1}, \quad B_{2} = \frac{h_{0}(k_{2} - k_{1})}{\bar{k}_{1} + h_{0}(\bar{k}_{2} - \bar{k}_{1})},$$
$$K_{1} = \frac{A_{1}l(k_{1} - k_{2})}{(k_{1} + k_{2}) + ((k_{1} - k_{2}))e^{\frac{2(h_{0} - 1)}{\alpha_{2}})}}, \quad K_{2} = \beta W_{1}(h_{0})\frac{\bar{s}_{2}\bar{\gamma}_{1} - \bar{s}_{1}\bar{\gamma}_{2}}{\bar{s}_{1} + \bar{s}_{2} + (\bar{s}_{1} - \bar{s}_{2})e^{\frac{2(h_{0} - 1)}{\alpha_{1}}}}.$$

После нахождения законов распределения температуры и напряжений Коши по координате далее вычисляются безразмерные моментные напряжения  $M_i = \alpha_i^2 \Omega_i'$ , полные напряжения  $S_i = \Omega_i - M_i'$ , деформации  $E_i = \frac{\Omega_i + \beta \bar{\gamma}_i W_i}{s_i}$ , i = 1, 2. В ходе расчетов выяснено, что погрешность приближенного вычисления безразмерных температуры и напряжений Коши не превосходит одного процента при  $\alpha_1 < 0.02$ ,  $\alpha_2 < 0.08$ .

На рисунках ниже представлены изображения распределения безразмерных температуры (рис. 1) и напряжений Коши (рис. 2) от безразмерной координаты ξ.

Нестеров С.А.



Рисунок 1 – Распределение безразмерной температуры в зависимости от безразмерной координаты



Рисунок 2 – Распределение безразмерных напряжений Коши в зависимости от безразмерной координаты

В расчетах принято:  $h_0 = 0.9$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.03$ ,  $\bar{s_1} = \bar{s_2} = 1$ ,  $\bar{k_1} = 1$ ,  $\bar{k_2} = 0.1$ ,  $\bar{\gamma_1} = 1$ ,  $\bar{\gamma_2} = 0.5$ ,  $\beta = 0.01$ .

Из рис. 2 следует, что напряжения Копи равны нулю в любой точке  $\xi$ , за исключением окрестности границы раздела  $\xi = h_0$ , где возникает скачок напряжений, обусловленный только разностью коэффициентов температурных напряжений покрытия и подложки. Скачок напряжений Коши имеет небольшую величину, что связано с малостью параметра связанности  $\beta$ , характерного для большинства материалов. Скачок напряжений Коши на границе раздела материалов согласно градиентной теории объясняется условием непрерывности градиентов перемещений на границе раздела (9). Такого условия нет в классической теории. Из эксперимента также не следует непрерывность деформаций. Однако из этого факта не следует, что градиентная теория некорректна. Дело в том, что в градиентной теории, как и на практике, непрерывными являются полные напряжения, являющиеся комбинацией напряжений Коши и первого градиента моментных напряжений и которые, исходя из граничных условий (5), (10) одинаковы и равны нулю в покрытии и подложке.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 18-11-00069).

#### ЛИТЕРАТУРА

- Toupin R. A. Elastic materials with couple stresses // Arch. Rational Mech. Anal. 1962.
   № 11. P. 385–414.
- [2] Mindlin R. D., Eshel N. N. On first strain-gradient theories in linear elasticitye // International Journal of Solids and Structures. 1968. № 4. P. 109–124.
- [3] Aifantis E. C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture // Int. J. Eng. Sci. 1992. № 30. P. 1279–1299.
- [4] Лурье С. А., Фам Т., Соляев Ю. О. Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. № 18. С. 440–449.
- [5] Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Электронный журнал МАИ. 2014. № 75. С. 1–16.
- [6] Ahmadi G., Firoozbakhsh K. First strain gradient thery of thermoelasticity // International Journal of Solids and Structures. 1975. V. 11. P. 339–345.
- [7] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. № 12(5). С. 3–122.

**Nesterov S. A.** Approximate analytical solutions to the gradient thermoelasticity problem for composite bodies. The statement of an unrelated problem of gradient thermoelasticity for the "coating–substrate" system under the assumption on the one-dimensionality of the problem is given. To find temperature, deformations, Cauchy stresses and moment stresses, we use an asymptotic approach that takes into account the presence of border-layer solutions in neighborhood of the layer boundary. Graphs of temperature and stress distribution along the coordinate are constructed. The results are analyzed.

## ДИНАМИКА ТОЧЕК ОТРЫВА ПРИ УДАРЕ ПЛАВАЮЩЕГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

## Норкин М.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследуется плоская задача об отрывном ударе прямоугольного цилиндра, полностью погруженного в идеальную, несжимаемую, тяжелую жидкость. Особенностью этой задачи является то, что в результате удара происходит отрыв жидкости от твердой поверхности с последующим образованием присоединенной каверны за телом. Целью работы является изучение процесса схлопывания тонкой каверны при малых скоростях движения цилиндра, соответствующих небольшим числам Фруда.

1. Постановка задачи. Рассматривается динамическая смешанная задача о вертикальном отрывном ударе прямоугольного цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Течение жидкости в момент, непосредственно следующий после удара (в начальный момент времени), определяется на основе классической модели удара с отрывом [1]. После удара цилиндр движется в глубь жидкости с постоянной скоростью без вращения. Особенностью этой задачи является то, что после удара образуется присоединенная каверна и появляется новая внутреннняя свободная граница жидкости. При малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда ( $Fr \leq 0.5$ ), возмущением внутренней и внешней свободных границ жидкости можно пренебречь и свести изучение вопроса об уменьшении зоны отрыва (о схлопывании тонкой каверны) к исследованию динамики точек отрыва. В данном случае процесс схлопывания заключается в том, что точки отрыва внутренней свободной границы жидкости движутся по направлению друг к другу и схлопывание происходит тогда, когда зона отрыва полностью исчезает. В естественной ситуации, когда в каверне образуются пары жидкости или газа с давлениями, близкими к нулю, время схлопывания каверны оказывается близким к ударному промежутку (схлопывание происходит практически мгновенно). Поэтому, при малых скоростях движения цилиндра, задачу целесообразно рассматривать с учетом искусственной кавитации. Предполагается, что сразу после удара со стороны тела в сторону жидкости выделяется газ постоянного давления.

Аналогичная задача для случая кругового цилиндра исследовалась в [2] на основе линеаризованной модели. При этом, благодаря сохранению геометрической нелинейности в задаче (благодаря граничным условиям типа неравенств), зависимость точек отрыва от времени носила нелинейный характер. В настоящей статье предлагается обобщить математическую модель, предложенную в [2], сохранив в ней нелинейные слагаемые. При этом важным остается предположение о полном пренебрежении возмущениями внутренней и внешней свободных границ жидкости. В математическом плане дело сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с нелинейными граничными условиями типа неравенств: Динамика точек отрыва

$$\Delta \Phi = 0, \quad R \in \Omega(t); \qquad \Phi = U(\Phi), \quad y = H - h(t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_y, \quad G(\Phi) \ge 0, \quad R \in S_{11}(t)$$
(2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \ge \dot{h}(t)n_y, \quad G(\Phi) = 0, \quad R \in S_{12}(t)$$
(3)

$$G(\Phi) = 0.5\chi t - \Phi + \Phi_0 + f(\Phi) - Fr^{-2}t(y - H) - Fr^{-2}\int_0^t h(s)ds$$
(4)

$$F(\Phi) = \int_{0}^{t} \dot{h}(s) \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, s) ds - 0.5 \int_{0}^{t} \left(\nabla \Phi\right)^{2}(x, y, s) ds \tag{5}$$

$$U(\Phi) = -0.5 \int_{0}^{t} (\nabla \Phi)^{2} (x, H - h(t), t) dt$$
(6)

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам:

$$t' = \frac{a}{v_0} \cdot t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = av_0\Phi, \quad p' = \rho v_0^2 p, \quad v_0 = -V_y$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями: X = x, Y = y + h(t).

Здесь и далее используются следующие обозначения:  $\Phi(x, y, t)$  — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат;  $\Omega(t)$  — область, занятая жидкостью;  $S_1 = S_{11}(t) \cup S_{12}(t)$  поверхность цилиндра, причем  $S_{11}(t) = \{c(t) \leq |x| \leq 1, y = \varepsilon\} \cup \{-1 \leq x \leq 1, y = -\varepsilon\} \cup \{x = \pm 1, -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon\}$  — часть поверхности, на которой не происходит отрыва частиц жидкости, а  $S_{12}(t) = \{y = \varepsilon, -c(t) < x < c(t)\}$  — зона отрыва;  $x = \pm c(t), y = \varepsilon$  — координаты точек отрыва;  $\overline{V} = (0, V_y)$  — скорость, приобретенная цилиндром в результате удара;  $\dot{h}(t)$  — проекция безразмерной скорости движения цилиндра после удара на ось y ( $\dot{h}(t) = -1$ ); 2a, 2b — длины горизонтальной и вертикальной сторон прямоугольника;  $Y = -H_b, X = \pm H_R$  — дно и стенки бассейна; H — глубина погружения цилиндра в начальный момент времени; R радиус-вектор с координатами (x, y) (начало координат находится в центре прямоугольника, ось y направлена вертикально вверх). Картина течения жидкости является симметричной относительно оси y.

Задача (1)–(6) содержит следующие безразмерные параметры:

$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2\frac{p_a - p_c}{\rho v_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}$$

где Fr — число Фруда;  $p_a$  — атмосферное давление,  $p_c$  — давление в каверне;  $\chi$  — число кавитации (разность давлений, отнесенная к плотности кинетической энергии); g — ускорение свободного падения;  $\varepsilon$  — отношение сторон прямоугольника.

201

Остановимся на объяснении физического смысла краевых условий типа неравенств в (2)–(3). Динамические краевые условия в зонах контакта и отрыва (вторые формулы в (2)-(3)) получены путем интегрирования по времени от 0 до t физических условий для давления p, записанных с помощью интеграла Коши-Лагранжа. Первое из этих условий является следствием физического неравенства  $p \ge p_c$ . Его справедливость при малых числах Фруда (при малых скоростях движения цилиндра) подтверждается результатами асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах и корректностью математической постановки линеаризованной модели  $(F(\Phi) = 0, U(\Phi) = 0)$ . Отметим, что по своей структуре линеаризованная модель совпадает с классической задачей об ударе с отрывом, для которой доказана теорема существования и единственности решения. Для нелинейной модели (1)–(6) такой теоремы нет. Однако, при ее решении методом шагов по времени, на каждом шаге возникает корректная математическая задача. Второе динамическое условие, имеющее вид равенства (формула (3)), вполне равносильно требованию  $p = p_c$  в зоне отрыва. При его выводе существенно используется предположение о сближении точек отрыва. Здесь следует обратить внимание на то, что данное граничное условие формулируется для момента времени t, а интегрирование происходит по времени от 0 до t при фиксированной точке, принадлежащей зоне отрыва  $S_{12}(t)$ . Так как при уменьшении времени зона отрыва увеличивается, то точка, принадлежащая этой зоне в момент времени t, принадлежала ей и раньше, для всех времен, меньших t. Теперь объясним смысл кинематических условий в виде равенства и неравенства (первые формулы (2)-(3)). Первое из них является обычным условием безотрывного обтекания в зоне контакта. Для объяснения второго условия заметим, что поскольку форма внутренней свободной границы принимается близкой к горизонтальной ( $y = \varepsilon$ ), то можно считать, что жидкая частица, находящаяся на ней, фактически лежит на стороне прямоугольника. В этом случае кинематическое условие в виде неравенства будет означать, что жидкая частица не может входить внутрь твердого тела.

2. Численная реализация. Существенное отличие математической модели (1)-(6) от линеаризованной модели, предложенной в [2], заключается в том, что после учета нелинейных слагаемых (5)-(6) время уже не входит в задачу как параметр. Поэтому для ее решения применяется метод шагов по времени в сочетании со специальным итерационным методом решения задач со свободными границами. Заменяя в (5)-(6) интегралы на конечные суммы с помощью формулы левых прямоугольников, получим на k-м шаге итерационного процесса следующую задачу со свободной границей:

$$\Delta \Phi_k = 0, \quad R \in \Omega(t_k); \qquad \Phi_k = U_k, \quad y = H + t_k \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = -n_y, \quad G_k \ge 0, \quad R \in S_{11}(t_k) \tag{8}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \ge -n_y, \quad G_k = 0, \quad R \in S_{12}(t_k)$$
(9)

$$G_k = 0.5\chi t_k - \Phi_k + \Phi_0 + F_k - Fr^{-2}(y - H)t_k + 0.5t_k^2 Fr^{-2}$$
(10)

Динамика точек отрыва

$$F_k = -\tau \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial \Phi_m}{\partial y} - 0.5\tau \sum_{m=0}^{k-1} \left(\nabla \Phi_m\right)^2 \tag{11}$$

$$U_k = -0.5\tau \sum_{m=0}^{k-1} (\nabla \Phi)^2 (x, H + t_m, t_m)$$
(12)

где  $\Phi_k = \Phi(x, y, t_k), \quad \tau = t_k - t_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$ 

Начальное приближение в этом итерационном процессе соответствует классической модели удара с отрывом. Далее, для решения задачи (7)-(12) при каждом фиксированном k, применяется специальный итерационный метод, в котором последовательно уточняются неизвестные заранее зоны отрыва и контакта частиц жидкости. Задача с граничными условиями типа неравенств сводится к последовательному решению линейных краевых задач с фиксированным разбиением границы тела на области задания краевых условий типа Дирихле — Неймана. Последние задачи решаются численно методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++. Подробное изложение этого метода приводится в работах, посвященных начальному этапу движения твердых тел в жидкости с учетом явления кавитации [3].

Численные расчеты, проведенные на основе модели (1)–(6) в случаях, когда  $F(\Phi) = 0, U(\Phi) = 0$  (линеаризованная модель) и  $F(\Phi) \neq 0, U(\Phi) \neq 0$  (нелинейная модель), сравниваются с результатами асимптотического анализа полной нелинейной модели на малых временах. Для точки отрыва прямоугольного цилиндра  $x = c(t), y = \varepsilon$  справедлива асимптотическая формула:

$$c(t) = c_0 + c_1 t + o(t), \quad t \to 0$$

где коэффициенты  $c_0$  и  $c_1$  находятся численно. Последняя формула может быть получена после некоторой модификации асимптотического метода, предложенного в статьях, посвященных удару кругового цилиндра. Обзор соответствующих работ приводится в [3].

Результаты сравнения для величины c(t) при Fr = 0.5,  $\chi = 0$ ,  $\varepsilon = 0.1$ , H = 1,  $H_b = 3$ ,  $H_R = 4$  приведены в таблице 1. Во второй строке таблицы представлены результаты, найденные по приведенной выше асимптотической формуле, где  $c_0 = 0.86$ ,  $c_1 = -1.90$ . Третья и четвертая строки содержат результаты, полученные на основе решения задачи (1)–(6) при  $F(\Phi) = 0$ ,  $U(\Phi) = 0$  и  $F(\Phi) \neq 0$ ,  $U(\Phi) \neq 0$  соответственно.

t	0	0.05	0.1	0.15	0.18
асимптотики	0.86	0.76	0.66		
линейная	0.86	0.75	0.60	0.35	0.09
нелинейная	0.86	0.73	0.56	0.29	0

Таблица 1

На основании проведенных сравнений можно сделать следующие выводы. Вопервых отметим, что асимптотическая формула оказывается эффективной на промежутке времени, равном примерно половине времени схлопывания тонкой каверны. Таким образом, можно считать, что в указанном диапазоне точка отрыва

203

движется по линейному закону. После этого ее движение происходит с ускорением, причем к моменту схлопывания скорость заметно возрастает. Другой вывод состоит в том, что нелинейные слагаемые в модели (1)-(6) проявляют себя только к моменту схопывания тонкой каверны и на определение момента схлопывания практически не влияют. При уменьшении числа Фруда влияние нелинейных слагаемых становится менее заметным. Таким образом, при  $Fr \leq 0.5$ , линеаризованную модель можно рекомендовать для изучения процесса схлопывания тонкой каверны и приближенного определения времени схлопывания. Также отметим, что более детальный анализ задачи при малых числах Фруда показывает, что уменьшение зоны отрыва сопровождается некоторым подьемом вутренней свободной границы жидкости. Это дает возможность смоделировать процесс схлопывания с учетом деформации внутренней свободной границы и, таким образом, получить полное решение проблемы образования и схлопывания каверны при малых числах Фруда. Поскольку нелинейные слагаемые в модели не оказывают существенного влияния на динамику точек отрыва, то при использовании линеаризовнной модели размерную скорость движения прямоугольного цилиндра не обязательно выбирать очень маленькой. Но при этом она должна быть такой, чтобы можно было пренебречь деформациями свободных границ жидкости. Можно считать, что рассмотренный в настоящей работе пример соответствует следующим конкретным физическим ситуациям:  $v_0 = 0.5$  м/с,  $a \approx 0.1$  м,  $b \approx 0.01$  м или  $v_0 = 1$  м/с,  $a \approx 0.4$  м,  $b \approx 0.04$  м.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
- [2] *Норкин М. В.* Динамика точек отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 5. С. 19–27.
- [3] *Норкин М. В.* Образование каверны при наклонном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 81–92.

**Norkin M.V.** Dynamics of separation points during impact of a floating rectangular cylinder. The 2D problem of the separation impact of a rectangular cylinder completely immersed in an ideal, incompressible, heavy liquid, is investigated. A feature of this problem is that as a result of the impact, the liquid is separated from the solid surface with the subsequent formation of an attached cavity behind the body. The aim of the work is to study the process of collapse of a thin cavity at low cylinder velocities corresponding to small Froude numbers.

## ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С БАРЬЕРАМИ В ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННОМ ПОРОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

## Петров А. Н., Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Ипатов А. А.

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Представлены результаты численного моделирования поверхностных волн на пороупругом полупространстве при наличии волнового барьера в виде незаполненной траншеи. Компьютерное моделирование проведено методом граничных элементов на основе граничных интегральных уравнений прямого подхода трехмерной изотропной теории пороупргости в преобразованиях по Лапласу. Пороупругая среда описывается моделью Био для частично насыщенного пороупругого материала. Решение во времени получено с помощью шагового метода численного обращения преобразования Лапласа. Построены динамические отклики перемещений от действия силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхность полупространства при различных значениях глубины траншеи.

#### 1. Введение.

Барьеры в виде открытых либо заполненных материалом траншей прямоугольной формы являются одной из реализаций защиты сооружений от воздействия поверхностных волн, несущих около 70% энергии сейсмических вибраторов. Работы по этой теме, содержащие результаты теоретических расчётов, физических экспериментов и численного моделирования, сволятся чаще всего к исследованию рассеяния поверхностных волн от излучателя типа вертикального штампа, расположенного за пределами барьера. Цель этих исследований состоит в поиске физических и геометрических параметров, обеспечивающих наиболее эффективное рассеяние поверхностных волн. Большая часть работ по вертикальным барьерам связана с построением плоских моделей и решением соответствующих волновых задач с помощью метода конечных элементов. Моделирование поверхностных волн методами конечных и граничных элементов в двумерных и трехмерных задачах проведено в работах [1–8], но в рамках упругой и вязкоупругой моделей среды. Результаты исследований с использованием модели полностью насыщенной попроупругой среды в двумерных задачах приведены в [9, 10]. В работе [11] представлены результаты моделирования динамики частично насыщенного пороупругого полупространства с открытой траншеей методом граничных элементов с дискретизацией по времени методом квадратур сверток.

Цель настоящей работы состоит в проведении численного моделирования поверхностных волн на поверхности пороупругого полупространства при наличии волнового барьера в виде незаполненной траншеи с использованием граничноэлементного методического и программного обеспечения на основе шагового метода численного обращения интегрального преобразования Лапласа.

## 2. Модели и методы.

Для описания пороупругой сплошной среды используется математическая модель материала, в котором выделяется твердая фаза, представляющая собой упругий формообразующий скелет и воспринимающая основную силовую нагрузку, и две текучих фазы — жидкость и газ, заполняющие систему пор [11]. Пороупругая постановка позволяет учитывать втекание или вытекание наполнителя в любую область, формируемую порами. Это особенно важно учитывать при рассмотрении волновых процессов, т.к. вклад динамического поведения жидкости принципиально меняет их картину. Применение преобразования Лапласа позволяет записать уравнения динамики пороупругой среды в виде краевой задачи относительно неизвестных функций перемещений упругого скелета и поровых давлений наполнителей. Решения во времени получаются с использованием шагового метода численного обращения преобразования Лапласа, опирающегося на квадратурные формулы для интеграла, получаемого из теоремы операционного исчисления об интегрировании оригинала [12]. В качестве метода решения используется прямой подход метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), соответствующих исходной трехмерной краевой задаче математической теории пороупругости. Для решения ГИУ применяется метод граничных элементов в сочетании с методом коллокации, локальной поэлементной аппроксимацией на основе согласованной модели интерполирования Гольдштейна [13].

#### 3. Численный пример.

Рассмотрена задача о действии нагрузки в виде функции Хевисайда по времени на поверхность пороупрого полупространства с незаполненной траншеей (рисунок 1) при следующих значениях геометрических параметров: r = 6 м, l = 12 м, w = 1 м,  $d_1 = d_2 = 1$  м. Поверхность полупространства, за исключением нагружаемого участка, и граница траншеи свободны от усилий. Также на всей на границе задано нулевые поровые давления. Параметры модели пороупрого материала полупространства соответствуют водонасыщенному песку:  $\phi = 0.23$ ,  $K = 1.02 \cdot 10^9$  Па,  $G = 7.2 \cdot 10^9$  Па,  $K_s = 3.6 \cdot 10^{10}$  Па,  $K_f = 3.3 \cdot 10^9$  Па,  $\rho_s = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_f = 997$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_a = 1.10$  кг/м<sup>3</sup>,  $k = 2.5 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>,  $\eta_f = 1, 0 \cdot 10^{-3}$  Па·сек,  $\eta_a = 1.8 \cdot 10^{-5}$  Па·сек.



Рисунок 1 – Схема задачи и геометрические параметры

Оценка влияния траншеи на динамический отклик поверхностных перемеще-

ний проведена на основе значений коэффициента уменьшения амплитуды  $A_{rf}$ , определяемого как отношение амплитуды перемещений в случае наличия траншеи, к амплитуде перемещений в случае ее отсутствия —

$$A_{rf} = \frac{A_{\rm c \ траншеей}}{A_{\rm без \ траншеи}}.$$

При этом значение амплитуды вычислялось по формуле



Рисунок 2 – Тепловая карта коэффициента уменьшения амплитуды при глубине транше<br/>и 1 м



Рисунок 3 – Тепловая карта коэффициента уменьшения амплитуды при глубине транше<br/>и 2 м

На рисунках 2–4 представлены тепловые карты коэффициента  $A_{rf}$  при различных глубинах траншеи. Видно, что при глубине траншеи 1 м и 2 м область, где коэффициент  $A_{rf}$  не превышает 1, расположена главным образом за траншеей.



Рисунок 4 – Тепловая карта коэффициента уменьшения амплитуды при глубине траншеи 3 м

При глубине 3 м эта область расширяется уже на пространство перед траншеей, сокращаясь вместе с тем непосредственно за ней. В то же время область, где коэффициент  $A_{rf}$  больше 10, значительно сокращается всюду. В данном случае использование незаполненной траншеи в качестве барьера является, как видно из полученных результатов, эффективным способом защиты от воздействия поверхностных волн. Для более полного представления о возникающих эффектах требуется проведение общирных исследований с различными видами динамических нагрузок и геометрии

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации (договор № 14.У26.31.0031).

## ЛИТЕРАТУРА

- Emad K., Manolis G. D. Shallow trenches and propagation of surface waves // J. Eng. Mech. 1985. № 111. P. 279–282.
- Beskos D. E., Dasgupta B., Vardoulakis I. G. Vibration isolation using open or filled trenches, part 1: 2-D homogeneous soil // Comput. Mech. 1986. № 1. P. 43– 63.
- [3] Leung K. L., Beskos D. E., Vardoulakis I. G. Vibration isolation using open or filled trenches - Part 3: 2-D non-homogeneous soil // Comput. Mech. 1990. № 7. P. 137–148.
- [4] Ahmad S., Al-Hussaini T. M. Design of waves barriers for prediction of horizontal ground vibration // J. Geotech. Eng. 1991. № 117. P. 67–88.

- [5] Banerjee P. K, Ahmad S., Chen K. Advanced application of BEM to wave barriers in multi-layered three-dimensional soil media // Earthq. Eng. Struct. Dynam. 1988. № 16. P. 1041–1060.
- [6] Dasgupta B., Beskos D. E., Vardoulakis I. G. Vibration isolation using open or filled trenches. Part 2: 3-D homogeneous soil // Comput. Mech. 1990. № 6. P. 129– 142.
- [7] Kattis S. E., Polyzos D., Beskos D. E. Vibration isolation by a row of piles using a 3-D frequency domain BEM // Int. J. Numer. Methods. Eng. 1999. № 46. P. 713– 728.
- [8] Tsai P. H., Chang T. S. Effects of open trench siding on vibration-screening effectiveness using the two-dimensional boundary element method // Soil Dynam. Earthq. Eng. 2009. № 29. P. 865–873.
- [9] Andersen L., Nielsen S. R. K. Reduction of ground vibration by means of barriers or soil improvement along a railway track // Soil Dynam. Earthq. Eng. 2005. № 25. P. 701–716.
- [10] Francois S., Schevenels M., Galvin P., Lombaert G., Degrande G. A 2.5D coupled FE-BE methodology for the dynamic interaction between longitudinally invariant structures and a layered halfspace // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2010. № 199. P. 1536–1548.
- [11] Li P., Schanz M. Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity // Eng. Anal. Bound. Elem. 2013. № 37(11). P. 1483– 1498.
- [12] Белов А. А., Игумнов Л. А., Петров А. Н. Шаговый анализ влияния коэффициента насыщенности на динамические поровые отклики // Проблемы прочности и пластичности. 2017. № 4. С. 425–436.
- [13] Баженов В. Г., Игумнов Л. А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

Petrov A. N., Igumnov L. A., Litvinchuk S. Yu., Ipatov A. A. Boundary element analysis of the surface waves interaction with barriers in a partially saturated poroelastic halfspace. BE-modeling of surface waves on a poroelastic half-space in the presence of a barrier in the form of a non-filled trench is considered. Computer modeling was done using the boundary-element method, based on integral equations of the direct approach of the 3D isotropic poroelasticity theory in Laplace transforms. The poroelastic medium is described using Biot's model for a partially saturated poroelastic material. A solution in time was obtained using the stepped method of numerical inversion of the Laplace transform. Dynamic responses of displacements as a function of force in the form of Heaviside time functions acting upon the surface of the half-space for various trench depths are constructed.

# КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ И СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

## Пожарский Д. А.<sup>1</sup>, Золотов Н. Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону <sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются контактные задачи теории упругости для неоднородного по радиальной координате (переменный коэффициент Пуассона) или составного цилиндра бесконечной длины, а также для пространства с цилиндрической шахтой. Обобщается задача Ламе о действии заданного давления, что позволяет изучать контакт с пригрузкой. В случае гладкого контакта применяются асимптотические методы. Для контакта при учете сил трения и шероховатости используется метод коллокаций.

При решении статических и динамических контактных задач теории упругости для неоднородных цилиндрических тел преимущественно применялись методы коллокаций, конечных элементов, обобщенный метод фиктивного поглощения [1]. В настоящей работе выбран специальный вид неоднородности материала, при котором функции-символы ядер интегральных уравнений (ИУ) статических контактных задач удается получить в аналитической форме, проанализировать их асимптотику и применить асимптотические методы. Рассматриваются контактные задачи для неоднородных упругих сплошных и полых цилиндров бесконечной длины, взаимодействующих с жестким бандажом или вкладышем конечной длины. Материал цилиндра характеризуется переменным коэффициентом Пуассона (при этом модуль Юнга также является переменным) по радиальной координате. При помощи интегрального преобразования Фурье задачи сведены к ИУ относительно контактных давлений. Для решения используются регулярный и сингулярный асимптотические методы, эффективные для относительно коротких и длинных участков контакта соответственно. Обобщено решение классической задачи Ламе о действии заданного равномерного давления на стенки полого цилиндра на случай указанного типа неоднородности материала. Показана связь между решениями задач Ламе для однородного или неоднородного полого цилиндра и решениями соответствующих контактных задач для достаточно длинного бандажа или вкладыша.

В условиях осевой симметрии, используя цилиндрические координаты (r, z), рассмотрим полый упругий цилиндр  $\rho_1 \leq r \leq \rho$ ,  $|z| < \infty$  с постоянным модулем сдвига G и переменным коэффициентом Пуассона  $\nu(r)$ . В задаче A снаружи на цилиндр посажен жесткий кольцевой бандаж, в задаче Б внутрь цилиндра вставлен жесткий кольцевой вкладыш. В обеих задачах задан натяг  $\delta$ , ширина области контакта 2*a*. Вне области контакта поверхность цилиндра  $r = \rho$  (A) или  $r = \rho_1$ (Б) свободна от напряжений. На поверхности цилиндра  $r = \rho_1$  (A) или  $r = \rho$ (Б) действует заданное равномерно распределенное давление. Для учета вклада этого давления в нормальное перемещение в области контакта получено точное решение аналога задачи Ламе [2] для указанного вида неоднородности. Требуется определить контактное давление  $\sigma_r(\rho, z) = -q(z)$  (A) или  $\sigma_r(\rho_1, z) = -q(z)$  (Б) при  $|z| \leq a$ . Для неоднородности выбранного типа фундаментальные решения линейной теории упругости находятся при помощи представления Фрайбергера: возникает векторное уравнение Лапласа и скалярное уравнение Пуассона, правая часть которого зависит от коэффициента Пуассона. В результате применения интегрального преобразования Фурье контактные задачи A и Б в предположении симметрии по z сводятся к ИУ вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi f \ (|x| \leqslant 1), \quad K(t) = \int_{0}^{\infty} L(u) \cos(ut) du, \tag{1}$$

где введены безразмерные обозначения

$$x = z/a, \quad \lambda = \rho/a, \quad \varphi(x) = q(z)/(2G),$$

величина f характеризует натяг и заданное равномерное давление, функция L(u) зависит от задачи (A, Б), закона неоднородности и величины  $k = \rho_1/\rho$ .

Задача A при  $\rho_1 = 0$  и отсутствии заданного внутреннего давления соответствует задаче B для сплошного неоднородного цилиндра, которая также сводится к уравнению (1). Случаи однородного полого или сплошного цилиндра являются частными случаями задач A, Б и B.

Безразмерные параметры  $\lambda$  и k характеризуют соответственно относительную длину бандажа или вкладыша и относительную толщину стенок цилиндра. При достаточно малых значениях  $\lambda$  (для относительно широких бандажей или вкладышей) для решения задач А, Б и В применен сингулярный асимптотический метод [3, 4]: решение уравнения (1) складывается из вырожденного (проникающего) решения и решений типа погранслоя, несущих корневые особенности на краях области контакта и находящихся в результате решения уравнений Винера — Хопфа. Для эффективной факторизации функций-символов ядра (1) для них построены специальные аппроксимации на действительной оси с учетом их асимптотического поведения. В задачах А и Б найдены численные аппроксимации и асимптотические решения для значений 0  $\leq k \leq 0.99$ , включающих случаи тонкостенных цилиндров.

При достаточно больших значениях  $\lambda$  (для относительно узких бандажей) для решения задачи В применен регулярный асимптотический метод [3]: решение уравнения (1) ищется в виде ряда по степеням  $1/\lambda$ . Численно установлена стыковка сингулярного и регулярного асимптотических решений в определенном диапазоне изменения параметра  $\lambda$ .

Исследовано влияние неоднородности, толщины цилиндра и ширины области контакта на распределение контактных давлений.

Также в условиях осевой симметрии исследуется контактная задача Г для сплошного неоднородного упругого цилиндра при учете сил трения и шероховатости в зоне контакта (переменный по радиальной координате коэффициент Пуассона). Рассматривается осесимметричная контактная задача Д для неоднородного упругого пространства с цилиндрической полостью при учете сил трения и шероховатости в области контакта. Задачи Г и Д сводятся к ИУ вида

$$A\varphi(x) + \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi f \ (|x| \le 1), \ K(t) = \int_{0}^{\infty} L(u) \cos(ut) du, \quad (2)$$

где параметр A характеизует уровень шероховатости упругой поверхности. Для численного решения уравнения (2) применяется метод коллокаций.

В условиях осевой симметрии изучается контактное взаимодействие составного полого упругого цилиндра (скользящая заделка между слоями) с жестким бандажом. Двухслойный цилиндр может находиться под действием заданного равномерного внутреннего (дополнительного внешнего) давления. Обобщается задача Ламе о действии заданного равномерного давления. Выводится интегральное уравнение контактной задачи Е и строится асимптотическое решение для разных пар материалов и относительных толщин цилиндрических слоев. Также в условиях осевой симметрии рассматривается контактное взаимодействие составного полого упругого цилиндра (скользящая заделка между слоями, задача Ж) с вставленной в него с натягом жесткой цилиндрической втулкой. Выводятся ИУ задач Е и Ж типа (1) и конструируются асимптотические решения для разных пар материалов и относительных толщин цилиндрическия слоев.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00017).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калинчук В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 316 с.
- [2] *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
- [3] Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. Three-dimensional contact problems. Dordrecht: Kluwer, 2001. 406 p.
- [4] Пожарский Д. А., Золотов Н.Б. Контактные задачи для полых цилиндров из неоднородного материала // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. № 6. С. 130–138.

**Pozharskii D. A., Zolotov N. B.** Contact problems for inhomogeneous and composed cylindrical bodies. The theory elasticity contact problems are considered for a continuous or hollow, inhomogeneous with respect to radial coordinate (variable Poisson's ratio) or composed cylinder of infinite length as well as for for a space with cilidrical mine. The Lamé problem on action of a given pressure has been generalized which allows us to research the contact with an extra loading. The asymptotic methods are applied for the frictionless contact. The collocation method is used for the contact when friction forces and roughness are taken into account.

## ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ПРОФИЛЕМ СТЕНОК

## Полякова Н.М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

На основе асимптотической модели исследовано стационарное турбулентное вращательно-симметричное течение жидкости в бесконечном цилиндре с неровными стенками. В основу модели положены уравнения, полученные на основе уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Кинематическая вязкость жидкости предполагается зависящей от осевой и радиальной координат и обращающейся в нуль на боковой поверхности цилиндра, что типично для турбулентных течений. При таком выборе вязкости на боковых границах цилиндрической области возникают сингулярности горизонтальной скорости течения, для ликвидации которых в окрестности боковой поверхности вводится фиктивная поверхность (шероховатости стенок). Условие прилипания жидкости на непрямолинейных участках границ заменяется кинематическим условием, соответствующим непроницаемости границ. Отсутствие нелинейных и инерциальных членов в уравнениях асимптотической модели позволяет построить аналитическое решение. При больших величинах средней осевой скорости при достаточно гладких неровных стенках в стационарном течении образуются пристеночные вихри. Строго показано, что возникновение тороидальных пристеночных вихрей происходит при любом выборе вязкости, при котором на боковой границе цилиндра возникает сингулярность скорости.

1. Введение. При исследовании турбулентных течений достаточно часто считается, что коэффициент кинематической вязкости жидкости зависит от пространственных координат. Для цилиндрической области в предположении вращательной симметрии такая зависимость записывается в форме  $\mu = \mu(r^2, z)$ , где r радиальная координата, а z — осевая координата. В простейшем варианте

$$\mu(r,z) = \mu_0(\eta^2(z) - r^2), \quad \mu(\eta^2,\eta) = 0, \tag{1}$$

где  $\eta(z)$  — задает поверхность цилиндра  $r = \eta(z)$ , а  $\mu_0$  — характерная вязкость.

Указанная зависимость достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными (см., например, [1, гл. 20]), и в случае (1) профиль осевой скорости течения является логарифимическим по переменной z, типичным для турбулентных течений (см., например, [1, гл. 20]). Дополнительное условие  $\mu(\eta^2, \eta) = 0$ , накладываемое на вязкость автоматически приводит к исчезновению касательных напряжений на границе области. Однако, при выполнении такого условия возникает сингулярность скорости на границе области. Для устранения сингулярности область  $0 \leq r \leq \eta(z)$ , в которой происходит течение жидкости, заменяется некоторой фиктивной областью  $0 \leq r \leq h(z), h(z) = \eta(z) - \delta(z)$ , где функция  $\delta(z)$  характеризует толщину «шероховатости» границы (см. рисунок. 1).



Рисунок 1 – Схема области

2. Основные уравнения и асимптотическая модель. Вращательно-симметричное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений в безразмерных переменных (см., например, [2]), записанных в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  в предположении отсутствия азимутальной скорости (v = 0) и зависимости от азимутального угла  $\theta$  ( $\partial_{\theta} = 0$ )

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, (2)$$

$$u_{t} + uu_{r} + wu_{z} = -p_{r} + (\operatorname{div} \mathbb{T})^{r}, \quad w_{t} + uw_{r} + ww_{z} = -p_{z} + (\operatorname{div} \mathbb{T})^{z},$$
  

$$(\operatorname{div} \mathbb{T})^{r} = \frac{1}{r} (r\mathbb{T}^{rr})_{r} + (\mathbb{T}^{rz})_{z} - \frac{1}{r} (\mathbb{T}^{\theta\theta}), \quad (\operatorname{div} \mathbb{T})^{z} = \frac{1}{r} (r\mathbb{T}^{rz})_{r} + (\mathbb{T}^{zz})_{z},$$
  

$$\mathbb{T} = \mu(r, z)e,$$
  

$$e^{rr} = 2u_{r}, \quad e^{\theta\theta} = \frac{2u}{r}, \quad ^{zz} = 2w_{z}, \quad e^{r\theta} = 0, \quad e^{z\theta} = 0, \quad e^{rz} = u_{z} + w_{r},$$

где u, w — радиальная и осевая скорости, p — давление,  $e, \mathbb{T}$  — тензоры деформаций и вязких напряжений,  $\mu(r, z)$  — кинематическая вязкость жидкости.

Замена переменных

$$u \to \varepsilon u, \quad r \to \varepsilon r, \quad p \to \frac{1}{\varepsilon} p, \quad \mu \to \varepsilon \mu,$$
 (3)

где  $\varepsilon$  — малый параметр (отношение характерного радиуса цилиндра к характерному размеру области в осевом направлении), с последующим разложением в ряды по  $\varepsilon$ , позволяет получить главные асимптотические члены уравнений

$$0 = -p_z + \frac{1}{r}(\mu r w_r)_r, \quad p_z = p_z(z, t),$$
(4)

$$(ru)_r + (rw)_z = 0,$$
 (5)

которые записаны для квазистационарного случая, когда безразмерное время O(t) = 1 и инерциальные члены исчезают при  $\varepsilon \to 0$ , но сохраняется зависимость от времени —  $u = u(r, z, t), w = w(r, z, t), p_z = p_z(z, t)$ . Конечно, t играет роль параметра и может быть опущено.

Уравнения (2) рассматриваем в области

$$\mathbb{C} = \{ (r, z) \colon 0 \leqslant r \leqslant h(z), \quad -\infty < z < -\infty \}, \quad h(z) = \eta(z) - \delta(z), \tag{6}$$

где  $\delta > 0$  — функция, характеризующая шероховатость стенок [1, гл. 20], h(z) — реальный радиус области, в которой происходит течение(см. рисунок. 1).

Введем функцию тока, которая позволяет автоматически удовлетворить уравнение неразрывности (5), при помощи соотношений

$$ru = -\psi_z, \quad rw = \psi_r. \tag{7}$$

Уравнения (4)–(7) дополним условиями на оси цилиндра

$$u(0,z) = 0, \quad w_r(0,z) = 0, \quad \psi(0,z) = 0,$$
(8)

и кинематическим условием на границе

$$\psi(h(z), z) = Q, \tag{9}$$

которое соответствует отсутствию нормальной компоненты скорости на границе z = h(z), где значение Q — расход жидкости, задаваемый соотношением

$$Q = \int_{0}^{h(z)} rw(r,z) dr = \int_{0}^{h(z)} \psi_r(r,z) dr = \psi(h(z),z).$$
(10)

Заметим, что с учетом непроницаемости стенок цилиндра и уравнения неразрывности, расход жидкости является постоянным и определяется как

$$Q = \psi(h(\infty), \infty) = \text{const.}$$
(11)

**3.** Решение задачи. В случае вязкости, определяемой формулой (1) решение линейной задачи (4)—(11) легко строится

$$\psi(r,z) = \frac{1}{8}p_z \left( (\eta^2 - r^2) \ln \frac{\eta^2 - r^2}{\eta^2} - \frac{r^2(\eta^2 - h^2)}{h^2} \ln \frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2} \right) + \frac{Qr^2}{h^2}.$$
 (12)

Радиальная и азимутальная скорость имеют вид

$$w(r,z) = -\frac{1}{4}p_z \left(\ln\frac{\eta^2 - r^2}{\eta^2} + 1 + \frac{(\eta^2 - h^2)}{h^2}\ln\frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2}\right) + \frac{2Q}{h^2},$$
(13)

$$u(r,z) = -\frac{1}{r}(\psi_h(r,z)h_z(z) + \psi_\eta(r,z)\eta_z(z)),$$
(14)

$$\psi_{\eta}(r,z) = \frac{1}{4} p_z \eta \left( \ln \frac{\eta^2 - r^2}{\eta^2} - \frac{r^2}{h^2} \ln \frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2} \right),$$
(15)  
$$\psi_h(r,z) = \frac{1}{4} p_z \frac{r^2}{h} \left( \frac{\eta^2}{h^2} \ln \frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2} + 1 \right) - \frac{2Qr^2}{h^3}.$$

Здесь аргументы функций  $\eta(z)$ , h(z) опущены для краткости. Радиальная скорость представлена в виде нескольких формул, во-первых, по причине громоздкости, а во-вторых, для того, чтобы подчеркнуть линейную зависимость u(r, z) от производных. В частности, в случае постоянных границ  $h(z) = \text{const}, \eta(z) = \text{const}$ радиальная скорость u(r, z) = 0. Полякова Н.М.

Обратим внимание на то, что условия прилипания на границе не ставятся — они заменены кинематическим условием. В принципе, такой подход можно объяснить, как постановку вместо условий прилипаний условия проскальзываний Навье (см., например, [4, 5], и краткий обзор в [6, с. 37–40]).

Заметим также, что если выполнено условие  $p_z(t) = p_z^*$ , где

$$p_z^* = \frac{8Q}{h_\infty^2 + \eta_\infty^2 \ln \frac{\eta_\infty^2 - h_\infty^2}{\eta_\infty^2}},$$
(16)

то на сегментах границы, удовлетворяющих условиям  $h(z) = \text{const}, \eta(z) = \text{const},$ в частности,  $z = \infty$ , условия прилипания выполнены, то есть

$$w(h_{\infty}, \infty) = 0, \quad \eta_{\infty} = \eta(\infty), \quad h_{\infty} = h(\infty).$$
 (17)

**4. Структура течения.** Структура течения может быть легко описана при помощи исследования фазового портрета системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = u(r, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(r, z), \tag{18}$$

стационарные точки которой определяются соотношениями

$$u(r_k, z_k) = 0, \quad w(r_k, z_k) = 0.$$
 (19)

Сформулируем основной результат.

**Утверждение.** Пусть  $p_z = p_z^*$ , то есть условия прилипания выполнены на бесконечности. Тогда, если выполнено неравенство  $h_{zz}(z_k) < 0$  и стационарные точки  $(r_k, z_k)$  лежат в области  $\mathbb{C}$ , то существуют тороидальные вихри с центрами в точках  $(r_k, z_k)$ .

Это утверждение справедливо для почти произвольной вязкости, а не только вязкости, задаваемой формулой (1).

Для доказательства следует ввести новую переменную

$$s = r^2, \quad \partial_r = 2r\partial_s.$$
 (20)

и записать уравнения (18) в гамильтоновой форме

$$\frac{ds}{dt} = -2\psi_z(s, z), \quad \frac{dz}{dt} = 2\psi_s(s, z), \quad H(s, z) = 2\psi(s, z),$$
(21)

где H(s, z) — гамильтониан.

Для определения функции  $\psi(s, z)$  в новых переменных (s, z) имеем задачу

$$\psi_{ss}(s,z) = \frac{1}{8} p_z \frac{1}{\mu(s,\eta(z))}, \quad \mu(s,\eta(z)) = \mu(s,z),$$
(22)

$$\psi(0,z) = 0, \quad \psi(h^2(z),z) = Q,$$
(23)

где для вязкости используется запись  $\mu(s, \eta(z))$ , чтобы подчеркнуть ее зависимость от функционального параметра  $\eta(z)$ .
Решение задачи (22), (23) имеет вид

$$\psi(s,z) = \frac{1}{8}p_z\varphi(s,z) - \frac{1}{8}p_z\frac{s}{h^2}\varphi(h^2,z) + \frac{Qs}{h^2}, \quad \varphi(s,z) = \int_0^s \frac{(s-s')\,ds'}{\mu(s',\eta(z))}.$$
 (24)

Стационарные точки  $(s_k, z_k)$  функции  $\psi(s, z)$  определяются соотношениями

$$\psi_s(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_z(s_k, z_k) = 0.$$
 (25)

Тип стационарных точек (экстремум или седловая точка) определяется знаком  $\Delta$ 

$$\Delta = \psi_{ss}(s_k, z_k)\psi_{zz}(s_k, z_k) - \psi_{sz}^2(s_k, z_k).$$
(26)

и вторых производных. В случае  $\Delta > 0$ ,  $\psi_{ss} > 0$  имеется минимум, а в случае  $\Delta > 0$ ,  $\psi_{ss} < 0$  — максимум. При  $\Delta < 0$ , стационарная точка является седлом.

Доказательство сформулированного утверждения сводится к вычислениям соответствующих знаков  $\Delta$  и вторых производных.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schlichting H., Gersten K. Boundary Layer Theory. 8th ed. Springer-Verlag, 2000.
- [2] Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics. Pergamon press, Oxford, UK, 1987.
- [3] Жуков М. Ю., Ширяева Е. М. Математическое моделирование процессов седиментации примеси в потоке жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-вщ ЮФУ, 2016. 208 с.
- [4] Belyaev A. V., Vinogradova O. I. Wetting, roughness and flow boundary conditions // J. Phys.: Condens. Matter. 2011. V. 23. P. 184104 (15 p.).
- [5] Lauga E., Brenner M. P., Stone H. A. Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition // arXiv:cond-mat/0501557v3. 2005. P. 1–27. Chapter 19 in: Handbook of Experimental Fluid Dynamics, C. Tropea, A. Yarin, J. F. Foss (Eds.), Springer, 2007.
- [6] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Микрогидродинамика, жидкие пленки и электрофорез. Ростов-на-Дону: Изд-вщ ЮФУ, 2015. 240 с.

**Polyakova N. M.** Rotation-symmetrical turbulent flow in a cylinder with irregular walls. On the basis of an asymptotic model, a stationary turbulent flow of a fluid in an infinite cylinder with irregular walls is studied. The model is based on equations derived from the Navier-Stokes equations for a viscous incompressible liquid. The kinematic viscosity of the liquid is assumed to depend on the axial and radial coordinates and vanish on the side surface of the cylinder, which is typical for turbulent flows. With this choice of viscosity, singularities of the horizontal flow velocity occur at the lateral boundaries of the cylindrical region, to eliminate which a fictitious surface (wall roughness) is introduced in the vicinity of the side surface. The condition of liquid adhesion on non-linear sections of borders is replaced by a kinematic condition corresponding to the impenetrability of borders. The absence of nonlinear and inertial terms in the equations of the asymptotic model allows us to construct an analytical solution. At high values of the average axial velocity, wall vortices are formed in a stationary flow with fairly smooth irregular walls. It is strictly shown that the appearance of toroidal wall vortices occurs at any choice of viscosity, in which a velocity singularity occurs at the boundary of the cylinder.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕОБРАТИМО СЖИМАЕМЫХ СРЕД КУЛОНА — МОРА С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

## Радаев Ю.Н.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Обсуждается новый подход к изучению пространственных течений сжимаемых сред Кулона — Мора, реализующихся как система микроскольжений вдоль так называемых сопряженных к асимптотическим директорам тензора напряжений и приращения тензора деформаций направлений. Среды Кулона — Мора прекрасно моделируют механическое поведение сухих песков, грунтов, а также искусственных гранулированных объектов. Геометрические представления, связанные с асимптотическими директорами тензора напряжений и приращения тензора деформаций и сопряженными с ними направлениями, позволяют достаточно полно исследовать как распределение напряжений, так и кинематическую картину сжимаемых течений сыпучих сред. Получены различные формы математического представления критерия текучести Кулона — Мора в терминах главных нормальных напряжений и соответствующие формулировки ассоциированного закона течения. В ряде случаев установливается гиперболичность кинематических уравнений, моделирующих течения сыпучих сред. В случае течений на грани условия пластичности получены дифференциальные уравнения кинематики течений, связывающие компоненты приращения вектора перемещений относительно сопряженных направлений.

1. Вводные замечания. Механика сыпучих сред, в основе которой лежит идеально пластическая модель Кулона — Мора, является дальнейшим обобщением механики идеально пластических тел [1–5]. Определяющий закон механики сыпучих сред выводится, исходя из единственного физического закона: на площадках скольжения сдвиговые напряжения зависят (вообще говоря нелинейно) от нормальных сжимающих напряжений. В простейшей форме указанный закон был известен уже Кулону (1776 г.), объяснившему разрушение по наклонным плоскостям в сжатых образцах каменной кладки достижением касательными напряжениями в плоскостях сдвига критических значений, превосходящих как сцепление материала, так и трение, зависящее от величины нормального давления. Затем, в 1900 г., Гест ввел критерий, аналогичный предложенному Кулоном. Наконец, в теории Мора (1900 г.) в состоянии скольжения идеально сыпучего материала постоянным принимается отношение наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Все указанные модели в математической теории пластичности объеденены в одну модель Кулона — Мора; в ней в наиболее простой физически приемлемой форме учитывается возможность взаимного трения и сцепления составляющих сыпучую среду частиц.

В представляемой работе приводятся результаты, касающиеся кинематики течений для напряженных состояний соответствующих грани условия текучести Кулона — Мора. Моделирование течений осуществляется на основе ассоциированного закона течения. Полученные результаты допускают обобщение на случай произвольных кусочно-линейных условий пластичности.

**2.** Критерий текучести Кулона — Мора. Ассоциированный закон пластического течения. Обозначим через *σ* тензор напряжений Коши. Рассмотрим его каноническое спектральное представление:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \tag{1}$$

где **l**, **m**, **n** — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  — главные нормальные напряжения (собственные значения тензора напряжений).

Занумеруем главные оси тензора напряжений так, чтобы для актуального напряженного состояния главные нормальные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  расположились бы в порядке убывания

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3. \tag{2}$$

В терминах главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  критерий текучести Кулона — Мора для сыпучих сред с внутренним трением и сцеплением формулируется в следующем виде [3, 6, 7]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \gamma - \sin \gamma \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},\tag{3}$$

где  $c, \gamma$  — определяющие постоянные.

В терминах максимального касательного  $au_{\max}$  и среднего (точно медианного) s напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},\tag{4}$$

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tag{5}$$

критерий текучести Кулона — Мора записывается к форме

$$\tau_{\max} = c \cos \gamma - \sin \gamma s. \tag{6}$$

Наконец, критерий Кулона — Мора (3) можно также привести к следующему виду:

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k,\tag{7}$$

напоминающему по форме критерий текучести Треска.

Материальные постоянные a и k связаны с постоянными c и  $\gamma$  соотношениями

$$a = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}, \quad k = \frac{c \cos \gamma}{1 + \sin \gamma},$$

Если в среде отсутствует внутреннее трение (т.е.  $\gamma \to 0$ ), критерий текучести Кулона — Мора переходит в критерий максимального касательного напряжения Треска

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k. \tag{8}$$

В математической теории пластичности кинематические переменные суть приращения вектора перемещения  $d\mathbf{u}$  и тензора деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ . Следующее геометрическое соотношение связывает приращение тензора деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  с приращением вектора перемещений  $d\mathbf{u}$ :

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}}.$$
(9)

Приращение тензора деформации разложим по каноническому тензорному базису

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}(d\varepsilon_1) + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}(d\varepsilon_2) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}(d\varepsilon_3), \tag{10}$$

где l, m, n — ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений  $\sigma$ , так и для приращения тензора деформации  $d\varepsilon$ ;  $d\varepsilon_1$ ,  $d\varepsilon_2$ ,  $d\varepsilon_3$  — главные приращения (пластической) деформации.

Приращение вектора перемещений  $d\mathbf{u}$  также разложим по векторам локального ортонормированного базиса  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ :

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n}du_{\langle 3 \rangle}.$$
 (11)

Ассоциированный закон пластического течения

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}},\tag{12}$$

где неопределенный множитель  $d\lambda$  неотрицателен, в случае изотропной функции текучести  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  в общем для тензоров  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  триэдре главных осей будет иметь вид

$$d\varepsilon_j = (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \sigma_j}$$
  $(j = 1, 2, 3).$  (13)

Для течений среды Кулона — Мора в силу ассоциированного закона течения находим следующие значения для главных приращений деформации:

$$d\varepsilon_1 = d\lambda, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 = -ad\lambda \qquad (d\lambda > 0).$$
 (14)

3. Кинематические уравнения для течений на грани. Рассмотрим уравнения кинематики пластического течения в том случае, когда напряженное состояние соответствует грани условия пластичности (7). Ассоциированный закон течения (13) устанавливает кинематическое ограничение на второе главное приращение деформации

$$d\varepsilon_2 = 0, \tag{15}$$

которое должно выполняться для всех пространственных течений среды Кулона — Мора.

Введем асимптотические директоры тензора  $d\varepsilon$  (см. [8]). Если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора **m**, то асимптотический директор "l получается в результате поворота собственного вектора l на угол " $\iota/2$  по ходу часовой стрелки, а асимптотический

директор "**n** — поворотом на тот же угол против хода часовой стрелки. Упомянутый угол находится с помощью кинематического параметра Лоде

$$\cos``\iota = -\nu,\tag{16}$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}.$$
(17)

Сопряженные директоры — два направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора  $d\varepsilon$ , которые ортогональны направлениям асимптотических директоров "l, "n. Директор "l ортогонален асимптотическому директору "n, а директор "n ортогонален "l:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{l} = 0, \qquad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{18}$$

Можно показать, что характеристические направления кинематических уравнений совпадают с направлениями сопряженных директоров "l, "n. Дифференциальные соотношения вдоль характеристических линий (расположенных в плоскости, ортогональной второй главной оси) получаются в результате преобразования уравнений кинематики к характеристической координатной сетке; они находятся в следующем виде:

$$\overline{d_1} du_{<\overline{1}>} - \frac{\cos^{"}\iota du_{<\overline{1}>} + du_{<\overline{3}>}}{\sin^{"}\iota} \overline{d_1} \left(\theta - \frac{"\iota}{2}\right) = 0,$$

$$\overline{d_3} du_{<\overline{3}>} + \frac{du_{<\overline{1}>} + \cos^{"}\iota du_{<\overline{3}>}}{\sin^{"}\iota} \overline{d_3} \left(\theta + \frac{"\iota}{2}\right) = 0,$$
(19)

где  $\theta$  — угол между некоторым фиксированным направлением в плоскости течения и собственным вектором **l**.

В случае течения среды Кулона — Мора угол "і будет постоянным, поскольку

$$\cos``\iota = \frac{1-a}{1+a}.$$

Предельный случай несжимаемого течения характеризуется условием

"
$$\iota \to \frac{\pi}{2};$$

полагая в соотношениях (19) " $\iota = \pi/2$ , получим достаточно простые кинематические соотношения вдоль характеристик

$$\overline{d_1} (du_{<\overline{1}>}) - (du_{<\overline{3}>}) \overline{d_1}\theta = 0, 
\overline{d_3} (du_{<\overline{3}>}) + (du_{<\overline{1}>}) \overline{d_3}\theta = 0,$$
(20)

известные в теории идеально пластического тел как уравнения Гейрингер вдоль линий скольжения.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации AAAA-A20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00844 «Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности»).

### ЛИТЕРАТУРА

- Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОН-ТИ, 1936. 280 с.
- [2] *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 648 с.
- [3] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.
- [4] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
- [5] *Радаев Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. перераб. и доп. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.
- [6] Радаев Ю. Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона — Мора // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483.
- [7] Радаев Ю. Н. К теории неплотно связанных сред Кулона Мора и обобщенных пластических тел Прандтля // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4(38). С. 3–24.
- [8] Радаев Ю. Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. № 5. С. 77–85.

**Radayev Y. N.** Modelling three-dimensional irreversibly compressible flows of the Coulomb – Mohr media by the geometry of asymptotic directions. A new approach to the study of compressible flows of the Coulomb–Mohr media, which are realized as a system of microslides along the conjugate to stress and increment tensor asymptotic directors, is discussed. The Coulomb–Mohr medium perfectly simulates the mechanical behavior of dry sands, soils, as well as artificial granular objects. The geometric notions associated with the asymptotic directors of the stress tensor and the increment of the strain tensor permit an in-depth study both the stress distribution and the kinematic picture of compressible flows of granular media. Various forms of the mathematical representation of the Coulomb–Mohr yield criterion in terms of principal normal stresses and the corresponding formulations of the associated flow law are obtained. In some cases the hyperbolicity of kinematic equations modelling the flow of granular media is proved. For flows corresponding to a facet of the yield condition differential equations of the kinematics are obtained whereby connecting the components of the displacement vector increment relative to the conjugate directions.

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ, СЫПУЧИХ И ПОРИСТЫХ СРЕД

## Садовский В. М., Садовская О. В.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

С помощью обобщенного реологического метода строятся определяющие соотношения деформируемых сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Применяются специальные формулировки математических моделей динамики упругопластических, сыпучих и пористых сред в виде вариационных неравенств для гиперболических операторов с ограничениями на функции состояния, описывающими физически нелинейные процессы упругопластического перехода по мере достижения напряжениями предельных значений и порогового изменения жесткости материала при смене знака деформаций. Исследуется проблема обобщенных решений с пластическими ударными волнами, строятся интегральные оценки в характеристических конусах оператора, гарантирующие единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решений задачи Коши и краевых задач с диссипативными граничными условиями.

Определяющие соотношения теории пластичности допускают формулировку в виде вариационного неравенства, которое вытекает из фундаментального термодинамического принципа Мизеса:

$$\sigma: e^p \geqslant \widetilde{\sigma}: e^p, \quad \sigma, \ \widetilde{\sigma} \in F \quad \Longleftrightarrow \quad -(\widetilde{\sigma} - \sigma): e^p \geqslant 0,$$

означающего, что мощность пластической диссипации достигает максимума на действительных напряжениях. Здесь  $e^p$  — тензор скоростей пластической деформации,  $\tilde{\sigma}$  — произвольная допустимая вариация тензора напряжений  $\sigma$ , двоеточие означает двойную свертку тензоров. Граница выпуклого и замкнутого множества F в пространстве напряжений представляет собой поверхность текучести материала. Вариационное неравенство принципа максимума Мизеса совместно с уравнениями движения и кинематическими уравнениями

$$\rho \, \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma + \rho \, g, \quad e^p = \frac{1}{2} \big( \nabla v + \nabla v^* \big) - a : \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

где  $\rho$  — плотность, v — вектор скорости, g — вектор массовых сил, образуют замкнутую математическую модель Прандтля — Рейсса. Так как тензор четвертого ранга упругой податливости a положительно определен и имеет специальную симметрию, эта модель может быть представлена в виде:

$$(\widetilde{U} - U) \cdot \left( A \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B^{i} \frac{\partial U}{\partial x_{i}} - Q U - G \right) \ge 0, \quad \widetilde{U}, \ U \in F,$$
(1)

где n — пространственная размерность, U — вектор-функция, составленная из компонент вектора скорости v и тензора напряжений  $\sigma$ , A и  $B^i$  — симметричные

матрицы (A положительно определена), Q — кососимметричная матрица, G — вектор объемной плотности массовых сил.

Если вектор-функция U лежит внутри F, то из-за произвольности вариации из (1) следует система уравнений динамической теории упругости в форме Годунова [1, 2]. Если U — граничная точка, то выполняется ассоциированный закон течения, в соответствии с которым вектор скорости пластической деформации направлен вдоль внешней нормали к границе F.

Кроме модели Прандтля — Рейсса к вариационным неравенствам в матричной форме приводятся уравнения теории линейного изотропного и трансляционного упрочнения, упругопластических пластин и оболочек Тимошенко, упругопластического континуума Коссера [3, 4]. В случае нелинейного упрочнения возникает более общее вариационное неравенство для квазилинейного дифференциального оператора, записанного в терминах производящих потенциалов  $\Phi(U)$  и  $\Psi_i(U)$ :

$$(\widetilde{U} - U) \cdot \left(\frac{\partial \varphi(U)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i(U)}{\partial x_i} - QU - G\right) \ge 0, \quad \widetilde{U}, \ U \in F,$$

$$\varphi(U) = \frac{\partial \Phi(U)}{\partial U}, \quad \psi_i(U) = \frac{\partial \Psi_i(U)}{\partial U}.$$
(2)

Математические модели сыпучих и пористых сред, имеющих разное сопротивление растяжению и сжатию, строятся с помощью обобщенного реологического подхода [5]. Для этого рассматривается реологическая схема, состоящая из трех традиционных элементов — упругой пружины, вязкого демпфера и пластического шарнира, и четвертого элемента — жесткого контакта, определяющие соотношения которого формулируются в терминах вариационных неравенств. С учетом эквивалентного определения проекции на выпуклое множество как решения вариационного неравенства, уравнения упругих сред можно свести к следующей системе:

$$A \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B^{i} \frac{\partial U}{\partial x_{i}} - Q U = G, \quad U = V^{\pi},$$

где  $V^{\pi}$  — проекция вектора V на конус допустимых вариаций K по евклидовой норме  $|V| = \sqrt{V \cdot AV}$ . Конус K исключает, например, растягивающие напряжения, которые невозможны в идеальной сыпучей среде. В случае упругопластического материала эта система заменяется вариационным неравенством:

$$(\widetilde{U} - U) \cdot \left( A \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B^{i} \frac{\partial U}{\partial x_{i}} - Q U - G \right) \ge 0, \quad \widetilde{U}, \ U = V^{\pi} \in F, \tag{3}$$

или более общим неравенством для нелинейного дифференциального оператора, записанного в терминах производящих потенциалов  $\Phi(U)$  и  $\Psi_i(U)$ .

Один из важнейших результатов применения вариационных неравенств (1)–(3) в теории пластичности связан с исследованием обобщенных решений с поверхностями разрыва скоростей и напряжений — упругопластическими ударными волнами. При определенных требованиях гладкости неравенство (1) преобразуется к дивергентной форме:

$$\widetilde{U} \cdot \left( A \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B^{i} \frac{\partial U}{\partial x_{i}} - Q U - G \right) \geqslant \frac{1}{2} \frac{\partial (U \cdot A U)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (U \cdot B^{i} U)}{\partial x_{i}} - U \cdot Q U - U \cdot G.$$

Интегрирование по частям после умножения обеих частей на гладкую финитную неотрицательную пробную функцию позволяет перейти к рассмотрению обобщенных производных. Тогда, используя хорошо известную процедуру, можно получить соотношения сильного разрыва в виде вариационного неравенства [3]:

$$\left(\widetilde{U} - U^{0}\right) \cdot D\left[U\right] \ge 0, \quad U^{\pm}, \, \widetilde{U} \in F, \quad \left(D = c A + \sum_{s=1}^{n} \nu_{i} B^{i}\right),$$

$$\tag{4}$$

где  $U^0 = (U^+ + U^-)/2$ ,  $[U] = U^+ - U^-$ ,  $U^{\pm}$  — односторонние пределы решения на поверхности разрыва, c — скорость волны, а  $\nu$  — направленный вектор нормали к фронту волны.

Если  $U^0$  является внутренней точкой F, то выполняется система уравнений D[U] = 0, что означает, что мы имеем обычную упругую ударную волну. В силу выпуклости F точка  $U^0$  может быть граничной точкой, только если весь отрезок с концами  $U^-$  и  $U^+$  лежит на границе. В этом случае реализуется диссипативная пластическая ударная волна. Число типов таких волн зависит от наличия линейчатых участков на поверхности текучести. Для цилиндра Мизеса существует только один тип со скоростью объемных волн. Для призмы Треска–Сен-Венана таких волн больше — кроме объемных есть еще волны неполной, полной пластичности и квазипоперечные волны. В моделях линейно упрочняющихся сред число типов не меняется, но скорости волн зависят от параметров упрочнения [6].

Заметим, что получить полную систему соотношений в случае квазилинейного оператора не так просто. Едва ли не единственным средством для этого является метод прямого моделирования разрыва как самостоятельного объекта исследования с привлечением термодинамических соображений [7]. В сыпучих средах возникают более сложные, чем ударные волны, разрывы сплошности, на которых скачкообразно меняется вектор перемещений. Наблюдается так называемое, сухое кипение — спонтанное образование и схлопывание пустот в объеме среды [8, 9]. Однако, условия на таких разрывах до конца не изучены.

Еще одной важной проблемой, решаемой с помощью неравенств (1)–(3), является анализ математической корректности упругопластической теории. Пусть U(x,t) и U'(x,t) — два непрерывно дифференцируемых решения вариационного неравенства (1), определенных в одной и той же области. Полагая  $\tilde{U} = U'$  в (1) и  $\tilde{U} = U$  в аналогичном неравенстве для решения U', получим

$$\left(U'-U\right)\cdot\left(A\frac{\partial}{\partial t}\left(U'-U\right)-\sum_{i=1}^{n}B^{i}\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(U'-U\right)-Q\left(U'-U\right)-G'+G\right)\leqslant0$$

Это неравенство является отправной точкой, позволяющей получить априорные оценки решений в характеристических конусах дифференциального оператора [1]. Не взирая на то, что в данном случае рассматриваются решения не систем уравнений, а вариационных неравенств, можно получить:

$$||U' - U||(t_1) \leq ||U' - U||(t_0) e^{a(t_1 - t_0)} + b \int_{t_0}^{t_1} ||G' - G||(t) e^{a(t_1 - t)} dt.$$
(5)

Здесь  $t_0 < t_1$  — фиксированные моменты времени, *a* и *b* — положительные постоянные, не зависящие от обоих решений. Квадрат нормы определяется как интеграл энергии по поперечному сечению  $\omega(t)$  характеристического конуса:

$$||U||^2 = \int_{\omega(t)} U \cdot A U \, d\omega_x.$$

Эта оценка дает представление о корректности задачи Коши и краевых задач с диссипативными граничными условиями для вариационного неравенства (1). Из нее следует единственность в малом по времени и непрерывная зависимость решений от начальных данных и «правой части», и утверждение о конечной области зависимости решений. Существенно, что она справедлива, даже если область решения содержит одну или несколько поверхностей разрыва, на которых выполняются условия (4). Аналогичную (5) оценку можно получить для вариационных неравенств (2) и (3) (см. [3, 5]).

Не менее важный результат заключается в том, что неравенства (1)–(3) допускают эффективную численную реализацию, и на их основе можно конструировать устойчивые методы сквозного счета. Общая схема построения сводится к двум этапам: аппроксимации дифференциального оператора задачи и аппроксимации ограничения, определяющего множество допустимых вариаций решения. Как обычно, аппроксимация оператора предполагает его замену дискретным аналогом. При аппроксимации ограничения фактически указывается, в каком смысле понимается включение искомого сеточного решения в множество F. В простейшем случае задача сводится к решению вариационного неравенства для  $\hat{U}$  на новом временно́м слое:

$$\left(\widetilde{U} - \widehat{U}\right) \cdot A\left(\widetilde{U} - \overline{U}\right) \ge 0, \quad \widetilde{U}, \, \widehat{U} \in F,$$
(6)

где  $\bar{U}$  — решение системы дискретизованных уравнений динамики упругой среды:

$$A\frac{\bar{U}-U}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} B^{i} \frac{\partial U}{\partial x_{i}} + QU + G.$$

В силу симметрии и положительной определенности матрицы A решением (6) является проекция вектора  $\bar{U}$  на F по евклидовой норме  $|U| = \sqrt{U \cdot AU}$ , которая в общем случае может быть найдена с помощью итерационных методов. В случае теории течения Прандтля — Рейсса с критерием пластичности Мизеса это приводит к хорошо известной процедуре корректировки напряжений Уилкинса [10]. Более точные алгоритмы корректировки решения разработаны в [3].

Для аппроксимации дифференциального оператора вариационных неравенств мы используем вариант метода распада разрыва Годунова, в котором задача Римана решается в линейном приближении для соответствующей системы уравнений, в сочетании с методом двуциклического расщепления по пространственным переменным. Многочисленные результаты расчетов в задачах динамики упругопластических, сыпучих и пористых сред приведены в цитируемых публикациях авторов.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1631).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 391 с.
- [2] Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998. 267 с.
- [3] Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Физматлит, 1997. 208 с.
- [4] Садовский В. М., Гузев М. А., Садовская О. В., Qi Ch. Моделирование пластической деформации на основе теории ортотропного континуума Коссера // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22, № 2. С. 59–66.
- [5] Садовская О. В., Садовский В. М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
- [6] Садовский В. М. Упругопластические волны сильного разрыва в линейно упрочняющихся средах // Известия РАН: Механика твердого тела. 1997. Т. 32, № 6. С. 104–111.
- [7] Куликовский А. Г., Чугайнова А. П. Исследование разрывов в решениях уравнений упругопластической среды Прандтля — Рейсса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 4. С. 650–663.
- [8] *Маслов В. П., Мясников В. П., Данилов В. Г.* Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1987. 144 с.
- [9] Садовский В. М. К теории распространения упругопластических волн в сыпучих средах // Доклады Академии наук. 2002. Т. 386, № 4. С. 487–489.
- [10] Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.

Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. Thermodynamically consistent models of the dynamics of elastic-plastic, granular, and porous media. Constitutive relations of deformable media, having different resistance to tension and compression, are constructed by means of the generalized rheological method. Special formulations of mathematical models of the dynamics of elastic-plastic, granular and porous media in the form of variational inequalities for hyperbolic operators with constraints on state functions are applied. This allows to describe physically nonlinear processes of an elastic-plastic transition as stresses achieve their limit values and a threshold change in material stiffness, when the sign of strains changes. The problem of generalized solutions with plastic shock waves is analyzed, integral estimates in characteristic cones of a differential operator are constructed, which guarantee the uniqueness and continuous dependence on initial data of the solutions of the Cauchy problem and boundary value problems with dissipative boundary conditions.

# ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

## Саркисян А.А.

Ширакский государственный университет, Гюмри

В работе рассматривается задача устойчивости пологой оболочки из изотропного микрополярно-упругого материала, сжатой с одной стороны. Определяется критическое усилие, которое сравнивается со значением классического решения. Устанавливаются важные свойства микрополярного материала.

1. Введение. Нелинейные теории изгиба пластин и пологих оболочек имеют важное значение и широкую применимость в прикладной классической теории [1–3]. Аналогично геометрически нелинейной классической теории упругости [4], построена теория геометрически нелинейной трехмерной микрополярной упругости [5].

В работах [6–9] построены прикладные линейные и геометрически нелинейные теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек. В работе [10] решена задача устойчивости микрополярных упругих тонких пластин. В работе [11] построена модель линейной задачи устойчивости микрополярных упругих тонких оболочек.

В данной работе рассматривается тонкая пологая оболочка из изотропного микрополярно-упругого материала. Считается, что оболочка нагружена силами, расположенными в срединной ее поверхности. Сначала получено решение системы линейных уравнений плоского напряженного состояния микрополярной упругой пологой оболочки, когда в ее срединной плоскости приложены внешние усилия. Далее начальному напряженному состоянию дается некоторое малое возмущение. После линеаризации этой задачи получим однородную систему уравнений задачи устойчивости с однородными граничными условиями. Полученная краевая задача решается при помощью разложений решения в двумерные тригонометрические ряды Фурье. В результате определяется критическое усилие, которое сравнивается со значением классического решения. Установлены важные свойства микрополярного материала.

2. Линеаризованные уравнения устойчивости микрополярных упругих тонких пологих оболочек. Рассмотрим пологую оболочку постоянной толщины 2h как трёхмерное микрополярное упругое изотропное тело. Выберем координатные линии  $x_1, x_2$  таким образом, чтобы они совпадали с главными линиями кривизны срединной поверхности. Координату z будем отсчитывать по нормали к срединной поверхности, считая положительным по направлению к центру кривизны. Рассмотрим случай пологой круговой цилиндрической панели радиуса R, прямоугольной в плане.

Рассмотрим задачу, когда микрополярная упругая цилиндрическая пологая оболочка шарнирно оперта и подвергается равномерно распределенной нагрузке, параллельной оси  $x_2$  и имеющий интенсивность p. В этом случае реализуется плоское напряженно-деформированное состояние (НДС): Уравнения равновесия

$$\partial_{x_i} T_{ii}^0 + \partial_{x_j} S_{ji}^0 = 0, \ N_{3i}^0 - \left(\partial_{x_i} M_{ii}^0 + \partial_{x_j} M_{ji}^0\right) = 0, \ \partial_{x_1} N_{13}^0 + \partial_{x_2} N_{23}^0 + T_{11}^0 / R = 0,$$
  

$$\partial_{x_1} L_{13}^0 + \partial_{x_2} L_{23}^0 + S_{12}^0 - S_{21}^0 = 0, \ \partial_{x_i} L_{ii}^0 + \partial_{x_j} L_{ji}^0 + (-1)^j \left(N_{j3}^0 - N_{3j}^0\right) = 0,$$
  

$$L_{33}^0 - \left(\partial_{x_1} \Lambda_{13}^0 + \partial_{x_2} \Lambda_{23}^0\right) - \left(M_{12}^0 - M_{21}^0\right) = 0.$$
 (1)

Соотношения упругости

$$T_{ii}^{0} = 2Eh/(1-\nu^{2})[\Gamma_{ii}^{0}+\nu\Gamma_{jj}^{0}], \ M_{ii}^{0} = 2Eh^{3}/(3(1-\nu^{2}))[K_{ii}^{0}+\nu K_{jj}^{0}],$$

$$M_{ij}^{0} = 2h^{3}/3[(\mu+\alpha)K_{ij}^{0}+(\mu-\alpha)K_{ji}^{0}], \ S_{ij}^{0} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}^{0}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}^{0}],$$

$$N_{i3}^{0} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}^{0}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i}^{0}], \ N_{3i}^{0} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}^{0}+(\mu-\alpha)\Gamma_{i3}^{0}],$$

$$L_{ii}^{0} = 2h[(\beta+2\gamma)\kappa_{ii}^{0}+\beta(\kappa_{jj}^{0}+\iota^{0})], \ L_{33}^{0} = 2h[(\beta+2\gamma)\iota^{0}+\beta(\kappa_{11}^{0}+\kappa_{22}^{0})],$$

$$L_{ij}^{0} = 2h[(\gamma+\epsilon)\kappa_{ij}^{0}+(\gamma-\epsilon)\kappa_{ji}^{0}], \ L_{i3}^{0} = 8h\gamma\epsilon/(\gamma+\epsilon)\kappa_{i3}^{0}, \ \Lambda_{i3}^{0} = 8h^{3}\gamma\epsilon/(3(\gamma+\epsilon))l_{i3}^{0}.$$
(2)

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11}^{0} = \partial_{x_{1}}u_{1}^{0} + w^{0}/R, \ \Gamma_{22}^{0} = \partial_{x_{2}}u_{2}^{0}, \ \Gamma_{ij}^{0} = \partial_{x_{i}}u_{j}^{0} - (-1)^{j}\Omega_{3}^{0} + \partial_{x_{1}}w^{0}\partial_{x_{2}}w^{0}/2,$$
  

$$\Gamma_{i3}^{0} = \partial_{x_{i}}w^{0} + (-1)^{j}\Omega_{j}^{0}, \ \Gamma_{3i}^{0} = \psi_{i}^{0} - (-1)^{j}\Omega_{j}^{0}, \ K_{ii}^{0} = \partial_{x_{i}}\psi_{i}^{0}, \ K_{ij}^{0} = \partial_{x_{i}}\psi_{j}^{0} - (-1)^{j}\iota^{0},$$
  

$$\kappa_{ii}^{0} = \partial_{x_{i}}\Omega_{i}^{0}, \ \kappa_{33}^{0} = \iota^{0}, \ \kappa_{ij}^{0} = \partial_{x_{i}}\Omega_{j}^{0}, \ \kappa_{i3}^{0} = \partial_{x_{i}}\Omega_{3}^{0}, \ l_{i3}^{0} = \partial_{x_{i}}\iota^{0}.$$
(3)

Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания (при  $x_i = 0; a$ ):

$$T_{ii}^{0} = -p_{i}, \ u_{j}^{0} = 0, \ M_{ii}^{0} = 0, \ \psi_{j}^{0} = 0, \ w^{0} = 0, \ L_{ij}^{0} = 0, \ \Omega_{i}^{0} = 0, \ \Lambda_{i3}^{0} = 0$$
(4)

Здесь  $u_i^0$  — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности оболочки;  $w^0$  — функция прогиба;  $\psi_i^0$  — полные углы поворота нормального элемента, а  $\Omega_i^0$ ,  $\Omega_3^0$  — свободные повороты этого элемента вокруг линий  $x_i, z; \iota^0$  — интенсивность свободного поворота вдоль оси  $z; \Gamma_{ii}^0$  — деформации удлинений в направлениях  $x_i;$   $\Gamma_{ij}^0, \Gamma_{i3}^0, \Gamma_{3i}^0$  — деформации сдвигов в соответствующих плоскостях;  $K_{ii}^0$  — изгибы срединной поверхности оболочки, обусловленные силовыми напряжениями;  $K_{ij}^0$  — кручения срединной поверхности оболочки, обусловленные силовыми напряжениями;  $\kappa_{ii}^0, \kappa_{33}^0$  — изгибы срединной поверхности оболочки, обусловленные моментными напряжениями;  $\kappa_{ij}^0$  — кручения срединной поверхности оболочки, обусловленные моментными напряжениями;  $l_{i3}^0$  — гиперсдвиги срединной поверхности оболочки, обусловленные моментными напряжениями;  $T_{ii}^0, S_{ij}^0, N_{i3}^0, N_{3i}^0$  усилия,  $M_{ii}^0, M_{ij}^0, L_{ii}^0, L_{ij}^0, L_{i3}^0, L_{33}^0$  — моменты и  $\Lambda_{i3}^0$  — гипермоменты [11],  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, p_1 = 0, p_2 = p$ .

Решение задачи (1)-(4) будет иметь вид:

$$T_{11}^0 \equiv 0, \quad T_{22}^0 = const \equiv -p, \quad S_{12}^0 = S_{21}^0 \equiv 0, \quad L_{13}^0 = L_{31}^0 \equiv 0, \quad \Omega_3^0 \equiv 0.$$
(5)

Этому докритическому НДС дадим некоторые малые возмущения. Величины, характеризующие НДС, вызванное этими возмущениями, будем обозначать звездочкой вверху. Полное НДС в оболочке характеризуется величинами соответствующих сумм с индексами нуль и звездочка. Подставим полученные соотношения в основные уравнения и граничные условия микрополярных упругих геометрически нелинейных тонких пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений [11]. После линеаризации получим уравнения устойчивости:

Уравнения равновесия

$$\partial_{x_i} T_{ii} + \partial_{x_j} S_{ji} = 0, \ \partial_{x_1} N_{13} + \partial_{x_2} N_{23} + T_{11}/R = p \partial_{x_2 x_2}^2 w, \ N_{3i} - \left(\partial_{x_i} M_{ii} + \partial_{x_j} M_{ji}\right) = 0, \partial_{x_i} L_{ii} + \partial_{x_j} L_{ji} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = 0, \ \partial_{x_1} L_{13} + \partial_{x_2} L_{23} + (S_{12} - S_{21}) = 0, L_{33} - \left(\partial_{x_1} \Lambda_{13} + \partial_{x_2} \Lambda_{23}\right) - \left(M_{12} - M_{21}\right) = 0.$$
(6)

Соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \ M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \ M_{ij} = \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}] \\S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], \ N_{i3} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}](i \leftrightarrow 3), \\L_{ii} = 2h[(\beta + 2\gamma)\kappa_{ii} + \beta(\kappa_{jj} + \iota)], \ L_{33} = 2h[(\beta + 2\gamma)\iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\L_{ij} = 2h[(\gamma + \epsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \epsilon)\kappa_{ji}], \ L_{i3} = 8h\gamma\epsilon/(\gamma + \epsilon)\kappa_{i3}, \ \Lambda_{i3} = 8h^3\gamma\epsilon/(3(\gamma + \epsilon))l_{i3}.$$
(7)

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \partial_{x_1} u_1 + w/R, \ \Gamma_{22} = \partial_{x_2} u_2, \ \Gamma_{ij} = \partial_{x_i} u_j - (-1)^j \Omega_3, \ \Gamma_{i3} = \partial_{x_i} w + (-1)^j \Omega_j,$$
  

$$\Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \ K_{ii} = \partial_{x_i} \psi_i, \ K_{ij} = \partial_{x_i} \psi_j - (-1)^j \iota, \ \kappa_{ii} = \partial_{x_i} \Omega_i,$$
  

$$\kappa_{33} = \iota, \ \kappa_{ij} = \partial_{x_i} \Omega_j, \ \kappa_{i3} = \partial_{x_i} \Omega_3, \ l_{i3} = \partial_{x_i} \iota$$
(8)

Граничные условия шарнирного опирания (при  $x_i = 0; a$ )

$$T_{ii} = 0, \ u_j = 0, \ M_{ii} = 0, \ \psi_j = 0, \ w = 0, \ L_{ij} = 0, \ \Omega_i = 0, \ \Lambda_{i3} = 0$$
 (9)

При решении такой граничной задачи из условия нетривиальности решения получим значения критических величин внешних воздействий.

**3. Решение задачи устойчивости.** Обозначим  $m_a = m\pi/a$ ,  $n_b = n\pi/b$  и решение системы уравнений (6)–(9) представим в виде:

$$u_{i}(x_{1}, x_{2}) = U_{i} \cos m_{a} x_{i} \sin n_{b} x_{j}, \quad \psi_{i}(x_{1}, x_{2}) = \Psi_{i} \cos m_{a} x_{i} \sin n_{b} x_{j},$$
  

$$w(x_{1}, x_{2}) = W \sin m_{a} x_{i} \sin n_{b} x_{j}, \quad \Omega_{i}(x_{1}, x_{2}) = O_{i} \sin m_{a} x_{i} \cos n_{b} x_{j},$$
  

$$\Omega_{3}(x_{1}, x_{2}) = O_{3} \cos m_{a} x_{i} \cos n_{b} x_{j}, \quad \iota(x_{1}, x_{2}) = I \cos m_{a} x_{i} \cos n_{b} x_{j}.$$
 (10)

Решение (10) автоматически удовлетворяет граничным условиям (9). Подставляя (10) в систему уравнений (6)–(8), приходим к решению алгебраической однородной системы линейных уравнений:

$$a_{11}U_1 + a_{12}U_2 + a_{13}W + a_{18}O_3 = 0, \ a_{21}U_1 + a_{22}U_2 + a_{23}W + a_{28}O_3 = 0,$$
  
$$a_{31}U_1 + a_{32}U_2 + a_{33}W + a_{34}\Psi_1 + a_{35}\Psi_2 + a_{36}O_1 + a_{37}O_2 = p(n_b)^2 W/2h,$$

 $a_{43}W + a_{44}\Psi_1 + a_{45}\Psi_2 + a_{47}O_2 + a_{49}I = 0, \ a_{53}W + a_{54}\Psi_1 + a_{55}\Psi_2 + a_{56}O_1 + a_{59}I = 0,$ 

$$a_{63}W + a_{65}\Psi_2 + a_{66}O_1 + a_{67}O_2 + a_{69}I = 0, \ a_{73}W + a_{74}\Psi_1 + a_{76}O_1 + a_{77}O_2 + a_{79}I = 0,$$
  

$$a_{81}U_1 + a_{82}U_2 + a_{88}O_3 = 0, \ a_{94}\Psi_1 + a_{95}\Psi_2 + a_{96}O_1 + a_{97}O_2 + a_{99}I = 0,$$
(11)  
где имеют место следующие обозначения

 $a_{11} = -K/(1-\nu^2) (m_a)^2 - (\mu+\alpha) (n_b)^2, \ a_{12} = -(K\nu/(1-\nu^2) + (\mu-\alpha)) m_a n_b,$   $a_{13} = K/(1-\nu^2) m_a/R, \ a_{18} = -2\alpha n_b, \ a_{22} = -K/(1-\nu^2) (n_b)^2 - (\mu+\alpha) (m_a)^2,$   $a_{23} = K/(1-\nu^2) n_b/R, \ a_{28} = 2\alpha m_a, \ a_{33} = (\mu+\alpha) ((m_a)^2 + (n_b)^2) - K/(R^2(1-\nu^2)),$   $a_{34} = (\mu-\alpha) m_a, \ a_{35} = (\mu-\alpha) n_b, \ a_{36} = -2\alpha n_b, \ a_{37} = 2\alpha m_a,$   $a_{44} = (\mu+\alpha) + Kh^2/(3(1-\nu^2)) (m_a)^2 + h^2(\mu+\alpha) (n_b)^2/3,$   $a_{45} = (Kh^2\nu/(3(1-\nu^2)) + h^2(\mu-\alpha)/3) m_a n_b, \ a_{47} = -2\alpha, \ a_{49} = 2\alpha h^2 n_b/3,$   $a_{55} = (\mu+\alpha) + Kh^2/(3(1-\nu^2)) (n_b)^2 + h^2(\mu+\alpha) (m_a)^2/3, \ a_{56} = 2\alpha,$   $a_{59} = -2\alpha h^2 m_a/3, \ a_{66} = (\beta+2\gamma) (m_a)^2 + (\gamma+\epsilon) (n_b)^2 + 4\alpha,$   $a_{67} = (\beta+\gamma-\epsilon) m_a n_b, \ a_{69} = \beta m_a, \ a_{77} = (\beta+2\gamma) (n_b)^2 + (\gamma+\epsilon) (m_a)^2 + 4\alpha,$   $a_{79} = \beta n_b, \ a_{88} = 4\gamma\epsilon/(\gamma+\epsilon) ((m_a)^2 + (n_b)^2), \ a_{ii} = a_{ii}.$ (12)

Рассмотрим конкретный пример:a = b = R = 0.07 м, h = a/40, m = n = 1,  $\mu = 2$  МПа,  $\lambda = 3$  МПа,  $\gamma = \epsilon = 150$  Н,  $\beta = 120$  Н. Обращая определитель однородной системы уравнений (11) в нуль, получим  $p_{mic.}^{crit.}/p_{class.}^{crit.}$  в зависимости от безразмерного физического параметра  $\alpha/\mu$ , на рис. 1 показана указанная зависимость. Легко убедиться, что при увеличении  $\alpha/\mu$ ,  $p_{mic.}^{crit.}/p_{class.}^{crit.}$  увеличивается, а это означает, что при микрополярном материале оболочка более устойчива.



Рисунок 1 – Относительное первое критическое значение

4. Заключение. В работе изучается задача устойчивости микрополярных упругих пологих оболочек. В ходе изучения задачи в геометрически нелинейной постановке уравнения устойчивости получены. Изучена конкретная задача устойчивости пологой микриполярной оболочки и показано, что при равных остальных параметрах первое критическое значение для оболочки из микрополярного материала выше, чем для оболочки из классического материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОНКС РА в рамках научного проекта 18Т-2С263.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: ГИТТЛ. 1956. 419 с.
- [2] Григолюк С. О., Мамай В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука. Физматлит. 1997. 272 с.
- [3] Marguerre K. Die Durchschlags kraft eines schwachgekrummten Balkes // Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Cesellschaft. 1938. Bd 37. P. 22–40.
- [4] *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: Гостехиздат. 1948. 211 с.
- [5] Eringen A. C., Suhubi E. S. Non-linear theory of simple microelastic solids //Int. J. Eng. Sci. I-1964, 2,2,189; II-1964,2,4,389.
- [6] Саркисян С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55–66.
- [7] Саркисян С. О., Саркисян А. А. Модель колебаний микрополярных тонких оболочек // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 2. С. 170–181.
- [8] Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. Dynamic model of micropolar elastic thin plates with independent fields of displacements and rotations // Journal of Sound and Vibration. 2014. V. 333. № 18. P. 4354–4375.
- [9] Саркисян А.А., Саркисян С. О. Математическая модель геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин // XVII международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». Труды конференции. Ростовна-Дону, 14-17 октября 2014 г. С. 180–184.
- [10] Саркисян А. А., Саркисян С. О. Устойчивость сжатой прямоугольной пластинки по микрополярной теории упругости // Перспективные материалы и технологии. Монография. Том 2. Витебск. Беларусь. 2019. С. 27–36.
- [11] Саркисян А. А. Устойчивость пологой оболочки по микрополярной теории упругости // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Материалы VI международной конференции 01-06 октября, 2019, Дилижан, Армения. С. 287–291.

**Sargsyan A. H.** Stability Problem of the Micropolar Elastic Shallow Shell. The paper considers the stability problem of the shallow shell of an isotropic micropolar-elastic material, which is compressed on one side. The critical force is determined, which is compared with the value of the classical solution. The important properties of the micropolar material are established.

## ДИСКРЕТНАЯ И КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИЙ ГРАФЕНА ПО МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

## Саркисян С.О.

Ширакский государственный университет, Гюмри

Работа посвящена построению дискретно-континуальной стержневой и континуально-моментной моделей для общей деформации графена. Определены упругие постоянные моментной теории упругости для материала графена.

1. Введение. Существование графена и углеродной нанотрубки привело к необходимости при построении дискретной модели к учету силового нецентрального и моментного независимого взаимодействия между их атомами [1]. В работе [2], исходя из таких предположений, построены дискретно-моментная и континуально-моментная (стержневая) модели для линейной цепочки атомов. В работе [3] принимается подход построения стержневой системы (дискретно-континуальной модели), эквивалентной атомной модели, в которой выбрана классическая модель упругих тонких стержней. В работе [4] для деформаций графена в своей плоскости (при построении дискретной-континуальной модели) для стержневой системы, заменяющей атомную, выбрана континуально-микрополярная модель работы [2].

2. Дискретная модель атомной линейной цепочки в общем случае ее деформирования. Рассмотрим простейшую одномерную модель — линейную цепочку одинаковых атомов, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга *a*. Будем считать, что каждый атом представляет собой твердое тело [5], в данном случае шар массой *m*, собственным осевым моментном инерции *I*. Примем, что сказываются взаимодействия только между ближайшими соседями. Ось цепочки обозначим через  $\xi$ , а декартовые оси  $\eta$  и *z* расположим в перпендикулярной к оси  $\xi$  плоскости. Будем предполагать, что цепочка подвергается растяжению-сжатию вдоль оси  $\xi$ , к изгибаниям в плоскостях  $\xi\eta$  и  $\xi z$ , а также кручению вокруг оси  $\xi$ .

Рассмотрим атом с номером k. Действующие на атом с номером k усилия нецентральные (поэтому их будем разлагать по осям координат), и кроме усилий на этот атом действуют независимые моменты. Продольные силы, действующие на этот атом (слева и справа) обозначим через  $N^{(k)}$  и  $N^{(k+1)}$ . При изгибе в плоскости  $\xi\eta$  действующие на указанный атом перерезывающие силы обозначим через  $Q_2^{(k)}$  и  $Q_2^{(k+1)}$ , а моменты — через  $L_2^{(k)}$  и  $L_2^{(k+1)}$ . При изгибе в плоскости  $\xi z$ , перерезывающие силы обозначим через  $Q_3^{(k)}$  и  $Q_3^{(k+1)}$ , а моменты — через  $L_3^{(k)}$  и  $L_3^{(k+1)}$ . Крутящие моменты вокруг оси  $\xi$  обозначим через  $L_1^{(k)}$  и  $L_1^{(k+1)}$ .

Потенциал межатомного взаимодействия V примем в виде:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k} C_1(d_1^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k} C_2(d_{21}^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k} C_3(\theta_3^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k} C_2(d_{31}^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k} C_3(\theta_2^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k} C_3(\theta_1^{(k)})^2,$$
(1)

## Саркисян С.О.

$$\begin{aligned} d_1^{(k)} &= u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}, d_{21}^{(k)} = (u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)}) - \frac{1}{2}a(\omega_3^{(k+1)} + \omega_3^{(k)}), \theta_3^{(k)} = \omega_3^{(k+1)} - \omega_3^k, \\ d_{31}^{(k)} &= (u_3^{(k+1)} - u_3^{(k)}) - \frac{1}{2}a(\omega_2^{(k+1)} + \omega_2^{(k)}), \theta_2^{(k)} = \omega_2^{(k+1)} - \omega_2^{(k)}, \theta_1^{(k)} = \omega_1^{(k+1)} - \omega_1^{(k)}, \end{aligned}$$
(2)

где  $C_i(i = 1, 2, 3)$  — упругие параметры для соответствующих деформаций. На основе (1) имеет место следующий закон упругости для атомной структуры графена:

$$N^{(k)} = C_1 a e^{(k)}_{\xi\xi}, \ Q^{(k)}_2 = C_2 a \gamma^{(k)}_{\xi\eta}, \ Q^{(k)}_3 = C_2 a \gamma^{(k)}_{\xiz}, L^{(k)}_3 = C_3 a \chi^{(k)}_{\xi\eta}, \ L^{(k)}_2 = C_3 a \chi^{(k)}_{\xiz}, \ L^{(k)}_1 = C_3 a \tau^{(k)}_{\xi\xi},$$
(3)

$$e_{\xi\xi}^{(k)} = \frac{u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}}{a}, \ \gamma_{\xi\eta}^{(k)} = \frac{u_2^{(k)} - u_2^{(k-1)}}{a} - \frac{1}{2}(\omega_3^{(k)} + \omega_3^{(k-1)}), \gamma_{\xiz}^{(k)} = \frac{u_3^{(k)} - u_3^{(k-1)}}{a} - \frac{1}{2}(\omega_2^{(k)} + \omega_2^{(k-1)}), \ \chi_{\xi\eta}^{(k)} = \frac{\omega_3^{(k)} - \omega_3^{(k-1)}}{a}, \chi_{\xiz}^{(k)} = \frac{\omega_2^{(k)} - \omega_2^{(k-1)}}{a}, \ \tau_{11}^{(k)} = \frac{\omega_1^{(k)} - \omega_1^{(k-1)}}{a}.$$
(4)

Соотношения (4) определяют деформации, сдвиги и кривизны-кручения графена. Кинетическая энергия движения линейной цепочки атомов будет выражаться формулой

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k} \left[ m \left( \left( \frac{du_{1}^{(k)}}{dt} \right)^{2} + \left( \frac{du_{2}^{(k)}}{dt} \right)^{2} + \left( \frac{du_{3}^{(k)}}{dt} \right)^{2} \right) + I \left( \left( \frac{d\omega_{3}^{(k)}}{dt} \right)^{2} + \left( \frac{d\omega_{2}^{(k)}}{dt} \right)^{2} + \left( \frac{d\omega_{1}^{(k)}}{dt} \right)^{2} \right) \right].$$
(5)

На основе (1) и (5) можем составить лагранжиан (L = K - V) для линейной цепочки атомов и применить вариационный принцип Гамильтона, из которого будут следовать уравнения движения дискретной модели.

3. Одномерно-стержневая континуальная модель линейной цепочки атомов в случае ее общего деформирования. Для построения континуальной модели линейной цепочки атомов при общем случае ее деформирования лагранжиан дискретной модели будем представилять в специальной форме и осуществим предельный переход, когда  $a \rightarrow 0$ . В результате приходим к лагранжиану континуальной модели линейной цепочки атомов:

$$L = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left[ \widetilde{\rho} \left( \left( \frac{\partial u_{1}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial u_{2}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial u_{3}}{\partial t} \right)^{2} \right) + \widetilde{I} \left( \left( \frac{\partial \omega_{3}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial \omega_{2}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial \omega_{1}}{\partial t} \right)^{2} \right) - \left( \widetilde{C}_{1} \varepsilon_{\xi\xi}^{2} + \widetilde{C}_{2} \gamma_{\xi\eta}^{2} + \widetilde{C}_{2} \gamma_{\xiz}^{2} + \widetilde{C}_{3} \chi_{\xi\eta}^{2} + \widetilde{C}_{3} \chi_{\xiz}^{2} + \widetilde{C}_{4} \tau_{\xi\xi}^{2} \right) \right] d\xi.$$

$$(6)$$

Здесь  $\tilde{\rho}$  — линейная плотность массы цепочки,  $\tilde{I}$  — линейная плотность ее осевого момента инерции,  $\varepsilon_{\xi\xi}$  — относительная продольная деформация,  $\gamma_{\xi\eta}$  — сдвиговая

деформация в плоскости  $\xi\eta$ ,  $\gamma_{\xi z}$  — сдвиговая деформация в плоскости  $\xi z$ ,  $\chi_{\xi\eta}$  — кривизна оси цепочки в плоскости  $\xi\eta$ ,  $\chi_{\xi z}$  — кривизна оси цепочки в плоскости  $\xi z$ ,  $\tau_{\xi\xi}$  — относительный угол закручивания. Из принципа Гамильтона, когда лагранжиан имеет вид (7), будут следовать уравнения движения континуальной модели линейной атомной цепочки и естественные граничные условия:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\tag{7}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \xi} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \ \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + Q_2 = \tilde{I} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial \xi} = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \ \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + Q_3 = \tilde{I} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \xi} = \tilde{I} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2}.$$
(10)

Уравнение (7) — уравнение продольных колебаний, уравнения (8) — уравнения изгибных колебаний в плоскости  $\xi\eta$ ; уравнения (9) — уравнения изгибных колебаний в плоскости  $\xi z$ , уравнение (10) — уравнение крутильных колебаний вокруг оси  $\xi$ .

Предельным переходом от уравнений закона упругости (3) и геометрических уравнений (4) дискретной модели получим соотношения упругости и геометрические уравнения для континуальной модели:

$$N = \widetilde{C}_1 e_{\xi\xi}, \ Q_2 = \widetilde{C}_2 \gamma_{\xi\eta}, \ Q_3 = \widetilde{C}_2 \gamma_{\xi z}, \ L_3 = \widetilde{C}_3 \chi_{\xi\eta}, \ L_2 = \widetilde{C}_3 \chi_{\xi z}, \ L_1 = \widetilde{C}_4 \tau_{\xi\xi},$$
(11)

$$e_{\xi\xi} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \ \gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \omega_3, \ \gamma_{\xi z} = \frac{\partial u_3}{\partial \xi} - \omega_2, \ \chi_{\xi\eta} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi}, \ \chi_{\xi z} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi}, \ \tau_{\xi\xi} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi}.$$
(12)

Система уравнений движения (7)–(10), соотношения упругости (11) и геометрические соотношения (12) представляют собой основные уравнения континуальной модели линейной атомной цепочки при общем случае ее деформирования.

4. Построение дискретно-континуальной модели (стержневой системы, заменяющую атомную) и континуальной модели для общего случая деформирования графена. Будем изучать графен (двумерный материал) и будем считать, что каждый атом взаимодействует лишь с ближайшими соседними атомами. Предлагаемая в данной работе конкретная механическая модель упругой связи между атомами графена — это модель упругого стержня, описываемая уравнениями (7)–(12). Для дальнейшего изучения общей деформации графена будем развивать континуальный подход, в этом случае, необходимо, исходя из задачи на ячейке, осуществлять предельный переход. Подход, при осуществлении предельного перехода к континуальной модели деформаций графена, состоит в следующем. Сначала определим приближенные выражения для общей потенциальной и кинетической энергии ячейки периодичности суммированием по индексу k (k = 1, 2, 3) средних значений этих интегралов. Приближенные значение поверхностной интенсивности каждой из указанных энергий получим делением среднего значения соответствующей суммарной энергии на площадь ячейки периодичности  $S = \frac{3\sqrt{3a^2}{4}}{4}$ .

### Саркисян С.О.

После предельного перехода  $(a \to 0)$  для континуальной теории будем иметь выражения поверхностных интенсивностей потенциальной и кинетической энергии в данной точке плоскости графена. Для поверхностных плотностей потенциальной энергии деформации и кинетической энергии движения континуальной модели графена получим:

$$U_{0} = \frac{1}{2} \frac{4\sqrt{3}}{9} \left\{ \left( \frac{9}{8}C_{1} + \frac{3}{8}C_{2} \right) e_{xx}^{2} + \left( \frac{9}{8}C_{1} + \frac{3}{8}C_{2} \right) e_{yy}^{2} + \left( \frac{3}{4}C_{1} - \frac{3}{4}C_{2} \right) e_{xx}e_{yy} + \right. \\ \left. + \left( \frac{3}{8}C_{1} + \frac{9}{8}C_{2} \right) \gamma_{xy}^{2} + \left( \frac{3}{8}C_{1} + \frac{9}{8}C_{2} \right) \gamma_{yx}^{2} + \left( \frac{3}{4}C_{1} - \frac{3}{4}C_{2} \right) \gamma_{xy}\gamma_{yx} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}C_{3}\chi_{xz}^{2} + \frac{3}{2}C_{3}\chi_{yz}^{2} + \frac{3}{2}C_{2}\gamma_{xz}^{2} + \frac{3}{2}C_{2}\gamma_{yz}^{2} + \left( \frac{3}{8}C_{3} + \frac{9}{8}C_{4} \right) \chi_{xx}^{2} + \right.$$
(13)  
$$\left. + \left( \frac{3}{8}C_{3} + \frac{9}{8}C_{4} \right) \chi_{yy}^{2} + \left( -\frac{3}{4}C_{3} + \frac{3}{4}C_{4} \right) \chi_{xx}\chi_{yy} + \left( \frac{9}{8}C_{3} + \frac{3}{8}C_{4} \right) \chi_{xy}^{2} + \left. \left( -\frac{3}{4}C_{3} + \frac{3}{4}C_{4} \right) \chi_{xy}\chi_{yx} \right\},$$
$$\left. K_{0} = \frac{1}{2} \left\{ \rho_{0} \left( \left( \frac{\partial u_{x}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial u_{y}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial u_{z}}{\partial t} \right)^{2} \right) + \right. \\ \left. + I_{0} \left( \left( \frac{\partial \omega_{x}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial \omega_{y}}{\partial t} \right)^{2} + \left( \frac{\partial \omega_{z}}{\partial t} \right)^{2} \right) \right\},$$
(14)

где  $\rho_0$  — поверхностная плотность массы,  $I_0$  — поверхностная плотность осевого момента инерции графена. Отметим, что все функции участвующие в выражениях (13) и (14) являются функциями от (x, y, t). Из соответствующего вариационного уравнения Гамильтона будут следовать уравнения движения и граничные условия двух моделей: а) плоское напряжённое состояние графена в своей плоскости деформирования [4], б) изгиб графена из своей плоскости.

5. Модели плоского напряженного состояния и изгибной деформации моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений для тонкой пластинки. Определение упругих постоянных моментной теории упругости через параметры атомной структуры графена. Случай а). При помощи сравнивания формул (13), (14) и соответствующих формул работы [6] получим следующие равенства:

$$\frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{9}{8}C_1 + \frac{3}{8}C_2\right) = \frac{E}{1 - \nu^2}, \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{3}{4}C_1 - \frac{3}{4}C_2\right) = \frac{2E\nu}{1 - \nu^2},$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{3}{8}C_1 + \frac{9}{8}C_2\right) = \mu + \alpha, \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{3}{4}C_1 - \frac{3}{4}C_2\right) = 2(\mu - \alpha), \frac{4\sqrt{3}}{9a} \cdot \frac{3}{2}C_3 = B.$$
(15)

Систему уравнений (15) разрешим относительно  $E, \nu, \mu, \alpha$  и B, получим:

$$E = \frac{4\sqrt{3}}{3a} \cdot \frac{C_1(C_1 + C_2)}{3C_1 + C_2}, \ \mu = \frac{\sqrt{3}}{6a} \cdot (C_1 + C_2),$$
  

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3a} \cdot C_2, \ \nu = \frac{C_1 - C_2}{3C_1 + C_2}, \ B = \frac{2\sqrt{3}}{3a} \cdot C_3.$$
(16)

Равенства (16) определяют упругие постоянные плоского напряженного состояния моментной теории упругости через постоянные атомной структуры графена. Отметим, что соответствующие равенства из (16) обеспечивают известное равенство  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Случай б). При помощи сравнивания формул (13), (14) (в случае изгиба) и соответствующих формул работы [6], получим следующие равенства:

$$\frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{3}{8}C_3 + \frac{9}{8}C_4\right) = \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma}, \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(-\frac{3}{4}C_3 + \frac{3}{4}C_4\right) = \frac{4\beta\gamma}{\beta + 2\gamma},$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(\frac{9}{8}C_3 + \frac{3}{8}C_4\right) = \gamma + \varepsilon, \frac{4\sqrt{3}}{9a} \left(-\frac{3}{4}C_3 + \frac{3}{4}C_4\right) = 2(\gamma - \varepsilon).$$
(17)

Из системы уравнений (17) определяются значения упругих постоянных  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  и  $\beta$ , для которых получим

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{6a}(C_3 + C_4), \ \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3a}C_3, \ \beta = \frac{\sqrt{3}}{3a}\frac{C_4^2 - C_3^2}{3C_3 + C_4}.$$
(18)

Отметим, что во все времена изучения моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений подразумевалась, что между  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  и  $\beta$ должна быть определенная связь, как это имеет место между  $\mu$ , E,  $\nu$  ( $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ), но так и до сих пор в литературе не определена эта связь. В этой работе для структуры графена определена эта связь, которая выражается равенством  $\beta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} 2\gamma$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кривцов А. М. Теоретическая механика. Упругие свойства одноатомных и двухатомных кристаллов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2009. 127 с.
- [2] Саркисян С. О. Дискретная и континуальная (микрополярная) «стержневая» модели атомной цепочки нанокристаллического материала // Доклады НАН Армении. 2019. Т. 119. № 1. С. 40–50.
- [3] Гольдштейн Р. В., Ченцов А. В. Дискретно-континуальная модель нанотрубки // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 57–74.
- [4] Саркисян С. О. Дискретно-континуальная и континуально-моментная модели графена для деформаций в своей плоскости // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22. № 5. С. 28–33.
- [5] Жилин П.А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 340 с.
- [6] Саркисян С. О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 1. С. 129–147.

**Sargsyan S. H.** Discrete and continuum models of graphene deformations according by the moment theory. This paper is devoted to the construction of a discrete-continuum beam and continuum-moment models for the general deformation of graphene. The elastic constants of the moment theory of elasticity for the graphene material are determined.

# ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАГРЕВА МНОГОСЛОЙНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СТРУКТУР ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

## Степович М. А.<sup>1</sup>, Амрастанов А. Н.<sup>1</sup>, Калманович В. В.<sup>1</sup>, Серегина Е. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского <sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Калужский филиал

Рассмотрены особенности математической модели нагрева однородных и многослойных проводящих структур электронным пучком, учитывающей особенности поглощения энергии электронного пучка в проводящей мишени. Потери энергии электронами пучка описываются в виде суммы потерь двух видов: потерь, обусловленных электронами, испытавшими малоугловое рассеяние и поглощёнными мишенью и потерь обратно рассеянных электронов, испытавших рассеяние на большие углы и покинувшие мишень. На конкретном примере показано, что использование такой модели в некоторых случаях позволяет довольно просто описать потери энергии первичными электронами в многослойной мишени.

Анализ температурных полей, возникающих в результате облучения поверхности твёрдого тела ускоренными заряженными частицами или импульсами электромагнитного излучения, может иметь важное практическое значение в различных отраслях науки и техники, в частности, в физическом материаловедении. При облучении образца в месте его воздействия на мишень в приповерхностной области мишени может выделяться значительная энергия, что ведёт к повышению локальной температуры [1–3] и, как следствие, к изменению характеристик вещества, в некоторых случаях необратимому. Для материалов полупроводниковой микрои наноэлектроники такое воздействие приводит к изменению ряда электрофизических параметров, например ширины запрещённой зоны [4], что требует учета этого явления при эксплуатации приборных устройств. Учёт нагрева полупроводникового материала особенно существенен при использовании концентрированных источников воздействия, например, сфокусированных электронных пучков, широко используемых в электронно-зондовых технологиях [5, 6].

При облучении поверхности твёрдого тела ускоренными заряженными частицами или электромагнитным излучением экспериментальное определение локальной температуры нагрева мишени сильно осложнено малым размером области генерации тепла, порядка десятых или даже сотых долей микрометра [6, 7] (см. рисунок 1), а при импульсном воздействии ещё и необходимостью учёта зависимости процесса теплопередачи от времени, вследствие чего получаемые результаты имеют невысокую точность и могут рассматриваться лишь как качественные. Поэтому особую ценность в практике воздействия заряженными частицами или импульсами электромагнитного излучения на твёрдые тела приобретают расчетные оценки величины нагрева, основанные на решении уравнения теплопроводности [5, 6, 8]. В качестве примера на рисунке 1 представлены результаты расчётов распределений плотностей потерь энергии электронами пучка в широко используемых в оптоэлектронике полупроводниковых материалах: монокристаллических теллуриде кадмия и его твёрдых растворах:  $Cd_{0,2}Hg_{0,8}$  Te и  $Cd_{0,6}Hg_{0,4}$  Te [9]. Здесь  $\rho(z) = \rho^*(z)/E_a$ , где  $\rho^*(z)$  — плотность энергии, выделяемой в мишени в единицу времени, а  $E_a$  — энергия, поглощённая в мишени в единицу времени.



Рисунок 1 – Распределение плотностей потерь энергии электронами пучка  $\rho(z)$  в HgTe (сплошная кривая), Cd<sub>0,2</sub>Hg<sub>0,8</sub>Te (кривая, обозначенная точками), Cd<sub>0,6</sub>Hg<sub>0,4</sub>Te (пунктирная кривая), CdTe (штрих-пунктирная кривая). Зависимости рассчитаны для энергии электронов  $E_0 = 10$  кэВ

Для математического моделирования явлений тепломассопереноса в однородной или многослойной среде, обусловленных взаимодействием заряженных частиц или электромагнитного излучения с полупроводниковой мишенью, ранее было предложено использовать модель независимых источников, в которой искомое распределение диффундирующего вещества или тепла в объёме материала находилось как суперпозиция от точечных источников, имеющихся в каждом микрообъёме конденсированного вещества [10]. Математически это отвечает наличию дельта-функции в правой части дифференциального уравнения тепломассопереноса. В общем случае такая задача является трёхмерной и сводится к решению дифференциального уравнения тепломассопереноса в частных производных. Интегрирование полученных распределений от каждого из микрообъёмов позволяет найти искомое распределение диффундирующего вещества или тепла в объёме материала. Используя такой подход, ранее была решена задача нахождения распределений неосновных носителей заряда в планарной двух- [11, 12] и трёхслойной [13, 14] полупроводниковых структурах для случая постоянства всех электрофизических параметров внутри каждого слоя. В то же время ввиду сложностей технического характера распространить этот метод решения уравнения тепломассопереноса на произвольное число слоёв не удалось и для решения такой задачи в многослойной планарной среде с произвольным числом слоёв нами предложен новый матричный метод, использующий аппарат обобщённых степеней Берса [15, 16].



Рисунок 2 – Моделирование нагрева мишени для параметров, характерных для Si (верхние рисунки) и CdTe (нижние рисунки). Слева — распределения температуры, справа — распределения зависимости максимальной температуры от энергии первичных электронов (кривая 1). Также показан вклад в кривую 1 энергии, рассеянной в мишени поглощенными (2) и отраженными (3) электронами. Расчеты проводились при токе зонда  $10^{-7}$  A и энергии электронов 4 кэВ

Одной из довольно серьёзных проблем, возникающих при математическом моделировании многослойных планарных систем, является проблема задания правой части дифференциального уравнения тепломассопереноса, описывающей распределение потерь энергии электронами пучка в конденсированном веществе. Для однородных мишеней эта проблема решена ранее (см., например [17]). Однако в многослойных мишенях значения параметров, характеризующих каждый слой, могут отличаться [9]. Результаты анализа различных полупроводниковых структур, используемых на практике, показывают, что довольно часто параметры таких структур различаются незначительно, и при моделировании потерь энергии в различных материалах структуры это позволяет для получении оценок использовать одно количественное описание потерь энергии для всех слоёв мишени. Например, для рисунка 1 существенные отличия начинаются при значениях z, больших чем примерно 0,15 мкм.

Наибольший нагрев мишеней реализуется при использовании остро сфокусированных электронных пучков, электронных зондов. Некоторые результаты таких расчётов приведены на рисунке 2 для лёгких (Si) и тяжёлых (CdTe) полупроводниковых мишеней.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

### ЛИТЕРАТУРА

- Филиппов М. Н. Оценка теплового воздействия электронного зонда в растровой электронной микроскопии и рентгеноспектральном анализе // Известия РАН. Серия физическая. 1993. № 8. С. 163–167.
- [2] Бакалейников Л. А., Галактионов Е. В., Третьяков В. В., Тропп Э. А. Расчет теплового воздействия зонда на образец нитрида галлия // Физика твердого тела. 2001. Т. 43. № 5. С. 779–785.
- [3] Seregina E. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. Modeling of heating in the epitaxial structure  $Cd_xHg_{1-x}Te/CdTe$  with the projection least squares method // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1163. Article number 012013.
- [4] Бонч Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1990. 685 с.
- [5] Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А. Об одной особенности моделирования нагрева полупроводниковой мишени электронным зондом // Известия РАН. Серия физическая. 2018. Т. 82. № 9. С. 1304–1309.
- [6] Stepovich M.A., Amrastanov A.N., Seregina E.V., Filippov M.N. Assessment of the heating of conductive targets with an electron beam. Results of computational experiment // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1203. Article number 012042.
- [7] Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N. On one peculiarity of the model describing the interaction of the electron beam with the semiconductor surface // Journal of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 955. Article number 012040.
- [8] Polyakov A.N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39. № 2. P. 259–262.

- 242 Степович М. А., Амрастанов А. Н., Калманович В. В., Серегина Е. В.
- [9] Филачев А. М., Таубкин И. И., Тришенков М. А. Твердотельная фотоэлектроника. Фотодиоды. М.: Физматкнига, 2011. 448 с.
- [10] Белов А.А., Петров В. И., Степович М. А. Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66. № 9. С. 1317–1322.
- [11] Степович М. А., Снопова М. Г., Хохлов А. Г. Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в двухслойном полупроводнике электронным пучком // Прикладная физика. 2004. № 3. С. 61–65.
- [12] Stepovich M. A., Khokhlov A. G., Snopova M. G. Model of independent sources used for calculation of distribution of minority charge carriers generated in two-layer semiconductor by electron beam // Proc. SPIE. 2004. Vol. 5398. P. 159–165.
- [13] Burylova I. V., Petrov V. I., Snopova M. G., Stepovich M. A. Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy-layer semiconducting structure by a wide electron beam // Физика и техника полупроводников. 2007. Т. 41. № 4. С. 458–461.
- [14] Снопова М. Г., Бурылова И. В., Петров В. И., Степович М. А. Анализ модели распределений неосновных носителей заряда, генерированных в трёхслойной полупроводниковой структуре широким электронным пучком // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2007. № 7. С. 1–6.
- [15] Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2017. № 10. С. 105–110.
- [16] Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. On the Possibility of a Numerical Solution of the Heat and Mass Transfer Problem with the Combined Matrix & Generalized Powers of Bers Method // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1163. Article number 012012.
- [17] *Михеев Н. Н., Степович М. А.* Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1996. Т. 62. № 4. С. 20–25.

Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Kalmanovich V. V., Seregina E. V. On the features of one mathematical model of heating multilayer conductive structures by an electron beam. The features of the mathematical model of heating homogeneous and multilayer conductive structures by an electron beam, taking into account the peculiarities of energy absorption of an electron beam in a conductive target are considered. The energy loss by the beam electrons is described as the sum of two types of losses: losses caused by electrons that experienced small-angle scattering and absorbed by the target and losses of backscattered electrons that experienced large-angle scattering and left the target. Using a specific example, it is shown that the use of such a model in some cases makes it quite simple to describe the energy loss by primary electrons in a multilayer target.

# ДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СФЕРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ В СРЕДЕ КОССЕРА

Тарлаковский Д. В.<sup>1,2</sup>, Нгуен Ван Лам<sup>2</sup>

<sup>1</sup>НИИ механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова <sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Рассматривается задача о действии нестационарных антисимметричных кинематических возмущений на сферическую полость в среде Коссера. Уравнения движения записываются в сферической системе координат с началом в центре сферической полости относительно нетривиальных компонент потенциалов смещений и угла поворота. К ним добавляются связь перемещений с потенциалами и физические соотношения. Начальные условия нулевые. Для решения используются разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, а также преобразование Лапласа по времени. При определении оригиналов в линейном приближении используется метод малого параметра — коэффициента, связывающего поля перемещений и вращения, а также связь функций Бесселя полуцелого индекса с элементарными функциями. Приводятся примеры расчетов.

### Введение.

При исследовании некоторых контактных задач для различных объектов современной техники требуется точное знание параметров процесса деформирования, особенно на кристаллическом уровне. Этому требованию отвечают модели упругих моментных сред, к которым, в том числе, относится и модель Коссера [1]. Они используются при исследовании поведения различных конструкций из композиционных материалов. При этом особый интерес представляют соответствующие нестационарные процессы. Число работ, посвященных задачам нестационарной моментной теории упругости, крайне ограничено. В том числе мало исследована проблема о распространении нестационарных волн в среде Коссера со сферическими границами. В предлагаемом докладе строится аналитическое решение задачи о действии нестационарных антисимметричных кинематических возмущений на сферическую полость в среде Коссера.

#### Постановка задачи.

На поверхности сферической полости единичного радиуса в пространстве, занятом средой Коссера, заданы нестационарные антисимметричные кинематические возмущения:

$$u|_{r=1} = U_0(\theta, \tau), \ \omega_r|_{r=1} = \Omega_{r0}(\theta, \tau), \ \omega_\theta|_{r=1} = \Omega_{\theta 0}(\theta, \tau), \ (1)$$

где u — третья, а  $\omega_r$  и  $\omega_{\theta}$  — первая и вторая координаты векторов перемещения  $u(r, \theta, \tau)$  и поворота  $\omega(r, \theta, \tau)$  в сферической системе координат  $r, \vartheta, \theta$   $(r \ge 0, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \vartheta < 2\pi), \tau$  — время. Безразмерные уравнения антисимметричного движения среды относительно скалярного потенциала  $\Phi(r, \theta, \tau)$  вектора поворота, а также нетривиальных компонент векторного потенциала  $\Psi(r, \theta, \tau)$  и вектора перемещения  $u(r, \theta, \tau)$  записываются так [1]:

$$\ddot{\Phi} = \gamma_3^{-2} \Delta \Phi - 4\alpha \delta \Phi, \ \ddot{u} = \eta_{1\alpha}^+ D(u) - 2\alpha D(\Psi), \ddot{\Psi} = \gamma_2^{-2} D(\Psi) + 2\alpha \delta(u - 2\Psi), \ D(u) = \Delta u - \frac{u}{r^2 \sin^2 \theta}.$$
(2)

Здесь  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\alpha$ ,  $\eta_{1\alpha}^+$  и  $\delta$  — механические параметры среды; точками обозначены производные по времени,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

При этом ненулевые компоненты  $\omega_r$  и  $\omega_{\theta}$  вектора поворота выражаются через потенциалы следующим образом:

$$\omega_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Psi \sin \theta \right), \ \omega_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \Psi \right)}{\partial r}.$$
 (3)

В начальный момент времени возмущения отсутствуют, и для гармоник имеем:

$$\Phi_n|_{\tau=0} = \dot{\Phi}_n\Big|_{\tau=0} = 0 \ (n \ge 0) \ , \ u_n|_{\tau=0} = \dot{u}_n|_{\tau=0} = \Psi_n|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_n\Big|_{\tau=0} = 0 \ (n \ge 1) \ .$$
 (4)

Все искомые функции полагаются ограниченными.

Отметим, что частный случай граничных условий (1) соответствует жестко сцепленному с полостью абсолютно твердому шару, вращающемуся вокруг прямой  $\theta = 0$  по закону:

$$\Omega_{r0} = \Omega \cos \theta, \ \Omega_{\theta 0} (\theta, \tau) = -\Omega \sin \theta.$$

#### Изображения функций влияния.

Для решения задачи (1)–(4) раскладываем функции  $\Phi$ ,  $\omega_r$  и  $\Omega_{r0}$  в ряды по полиномам Лежандра  $P_n(\cos \theta)$ , а u,  $\Psi$ ,  $\omega_{\theta}$ ,  $U_0$  и  $\Omega_{\theta 0}$  — по полиномам Гегенбауэра  $C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)$  [2], и применяем преобразование Лапласа по времени (s — параметр, индекс «L» обозначает трансформанту). При этом для трансформант коэффициентов рядов получим (коэффициенты рядов наделены нижним индексом «n»):

$$s^{2}\Phi_{n}^{L} = \gamma_{3}^{-2}\Delta_{n}\Phi_{n}^{L} - 4\alpha\delta\Phi_{n}^{L} \quad (n \ge 0),$$
  

$$s^{2}u_{n}^{L} = \eta_{1\alpha}^{+}\Delta_{n}u_{n}^{L} - 2\alpha\Delta_{n}\Psi_{n}^{L}, \quad s^{2}\Psi_{n}^{L} = 2\alpha\delta u_{n}^{L} + \left(\gamma_{2}^{-2}\Delta_{n} - 4\alpha\delta\right)\Psi_{n}^{L} \quad (n \ge 1),$$
(5)

$$\omega_{rn}^{L} = \frac{\partial \Phi_{n}^{L}}{\partial r} - n\left(n+1\right) \frac{\Psi_{n}^{L}}{r} \quad (n \ge 0), \ \omega_{\theta n}^{L} = \frac{\Phi_{n}^{L}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r\Psi_{n}^{L}\right)}{\partial r} \quad (n \ge 1), \qquad (6)$$

$$\omega_{rn}^{L}\big|_{r=1} = \Omega_{r0n}^{L}(s) \ (n \ge 0) , u_{n}^{L}\big|_{r=1} = u_{0n}^{L}(s) , \omega_{\theta n}^{L}\big|_{r=1} = \Omega_{\theta 0n}^{L}(s) \ (n \ge 1) .$$
(7)

Общие ограниченные решения системы уравнений (5) имеют вид [3–5]:

$$\Phi_{n}^{L} = C_{n}^{(0)}(s) Z_{n}(\lambda_{0}r), \quad \left(\begin{array}{c}u_{n}^{L}\\\Psi_{n}^{L}\end{array}\right) = \sum_{k=1}^{2} \left(\begin{array}{c}y_{1k}\\y_{2k}\end{array}\right) C_{n}^{(k)}(s) Z_{n}(\lambda_{k}r),$$

$$Z_{n}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} K_{n+1/2}(z), \lambda_{0} = \gamma_{3}\sqrt{s^{2} + 4\alpha\delta},$$

$$Re\lambda_{j} > 0 \quad (j = 0, 1, 2).$$
(8)

Здесь  $C_n^{(0)}(s)$  и  $C_n^{(k)}(s)$  — постоянные интегрирования,  $K_v(z)$  — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка v,  $\lambda_k$  и  $y_{1k}$  собственные числа и компоненты собственных векторов матрицы системы уравнений (5):

$$y_{11} = \gamma_2^2 (s^2 + 4\alpha\delta) - \lambda_1^2, \ y_{21} = 2\alpha\gamma_2^2\delta, y_{12} = -2\alpha\gamma_1^2\gamma_2^2 (s^2 + 4\alpha\delta), \ y_{22} = \gamma_1^2 (s^2 - 4\alpha^2\gamma_2^2\delta) - \lambda_2^2 (1 + \alpha\gamma_1^2).$$

С использованием (6), (8) удовлетворяем граничным условиям (7), получаем:

$$\begin{split} \omega_{rn}^{L}\left(r,s\right) &= G_{\omega rrn}^{L}\left(r,s\right)\Omega_{r0n}^{L}\left(s\right) + G_{\omega r\theta n}^{L}\left(r,s\right)\Omega_{\theta 0n}^{L}\left(s\right) + G_{\omega run}^{L}\left(r,s\right)u_{0n}^{L}\left(s\right),\\ \omega_{\theta n}^{L}\left(r,s\right) &= G_{\omega \theta rn}^{L}\left(r,s\right)\Omega_{r0n}^{L}\left(s\right) + G_{\omega \theta \theta n}^{L}\left(r,s\right)\Omega_{\theta 0n}^{L}\left(s\right) + G_{\omega \theta un}^{L}\left(r,s\right)u_{0n}^{L}\left(s\right),\\ u_{n}^{L}\left(r,s\right) &= G_{u \omega rn}^{L}\left(r,s\right)\Omega_{r0n}^{L}\left(s\right) + G_{u \omega \theta n}^{L}\left(r,s\right)\Omega_{\theta 0n}^{L}\left(s\right) + G_{u un}^{L}\left(r,s\right)u_{0n}^{L}\left(s\right). \end{split}$$

Здесь  $G^L_{\omega rrn}(r,s),\ldots, G^L_{u\omega un}(r,s)$  — изображения поверхностных функций влияния. Заметим, что при  $\alpha = 0$  уравнения в системе (2) становятся независимыми и для построения оригиналов в линейном приближении используем разложения в степенные ряды по этому параметру, характеризующему связь полей перемещения и угла поворота. При этом нулевой член совпадает с решением соответствующей чисто упругой задачи. Оригиналы коэффициентов рядов находятся аналитически.

Показано, что имеются два волновых фронта, соответствующие волне растяжения-сжатия и модифицированной с учетом свободного вращения волне сдвига.

Примеры расчетов приведены для зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице [6].

### Заключение.

В линейном приближении по малому параметру построено аналитическое решение задачи о распространении антисимметричных нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера. Результаты получены для перемещения и угла поворота.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [2] Абрамовиц М., Стиган И. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [3] Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В. Нестационарные объёмные функции Грина для упругого шара // Упругость и неупругость: Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого 105-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. 2016. С. 286–288.
- [4] Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объёмных сил // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2016. № 4. С. 48–54.

- [5] Vestyak V. A., Tarlakovskiy D. V. Elastic ball under non-stationary axially symmetrical volume forces // ZAMM — Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97. № 1. P. 25–37.
- [6] *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Московского университета, 1999. 328 с.

**Tarlakovskii D.V., Nguyen Van Lam.** Action of non-stationary antisymmetric kinematic perturbations on the spherical cavity in Cosserat medium. The problem of the action of unsteady antisymmetric kinematic perturbations on a spherical cavity in the Cosserat medium is considered. The equations of motion are written in a spherical coordinate system with the origin in the center of the spherical cavity with respect to non-trivial components of the potentials of displacements and the angle of rotation. To them are added the connection of displacements with potentials and physical relations. The initial conditions are zero. For the solution, we use the expansion of the desired functions in series in Legendre and Gegenbauer polynomials, as well as the Laplace transform in time. When determining the originals in the linear approximation, the small parameter method is used — the coefficient that relates the fields of displacement and rotation, as well as the relationship of the Bessel functions of a half-integer index with elementary functions. Examples of calculations are given.

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВИХРЕВОГО ПАРКЕТА НА ПЛОСКОСТИ

## Филимонова А.М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Статья посвящена численному исследованию динамики вихревого паркета на плоскости. Рассматривается бесконечная симметричная структура, состоящая из вихревых пятен и занимающая всю плоскость. Соответствующая математическая модель формулируется в виде системы двух уравнений в частных производных относительно завихренности и функции тока. Для численного исследования вихревого паркета используется метод вихрей в ячейках, в основе которого лежат аппроксимация поля завихренности по его значениям на множестве жидких частиц и представление функции тока в виде отрезка ряда Фурье. Представлены результаты численного исследования динамики и взаимодействия вихревой структуры, состоящей из четырех пятен разной направленности. Изучено влияние величины радиуса вихревого пятна и взаимного расположения положительно и отрицательно ориентированных пятен на процессы взаимодействия и перемепивания на примере симметрично распределенной начальной вихревой конфигурации, когда центры вихревых пятен расположены в узлах равномерной сетки на плоскости.

#### Математическая формулировка задачи.

Рассматриваются плоские течения невязкой несжимаемой жидкости. Математическая модель таких течений представляет собой систему двух уравнений в частных производных относительно завихренности  $\omega = \omega(x, y)$  и функции тока  $\psi = \psi(x, y)$ :

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \,\omega_x - \psi_x \,\omega_y = 0, \\ -\Delta \psi = \omega. \end{cases}$$
(1)

Здесь t — время, x, y — пространственные переменные,  $\Delta$  — оператор Лапласа. Система (1) представляет собой систему уравнений Эйлера динамики идеальной несжимаемой жидкости в терминах завихренности и функции тока.

Динамика частиц жидкости описывается системой ОДУ следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_1 = -\psi_y(x_i, y_i), \\ \dot{y}_i = v_2 = -\psi_x(x_i, y_i). \end{cases}$$
(2)

В начальный момент времени распределение завихренности в области определяется следующим условием:  $\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y).$ 

Предполагается, что на функцию тока  $\psi$  и её первую производную наложены периодические по обеим пространственным переменным граничные условия:

 $\psi|_{x=-a} = \psi|_{x=a}, \quad \psi|_{y=-b} = \psi|_{y=b}, \quad \psi'_{x}|_{x=-a} = \psi'_{x}|_{x_{x}=a}, \quad \psi'_{y}|_{y=-b} = \psi'_{y}|_{y=b}.$ Такие граничные условия широко используются при моделировании течений жидкости на всей плоскости. Эти условия хорошо отражают рассматриваемую в этой работе задачу исследования вихревого паркета на плоскости.

Рассматривается бесконечная конфигурация, но расчетной областью для решения системы (1) является прямоугольник  $D = \{-a < x < a, -b < y < b\}$ . Таким образом, исследуется участок вихревого паркета, а динамика на всей остальной плоскости повторяется благодаря периодическим краевым условиям.

#### Динамика системы четырех вихревых пятен.

В вычислительном эксперименте рассматривались симметричные вихревые конфигурации, состоящие из четырех одинаковых вихревых пятен, центры которых расположены в узлах равномерной сетки. Из четырех пятен два выбирались с положительной завихренностью и два — с отрицательной. В начальный момент времени распределение завихренности в расчетной области задавалось согласно гауссовому распределению:

$$\omega_{0}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x\pm\alpha)^{2}+(y\pm\beta)^{2}}{2}}, & (x\mp\alpha)^{2}+(y\pm\beta)^{2} \leqslant R^{2}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x\pm\alpha)^{2}+(y\pm\beta)^{2}}{2}}, & (x\pm\alpha)^{2}+(y\pm\beta)^{2} \leqslant R^{2}, \\ 0, & (x\pm\alpha)^{2}+(y\pm\beta)^{2} > R^{2}, \\ 0, & (x\mp\alpha)^{2}+(y\pm\beta)^{2} > R^{2}, \end{cases}$$
(3)

где  $(\pm \alpha, \pm \beta), (\mp \alpha, \pm \beta)$  — координаты центров каждого из четырех вихревых пятен, R — радиус вихревых пятен.

Для существования решения второго уравнения системы (1) необходимо, чтобы интеграл от суммарной завихренности в расчетной области был равен нулю. Это условие выполняется благодаря начальному распределению завихренности, заданному по закону (3).

Численное исследование проводилось при помощи метода вихрей в ячейках (см. [1–3]), в основе которого лежат аппроксимация поля завихренности по значениям в жидких частицах и представление функции тока в виде отрезка ряда Фурье.

Далее представлены результаты серии вычислительных экспериментов, где в верхнем ряду (рисунки (a)-(d)) изображена динамика участка вихревого паркета в различные моменты времени, а в нижнем (рисунки (e)-(h)) — поле ЛПЛ (см. [4, 5]) для этой конфигурации в эти же моменты времени.

Визуализация поля ЛПЛ позволяет наглядно увидеть, насколько бесконечно близкие в начальный момент времени траектории отдаляются друг от друга в фазовом пространстве с течением времени. Здесь черный цвет означает наименьшее разбегание (минимальный ЛПЛ равен 0), а чем светлее оттенок серого, тем больше значение ЛПЛ и тем сильнее разбегание частиц.

Динамика отражает перемещение в расчетной области жидких частиц, которые в начальный момент времени составляли исходную вихревую конфигурацию. Светло-серый цвет означает пятна с суммарной положительной завихренностью, а чёрный — с суммарной отрицательной.

На рис. 1 представлена динамика участка вихревого паркета (3) для радиуса R = 2.5. Поскольку данная конфигурация является симметричной на всей плоскости, то такая структура не разрушается и практически не меняется. Каждое из пятен вращается вокруг своей оси с постоянной скоростью, при этом вся вихревая конфигурация стоит на месте при  $t \in [0, 400]$ . Полный оборот вокруг своей оси каждое из пятен совершает за  $t \approx 10$ , то есть за весь промежуток расчета каждое из пятен совершило по 40 оборотов.



Рисунок 1 – (a)–(d) Распределение завихренности на плоскости (x, y) и (e)–(h) величина ЛПЛ в моменты времени t = 0.2, 100, 200, 400 для вихревой конфигурации из четырех вихрей (3) при R = 2.5 и  $\alpha = \beta = 5.0$ 

Анализируя величины ЛПЛ, можно сделать вывод, что сильнее всего разбегаются частицы, в начальный момент времени находившиеся вокруг вихревых пятен. При t = 0.2 (см. рис. 1, (e)) видно, что расстояние между центром каждого из пятен и близкими к нему точкам мало, а расстояния между приграничными точками пятен увеличиваются, то есть эти частицы разбежались. При t = 200 (см. рис. 1, (g)) видны сепаратрисы (белые линии), делящие расчетную область на четыре равных квадрата, внутри которых происходит пассивный транспорт частиц. Центры пятен и близкие к ним частицы по-прежнему остаются черными, то есть не разбегаются далеко с течением времени. При t = 400 (см. рис. 1, (h)) области внутри квадратов становятся еще светлее, что свидетельствует о перемешивании.

На рис. 2 представлены результаты вычислительного эксперимента с наименьшей в серии величиной радиуса R = 2.0. В отличие от предыдущего эксперимента, данная конфигурация имеет смещенный центр, что позволяет получить качественно другой тип динамики вихревого паркета в расчетной области.

В момент времени t = 10 (см. рис. 2, (a)) конфигурация из четырёх пятен распадается на два диполя, которые начинают двигаться в противоположные стороны. Дойдя до границы расчетной области по x, диполи снова распадаются на отдельные пятна и продолжают движение в противоположные стороны вдоль границы по вертикали. При t = 50 (см. рис. 2, (b)) каждое из пятен достигает угла области и начинает движение навстречу пятну с суммарной завихренностью противоположного знака. Пройдя половину пути по x, пятна снова образуют диполи, которые движутся к центру области. К моменту  $t \approx 95$  формируется конфигурация, схожая с начальной. При этом наблюдается периодическая динамика с периодом  $t \approx 95$ . На всем промежутке расчета конфигурация совершает шесть полных циклов, при этом каждое из пятен совершает оборот вокруг своей оси за  $t \approx 40$ .

На изображении поля ЛПЛ видно, что сильнее всего частицы разбегаются вдоль сепаратрис, причем сначала формируется вертикальная сепаратриса  $t \approx 50$ 



Рисунок 2 – (a)–(d) Распределение завихренности на плоскости (x, y) и (e)–(h) величина ЛПЛ в моменты времени t = 10, 50, 190, 600 для вихревой конфигурации из четырех вихрей (3) при R = 2.0 и  $\alpha = \beta = 4.0$ 



Рисунок 3 – (a)–(d) Распределение завихренности на плоскости (x, y) и (e)–(h) величина ЛПЛ в моменты времени t = 15, 65, 250, 350 для вихревой конфигурации из четырех вихрей (3) при R = 3.5 и  $\alpha = \beta = 5.0$ 

(см. рис. 2, (f)), а затем — горизонтальная t = 190 (см. рис. 2, (g)). Транспорт пассивных частиц вокруг самих пятен оказывается слабее, чем транспорт внутри самих пятен.

С самого начала расчета происходит симметричная деформация пятен, что хорошо видно при t = 15 (см. рис. 3, (e)). Далее происходят процессы филаментации, что приводит к формированию пятен новой формы. Такая структура сохраняется далее по времени на всем промежутке расчета  $t \in [65, 400]$ , причем вся структура стоит на месте, а каждое из пятен вращается вокруг своей оси, совершая один полный оборот за  $t \approx 10$ , что значительно быстрее, чем в предыдущем эксперименте.

Анализируя поле ЛПЛ, можно заметить, что также, как и в предыдущих экспериментах, происходит формирование горизонтальной и вертикальной сепаратрис. Процессы перемешивания при t = 65 интенсивнее, чем при t = 400. Это обусловлено тем, что на начальных временах только начинает формироваться структура, которая потом остается без качественных изменений до t = 400.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-29-06013-а.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Говорухин В. Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С. 1133–1147.
- [2] Говорухин В. Н., Филимонова А. М. Расчет плоских геофизических течений невязкой несжимаемой жидкости бессеточно-спектральным методом // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 3. С. 413–426.
- [3] Филимонова А. М. Динамика и адвекция в вихревом паркете // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27. Вып. 4. С. 71–84.
- [4] Shadden S., Lekien F., Marsden J. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows // Phys. D: Nonlinear Phenomena. 2005. V. 212. №3 – 4. P. 271–304.
- [5] Haller G. Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields // Chaos. 2000. V. 10. № 1. P. 99–108.

Filimonova A. M. Numerical investigation of vortex parquet on the plane. The article is devoted to a numerical study of the dynamics of a vortex parquet on the plane. An infinite symmetric structure consisting of vortex spots and occupying the entire plane is considered. The corresponding mathematical model is formulated as a system of two partial differential equations in terms of vorticity and stream function. The report presents results of a numerical study of the dynamics and interaction of a vortex structure consisting of four spots with different directions. The influence of the spot radius and the relative position of the positive and negative directed spots on the processes of interaction and mixing is studied using the example of a symmetrically distributed initial vortex configuration, when the centers of vortex spots are located at the nodes of a uniform grid on the plane.

Филимонова А.М.
## ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ТРУБОПРОВОДА

## Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Представлены результаты моделирования струйного безотрывного обтекания упругого трубопровода с нелинейными граничными условиями. Учитывается действие среднего давления на трубопровод. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения трубопровода, распределение давлений на деформированном и недеформированном трубопроводах, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения.

Жуковский Н. Е., первым исследовавший струйные течения с учетом капиллярных сил, построил точное решение задачи о симметричном обтекании газового пузыря в прямолинейном канале [1]. Киселевым О. М. и Рапопортом Э. Ф. [2, 3] исследованы задачи о струйном обтекании упругой пластины и цилиндрической оболочки малой кривизны. В линеаризованной постановке названная задача рассматривалась в [4]. Нелинейные граничные условия и некоторые численные результаты впервые получены в [5]. В [6] доказана теорема о существовании и единственности решения нелинейной задачи при заданных условиях на параметры и решение может быть найдено методом простых итераций при любом начальном приближении. Результаты моделирования струйного безотрывного обтекания упругой цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями с учетом действия среднего давления на оболочку [7, 8] приводятся в [9].

Рассматривается поперечное обтекание трубопровода с круглым поперечным сечением плоским безграничным потоком идеальной несжимаемой невесомой жид-кости плотностью  $\rho$  с учетом действия среднего давления (рис. 1).

Ставится задача определения формы поперечного сечения трубопровода, поля скоростей течения жидкости, усилий и моментов в трубопроводе, если заданы давление внутри трубопровода  $P_1$ , полное давление в потоке  $P^*$ , скорость жидкости на бесконечности  $V_{\infty}$ .

В качестве параметрической области примем круг единичного радиуса на плоскости вспомогательного переменного  $\zeta$ , причем потребуем, чтобы линии поперечного сечения трубопровода соответствовала дуга окружности.

Комплексный потенциал W на плоскости единичного круга имеет вид

$$W = NV_{\infty}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right),\tag{1}$$

где *N* — характерный размер деформированного трубопровода.

Когда жесткость трубопровода стремится к бесконечности, функция, отображающая круг единичного радиуса в плоскости  $\zeta$  на область течения в плоскости z = x + iy, записывается

$$z = f\left(\zeta\right) = \frac{R_0}{\zeta},\tag{2}$$



Рисунок 1 – Плоскость течения z и вспомогательная плоскость  $\zeta$ 

где  $R_0$  — внутренний радиус кругового недеформированного трубопровода, i — мнимая единица.

Безразмерная комплексно-сопряженная скорость при обтекании недеформированного трубопровода также находится из выражений (1)–(2)

$$\frac{1}{V_{\infty}}\frac{dW}{dz} = \frac{N}{R_0} \left(1 - \zeta^2\right),$$

индекс 0 относится к величинам при недеформированном трубопроводе. В общем случае, когда цилиндрическая жесткость трубопровода имеет конечную величину и деформированный трубопровод остается гладким, безразмерную комплексносопряженную скорость будем определять в виде [2]

$$\frac{1}{V_{\infty}}\frac{dW}{dz} = \frac{N}{R_0} \left(1 - \zeta^2\right) \exp\left(-\omega\left(\zeta\right)\right).$$
(3)

Здесь  $\omega(\zeta) - функция, аналитическая в круге <math>\zeta \leq 1$  и обращается в нуль при  $\zeta = 0$ . Из условий на бесконечности ( $\zeta = 0$ ):  $V(\zeta) = 0$  следует, что аналитическая функция  $\omega(\zeta)$  представима в виде ряда

$$\omega\left(\zeta\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n \tag{4}$$

с комплексными коэффициентами.

Форма деформируемой поверхности находится из выражений (1), (3):

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{N}{\zeta^2} \exp\left(\omega\left(\zeta\right)\right). \tag{5}$$

Для элемента деформированного трубопровода запишем уравнения равновесия [10] с учетом действия среднего давления [7, 8]

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} = 0, (6)$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} + P_1 - P - \frac{(P_1 + P)h}{2R} = 0,$$
(7)

$$Q = \frac{dM}{ds},\tag{8}$$

где *T*, *Q*, *M* — усилие натяжения, перерезывающая сила и изгибающий момент, *R*, *s* — радиус кривизны и длина дуги поперечного сечения оболочки, *P* давление в жидкости, которое определяется из интеграла Бернулли

$$P = P^* - \frac{\rho V^2}{2},$$

где  $\rho, V$  — плотность и скорость жидкости на поверхности оболочки. Изгибающий момент определяется

$$M = D\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_u}\right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$
(9)

где E,  $\nu$ , h — модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина стенки трубопровода, D — цилиндрическая изгибная жесткость трубопровода,  $R_u$  — радиус кривизны в недеформированном начальном состоянии. Из (6) с учетом (8) и (9) следует

$$T = T_1 - \frac{D}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right), \tag{10}$$

где  $T_1$ ,  $R_1$  — усилие натяжения и радиус кривизны линии поперечного сечения деформированного трубопровода в точке A. Уравнение (7) с учетом (8)–(10),  $R = ds/d\theta$  и интеграла Бернулли запишется в виде

$$\frac{d^{3}\theta}{ds^{3}} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^{3} - \frac{\alpha}{N^{2}} \frac{d\theta}{ds} - \frac{(P_{1} + P^{*})h}{2D} \frac{d\theta}{ds} + \frac{\rho V^{2}h}{4D} \frac{d\theta}{ds} + \frac{P_{1} - P^{*}}{D} + \frac{\rho V^{2}}{2D} = 0, \quad (11)$$
$$\alpha = N^{2} \left(\frac{1}{2R_{1}^{2}} + \frac{T_{1}}{D}\right).$$

Здесь  $\theta$  — угол между осью x и касательной к линии поперечного сечения трубопровода. Угол  $\theta$ , скорость на поверхности трубопровода V и элемент длины дуги ds находятся из выражений (3)–(5) с учетом  $\zeta = exp(i\sigma)$ :

$$\theta = \theta_0 + \mu, \qquad V = V_{\infty} g e^{-\lambda}, \quad ds = -N e^{\lambda} d\sigma, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \sigma; \qquad 0 < \sigma < \pi, \\ \theta_0 = \frac{3\pi}{2} - \sigma, \qquad 0 < \sigma < 2\pi, \qquad g = |2\sin\sigma|.$$

$$(12)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  — действительная и мнимая части функции  $\omega$  ( $exp(i\sigma)$ ). Дифференциальное уравнение (11) с учетом соотношений (12) и  $h/R_0 = \delta$  записывается

255



Рисунок 2 – Зависимости относительного радиального перемещения  $w = y_D/R_0 - 1$  точки D трубопровода от параметра  $\gamma$  для  $\beta = 2$ ,  $\beta_m = 3$  (сплошная линия) и  $\beta = 0$ ,  $\beta_m = 200$  (пунктирная линия)

$$\mu^{'''} - 3\lambda^{'}\mu^{''} + \left[-\lambda^{''} + 2\lambda^{'2} + \frac{1}{2}\left(\mu^{'} - 1\right)^{2} - \alpha e^{2\lambda} - \left(\beta_{m}e^{2\lambda} - \frac{g^{2}}{2}\right)e^{\lambda}\gamma\delta\right]\left(\mu^{'} - 1\right) - \left(\beta e^{2\lambda} + g^{2}\right)e^{\lambda}\gamma = 0.$$
(13)

Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости  $\gamma$  [9]. Для стального трубопровода с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона материала трубы: 200 ГПа и 0.3, внутренним радиусом 0.710 м, толщиной стенки 0.012 м, давлением внутри трубопровода  $P_1 = 0.2$  МПа, плотностью жидкости вне трубопровода  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , полном давлении в потоке  $P^* = 0.1 \text{ MII}a$ , скорости жидкости на бесконечности  $V_{\infty}=10$  м/с, параметры аэрогидроупругости равны:  $\beta = 2, \ \beta_m = 3, \ \delta = 0.017, \ \gamma = 0.56$ . Если давление внутри трубопровода  $P_1 = 10$  МПа, плотность жидкости вне трубопровода  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, полное давление в потоке  $P^* = 10$  МПа, скорость жидкости на бесконечности  $V_{\infty} = 10$  м/с, то параметры аэрогидроупругости равны:  $\beta = 0, \beta_m = 200,$ остальные параметры не изменяются. Зависимости относительного радиального перемещения  $w = y_D/R_0 - 1$  точки D трубопровода от параметра  $\gamma$  приводится на рис. 2 для  $\beta = 2, \beta_m = 3$  (сплошная линия) и  $\beta = 0, \beta_m = 200$  (пунктирная линия). С увеличением параметра аэрогидроупругости  $\gamma$  трубопровод вытягивается в направлении, перпендикулярном скорости потока на бесконечности. Действие среднего давления приводит к увеличению радиального перемещения точки D трубопровода. Деформация трубопровода вызывает уменьшение давления в точках, удаленных от оси x и увеличение давления в окрестности точек A и B. Дается распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения в трубопроводе.

Работа поддержана средствами госбюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0088) и грантом РФФИ (проект № 18-01-00150).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Собр. соч. Т. П. Гидродинамика. М.-Л.: ОГИЗ, 1949. 763 с.
- [2] Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. О струйном обтекании упругой пластины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 35–42.
- [3] Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. О струйном обтекании упругой оболочки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 2. С. 24–32.
- [4] Ильгамов М. А. Изгиб и устойчивость цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью // Прикл. мех. 1975. Т. 11. Вып. З. С. 12–19.
- [5] Хакимов А. Г. Обтекание гибкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 6. С. 147–151.
- [6] Киселев О. М. Безотрывное обтекание круговой цилиндрической оболочки // Тр. сем. по краев. задачам. 1982. Вып. 18. С. 104–115.
- [7] Ильгамов М. А. Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 566–579.
- [8] Ильгамов М. А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
- [9] Хакимов А. Г. К задаче об обтекании круговой цилиндрической оболочки // МЖГ. 2020. № 2. С. 12–18.
- [10] Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М.: Издательство МГУ, 1969. 695 с.

Khakimov A. G. Cross-flow of a circular pipeline. The results of modeling jet continuous flow around an elastic pipeline with nonlinear boundary conditions are presented. The effect of the average pressure on the pipeline is taken into account. The solution is obtained as a series of degrees of the aerohydroelasticity parameter. The forms of the cross-section of the pipeline, the distribution of pressures on deformed and undeformed pipelines, the distribution of the dimensionless bending moment, the cutting force, and the tension force are given.

# СВОЙСТВА КРИВЫХ НАГРУЖЕНИЯ И РАЗГРУЗКИ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЬЮ ТИПА МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ, И ИНДИКАТОРЫ ЕЁ ПРИМЕНИМОСТИ

## Хохлов А.В.

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Аналитически изучены общие качественные свойства семейства кривых нагружения и разгрузки с постоянными скоростями и последующего отдыха, порождаемых физически нелинейным определяющим соотношением типа Максвелла для нестареющих изотропных упруговязкопластичных материалов с четырьмя произвольными материальными функциями, их зависимость от материальных функций, от максимального напряжения и скорости нагружения и разгрузки. Обнаруженные свойства сопоставлены с типичными свойствами кривых нагружения и разгрузки реономных материалов с целью выявления ограничений на материальные функции, арсенала возможностей и индикаторов (не)применимости определяющего соотношения.

Данный доклад продолжает цикл статей [1–10] по системному исследованию физически нелинейного определяющего соотношения (OC) для изотермических процессов деформирования реономных материалов

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau))d\tau, \ t > 0,$$
(1)

с целью определения области применимости, комплекса моделируемых реологических эффектов, наблюдаемых в испытаниях реономных материалов, и способов идентификации, настройки и верификации. ОС (1) связывает (в одномерном случае) деформацию  $\varepsilon(t)$  с историей изменения напряжения  $\sigma(\tau), \tau \in [0; \tau]$ , и содержит две материальные функции (M $\Phi$ ):  $F(x), V(x), x \in (\omega_-, \omega_+)$ . Параметры E > 0 и  $\eta > 0$  (модуль упругости и коэффициент вязкости) выделены из М $\Phi$  для удобства учёта влияния температуры в форме  $E = E(T), \eta = \eta(T)$  [3]. Одна М $\Phi$  управляет (нелинейно) упругими свойствами, вторая — вязкопластическими: она регулирует наследственные свойства, вязкость, скорость диссипации, релаксации, ползучести и накопления пластической деформации, чувствительность напряжения (в частности, мгновенного модуля и предела текучести) к скорости деформации, длительную прочность. Минимальные первичные ограничения на М $\Phi$  таковы:  $F(x), x \in (\omega_-, \omega_+)$  — непрерывная (строго) возрастающая функция с кусочно непрерывной производной, такая, что F(0) = 0, V(x) — непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале ( $\omega_-, \omega_+$ ), такая, что V(0) = 0.

При этих ограничениях на МФ в работах [1–10] аналитически изучены общие свойства порождаемых им базовых квазистатических кривых (кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией деформирования, ползучести при ступенчатых нагружениях, длительной прочности, диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения и т. п.), их зависимость от характеристик двух МФ ОС (1) и параметров программ нагружения, выявлены возможности модели, те эффекты, которые принципиально не могут быть описаны в её рамках, и дополнительные ограничения на F и V, обеспечивающие адекватное описание типичных свойств кривых испытаний вязкоупругопластичных материалов. Базовые ограничения на МФ обеспечивают, в частности, возрастание диаграмм деформирования и кривых ползучести [5–8], убывание кривых релаксации и длительной прочности [2, 4] и термодинамическую согласованность модели в изотермических процессах, т. е. положительность работы напряжений в произвольном процессе деформирования и неотрицательность диссипации [1, 2].

Анализ показал, что следует различать два основных случая, в которых OC (1) (моделируемый материал) ведет себя по-разному: 1) |V(x)| > 0 при  $x \neq 0$ ; 2)  $V(x) \equiv 0$  на некотором отрезке  $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+), \sigma_- \leq 0, \sigma_+ \geq 0, \sigma_- \neq \sigma_+$ . Во втором случае при  $\sigma(t) \in [\sigma_-, \sigma_+]$  OC (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала (диссипация, релаксация и ползучесть отсутствуют, кривая деформирования  $\sigma(\epsilon, b)$  не зависит от скорости нагружения b при  $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+], \varepsilon_\pm = F(\sigma_\pm)/E$ ),  $\sigma_-, \sigma_+$  играют роль пределов упругости и ползучести материала при сжатии и растяжении, а при  $\sigma(t) < \sigma_-$  (или  $\sigma(t) > \sigma_+$ ) начинают проявляться диссипативные и вязкопластические свойства.

Обобщение OC (1) на трехмерный случай сформулировано, например, в [10]. Свойства кривых нагружения-разгрузки-отдыха.

Для треугольной программы нагрузки-разгрузки с постоянной скоростью b>0

$$\sigma(t) = bt, \ t \in [0, t_*]; \ \sigma(t) = -bt + 2bt_*, \ t \in (t_*; 2t_*); \ \sigma(t) \equiv 0, \ t > 2t_*,$$
(2)

с длительностью полуцикла  $t_* > 0$  и максимальным напряжением  $\sigma_* = bt_* \in (\omega_-, \omega_+)$  ОС (1) даёт непрерывный кусочно-гладкий отклик  $\varepsilon = \Lambda(t; b, T)$ :

$$\Lambda(t;b,T) = E^{-1}F(bt) + \eta^{-1} \int_0^t V(b\tau)d\tau, \ t \in [0;t_*],$$
(3)

$$\Lambda(t;b,T) = 0.5p(b,T) + E^{-1}F(b(T-t)) + \eta^{-1} \int_{T/2}^{t} V(b(T-\tau))d\tau, \ t \in (t_*;T), \quad (4)$$

$$\Lambda(t; b, T) = p(b, T) = const, \ t > T,$$
(5)

где  $T = 2t_*$ , а p(b,T) — остаточная деформация после цикла нагрузки-разгрузки:

$$p(b,T) = \Lambda(T;b,T) = \eta^{-1}T\sigma_*^{-1}I(\sigma_*), \ I(s) = \int_0^s V(x)dx.$$
(6)

Если  $\sigma_* > \sigma_+$  (в частности, при любых  $b, t_* > 0$  в случае  $\sigma_+ = 0$ ), то p(b,T) > 0, так как V(x) > 0 при  $x > \sigma_+$ . Формулы (2)–(5) — параметрическое представление диаграмм нагружения-разгрузки-отдыха (ДНР)  $\sigma(\varepsilon, b)$ , порождаемых ОС (1). Их общие свойства при произвольных МФ детально изучены в статьях [7, 9] и использованы для разработки методик идентификации.

При фиксированных t, T > 0 семейства  $\Lambda(t; b, T)$  и  $\sigma(\varepsilon, b)$  возрастают по параметру b (так как F(x) и V(x) возрастают). При  $t \in [0; t_*]$  функция  $\Lambda(t; b, T)$ 

### Хохлов А.В.

всегда возрастает по t (соответственно,  $\sigma(\varepsilon, b)$  возрастает по  $\varepsilon$ ), а если  $F''(x) \ge 0$ , то  $\Lambda(t)$  выпукла вниз, а  $\sigma(\varepsilon, b)$  выпукла вверх. На участке разгрузки  $(t_*; T)$  деформация  $\Lambda(t)$  может вести себя по-разному в зависимости от свойств МФ и параметров программы нагружения (2): она может убывать на всём интервале  $(t_*; T)$  или иметь точку максимума, может быть выпуклой вверх на  $(t_*; T)$  или иметь точку перегиба (а кривая разгрузки  $\sigma(\varepsilon, b)$  может иметь точку перегиба и интервал возрастания).

Например, для линейной модели (1) (с F(x) = V(x) = x) имеем  $p(b,T) = \eta^{-1}bt_*^2$ ,  $\Lambda(t) = E^{-1}bt + 0.5\eta^{-1}bt^2 = E^{-1}bt(1+0.5\tau_r^{-1}t), t \in [0;t_*], \Lambda(t) = \eta^{-1}bt_*^2, t > T$ ,

$$\Lambda(t) = 0.5\eta^{-1}b\left[-(t - (2t_* - \tau_r))^2 + \tau_r^2 + 2t_*^2\right], t \in (t_*; T),$$
(7)

где  $\tau_r = \eta/E$  — время релаксации линейной модели Максвелла. При любых b, T > 0график  $\Lambda(t)$  на интервале  $(t_*;T)$  — выпуклая вверх парабола, и  $\dot{\Lambda} = 0$  при  $\dot{t} = 2t_* - \tau_r$ . Если  $\dot{t} \in (t_*;T)$ , т. е.  $t_* > \tau_r$ , то  $\dot{t}$  — точка максимума, функция (7) возрастает на  $(t_*, \dot{t})$ , а максимальная деформация равна  $\Lambda(\dot{t}) = 0.5\eta^{-1}b(\tau_r^2 + 2t_*^2)$ . Если же  $\dot{t} \leq t_*$ , т. е.  $t_* \leq \tau_r$ , то функция (7) убывает на  $(t_*;T)$ . Возрастание  $\Lambda(t)$ на всём интервале  $(t_*;T)$  (т. е.  $\dot{t} > T$ ) невозможно, так как  $\tau_r > 0$ .

Отмеченные свойства ДНР линейной модели Максвелла справедливы и для ДНР (3)–(5) любой модели (1) с F(x) = x и произвольной (неубывающей) МФ V. У таких моделей при любых  $b, t_* > 0$  деформация  $\varepsilon = \Lambda(t; b, T)$  обладает следующими свойствами [7]: 1) при  $t \in [0, t_*], \varepsilon(t)$  возрастает и выпукла вниз; 2) при  $t \in [t_*, T], \varepsilon(t)$  выпукла вверх, но не обязана быть монотонной; критерий убывания  $\varepsilon(t)$  на всём интервале  $(t_*, T)$  имеет вид  $V(bt_*) \leq b\tau_r$ , или  $t_*/\tau_r \leq \sigma_*/V(\sigma_*)$ ; 3) если же  $V(bt_*) > b\tau_r$ , то деформация  $\varepsilon(t)$  имеет в интервале  $(t_*, T)$  точку максимума  $\hat{t} = T - v(b\tau_r)/b$ , где  $v = V^{-1}$ ;  $\hat{t}$  убывает с ростом  $\tau_r$  (в силу возрастания МФ V и обратной к ней) и  $\hat{t} \to T$  при  $\tau_r \to 0$ . В статье [7] доказана следующая теорема об общих свойствах ДНР (3)–(5), порождаемых ОС (1) с произвольными МФ.

**Теорема.** Пусть F(x) — непрерывная строго возрастающая кусочно-гладкая функция, V(x) — непрерывная возрастающая функция на интервале ( $\omega_{-}, \omega_{+}$ ), F(0) = 0 и V(0) = 0. Тогда ДНР (3)–(5) обладает следующими свойствами:

1) Для любых  $b, t_* > 0$  деформация  $\varepsilon = \Lambda(t; b, T)$  непрерывна при  $t \ge 0$ .

2) Для любых  $t, t_* > 0$  семейство  $\Lambda(t; b, T)$  возрастает по b при  $t \ge 0$ .

3) На отрезке  $[0, t_*]$  деформация  $\varepsilon = \Lambda(t; b, T)$  всегда возрастает,  $\Lambda(0; b, T) = 0$ , деформация в момент начала разгрузки  $\varepsilon_* = \Lambda(t_*; b, T) = E^{-1}F(\sigma_*) + 0.5p(b, T);$ если  $F''(x) \ge 0$ , то  $\varepsilon(t)$  выпукла вниз, если нет, то  $\varepsilon(t)$  может иметь точку перегиба.

4) При t > T деформация постоянна:  $\varepsilon(t) = p(b, T)$ , остаточная деформация выражается формулой (6), p(b, T) = 0 только для моделей с  $\sigma_+ > 0$  в случае  $\sigma_* \leq \sigma_+$  (в частности, p(b, T) > 0 при любых  $b, t_* > 0$  для моделей с  $\sigma_+ = 0$ ).

5) На интервале разгрузки  $t \in (t_*; T)$  деформация (4) может вести себя поразному в зависимости от свойств МФ V и параметров программы нагружения: может монотонно убывать на всем интервале  $(t_*; T)$  или иметь одну точку максимума, может быть выпуклой вверх на  $(t_*; T)$  или иметь одну точку перегиба.

6) Скорость деформации  $\dot{\varepsilon}(t)$  имеет разрывы первого рода в точках  $t = t_*$ и  $t = 2t_*$ , ее скачки равны  $-2bF'(\sigma_*)/E$  и bF'(0)/E и не зависят от МФ V. Индикаторы (не)применимости ОС по кривым нагружения-разгрузки Из обнаруженных общих свойств ДНР (3)–(5), порождаемых ОС (1) при нагружениях (2), вытекают необходимые признаки применимости ОС (1), которые удобно проверять при анализе экспериментальных ДНР материалов и использовать в качестве индикаторов (не)применимости ОС (1) для моделирования этих материалов. Такая проверка — предварительный этап верификации модели, предшествующий идентификации, оценка ее целесообразности. В работе [9] найдена система индикаторов применимости ОС (1) по ДНР материала, и предложены несколько способов идентификации ОС (1).

1. Постоянство деформации при  $t \ge T = 2t_*$  (после разгрузки):  $\varepsilon(t) = p(b, T)$ .

2. Пропорциональность остаточной деформации длительности нагружения и разгрузки T в испытаниях с любым заданным напряжением  $\sigma_* > \sigma_+$  и разными скоростями нагружения, т. е. p(b,T)/T не зависит от T:  $p_2/p_1 = T_2/T_1 = b_1/b_2$ .

3. Независимость от *T* разности  $\varepsilon_* - 0.5p$  ( $\varepsilon_* -$ деформация в момент  $t_*$ ) в испытаниях с заданным  $\sigma > \sigma_+$ , т. е. выполнение равенств:  $(p_2 - p_1)/(\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1}) = 2$ ,  $(\varepsilon_{*2} - 0.5p_2)/(\varepsilon_{*1} - 0.5p_1) = 1$ ,  $\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1} = (p_2 - p_1)/2$ .

4. Пропорциональность разностей  $\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1}$  и  $T_2 - T_1$  в испытаниях с фиксированным  $\sigma_* > \sigma_+$  и различными скоростями нагружения, т. е. выполнение пропорции  $(\varepsilon_{*3} - \varepsilon_{*1})/(\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1}) = (T_3 - T_1)/(T_2 - T_1).$ 

5. В любых двух испытаниях с одинаковой скоростью нагружения b и разными  $T = T_i$  (и  $\sigma_*$ ) функции времени  $S_i(t) := \Lambda(T - t, b, T_i) + \Lambda(t, b, T_i) - p(b, T_i), t \in (0; T_i/2)$  совпадают при всех  $t \in (0; T_m), T_m := min\{T_i\},$  т. е. (измеряемая) функция  $S_i(t, b, T) := \Lambda(T - t, b, T) + \Lambda(t, b, T) - p(b, T), t \in (0; T/2)$  не зависит от T.

Если какой-то из указанных признаков явно отсутствует у кривых нагруженияразгрузки-отдыха материала (отклонение превышает заданный допуск), то применять OC (1) для его моделирования не следует.

В совместном докладе автора с П. В. Тишиным и О. Н. Столяровым «Кривые нагружения и разгрузки комплексной полиэфирной нити и идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла» приведены данные испытаний полиэфирных нитей (измеренная деформация  $\varepsilon = \Lambda(t; b, T)$ ) по программам нагружения (2) с разными параметрами, осуществлена проверка по ним индикаторов применимости ОС (1) и проведена его идентификация.

## ЛИТЕРАТУРА

- Khokhlov A. V. Properties of a Nonlinear Viscoelastoplastic Model of Maxwell Type with Two Material Functions // Moscow University Mechanics Bulletin. 2016. Vol. 71. № 6. P. 132–136.
- [2] Хохлов А. В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования повреждённости при ступенчатых нагружениях // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2016. № 3. С. 524–543.

### X о x л o в A. B.

- [3] Хохлов А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 160–179.
- [4] Хохлов А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 6. С. 31–55.
- [5] Хохлов А. В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по кривым ползучести с начальной стадией нагружения. Часть 2. Методики // Деформация и разрушение материалов. 2017. № 10. С. 2–9.
- [6] Хохлов А. В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по диаграммам нагружения с постоянными скоростями // Деформация и разрушение материалов. 2018. № 4. С. 2–10.
- [7] Хохлов А. В. Свойства диаграмм нагружения и разгрузки, порождаемых нелинейным определяющим соотношением типа Максвелла для реономных материалов // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 293– 324.
- [8] Хохлов А. В. Индикаторы применимости и методики идентификации нелинейной модели типа Максвелла для реономных материалов по кривым ползучести при ступенчатых нагружениях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 6. С. 92–112.
- [9] Khokhlov A. V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading-unloading curves // Mechanics of Composite Materials. 2019. Vol. 55. № 2. P. 195–210.
- [10] Хохлов А. В. О возможности описания знакопременности и немонотонности зависимости от времени коэффициента Пуассона при ползучести с помощью нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла // Деформация и разрушение материалов. 2019. № 3. С. 16–24.

Khoklov A. V. Properties of loading-unloading curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model and indicators of its applicability. Under minimal primary restrictions on two material functions of the physically nonlinear Maxwell-type constitutive relation for non-aging rheonomic materials, the general equation of theoretic stress-strain curves family produced by the model under loading and unloading at constant stress rates is derived and analyzed in uni-axial case. The main qualitative properties of stress-strain curves for viscoelastoplastic materials in order to elucidate capabilities of the model, to obtain necessary phenomenological restrictions which should be imposed on the material functions and to find convenient indicators of applicability (or non-applicability) that can (and should) be checked examining test data of a material.

# КОСИММЕТРИЯ СИСТЕМЫ ПАР ХИЩНИКОВ И ЖЕРТВ НА ОДНОРОДНОМ АРЕАЛЕ

## Цибулин В. Г., Ха Т. Д.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследована модель взаимодействия системы двух видов хищников и двух видов добычи на однородном полигоне, которая записывается в виде системы дифференциальных уравнений. Аналитически и численно найдены решения, составляющие семейство равновесий и предельных циклов. Показано, что эта мультистабильность связана с косимметрией, возникающей из дополнительных соотношений по параметрам задачи. Приведены явные формулы для мультикосимметрии, в которой система имеет двухпараметрическое семейство равновесий. Проанализирована динамика возмущений параметров системы, приводящих к разрушению семейств.

Для прогнозирования сценариев поведения биологических сообществ применяются математические модели на основе разностных и дифференциальных уравнений [1]. В нелинейных эволюционных системах возможно сосуществование устойчивых решений — мультистабильность. Исследованию моделей динамики хищников и жертв с сильной мультистабильностью — существованием континуальных семейств режимов посвящены работы [2–4]. Сценарии возникновения однопараметрических семейств связаны с наличием свойства косимметрии [5] в рассматриваемых системах. В данной работе для системы хищников и жертв анализируется возможность возникновения двупараметрических семейств решений в случае мультикосимметрии [6].

1. Постановка задачи. Рассматривается математическая модель сосуществования двух хищников и двух жертв в случае однородного ареала [2]. Система уравнений имеет вид

$$\dot{u}_j = u_j \left[ \mu_j f \left( u_1 + u_2 \right) - l_{j3} v_1 - l_{j4} v_2 \right] \equiv f_j, \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

$$\dot{v}_j = v_j(-l_j + \mu_{j1}u_1 + \mu_{j2}u_2) \equiv f_{j+2}, \quad j = 1, 2.$$
 (2)

Здесь функции  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  характеризуют объём популяций жертв, а  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  популяций хищников. Точка означает дифференцирование по времени t, рост популяций жертв регулируется функцией f(w) = w(1-w). Модель содержит 12 неотрицательных параметров:  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — коэффициенты линейного внутреннего роста жертв,  $l_1$ ,  $l_2$  — коэффициенты естественной убыли хищников, регулирующие прирост хищников и убыль жертв  $\mu_{ij}$ ,  $l_{ik}$ , (i, j = 1, 2, k = 3, 4). Заменой времени  $\mu_1 t \to t$ и переменных  $v_j$  (хищника) можно привести систему к задаче с 9 параметрами, т. е. можно считать, что  $\mu_1 = l_{13} = l_{14} = 1$ .

Система (1)–(2) с правой частью  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$  для любых значений параметров имеет нулевое равновесие  $u_j = v_j = 0, j = 1, 2$ . Анализ устойчивости показывает, что оно неустойчиво. Также имеются решения, отвечающие выживанию одного хищника и одной жертвы, например

$$u_1 = \frac{l_1}{\mu_{11}}, \quad u_2 = 0, \quad v_1 = \frac{\mu_1}{l_{13}} f\left(\frac{l_1}{\mu_{11}}\right), \quad v_2 = 0, \quad l_1 < \mu_{11}.$$
 (3)

Данное равновесие устойчиво при следующих условиях на параметры

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} < \frac{l_{23}}{l_{13}}, \quad \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} < \frac{l_2}{l_1}, \quad l_1 \in \left[\frac{\mu_{11}}{2}, \mu_{11}\right].$$

Для любых значений параметров имеется однопараметрическое семейство равновесий, отвечающих отсутствию хищников  $u_1 + u_2 = 1$ ,  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$ .

В системе (1)–(2) могут быть решения с ненулевыми  $u_j$ ,  $v_j$ , j = 1, 2, в том числе в виде семейств стационарных состояний и предельных циклов. Равновесия при некоторых соотношениях на параметры могут принадлежать семействам стационарных состояний. Это означает появление сильной мультистабильности существование континуальных семейств устойчивых решений. При этом у каждого решения имеется своя область начальных данных, из которых реализуется данное решение.

#### 2. Семейства равновесий и косимметрия.

Если выполнены условия на параметры

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{l_{23}}{l_{13}} = \frac{l_{24}}{l_{14}} = \gamma_1 > 0, \tag{4}$$

то система (1)–(2) имеет косимметрию  $L_1 = (\gamma_1 u_2, -u_1, 0, 0)^T$ . Это доказывается непосредственно по определению [5]. Вычисляя скалярное произведение (F, L)и учитывая соотношения (4), получаем ортогональность векторов F и  $L_1$ .

При этом возникает однопараметрическое семейство равновесий

$$u_1 = \frac{d_1}{d_0}, \quad u_2 = \frac{d_2}{d_0} \quad v_1 = \frac{1}{l_{13}} \left( \mu_1 \hat{f} - \beta \right), \quad v_2 = \frac{\beta}{l_{14}}, \quad \beta \in \left[ 0, \mu_1 \hat{f} \right], \tag{5}$$

$$d_0 = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}, \quad d_1 = l_1\mu_{22} - l_2\mu_{12}, \quad d_2 = l_2\mu_{11} - l_1\mu_{21}, \quad \hat{f} = f\left(\frac{d_1}{d_0} + \frac{d_2}{d_0}\right).$$

Это семейство существует при дополнительных ограничениях на параметры, которые следуют из условий  $d_0 \neq 0, d_2 d_0 \ge 0, d_1 d_0 \ge 0$ .

Устойчивость членов семейства определяется по корням характеристического полинома

$$\sigma^{2} (\sigma^{2} - q_{1}\sigma + r_{1}) = 0, \quad q_{1} = \mu_{1}(\gamma_{1}\mu_{1}u_{2} + u_{1})f'(u_{1} + u_{2}),$$
  
$$r_{1} = \gamma_{1}(\mu_{12}l_{13}u_{2}v_{1} + \mu_{22}l_{14}u_{2}v_{2}) + \mu_{11}l_{13}u_{1}v_{1} + \mu_{21}l_{14}u_{1}v_{2}.$$

Равновесие семейства (5) устойчиво при  $f'(u_1 + u_2) < 0$ , т. е.  $\frac{1}{2} < u_1 + u_2 < 1$ или

$$\frac{1}{2} < \frac{l_1\mu_{22} - l_2\mu_{12} + l_2\mu_{11} - l_1\mu_{21}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}} < 1.$$

При соотношениях на параметры

$$\frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} = \frac{\mu_{22}}{\mu_{12}} = \frac{l_2}{l_1} = \gamma_2 > 0 \tag{6}$$

264

система (1)–(2) обладает косимметрией  $L_2 = (0, 0, \gamma_2 v_2, -v_1)^T$ . В этом случае имеется следующее однопараметрическое семейство равновесий

$$u_{1} = \frac{l_{1} - \alpha}{\mu_{11}}, \quad u_{2} = \frac{\alpha}{\mu_{12}}, \quad v_{1} = \frac{g_{1}}{g_{0}}, \quad v_{2} = \frac{g_{2}}{g_{0}}, \quad \alpha \in [0, l_{1}]$$

$$f_{*} = f\left(\frac{l_{1} - \alpha}{\mu_{11}} + \frac{\alpha}{\mu_{12}}\right), \quad g_{0} = l_{13}l_{24} - l_{14}l_{23},$$

$$g_{1} = (l_{13}\mu_{2} - l_{23}\mu_{1}) f_{*}, \quad g_{2} = (l_{24}\mu_{1} - l_{14}\mu_{2}) f_{*}.$$
(7)

Для существования семейства параметры должны удовлетворять условиям  $g_0 \neq 0, g_2 g_0 \ge 0, g_1 g_0 \ge 0.$ 

Устойчивость членов семейства определяется корнями характеристического полинома

$$\sigma \left( \sigma^{3} - q_{2}\sigma^{2} + r_{2}\sigma + s_{2} \right), \quad q_{2} = f'(u_{1} + u_{2})(\mu_{1}u_{1} + \mu_{2}u_{2}),$$

$$r_{2} = \gamma_{2}v_{2}(l_{14}\mu_{11}u_{1} + l_{24}\mu_{12}u_{2}) + v_{1}(l_{13}\mu_{11}u_{1} + l_{23}\mu_{12}u_{2}),$$

$$s_{2} = (\mu_{12} - \mu_{11})f'(u_{1} + u_{2})u_{1}u_{2}(\gamma_{2}l_{14}\mu_{2}v_{2} - \gamma_{2}l_{24}\mu_{1}v_{2} + l_{13}\mu_{2}v_{1} - l_{23}\mu_{1}v_{1}).$$
(8)

При совместном выполненным условий (4) и (6) получается случай мультикосимметрии [6]. Векторное поле F ортогонально линейной комбинации

$$L \equiv (1 - \kappa)L_1 + \kappa L_2, \quad \kappa \in [0, 1].$$
(9)

В силу косимметрии (9) имеется двупараметрическое семейство равновесий

$$\mu_{11}u_1 + \mu_{12}u_2 = l_1, \quad l_{13}v_1 + l_{14}v_2 = -\mu_1 f(u_1 + u_2), \tag{10}$$

которое можно параметризовать следующим образом:

$$u_1 = \frac{l_1 - \alpha}{\mu_{11}}, u_2 = \frac{\alpha}{\mu_{12}}, v_1 = \frac{1}{l_{13}} \left( \mu_1 f_* - \beta \right), v_2 = \frac{\beta}{l_{14}}, (\alpha, \beta) \in [0, l_1] \times [0, \mu_1 f_*].$$
(11)

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\sigma^{2} (\sigma^{2} - q_{3}\sigma + r_{3}) = 0, \quad q_{3} = \gamma_{1} (\mu_{1}u_{2} + u_{1}) f'(u_{1} + u_{2}), r_{3} = \gamma_{1}u_{2}(\gamma_{2}l_{14}v_{2} + \mu_{12}l_{13}v_{1}) + u_{1}(\gamma_{2}l_{14}v_{2} + \mu_{11}l_{13}v_{1}).$$
(12)

Равновесие семейства (11) устойчиво при

$$0 < (\mu_{12} - \mu_{11})\alpha + \mu_{12}(\mu_{11} - l_1) < \frac{1}{2}\mu_{11}\mu_{12}.$$
(13)

Если  $\gamma_1 = 1$ , то различие между видами жертв стирается. В этом случае система (1)–(2) сводится к задаче относительно трех уравнений (см. [2]). Аналогично при  $\gamma_2 = 1$ , получается задача для хищника и двух жертв (см. [3]), а если  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ , то получается система хищник–жертва.

**3. Предельные циклы.** Если *α* удовлетворяет условию (13), то равновесия семейства (7) устойчивы, а при условии

$$(\mu_{12} - \mu_{11})\alpha + \mu_{12}(\mu_{11} - l_1) \ge \frac{1}{2}\mu_{11}\mu_{12}$$

265

получаются предельные циклы (см. рис. 1). Найдем циклы численно, зафиксировав параметры:  $\mu_1 = 1, l_{13} = 0.8, l_{14} = 2.5, \mu_{11} = 1, \mu_{12} = 0.6, l_1 = 0.4, \gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 1.5$ . В табл. 1 представлены результаты вычисления мультипликаторов для цикла, характеризуемого точкой Q = (0.23656, 0.10191, 0.013405, 0.030177), и циклов, получающихся при возмушении ( $\delta = 0.03$ ) одной из координат точки Q. На рис. 2 приведены орбиты рассчитанных циклов. Цикл, к которому принадлежит точка Q, был получен в результате установления из окрестности неустойчивого равновесия (11) при  $\alpha = 0.072, \beta = 0.2$ .

		Начальная точка циклов	$\rho_1$	$ ho_2$	$ ho_3$	$\rho_4$
	1	$ ilde{Q}$	0.4388	0.9999	1.0001	1.0
	2	$Q + (\delta, 0, 0, 0)$	0.364	0.9998	1.0002	1.0
	3	$Q+(0,\delta,0,0)$	0.5323	$1.0 + 3.6 \cdot 10^{-6}i$	$1.0 + 3.6 \cdot 10^{-6}i$	1.0
ļ	4	$Q+(0,0,\delta,0)$	0.3721	$1.0 + 9.3 \cdot 10^{-5}i$	$1.0 + 9.3 \cdot 10^{-5}i$	1.0
	5	$Q + (0, 0, 0, \delta)$	0.4079	0.9999	1.0001	1.0

Таблица 1 – Мультипликаторы цикла точкой Q и ряда соседних циклов



Рисунок 1 – Области устойчивости (1) и неустойчивости (2) равновесий из (11)



Рисунок 2 – Траектории циклов, мультипликаторы которых даны в табл. 1

В табл. 1, представлены мультипликаторы для этих циклов. Расчет мультипликаторов производился при помощи метода стрельбы. Наряду с исходной системой решалась задача для возмущений и в результате находилась матрица монодромии. Ее собственные числа дают мультипликаторы цикла. Значение 1 мультипликаторы в последней колонке отвечает направлению вдоль орбиты цикла. Близкие к единице значения означают наличие соседних циклов из семейства. Такие характеристики соответствуют нейтральной устойчивости в двух направлениях для двупараметерического семейства предельных циклов.

Заключение. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику двух видов хищников и двух родственных видов жертв, проведено численно–аналитическое исследование возможных экологических сценариев. Установлено, что в многопараметрической задаче имеются комбинации параметров, при которых реализуется мультистабильность — сосуществование устойчивых стационарных и нестационарных решений. Показано, что такое поведение связано с наличием косимметрии и мультикосимметрии. Представлены аналитические выражения для одно- и двупараметрических семейств равновесий, численно изучено формирование семейства предельных циклов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (№ 18-01-00453).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мюррей Джс.* Математическая биология. Том 1. Введение. Ижевск: Институт компьютерных исследований; Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 776 с.
- [2] Епифанов А. В., Цибулин В. Г. Моделирование колебательных сценариев сосуществования конкурирующих популяций // Биофизика. 2016. Т. 61. № 4. С. 823–832.
- [3] Епифанов А.В., Цибулин В.Г. О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9. № 5. С. 799–813.
- [4] Budyansky A. V., Frischmuth K., Tsybulin V. G. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // Discrete & Continuous Dynamical Systems – B. 2019. Vol. 24. P. 547–561.
- [5] *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 142–148.
- [6] Куракин Л. Г., Юдович В. И. Применение метода Ляпунова Шмидта в задаче ответвления цикла от семейства равновесий системы с мультикосимметрией // Сибирский математический журнал. 2000. Т. 41. № 1. С. 136–149.

**Tsybulin V. G., Ha T. D.** Cosymmetry of a system of predators and preys in a homogeneous range. A model of the interaction of a system of two species of predators and two species of prey on a homogeneous range is studied, which is written as a system of differential equations. Analytically and numerically solutions are found that make up the family of equilibria and limit cycles. It is shown that this multistability is associated with the cosymmetry arising from additional relations on the parameters of the problem. Explicit formulas are given for multicosymmetry in which the system has a two-parameter family of equilibria. The dynamics of the perturbation of the parameters of the system, resulting in the destruction of families, is analyzed.

## ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МУРНАГАНА

## Швед О.Л.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск

Предполагается справедливым эффект подобный эффекту Баушингера для девиатора тензора напряжений. В базовых экспериментах определяется кусочно-линейная образующая с вершинами в соответствующих сингулярных точках кривых пластичности. По величине эффекта в точке активного процесса находится сингулярная точка кривой, в которую перемещается базовая образующая. Поверхность текучести строится проведенными через образующую кривыми пластичности.

**1. Проблема построения.** Непрерывная поверхность текучести в пространстве напряжений определяется для элемента деформируемого твердого тела, и ее непрерывное изменение зависит от истории нагружения элемента. Используем векторное представление симметричного тензора второго ранга.

Учитывались следующие соображения. Эксперимент должен включаться в теорию «чем позже, тем лучше» [1]. Поверхность текучести, как выяснилось недавно, «невозможно найти экспериментальным методом» [2]. «Конкретное описание поверхности в литературе отсутствует» [3]. Информация о поверхности получена обоснованным теоретическим методом, сохраняющим полезное свойство потенциальности в скоростях напряжений [4]. Однако имеется одна неопределенность.

Поверхность текучести в векторном пространстве напряжений образуется своими пятимерными девиаторными сечениями. Поверхность сечения получается соединением частей поверхностей представителей двух взаимно ортогональных семейств вогнутых регулярных поверхностей в сингулярных точках. Поверхности первого и второго представителя семейства соответственно, пересекающие (при одноосном растяжении) и не пересекающие (при одноосном сжатии) проекцию на девиаторное сечение орта исходного неподвижного триэдра, определяется по известной на ней точке (например, точке процесса). Если точка сингулярная, то находится вся поверхность девиаторного сечения [1]. В общем случае требуется вторая такая точка. Для ортотропного материала поверхность текучести с точкой процесса рассматриваются в трехмерном векторном пространстве. Она создастся своими плоскими сечениями — замкнутыми шестизвенными кусочно-гладкими кривыми пластичности. Расчеты кривых проводятся с использованием трех основных трехмерных девиаторных подпространств.

2. Предположение и допущения. Дополнительное модельное предположение. С целью устранения указанной неопределенности при нахождении кривой пластичности полагаем, что для упругопластического материала имеет место вызванный возникновением и развитием анизотропии материала эффект, подобный эффекту Баушингера, для пространства девиаторов напряжений. Основанием является условие равномерного изменение поверхности и результаты численного моделирования чистого сдвига [5]. Ограничимся при расчетах для необходимого упрощения случаем идеально упругопластического материала. Это позволит выполнить численную реализацию теории. Но утрачивается возможность численного описания проблемных течений, таких как экструзия свинца [2].

Параметры упругопластического процесса. Вводятся необходимые для модели материала безразмерные параметры: аналог параметра Лоде — параметр места точки процесса на регулярном участке кривой пластичности и модифицированный параметр упрочнения Р. Шмидта. Вектор нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести выбирается из 5 собственных векторов критериального оператора, образующих локальный девиаторный базис [4]. Удельная мощность в соотношении параметра упрочнения заменяется произведением компонент сомножителей при векторе нормали, с учетом нормировки девиатора напряжений. Параметр места определяется отношением величин: угла между радиус-векторами девиаторной точки процесса и ближней к ней точки-конца участка кривой пластичности, к половине угла между точками-концами участка. Если участок принадлежит представителю первого семейства, то параметр берется со знаком минус. Параметр места в отличие от параметра Лоде позволяет эффективно найти вектор нормали, по которому происходит построение кривой пластичности.

**3.** Схема построения. Базовые эксперименты. Выбраны минимально необходимые, проводимые до момента разрушения образца, базовые эксперименты: одноосные и двухосные растяжение, сжатие и чистый сдвиг [5, 6].

При чистом сдвиге величины обоих эффектов по определению должны совпадать. Наблюдается лишь качественное соответствие результатов физического и численного экспериментов [5]. Это вызвано неучетом свойства вязкости материала в упругопластической модели Мурнагана. Наблюдается также, в отличие от опытных значений, линейное уменьшение с ростом параметра упрочнения величины введенного эффекта, без всякого участка стабилизации. Поэтому в численных базовых экспериментах конечные величины нового эффекта (в момент разрушения) увеличиваем пропорционально случаю чистого сдвига, сохраняя при этом обнаруженную линейную зависимость.

Расчеты в [6] обновлены в связи с конкретным построением поверхности текучести. Вычислены величины параметров места и упрочнения. При простых растяжении, сжатии значения параметра места составили минус, плюс 1; при чистом сдвиге значение 0 (как для параметра Лоде); при двухосных с теми же знаками 0.5, и они немного смещаются в положительном направлении. Большее значение параметра упрочнения получается при простом сжатии, меньшее при чистом сдвиге.

Базовая образующая поверхности текучести. Определяются базовые сингулярные точки на фиксированной образующей для полученных величин параметра упрочнения. Кусочно-линейная поверхностная образующая, соединяющая сингулярные базовые точки и еще две удаленные крайние точки, жестко связывается дальше с перемещением любой ее точки. Крайние точки ограничивают рабочую область использования упругого закона Мурнагана. Крайние звенья образующей при ее перемещении оставляем параллельными отрезками. Начальную базовую образующую считаем прямолинейной.

Все 6 возможных базовых образующих зависимы: две тройки из них связаны поворотом на 120 градусов, а каждые две соседние зеркальным отражением от соответствующей девиаторный проекции базисной диады.

Произвольное нагружение. Используем аппроксимацию данных в базовых экспериментам: по параметру места — квадратичную, по параметру упрочнения кусочно-линейную. Значения эффекта в экспериментах для значений параметра упрочнения, превышающих максимальные продолжаем постоянными величинами. Для всякого нагружения при течении находится величина эффекта в зависимости от параметра места при известных значениях параметра упрочнения и определяется ближайшая сингулярная точка. В эту точку перемещается базовая образующая поверхности текучести, по точкам которой строятся конкретные кривые пластичности. Изменение анизотропных свойств материала в точке процесса влияет на строение всей последующей поверхности текучести и обеспечивается непрерывность поверхности.

4. Возможные дополнения и обобщения. Активный повторный процесс. При разгрузке по известной образующей строится поверхность текучести. Для возможных следующих значений параметра упрочнения величина эффекта задается по параметру места и начальной величине эффекта. Вопрос, как это реализовать является непростым, но вероятно больше техническим, и нуждается в дальнейшем рассмотрении.

Отказ от условия идеальности упругопластического процесса потребует большого количества необходимой информации. В упругом состоянии точка активного процесса перемещается по соотношениям нелинейной упругости. По величине эффекта также находится точка, противоположная девиаторной точке процесса и затем сингулярная точка, в которую также перемещается базовая образующая, и проводятся кривые пластичности, то есть перестраивается поверхность текучести.

Учет вязкости. Из результатов расчета процесса чистого сдвига [5] следует важный вывод: для практического использования рассматриваемой модели материала потребуется, кроме условия неидеальности, ее обобщение на упруговязкопластичность. Можно ввести «мягкий» закон анизотропно-кинематического упрочнения, следуя основному предположению работы [7]. Согласно также [1, 2] тензор напряжений Коши разлагается в сумму упругих и вязких напряжений. Отсюда получаем, что искомый тензор пропорционален тензору упругих напряжений с коэффициентом, равным отношению величин нового эффекта  $W_e$  к эффекту Баушингера W, минус единица. При течении коэффициент дополняется сомножителями, обеспечивающими непрерывный переход кинематического центра — тензора вязких напряжений  $\mathbf{T}_f$  к нулевому значению при разгрузке и в особом случае определяющих уравнений для тензора упругих напряжений  $\mathbf{T}_{e}$  [4]. Соотношение для тензора напряжений Коши будет  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_f, \ \mathbf{T}_f = (W_e W^{-1}(\mathbf{D}) - 1) F(\mathbf{N} \cdot \mathbf{D})$  $\cdot \mathbf{D}, K_1) F(\mathbf{T}_e \cdot \cdot \mathbf{D}, K_2) \mathbf{T}_e$ , где  $\mathbf{D}$  — тензор скорости деформаций,  $\mathbf{N}$  — единичный вектор внешней нормали, функция  $F(x, K) = 2\pi^{-1} \arctan(Kx), K$  — большое положительное число при x > 0 и F = 0 при  $x \le 0$ . Точка отсчета находится внутри цилиндра, образованного поверхностью текучести.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [2] Жилин П.А. Математическая теория неупругих сред // Успехи механики. 2003. Т. 2. С. 3–36.
- [3] Шевченко Ю. Н. Построение поверхности нагружения в теории пластичности // Прикладная механика. 1996. Т. 32. № 11. С. 31–37.
- [4] Швед О. Л. Модель упругопластического материала Мурнагана // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 1. С. 158–172.
- [5] Швед О. Л. Численное моделирование чистого сдвига для идеально упругопластического материала Мурнагана // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2019. Т. 64. № 2. С. 174–181.
- [6] Швед О. Л. Численное моделирование базовых экспериментов для упругопластического материала Мурнагана // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 3. С. 406–408.
- [7] Пежина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.

**Shved O. L.** Construction of a yield surface for an orthographic elastic-plastic material of Murnaghan. An effect similar to the Bauschinger effect for the deviator of the stress tensor is assumed to be fair. In basic experiments, a piecewise linear generator with vertices at the corresponding singular points of the plasticity curves is determined. According to the magnitude of the effect, at the point of the active process, there is a singular point of the curve, into which the basic generator moves. The yield surface is constructed by ductility curves drawn through the generator.